Álgebra

para matemáticos

Tomo I

Fundamentos algebraicos y razonamiento matemático

A. Peña

TEORÍA, EJERCICIOS Y PERSPECTIVA

Matemática²biertA

MATEMATICAABIERTA.CL

Álgebra para matemáticos

Tomo I. Fundamentos algebraicos y razonamiento matemático

A. Peña · Matemática Abierta

Primera edición PDF, 15 de octubre de 2026.

A4 · Lectura digital. Edición completa con ejercicios y soluciones.

Esta edición reúne los 26 capítulos del primer tomo y 2.352 ejercicios con sus soluciones desarrolladas.

Copyright © 2026 A. Peña. Se permite copiar, distribuir y modificar este documento bajo los términos de la GNU Free Documentation License, versión 1.3 o cualquier versión posterior publicada por la Free Software Foundation, sin secciones invariantes ni textos de cubierta delantera o trasera. La licencia completa acompaña el proyecto de esta edición.

`https://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.html`

Índice general

Capítulo 1. El álgebra como lenguaje de relaciones y estructuras 1
1.1. Una operación puede convertirse en objeto de estudio 1
1.2. De muchos casos a una sola pregunta 1
1.3. Objetos, operaciones y relaciones 2
1.4. Una expresión no es una afirmación 3
1.5. Patrones: descubrir no es demostrar 3
1.6. Qué queremos decir aquí por "estructura" 4
1.7. Transformar y preguntar qué permanece 5
1.8. Una idea, varias representaciones 6
1.9. Generalizar exige controlar el dominio de la afirmación 7
1.10. Leer algebraicamente 8
1.11. Síntesis 8
Ejercicios 9
A. Leer antes de transformar 9
B. Casos, patrones y generalidad 9
C. Contraejemplos y límites de la evidencia 10
D. Comparar comportamientos 10
E. Representaciones 10
F. Pensamiento estructural y síntesis 10
G. Reglas distintas para los mismos datos 11
H. Objetos, operaciones y relaciones en nuevos contextos 11
I. Conjeturas y casos frontera 11
J. Elegir una representación y reconocer sus límites 12
Soluciones 12
A. Leer antes de transformar 12
B. Casos, patrones y generalidad 13
C. Contraejemplos y límites de la evidencia 13
D. Comparar comportamientos 14
E. Representaciones 14
F. Pensamiento estructural y síntesis 15
G. Reglas distintas para los mismos datos 16
H. Objetos, operaciones y relaciones en nuevos contextos 16
I. Conjeturas y casos frontera 17
J. Elegir una representación y reconocer sus límites 18

Capítulo 2. Expresiones, variables, igualdad e identidad 20
2.1. Una letra no significa una sola cosa 20
2.2. Las expresiones tienen estructura interna 21
2.3. Sustituir y evaluar 22
2.4. Variables libres y contexto abierto 23
2.5. Parámetros: una familia dentro de una sola fórmula 23
2.6. El signo igual no es una flecha 24
2.7. Igualdad particular, ecuación e identidad 25
2.8. Coincidir donde ambas expresiones existen no significa tener el mismo dominio 26

2.9. Una misma cantidad puede tener formas diferentes 27
2.10. Errores de lectura que conviene detectar 27
2.11. Una rutina de lectura simbólica 28
Ejercicios 28
A. El papel de las letras 29
B. Leer la estructura de una expresión 29
C. Sustitución, evaluación y dominio 29
D. Parámetros y familias 29
E. El signo igual 29
F. Ecuación, identidad y condición 30
G. Dominio e identidades condicionadas 30
H. Formas y significado 30
I. Síntesis 30
J. Evaluar bajo restricciones superpuestas 31
K. Igualdad puntual, identidad restringida y reglas con dominio 31
L. Cambiar los papeles de parámetro y entrada 31
M. Mismos valores, dominios diferentes 32
Soluciones 32
A. El papel de las letras 32
B. Leer la estructura de una expresión 33
C. Sustitución, evaluación y dominio 33
D. Parámetros y familias 33
E. El signo igual 34
F. Ecuación, identidad y condición 34
G. Dominio e identidades condicionadas 34
H. Formas y significado 35
I. Síntesis 35
J. Evaluar bajo restricciones superpuestas 35
K. Igualdad puntual, identidad restringida y reglas con dominio 36
L. Cambiar los papeles de parámetro y entrada 37
M. Mismos valores, dominios diferentes 38

Capítulo 3. Leyes de las operaciones y transformaciones justificadas 40
3.1. Una respuesta correcta puede contener un razonamiento incorrecto 40
3.2. La igualdad permite sustituir iguales por iguales 41
3.3. Las leyes básicas de la suma y el producto 41
3.4. Inversos: deshacer una operación 43
3.5. Resta y división como operaciones derivadas 43
3.6. Consecuencias que ya no deben memorizarse 44
3.7. Distributividad en ambos sentidos 45
3.8. Expresiones equivalentes y dominio 46
3.9. Transformar una ecuación no es lo mismo que transformar una expresión 46
3.10. Transformaciones reversibles y transformaciones que pierden información 47
3.11. Cancelar no significa borrar símbolos 48
3.12. Cadenas justificadas: escribir álgebra como argumento 49
3.13. Diagnóstico: encontrar el primer paso inválido 50
3.14. Cierre — protocolo de transformación justificada 51
Ejercicios 51
A. Identificar la propiedad 51
B. Neutros e inversos 51
C. Consecuencias derivadas 52
D. Conmutatividad, asociatividad y distributividad 52
E. Cancelación 52

F. Dominio y expresiones equivalentes 52
G. Transformaciones de ecuaciones 52
H. Dividir y perder soluciones 53
I. Diagnóstico de razonamientos 53
K. Transformaciones bajo dominios distintos 54
L. Dos rutas y una misma justificación 54
M. Reparar errores que se compensan 55
N. Diseñar y recuperar casos 55
Soluciones 55
A. Identificar la propiedad 55
B. Neutros e inversos 56
C. Consecuencias derivadas 56
D. Conmutatividad, asociatividad y distributividad 57
E. Cancelación 57
F. Dominio y expresiones equivalentes 58
G. Transformaciones de ecuaciones 58
H. Dividir y perder soluciones 59
I. Diagnóstico de razonamientos 59
J. Cadenas largas y síntesis 60
K. Transformaciones bajo dominios distintos 62
L. Dos rutas y una misma justificación 63
M. Reparar errores que se compensan 64
N. Diseñar y recuperar casos 65

Capítulo 4. Proposiciones y conectivos lógicos 66
4.1. ¿Qué es una proposición? 66
4.2. Proposición y valor de verdad no son lo mismo 66
4.3. Negación y alcance 67
4.4. Conjunción: exigir dos condiciones 67
4.5. Disyunción: al menos una condición 68
4.6. El condicional material 68
4.7. Condición suficiente y condición necesaria 70
4.8. Conversa, inversa y contraposición 71
4.9. Bicondicional: poder ir en ambas direcciones 72
4.10. Sintaxis, paréntesis y conectivo principal 73
4.11. Tablas de verdad como semántica explícita 73
4.12. Tautología, contradicción y contingencia 74
4.13. Traducir entre lenguaje matemático y símbolos 74
4.14. Cierre — leer una afirmación lógicamente 75
Ejercicios 76
A. Proposición, contexto y valor de verdad 76
B. Atomicidad, negación, conjunción y disyunción 76
C. El condicional y su lenguaje 76
D. Conversa, inversa, contraposición y bicondicional 77
E. Sintaxis y estructura 77
F. Tablas de verdad 77
G. Tautología, contradicción y contingencia 77
H. Traducción, diagnóstico y síntesis 77
I. Traducir condiciones sin invertirlas 78
J. Refutar una inferencia mediante una valuación 78
K. Paréntesis y alcance de los conectivos 78
L. Verdad de un caso y validez de un argumento 78
Soluciones 79

A. Proposición, contexto y valor de verdad 79
B. Atomicidad, negación, conjunción y disyunción 79
C. El condicional y su lenguaje 80
D. Conversa, inversa, contraposición y bicondicional 80
E. Sintaxis y estructura 81
F. Tablas de verdad 82
G. Tautología, contradicción y contingencia 83
H. Traducción, diagnóstico y síntesis 84
I. Traducir condiciones sin invertirlas 84
J. Refutar una inferencia mediante una valuación 85
K. Paréntesis y alcance de los conectivos 85
L. Verdad de un caso y validez de un argumento 86

Capítulo 5. Álgebra de proposiciones y formas normales 88
5.1. De la coincidencia semántica a la equivalencia lógica 88
5.2. Una equivalencia es una regla de reemplazo 89
5.3. Leyes estructurales: identidad, dominación, idempotencia y complemento 89
5.4. Conmutatividad y asociatividad: preparar el terreno 90
5.5. Leyes de De Morgan y control de negaciones 90
5.6. Distributividad y factorización lógica 91
5.7. Absorción y simplificación estratégica 91
5.8. Eliminar implicaciones y bicondicionales 92
5.9. Cadenas largas de equivalencias 93
5.10. Literales, términos y cláusulas 93
5.11. Forma normal disyuntiva 94
5.12. Forma normal conjuntiva 94
5.13. Formas normales canónicas desde tablas de verdad 95
5.14. Normalizar no es minimizar 96
5.15. Estrategias de transformación 97
5.16. Cierre — protocolo de transformación proposicional 99
Ejercicios 99
A. Reconocer equivalencia y no equivalencia 99
B. Leyes básicas 99
C. Reordenar y reagrupar estratégicamente 99
D. De Morgan y negaciones anidadas 100
E. Distributividad y absorción 100
F. Eliminar implicaciones y bicondicionales 100
G. Cadenas largas justificadas 100
H. Diagnóstico de derivaciones 101
I. Forma normal disyuntiva 101
J. Forma normal conjuntiva 101
K. Formas canónicas desde tablas 101
L. Síntesis y transferencia 102
M. Problemas avanzados tipo prueba 102
N. Elegir la representación según el objetivo 103
O. Variables declaradas y formas canónicas 104
P. Alcance de una sustitución 104
Q. Diseñar desde la tabla prescrita 104
Soluciones 104
A. Reconocer equivalencia y no equivalencia 104
B. Leyes básicas 105
C. Reordenar y reagrupar estratégicamente 106
D. De Morgan y negaciones anidadas 106

E. Distributividad y absorción 107
F. Eliminar implicaciones y bicondicionales 107
G. Cadenas largas justificadas 108
H. Diagnóstico de derivaciones 111
I. Forma normal disyuntiva 112
J. Forma normal conjuntiva 113
K. Formas canónicas desde tablas 114
L. Síntesis y transferencia 115
M. Problemas avanzados tipo prueba 116
N. Elegir la representación según el objetivo 123
O. Variables declaradas y formas canónicas 124
P. Alcance de una sustitución 125
Q. Diseñar desde la tabla prescrita 125

Capítulo 6. Cuantificadores, predicados y lenguaje matemático 127
6.1. De una expresión abierta a una afirmación 127
6.2. Predicados y dominio de discurso 128
6.3. Variables libres y variables ligadas 128
6.4. El cuantificador universal 129
6.5. Refutar un universal: el poder de un contraejemplo 129
6.6. El cuantificador existencial 129
6.7. Negar cuantificadores 130
6.8. Cuantificación restringida 131
6.9. Alcance, paréntesis y variables 131
6.10. Dos cuantificadores: el orden importa 132
6.11. Dependencia entre variables y elección de testigos 133
6.12. “Existe un único”: el cuantificador de unicidad 133
6.13. Traducir lenguaje matemático a símbolos 134
6.14. Traducir símbolos a lenguaje matemático 135
6.15. Diagnóstico de errores de cuantificación 135
6.16. Cierre — protocolo de lectura cuantificada 136
Ejercicios del capítulo 136
Soluciones razonadas 142
Autoevaluación de salida 150

Capítulo 7. Conjuntos y álgebra de conjuntos 151
7.1. ¿Qué es un conjunto en este libro? 151
7.2. Describir un conjunto: extensión y comprensión 152
7.3. Igualdad extensional 152
7.4. El conjunto vacío y los conjuntos unitarios 153
7.5. Subconjuntos e inclusión 153
7.6. Igualdad por doble inclusión 154
7.7. El conjunto potencia 154
7.8. Unión e intersección 155
7.9. Diferencia y complemento 155
7.10. Diferencia simétrica 156
7.11. Leyes del álgebra de conjuntos 156
7.12. De la lógica a los conjuntos 157
7.13. Probar identidades de conjuntos 157
7.14. Producto cartesiano y pares ordenados 158
7.15. Errores estructurales frecuentes 159
7.16. Protocolo de lectura conjuntista 159
Ejercicios 160

A. Pertenencia y descripción 160
B. Vacío, unitarios y notación 160
C. Subconjuntos e igualdad 160
D. Conjunto potencia 160
E. Unión e intersección 161
F. Diferencia y complemento 161
G. Diferencia simétrica 161
H. Leyes y transformaciones 161
I. Demostraciones por elementos y doble inclusión 161
J. Producto cartesiano 162
K. Diagnóstico y transferencia 162
L. Problemas tipo prueba 162
M. Comprobación, traducción y construcción de conjuntos 163
Soluciones 164
A. Pertenencia y descripción 164
B. Vacío, unitarios y notación 165
C. Subconjuntos e igualdad 165
D. Conjunto potencia 166
E. Unión e intersección 166
F. Diferencia y complemento 167
G. Diferencia simétrica 167
H. Leyes y transformaciones 167
I. Demostraciones por elementos y doble inclusión 168
J. Producto cartesiano 168
K. Diagnóstico y transferencia 169
L. Problemas tipo prueba 169
M. Comprobación, traducción y construcción de conjuntos 172

Capítulo 8. Relaciones y relaciones de equivalencia 175
8.1. Del producto cartesiano a una relación 175
8.2. Relaciones sobre un conjunto 176
8.3. Dominio e imagen de una relación 176
8.4. Representar relaciones finitas 176
8.5. La relación inversa 177
8.6. Reflexividad e irreflexividad 177
8.7. Simetría, antisimetría y asimetría 178
8.8. Transitividad 179
8.9. Diagnosticar una relación 179
8.10. Relaciones de equivalencia 179
8.11. Clases de equivalencia 180
8.12. Cuándo dos clases son iguales 180
8.13. De una equivalencia a una partición 181
8.14. De una partición a una equivalencia 181
8.15. El conjunto cociente 182
8.16. Umbral de funciones 183
C8 termina aquí. Las funciones, su composición y sus inversas son el objeto de C9. 183
Ejercicios 183
A. Relación como subconjunto y notación 183
B. Dominio, imagen y representaciones 183
C. Relación inversa 184
D. Reflexividad e irreflexividad 184
E. Simetría, antisimetría y asimetría 184
F. Transitividad 184

G. Clasificación combinada 185
H. Relaciones de equivalencia 185
I. Clases de equivalencia 185
J. Particiones y cocientes 185
K. Transferencia y diagnóstico 186
L. Construcción de relaciones 186
M. Poner a prueba las hipótesis 186
N. Reconstruir y contar clasificaciones 187
O. Síntesis de relaciones y clases 187
Soluciones 188
A. Relación como subconjunto y notación 188
B. Dominio, imagen y representaciones 188
C. Relación inversa 189
D. Reflexividad e irreflexividad 189
E. Simetría, antisimetría y asimetría 189
F. Transitividad 190
G. Clasificación combinada 190
H. Relaciones de equivalencia 191
I. Clases de equivalencia 191
J. Particiones y cocientes 192
K. Transferencia y diagnóstico 192
L. Construcción de relaciones 193
M. Poner a prueba las hipótesis 194
N. Reconstruir y contar clasificaciones 194
O. Síntesis de relaciones y clases 195

Capítulo 9. Funciones, composición e inversas 197
9.1. De una relación a una función 197
9.2. Dominio, codominio e imagen 198
9.3. Notación funcional y evaluación 198
9.4. Igualdad de funciones 199
9.5. Imágenes de subconjuntos 199
9.6. Preimágenes, restricciones y cambio de codominio 200
9.7. Inyectividad 200
9.8. Sobreyectividad 201
9.9. Biyectividad 201
9.10. Composición de funciones 201
9.11. Identidad y asociatividad 202
9.12. Inyectividad y sobreyectividad bajo composición 202
9.13. Función inversa 203
9.14. Invertibilidad e inversas laterales 203
9.15. Dos significados de f^{-1} 204
9.16. Cierre — de función a estructura 205
Ejercicios 205
A. De relaciones a funciones 205
B. Dominio, codominio, imagen y evaluación 205
C. Imágenes y preimágenes de subconjuntos 206
D. Igualdad, restricciones y cambio de codominio 206
E. Inyectividad 206
F. Sobreyectividad 206
G. Biyectividad 207
H. Composición 207
I. Identidad y asociatividad 207

J. Inversas 207
K. Preimagen frente a inversa 207
L. Síntesis y transferencia 208
M. Problemas avanzados tipo prueba 208
N. Construir composiciones con datos prescritos 209
O. Imágenes, preimágenes y cambios de conjuntos 210
P. Hipótesis y cancelación en composiciones 210
Q. Construcción y diagnóstico de inversas 210
Soluciones razonadas 211
A. De relaciones a funciones 211
B. Dominio, codominio, imagen y evaluación 211
C. Imágenes y preimágenes de subconjuntos 212
D. Igualdad, restricciones y cambio de codominio 212
E. Inyectividad 212
F. Sobreyectividad 213
G. Biyectividad 213
H. Composición 213
I. Identidad y asociatividad 214
J. Inversas 214
K. Preimagen frente a inversa 215
L. Síntesis y transferencia 215
M. Problemas avanzados tipo prueba 215
N. Construir composiciones con datos prescritos 217
O. Imágenes, preimágenes y cambios de conjuntos 218
P. Hipótesis y cancelación en composiciones 219
Q. Construcción y diagnóstico de inversas 220

Capítulo 10. Cómo se demuestra 221
10.1. Qué es una demostración 221
10.2. Anatomía de un teorema 221
10.3. Prueba directa de una implicación 222
10.4. Variables arbitrarias y universales 223
10.5. Demostraciones de existencia 223
10.6. Demostraciones de unicidad 223
10.7. Bicondicionales y equivalencias 224
10.8. Prueba por contraposición 224
10.9. Prueba por contradicción 225
10.10. Prueba por casos 225
10.11. Pruebas de conjuntos: doble inclusión 225
10.12. Pruebas con funciones 226
10.13. Cómo se refuta: contraejemplos 226
10.14. Lemas y arquitectura de una prueba larga 226
10.15. Elegir estrategia y reparar pruebas 227
10.16. Escribir y cerrar una demostración 228
Ejercicios 229
A. Anatomía y forma lógica 229
B. Prueba directa y universales 229
C. Existencia y unicidad 230
D. Bicondicionales 230
E. Contraposición 230
F. Contradicción 230
G. Casos 231
H. Pruebas de conjuntos 231

I. Pruebas con funciones 231
J. Contraejemplos y refutación 231
K. Diagnóstico y reparación 231
L. Síntesis 231
M. Problemas avanzados tipo prueba 232
N. Construir pruebas con ayuda decreciente 233
O. Hipótesis tácitas y reparación de enunciados 233
P. Diseñar lemas útiles 234
Q. Síntesis y elección autónoma del método 234
Soluciones razonadas 235
A. Anatomía y forma lógica 235
B. Prueba directa y universales 235
C. Existencia y unicidad 236
D. Bicondicionales 236
E. Contraposición 236
F. Contradicción 237
G. Casos 237
H. Pruebas de conjuntos 237
I. Pruebas con funciones 238
J. Contraejemplos y refutación 238
K. Diagnóstico y reparación 238
L. Síntesis 239
M. Problemas avanzados tipo prueba 239
N. Construir pruebas con ayuda decreciente 241
O. Hipótesis tácitas y reparación de enunciados 242
P. Diseñar lemas útiles 243
Q. Síntesis y elección autónoma del método 244

Capítulo 11. Inducción, buen orden y recursión 246
11.1. El problema de demostrar infinitos casos 246
11.2. Principio de inducción matemática 247
11.3. Caso base e hipótesis inductiva 247
11.4. Anatomía del paso inductivo 248
11.5. Cambiar el índice inicial 248
11.6. Identidades algebraicas por inducción 249
11.7. Desigualdades por inducción 249
11.8. Más de un caso base 249
11.9. Inducción fuerte 250
11.10. Ordinaria y fuerte: comparación 250
11.11. Principio del buen orden 251
11.12. Pruebas por menor contraejemplo 251
11.13. Inducción y buen orden 252
11.14. Definiciones recursivas 252
11.15. Probar propiedades de objetos recursivos 253
11.16. Elegir entre inducción, buen orden y recursión 253
Ejercicios 253
A. Reconocer estructura inductiva 254
B. Caso base y paso inductivo 254
C. Identidades elementales 254
D. Desigualdades 254
E. Índice inicial y reindexación 255
F. Varios casos base y recurrencias 255
G. Inducción fuerte 255

H. Buen orden 255
I. Comparación de principios 256
J. Definiciones recursivas 256
K. Propiedades de objetos recursivos 256
L. Diagnóstico y síntesis 256
M. Problemas avanzados tipo prueba 256
N. Elegir el índice inicial y justificar el rango 257
O. Dependencias y casos sin cubrir 258
P. Fortalecer la afirmación antes de probar 258
Q. Comparar métodos en problemas nuevos 259
Soluciones razonadas 259
A. Reconocer estructura inductiva 259
B. Caso base y paso inductivo 260
C. Identidades elementales 260
D. Desigualdades 261
E. Índice inicial y reindexación 261
F. Varios casos base y recurrencias 261
G. Inducción fuerte 262
H. Buen orden 262
I. Comparación de principios 262
J. Definiciones recursivas 263
K. Propiedades de objetos recursivos 263
L. Diagnóstico y síntesis 263
M. Problemas avanzados tipo prueba 264
N. Elegir el índice inicial y justificar el rango 267
O. Dependencias y casos sin cubrir 267
P. Fortalecer la afirmación antes de probar 269
Q. Comparar métodos en problemas nuevos 270

Capítulo 12. Sumas, productos e identidades finitas 272
12.1. De una lista de términos a una suma indexada 272
12.2. Expandir y comprimir sumas 273
12.3. El índice mudo 274
12.4. Linealidad de las sumas finitas 275
12.5. Separar y recombinar rangos 275
12.6. Cambio de índice por traslación 276
12.7. Sumas aritméticas finitas 277
12.8. Sumas geométricas finitas 278
12.9. Telescopaje aditivo 278
12.10. Descomposición para producir telescopaje 279
12.11. Productos finitos 280
12.12. Productos telescópicos 280
12.13. Sumas dobles finitas 281
12.14. Dominios triangulares y cambio de orden 282
12.15. Identidades finitas y elección del método 283
12.16. Protocolo de lectura de expresiones indexadas 283
Ejercicios 284
A. Leer y expandir notación 284
B. Comprimir y renombrar índices 284
C. Linealidad 285
D. Separar y unir rangos 285
E. Cambios de índice 286
F. Sumas aritméticas y geométricas 287

G. Telescopaje 287
H. Productos finitos 288
I. Sumas dobles 289
J. Dominios triangulares 289
K. Diagnóstico y comparación de métodos 290
M. Problemas avanzados tipo prueba 290
N. Rangos, dominios y cancelación con restricciones 292
Soluciones razonadas 293
A. Leer y expandir notación 293
B. Comprimir y renombrar índices 294
C. Linealidad 295
D. Separar y unir rangos 297
E. Cambios de índice 298
F. Sumas aritméticas y geométricas 301
G. Telescopaje 303
H. Productos finitos 306
I. Sumas dobles 308
J. Dominios triangulares 310
K. Diagnóstico y comparación de métodos 311
M. Problemas avanzados tipo prueba 313
N. Rangos, dominios y cancelación con restricciones 319

Capítulo 13. Coeficientes binomiales y teorema del binomio 322
13.1. De las expansiones pequeñas a un patrón triangular 322
13.2. El triángulo de Pascal 323
13.3. Coeficientes binomiales: notación, rango y bordes 324
13.4. Factorial y fórmula cerrada 326
13.5. Interpretación combinatoria: elegir k objetos de n 327
13.6. Simetría por complemento 328
13.7. Identidad de Pascal: dos pruebas 328
13.8. El teorema del binomio 330
13.9. Prueba inductiva del teorema del binomio 331
13.10. Prueba por elección de factores 333
13.11. Consecuencias por sustitución 334
13.12. Identidades ponderadas sin cálculo 335
13.13. Identidad del palo de hockey 337
13.14. Identidad de Vandermonde 338
13.15. Del binomio al multinomio 340
13.16. Cierre — protocolo para identidades binomiales 341
Ejercicios 342
A. Leer el triángulo y la notación 342
B. Factoriales y fórmula cerrada 343
C. Interpretación combinatoria y simetría 343
D. Pascal y recurrencia 344
E. Teorema del binomio y lectura de términos 345
F. Pruebas del teorema 345
G. Consecuencias e identidades ponderadas 346
H. Hockey-stick y Vandermonde 347
I. Multinomio elemental 347
J. Diagnóstico y comparación de métodos 348
M. Problemas avanzados tipo prueba 348
Compara qué información estructural aporta cada prueba. 350
N. Construcción, traducción y revisión de pruebas 350

Soluciones razonadas 352
A. Leer el triángulo y la notación 352
B. Factoriales y fórmula cerrada 353
C. Interpretación combinatoria y simetría 355
D. Pascal y recurrencia 358
E. Teorema del binomio y lectura de términos 361
F. Pruebas del teorema 364
G. Consecuencias e identidades ponderadas 368
H. Hockey-stick y Vandermonde 372
I. Multinomio elemental 376
J. Diagnóstico y comparación de métodos 377
M. Problemas avanzados tipo prueba 380
N. Construcción, traducción y revisión de pruebas 390

Capítulo 14. Los enteros y la divisibilidad 395
14.1. Una ecuación que puede no tener solución entera 395
14.2. Definición de divisibilidad y testigos 396
14.3. Múltiplos y divisores 398
14.4. Signos, cero y divisores universales 399
14.5. El cálculo elemental de la divisibilidad 400
14.6. Combinaciones lineales 402
14.7. Cancelación, tamaño y divisibilidad mutua 403
14.8. Divisibilidad como relación 404
14.9. El conjunto $a\mathbb{Z}$ y la inclusión invertida 406
14.10. Cómo demostrar una afirmación de divisibilidad 408
14.11. La ecuación $ax = b$ 409
14.12. Ecuaciones diofánticas lineales de dos variables 410
14.13. Certificados de existencia y familias concretas 411
14.14. Identidades algebraicas como máquinas de divisibilidad 413
14.15. Parámetros, conversos falsos y diagnóstico 414
14.16. Cierre — protocolo para problemas de divisibilidad 416
Ejercicios 416
A. Definición, testigos, múltiplos y divisores 417
B. Propiedades básicas de la divisibilidad 417
C. Signos, cancelación, tamaño y divisibilidad mutua 418
D. Combinaciones lineales 419
E. Relación de divisibilidad y conjuntos $a\mathbb{Z}$ 420
F. Ecuaciones $ax = b$ 420
G. Ecuaciones diofánticas lineales 421
H. Identidades de divisibilidad y factorización 422
I. Diagnóstico y elección de método 423
M. Problemas avanzados tipo prueba 423
N. Testigos, dominios y certificados 425
Soluciones razonadas 426
A. Definición, testigos, múltiplos y divisores 426
B. Propiedades básicas de la divisibilidad 428
C. Signos, cancelación, tamaño y divisibilidad mutua 431
D. Combinaciones lineales 433
E. Relación de divisibilidad y conjuntos $a\mathbb{Z}$ 437
F. Ecuaciones $ax = b$ 439
G. Ecuaciones diofánticas lineales 442
H. Identidades de divisibilidad y factorización 445
I. Diagnóstico y elección de método 448

M. Problemas avanzados tipo prueba 451
N. Testigos, dominios y certificados 458

Capítulo 15. Máximo común divisor y algoritmo de Euclides 462
15.1. Del divisor común decisivo al máximo común divisor 462
15.2. Definición del MCD, signos y casos cero 463
15.3. Divisores comunes y combinaciones lineales 464
15.4. El algoritmo de división 465
15.5. Un paso euclidiano conserva los divisores comunes 467
15.6. El algoritmo de Euclides 468
15.7. Por qué Euclides termina y por qué es correcto 469
15.8. Sustitución hacia atrás y Euclides extendido 470
15.9. Identidad de Bézout 471
15.10. Todas las combinaciones lineales forman $d\mathbb{Z}$ 473
15.11. Coprimalidad y criterio de Bézout 473
15.12. Cancelación bajo coprimalidad 474
15.13. Criterio completo para $ax + by = c$ 475
15.14. Todas las soluciones de una ecuación diofántica lineal 477
15.15. Problemas paramétricos y elección del algoritmo 479
15.16. Cierre — protocolo euclidiano y puente hacia los primos 481
Ejercicios 482
A. Definición, signos y propiedades del MCD 482
B. Algoritmo de división 483
C. Paso euclidiano e invariancia del MCD 484
D. Algoritmo de Euclides 484
E. Euclides extendido y Bézout 485
F. Coprimalidad y cancelación 486
G. Criterio diofántico de existencia 487
H. Clasificación de todas las soluciones 487
I. Diagnóstico y elección de método 488
M. Problemas avanzados tipo prueba 489
N. Certificados, restricciones y auditoría algorítmica 490
Soluciones razonadas 491
A. Definición, signos y propiedades del MCD 491
C. Paso euclidiano e invariancia del MCD 498
D. Algoritmo de Euclides 501
E. Euclides extendido y Bézout 505
F. Coprimalidad y cancelación 509
G. Criterio diofántico de existencia 513
H. Clasificación de todas las soluciones 517
I. Diagnóstico y elección de método 522
M. Problemas avanzados tipo prueba 526
N. Certificados, restricciones y auditoría algorítmica 536

Capítulo 16. Números primos y factorización 540
16.1. De los divisores comunes a los bloques multiplicativos 540
16.2. Primos, compuestos, unidades y casos frontera 541
16.3. Irreducibles en $\mathbb{Z}$ y relación con los primos 542
16.4. Todo entero mayor que 1 tiene un divisor primo 543
16.5. El lema de Euclides para primos 544
16.6. Primos que dividen productos finitos 546
16.7. Existencia de la factorización prima 546
16.8. Unicidad de la factorización 547

16.9. Teorema fundamental de la aritmética y forma canónica 549
16.10. Divisibilidad como comparación de exponentes 550
16.11. MCD, MCM y coprimalidad desde la factorización 551
16.12. Cómo reconocer un primo: la barrera $\sqrt{n}$ 552
16.13. Existen infinitos números primos 553
16.14. Potencias perfectas y consecuencias de la unicidad 554
16.15. Diagnóstico: qué depende de ser primo y qué depende de factorización única 556
16.16. Cierre — protocolo de factorización y puente hacia congruencias 557
Ejercicios 558
A. Primos, compuestos, unidades e irreducibles 558
B. Divisores primos y descenso 559
C. Lema de Euclides 559
D. Productos finitos y potencias 560
E. Existencia y unicidad de factorización 561
F. Forma canónica y divisibilidad por exponentes 561
G. MCD, MCM y factorización 562
H. Primalidad e infinitud de los primos 563
I. Potencias perfectas y diagnóstico 564
M. Problemas avanzados tipo prueba 564
N. Hipótesis, exponentes y certificados 566
Soluciones razonadas 567
A. Primos, compuestos, unidades e irreducibles 567
B. Divisores primos y descenso 570
C. Lema de Euclides 572
D. Productos finitos y potencias 576
E. Existencia y unicidad de factorización 579
F. Forma canónica y divisibilidad por exponentes 582
G. MCD, MCM y factorización 586
H. Primalidad e infinitud de los primos 591
I. Potencias perfectas y diagnóstico 594
M. Problemas avanzados tipo prueba 599
N. Hipótesis, exponentes y certificados 610

Capítulo 17. Congruencias y aritmética modular 614
17.1. Cuando los enteros se observan a través de un módulo 614
17.2. Definición de congruencia y equivalencias básicas 615
Congruencia y resto canónico 616
17.3. Congruencia como relación de equivalencia 617
17.4. Clases residuales y representantes canónicos 618
Representantes canónicos 619
17.5. El cociente elemental $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 619
Sistemas completos de residuos 620
17.6. Compatibilidad con suma, resta, producto y potencias 620
Potencias 621
Reducir antes de calcular 621
17.7. Operaciones sobre clases y el problema de la buena definición 622
Un pequeño laboratorio: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 623
17.8. Cancelación: por qué puede fallar y cuándo se recupera 623
17.9. Inversos modulares y coprimalidad 625
Unicidad del inverso como clase 626
17.10. Cómo calcular un inverso: Bézout vuelve a aparecer 626
Protocolo de cálculo 627
17.11. Congruencias lineales como ecuaciones diofánticas disfrazadas 627

Necesidad 628
Suficiencia 628
17.12. Clasificación y número de soluciones de $ax \equiv b \pmod{n}$ 628
Por qué son soluciones 629
Por qué son distintas módulo n 629
Por qué no hay otras 630
Ejemplo 630
17.13. Sistemas de congruencias y el problema de compatibilidad 631
17.14. Teorema Chino del Resto para dos módulos coprimos 631
Existencia constructiva 632
Unicidad módulo mn 632
Ejemplo 633
17.15. CRT finito, reconstrucción y diagnóstico de errores 634
Construcción directa 634
Ejemplo de reconstrucción 635
Diagnóstico de errores frecuentes 635
17.16. Cierre del Bloque D — del resto al cociente 636
Con ello queda cerrado el Bloque D y estamos preparados para continuar el desarrollo algebraico con ecuaciones, orden, polinomios y nuevas estructuras. 637
Ejercicios 637
A. Definición, restos y congruencias básicas 637
B. Relación de equivalencia y clases residuales 638
C. Operaciones compatibles y potencias 638
D. Buena definición, aritmética de clases y cancelación 639
E. Inversos modulares y Bézout 640
F. Congruencias lineales: existencia 641
G. Clasificación y conteo de soluciones 642
H. Sistemas y Teorema Chino del Resto 643
I. Síntesis estructural y diagnóstico 643
M. Problemas avanzados tipo prueba 645
N. Reglas sobre clases, reconstrucción y compatibilidad 646
Soluciones razonadas 647
A. Definición, restos y congruencias básicas 647
B. Relación de equivalencia y clases residuales 650
C. Operaciones compatibles y potencias 652
D. Buena definición, aritmética de clases y cancelación 655
E. Inversos modulares y Bézout 659
F. Congruencias lineales: existencia 662
G. Clasificación y conteo de soluciones 665
H. Sistemas y Teorema Chino del Resto 669
I. Síntesis estructural y diagnóstico 673
M. Problemas avanzados tipo prueba 677
N. Reglas sobre clases, reconstrucción y compatibilidad 686

Capítulo 18. Potencias, exponentes racionales y radicales 691
18.1. Las leyes no vienen antes que el dominio 691
18.2. Potencias enteras no negativas y estructura del exponente 693
18.3. Exponente cero y exponentes negativos: extender conservando leyes 694
18.4. Leyes de exponentes enteros con hipótesis explícitas 696
18.5. Raíz n-ésima y paridad del índice 697
18.6. Por qué $\sqrt{a^2} = |a|$ 699
18.7. Exponentes racionales sobre bases positivas 700
18.8. Bases cero y negativas: el borde donde las reglas dejan de ser automáticas 702

18.9. Simplificar radicales: extraer estructura, no “sacar números” 704
18.10. Producto y cociente de radicales 705
18.11. Sumar radicales exige reconocer términos semejantes 707
18.12. Racionalización: cambiar de forma con un objetivo 708
18.13. Elegir entre notación radical y exponente racional 709
18.14. Dominios de expresiones con varias restricciones 710
18.15. Laboratorio P3 — el primer paso inválido 713
18.16. Cierre — protocolo de potencias y radicales 714
Ejercicios 716
A. Reconocimiento y lectura estructural (1–10) 716
B. Fluidez técnica (11–26) 718
C. Justificación y reconstrucción (27–38) 719
D. Diagnóstico del primer paso inválido (39–50) 721
E. Estrategia y elección de representación (51–60) 722
F. Transferencia acumulativa (61–72) 723
G. Síntesis avanzada (73–80) 725
H. Convenciones, leyes y construcción de dominios (81–96) 727
Cierre del banco 728
Soluciones razonadas 728
A. Reconocimiento y lectura estructural 728
B. Fluidez técnica 733
C. Justificación y reconstrucción 736
D. Diagnóstico del primer paso inválido 740
E. Estrategia y elección de representación 743
F. Transferencia acumulativa 746
G. Síntesis avanzada 749
H. Convenciones, leyes y construcción de dominios 755

Capítulo 19. Identidades, productos notables y factorización 759
19.1. Expandir y factorizar son dos lecturas de la distributividad 759
19.2. Expansión controlada: distribuir sin destruir información 760
19.3. Factor común: la primera pregunta 761
19.4. El cuadrado de una suma y de una diferencia 762
19.5. Diferencia de cuadrados: una identidad con dos direcciones 763
19.6. Cubos: expansión y factorización 764
19.7. Diferencias de potencias y sumas de potencias impares 764
19.8. Factorización por agrupación 765
19.9. Trinomios mónicos: reconstruir suma y producto 766
19.10. Trinomios generales: fabricar una agrupación 767
19.11. Cuadrados perfectos y patrones casi correctos 768
19.12. Sustitución auxiliar: nombrar una estructura repetida 769
19.13. Factorizaciones encadenadas 770
19.14. Elegir entre forma expandida y forma factorizada 771
19.15. Laboratorio P3: localizar el primer patrón falso 773
19.16. Cierre: un protocolo de reconocimiento y factorización 774
Ejercicios 775
A. Reconocimiento y lectura estructural 775
B. Fluidez técnica 776
C. Justificación y reconstrucción 777
D. Diagnóstico del primer paso inválido 777
E. Estrategia y elección de representación 778
F. Transferencia acumulativa 779
G. Síntesis avanzada 779

H. Profundización y reconstrucción 780
Soluciones razonadas 781
A. Reconocimiento y lectura estructural 781
B. Fluidez técnica 783
C. Justificación y reconstrucción 785
D. Diagnóstico del primer paso inválido 787
E. Estrategia y elección de representación 789
F. Transferencia acumulativa 791
G. Síntesis avanzada 794
H. Soluciones de profundización y reconstrucción 798

Capítulo 20. Fracciones algebraicas y expresiones racionales 801
20.1. Una fórmula más simple, un dominio distinto 801
20.2. Expresiones fraccionarias y expresiones racionales 804
20.3. Leer el dominio antes de operar 807
20.4. Equivalencia sobre un dominio declarado 811
20.5. Cancelar factores: demostración y condiciones 815
20.6. Factorizar para simplificar y normalizar factores opuestos 820
20.7. Multiplicación de expresiones racionales 825
20.8. División: invertir el divisor completo 830
20.9. Elegir un denominador común 835
20.10. Sumar y restar con estructura visible y signos 840
20.11. Fracciones complejas: método interior 847
20.12. Fracciones complejas: eliminar denominadores internos 853
20.13. Cadenas largas y elección de representación 860
20.14. Parámetros y transferencia desde C18 868
20.15. Laboratorio de errores 875
20.16. Síntesis y puente a C21 880
Ejercicios 886
A. Reconocimiento y lectura estructural 886
B. Fluidez técnica 888
C. Justificación y reconstrucción 891
D. Diagnóstico y primera ruptura 893
E. Estrategia y elección de ruta 896
F. Transferencia C18–C19 y varias capas 899
G. Síntesis avanzada 901
H. Profundización y reconstrucción 904
Soluciones razonadas 904
A. Reconocimiento y lectura estructural 905
B. Fluidez técnica 910
C. Justificación y reconstrucción 919
D. Diagnóstico y primera ruptura 927
E. Estrategia y elección de ruta 937
F. Transferencia C18–C19 y varias capas 945
G. Síntesis avanzada 953
H. Soluciones de profundización y reconstrucción 962

Capítulo 21. Ecuaciones, equivalencias y conjuntos solución 964
21.1. Ecuación, dominio y conjunto solución 964
21.2. Equivalencia de ecuaciones e implicación 968
21.3. Operaciones reversibles en ambos miembros 971
21.4. Transformaciones que crean o pierden candidatos 975
21.5. Ecuaciones lineales, identidades y contradicciones 980

21.6. Producto nulo y ecuaciones factorizadas 986
21.7. Ecuaciones cuadráticas por factorización y completar cuadrados 992
21.8. Fórmula cuadrática y discriminante real 1000
21.9. Sustituciones y ecuaciones cuadráticas en forma 1007
21.10. Ecuaciones racionales: dominio, eliminación y filtrado 1016
21.11. Ecuaciones radicales: implicación, signo y verificación 1024
21.12. Ecuaciones con valor absoluto 1031
21.13. Parámetros y familias de conjuntos solución 1038
21.14. Sistemas algebraicos elementales no lineales 1047
21.15. Laboratorio de errores y primera ruptura 1057
21.16. Síntesis y puente a C22 1067
Ejercicios 1075
A. Lectura: dominio, verdad y equivalencia 1075
B. Fluidez: lineales, producto nulo y cuadráticas 1077
C. Justificación: hipótesis y transformaciones 1078
D. Diagnóstico: localizar la primera ruptura 1080
E. Estrategia: elegir ruta y decidir cuándo verificar 1083
F. Transferencia: parámetros, dominios heredados, sustituciones y sistemas 1085
G. Síntesis avanzada: problemas no rutinarios y trazabilidad completa 1088
H. Profundización y reconstrucción 1090
Soluciones razonadas 1091
A. Lectura: dominio, verdad y equivalencia 1091
B. Fluidez: lineales, producto nulo y cuadráticas 1097
C. Justificación: hipótesis y transformaciones 1104
D. Diagnóstico: localizar la primera ruptura 1112
E. Estrategia: elegir ruta y decidir cuándo verificar 1123
F. Transferencia: parámetros, dominios heredados, sustituciones y sistemas 1131
G. Síntesis avanzada: trazabilidad completa 1141
H. Soluciones de profundización y reconstrucción 1151

Capítulo 22. Orden e inequaciones 1154
22.1. Orden en los reales y conjunto solución 1154
22.2. Intervalos, semirrectas y extremos 1157
22.3. Sumar, restar y comparar 1159
22.4. Multiplicar y dividir: el signo gobierna la dirección 1161
22.5. Inequaciones lineales 1164
22.6. Inequaciones compuestas y sistemas 1166
22.7. Valor absoluto y distancia 1168
22.8. Cuadráticas: de ecuación a análisis de signos 1170
22.9. Productos polinómicos y tablas de signos 1172
22.10. Inequaciones racionales 1173
22.11. Transformaciones y formas estratégicas 1174
22.12. Sustituciones y reconstrucción de preimágenes 1176
22.13. Parámetros y familias de conjuntos solución 1177
22.14. Transferencia: racionales, radicales y varias capas 1178
22.15. Laboratorio de errores y primera ruptura 1180
22.16. Síntesis: dominio → puntos críticos → signos → solución 1181
Ejercicios 1183
Soluciones desarrolladas 1186

Capítulo 23. Funciones exponenciales y logaritmos 1194
23.1. De la potencia a la función exponencial 1194
23.2. Exponente real: alcance y propiedades admitidas 1195

23.3. Monotonía, inyectividad e imagen 1197
23.4. Transformaciones y lectura funcional 1198
23.5. El logaritmo como función inversa 1199
23.6. Dominios, imagen y composiciones inversas 1201
23.7. Monotonía y signo del logaritmo 1202
23.8. Leyes de productos, cocientes y potencias 1203
23.9. Cambio de base 1204
23.10. e, exp y ln 1206
23.11. Ecuaciones exponenciales 1207
23.12. Ecuaciones logarítmicas 1208
23.13. Inequaciones exponenciales y logarítmicas 1209
23.14. Sustituciones, parámetros y varias capas 1211
23.15. Modelos multiplicativos y laboratorio de errores 1213
23.16. Síntesis y puente al álgebra polinómica 1215
Ejercicios 1218
Soluciones desarrolladas 1222

Capítulo 24. Polinomios: operaciones y división 1234
24.1. Polinomios como objetos formales 1234
24.2. Coeficientes, grado y polinomio nulo 1235
24.3. Suma, resta y comparación de coeficientes 1235
24.4. Producto y grado 1235
24.5. Cancelación e inversos polinómicos 1236
24.6. Evaluación y composición 1236
24.7. División con resto: enunciado y condiciones 1237
24.8. División larga y verificación 1237
24.9. Existencia del cociente y del resto 1238
24.10. Unicidad de la división 1238
24.11. División lineal, Horner y teorema del resto 1239
24.12. Divisibilidad polinómica 1239
24.13. Cálculo con restos 1239
24.14. Algoritmo de Euclides y máximo común divisor 1240
24.15. Identidad de Bézout y coprimalidad 1240
24.16. Parámetros, síntesis y enlace con C25 1241
Ejercicios 1241
Soluciones desarrolladas 1246
Referencias y continuidad del trabajo 1255

Capítulo 25. Raíces, factores e irreducibilidad elemental 1256
25.1. Raíces y conjunto de coeficientes 1256
25.2. Teorema del factor 1257
25.3. Raíces distintas y factores simultáneos 1258
25.4. Cota del número de raíces 1259
25.5. Identidades y datos de evaluación 1260
25.6. Multiplicidad mediante divisiones sucesivas 1261
25.7. Multiplicidad de productos y límites del conteo 1262
25.8. Construir polinomios con raíces prescritas 1263
25.9. Teorema de las raíces racionales 1265
25.10. Búsqueda finita y factorización progresiva 1266
25.11. Factores cuadráticos y elección del dominio 1267
25.12. Estrategias de factorización de grados mayores 1268
25.13. Irreducibilidad elemental 1270
25.14. Criterios para grados dos y tres 1271

25.15. Existencia y unicidad de factores irreducibles 1272
25.16. Síntesis: qué se puede certificar 1274
Ejercicios y soluciones 1275

Capítulo 26. Números complejos y el horizonte de las ecuaciones 1296
26.1. Extender el dominio de una ecuación 1296
26.2. Construcción mediante pares y forma cartesiana 1298
26.3. Leyes algebraicas y división legítima 1301
26.4. Cálculo cartesiano y ecuaciones 1304
26.5. Conjugación y partes real e imaginaria 1306
26.6. Módulo y sus leyes 1309
26.7. Distancia, lugares geométricos y desigualdad triangular 1311
26.8. Raíces cuadradas y cuadráticas complejas 1313
26.9. Ángulos, radianes y círculo unitario 1315
26.10. Forma polar y argumentos 1317
26.11. Producto polar y fórmula de De Moivre 1318
26.12. Todas las raíces de un complejo 1320
26.13. Raíces de la unidad y simetrías 1322
26.14. Conjugación y factorización de polinomios reales 1323
26.15. El horizonte del teorema fundamental del álgebra 1324
26.16. Síntesis y cierre conceptual del Tomo I 1326
Ejercicios y soluciones 1327

GNU Free Documentation License 1342

GNU Free Documentation License 1342

Capítulo 1

El álgebra como lenguaje de relaciones y estructuras

1.1. Una operación puede convertirse en objeto de estudio

Hay una diferencia entre **hacer una cuenta** y **estudiar una cuenta**.

Si calculamos $27 + 15$, obtenemos 42. Si calculamos $15 + 27$, obtenemos también 42. Hasta aquí no hay nada sorprendente. Sin embargo, en cuanto comparamos ambos cálculos aparece otra pregunta:

¿Qué cambio hicimos y qué permaneció sin cambiar?

Cambiamos el orden de los números. El resultado permaneció.

Probemos ahora con una resta: $27 - 15 = 12$, pero $15 - 27 = -12$. El mismo cambio —intercambiar los dos números— ya no conserva el resultado.

La diferencia importante no está en que una cuenta sea más difícil que otra. Está en que hemos dejado de preguntar únicamente **cuál es el resultado**. Ahora preguntamos **cómo se comporta una operación cuando modificamos sus entradas**.

Ese desplazamiento es uno de los comienzos del pensamiento algebraico.

En la aritmética elemental, una expresión como $27 + 15$ suele aparecer como una tarea que debe terminar en un número. En álgebra, la expresión puede convertirse también en un objeto que comparamos con otras expresiones. Podemos preguntar qué transformaciones modifican su valor, cuáles no lo modifican y qué regularidades se repiten en muchos casos.

Esto no significa que el cálculo deje de importar. Significa que el cálculo adquiere una segunda función: además de producir respuestas, puede producir **evidencia** sobre una pauta más general.

Un primer cambio de mirada. Consideremos los pares

- $9 + 14$ y $14 + 9$;
- $6 \cdot 11$ y $11 \cdot 6$;
- $18 - 5$ y $5 - 18$;
- $20/4$ y $4/20$.

Podemos calcular todos los resultados. Pero la pregunta algebraicamente interesante es otra: ¿qué operaciones parecen conservar el resultado cuando intercambiamos los términos y cuáles no?

Todavía no necesitamos poner un nombre técnico a esa propiedad. El objetivo es aprender a detectarla.

En capítulos posteriores estudiaremos de manera sistemática las leyes que justifican este tipo de observaciones. Aquí sólo queremos adquirir el hábito de mirar una operación como algo que **tiene comportamiento**.

1.2. De muchos casos a una sola pregunta

Supongamos que observamos

$4 + 7 = 7 + 4$, $12 + 5 = 5 + 12$ y $103 + 8 = 8 + 103$.

Podemos continuar con cientos de ejemplos. En algún momento, sin embargo, seguir calculando deja de ser la mejor forma de expresar lo que estamos observando.

La notación algebraica permite formular de una vez la pregunta:

> Si a y b son números del contexto que estamos estudiando, ¿se cumple siempre $a + b = b + a$?

Aquí las letras no aparecen necesariamente como incógnitas que debamos descubrir. Sirven para mantener abiertos muchos casos posibles.

Éste es uno de los cambios más importantes entre una lectura escolar estrecha del álgebra y una lectura matemática más amplia. Una letra puede representar:

- un valor que queremos determinar;
- un valor arbitrario;
- un parámetro que controla una familia de objetos;
- una entrada que puede variar.

Precisaremos esas funciones en el capítulo siguiente. Por ahora basta entender que el simbolismo permite **comprimir una familia de situaciones**.

Caso, regularidad y conjetura. Observemos ahora los números

2, 6, 12, 20, 30.

Podemos reconocerlos como

$1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$.

Todos son pares. La regularidad sugiere una afirmación:

> El producto de dos enteros consecutivos es siempre par.

La afirmación general puede escribirse usando n y $n + 1$:

> Para todo entero n, el producto $n(n + 1)$ es par.

Todavía no hemos demostrado nada. Hemos realizado otra operación intelectual: **pasar de casos a una conjetura**.

Ese paso es valioso, pero debe mantenerse separado de la demostración. Los ejemplos pueden sugerir una afirmación. No pueden, por sí solos, garantizar que la afirmación continúe siendo verdadera en todos los casos.

1.3. Objetos, operaciones y relaciones

Para leer álgebra con precisión necesitamos distinguir papeles diferentes dentro de una escritura matemática.

Tomemos

$3x + 5 = 17$.

En una sola línea aparecen varias cosas.

Objetos. Trabajamos con objetos matemáticos: números, símbolos, expresiones y, más adelante, polinomios, matrices, funciones y estructuras enteras.

En $3x + 5 = 17$, los números 3, 5 y 17 son objetos. También podemos tratar x como un símbolo que ocupa un papel matemático, y la expresión completa $3x + 5$ como un objeto compuesto.

Operaciones. Una operación combina o transforma objetos.

En $3x + 5$, aparecen primero una multiplicación —$3x$— y luego una suma.

En otros contextos tendremos operaciones muy diferentes: sumar matrices, componer funciones, multiplicar polinomios o combinar simetrías.

Relaciones. Una relación vincula objetos mediante una afirmación.

En $3x + 5 = 17$, el signo $=$ afirma que las dos expresiones situadas a sus lados tienen el mismo valor en las condiciones pertinentes.

En $x < 4$, la relación es de orden.

En $3 \mid 12$, que se lee «3 divide a 12», la relación es de divisibilidad.

La distinción es fundamental: $3x + 5$ es una **expresión**; $3x + 5 = 17$ afirma una **relación** entre esa expresión y 17.

Por qué importa distinguirlos. Cuando alguien manipula símbolos sin identificar primero qué está leyendo, aparecen errores típicos: tratar una expresión como si fuera una ecuación, confundir una operación con una relación o transformar una afirmación sin preguntar si la nueva afirmación conserva el mismo significado.

El hábito que queremos formar es el contrario:

> Antes de transformar una escritura, identificar qué objetos aparecen, qué operaciones se realizan y qué relación se está afirmando.

1.4. Una expresión no es una afirmación

Comparemos tres escrituras:

- $2x - 1$;
- $2x - 1 = 7$;
- $2x - 1 > 7$.

La primera es una expresión. Presenta un objeto algebraico construido mediante operaciones.

La segunda afirma una igualdad.

La tercera afirma una desigualdad.

La diferencia parece pequeña en la página, pero es conceptual. Una expresión como $2x - 1$ no es, por sí sola, verdadera ni falsa. No está diciendo que algo ocurra. En cambio, $2x - 1 = 7$ sí afirma algo, y esa afirmación puede ser verdadera para ciertos valores de x y falsa para otros.

Ésta es una razón por la que aprender matemáticas no consiste sólo en reconocer símbolos. Hay que reconocer **qué función cumple la escritura completa**.

Cálculo, expresión y condición. También conviene distinguir entre:

- una expresión: $x^2 + 3x$;
- un cálculo particular: si $x = 2$, entonces $x^2 + 3x = 10$;
- una condición: $x^2 + 3x = 10$;
- una comparación: $x^2 + 3x > 10$.

Más adelante estudiaremos formalmente proposiciones, variables, predicados y cuantificadores. En este capítulo no necesitamos todavía ese aparato. Sí necesitamos, desde ahora, una disciplina de lectura: **no manipular antes de saber qué tipo de cosa tenemos delante**.

1.5. Patrones: descubrir no es demostrar

Los patrones son una de las fuentes más fecundas de preguntas matemáticas.

Consideremos:

- $1 = 1^2$;
- $1 + 3 = 2^2$;

- $1 + 3 + 5 = 3^2$;
- $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$.

La regularidad sugiere que la suma de los primeros números impares produce cuadrados perfectos.

Podemos proponer:

> La suma de los primeros n números impares es n^2.

La palabra importante es **proponer**.

Hasta este punto hemos observado cuatro casos. Tal vez podamos observar cuarenta o cuatro mil. Cada nuevo caso favorable aumenta la evidencia, pero la afirmación habla de todos los valores posibles de n dentro del contexto. La distancia entre «muchos casos» y «todos los casos» no se elimina acumulando ejemplos.

Este contraste introduce una idea esencial de la matemática universitaria: una pauta puede originar una conjetura, pero una conjetura necesita un argumento general si queremos establecerla como verdadera.

El papel de un contraejemplo. Para refutar una afirmación universal, la situación es diferente.

Supongamos que alguien afirma:

> Para todo entero $n \geq 0$, el número $n^2 + n + 41$ es primo.

Los primeros valores pueden resultar muy convincentes. Pero basta encontrar **un solo** valor para el cual la expresión no sea prima.

Si tomamos $n = 41$,

$$41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 2) = 41 \cdot 43.$$

La afirmación universal queda refutada.

Hay aquí una asimetría que utilizaremos durante toda la formación matemática:

- muchos ejemplos favorables pueden sugerir una afirmación universal;
- un ejemplo desfavorable basta para destruirla;
- para establecerla, necesitamos un argumento que cubra todos los casos pertinentes.

Todavía no estudiaremos cómo construir ese argumento. Pero desde el primer capítulo debemos aprender a distinguir **evidencia**, **conjetura**, **contraejemplo** y **demostración**.

1.6. Qué queremos decir aquí por “estructura”

La palabra *estructura* será central en toda esta obra, pero sería un error tratarla desde el comienzo como si tuviera una definición elemental única y autosuficiente.

En la matemática moderna, y especialmente en álgebra, el enfoque estructural surgió cuando se volvió productivo estudiar no sólo objetos particulares, sino también la organización de sus relaciones y operaciones.

Por eso utilizaremos, por ahora, una **noción de trabajo**:

> Mirar estructuralmente significa dejar de atender sólo a los valores concretos y comenzar a preguntar qué objetos intervienen, qué operaciones y relaciones los organizan, qué propiedades se repiten y qué aspectos permanecen cuando cambian los ejemplos.

Esto no es todavía una definición formal de estructura matemática. Es una guía para aprender a mirar.

Dos contextos diferentes. Pensemos en dos situaciones:

1. números enteros con la suma;
2. movimientos que llevan un cuadrado exactamente sobre sí mismo.

En el primer caso los objetos son números. En el segundo son movimientos geométricos. Parecen mundos distintos.

Sin embargo, en ambos podemos preguntar:

- ¿cómo combinamos dos objetos?
- ¿hay una operación que no cambie nada?
- ¿podemos deshacer una operación?
- ¿importa el orden en que combinamos?
- ¿qué relaciones se conservan?

Más adelante estas preguntas conducirán a la teoría de grupos. Ahora no necesitamos esa definición. Lo importante es ver cómo dos familias de objetos radicalmente diferentes pueden empezar a compararse por su **organización** y no por su apariencia.

Los ejemplos concretos cumplen aquí una función de puente: permiten reconocer primero un comportamiento familiar y, sólo después, aislar los rasgos que pueden compararse entre contextos muy distintos.

1.7. Transformar y preguntar qué permanece

Una de las preguntas más poderosas de toda la matemática es:

¿Qué permanece cuando algo cambia?

Tomemos $8 + 13$. Si intercambiamos los sumandos, obtenemos $13 + 8$. La forma visible cambia, pero el valor no.

Tomemos ahora el entero 6. Si lo reemplazamos por su cuadrado, pasamos a 36. Cambia el número, pero la propiedad de ser par permanece.

En ambos ejemplos hemos aplicado alguna transformación y observado una propiedad preservada.

Invariante: una palabra que exige contexto. Llamaremos **invariante**, de manera todavía informal, a una cantidad o propiedad que permanece sin cambio bajo una transformación o familia de transformaciones especificada.

La última frase es crucial. No tiene sentido decir simplemente «esto es un invariante» sin explicar **respecto de qué cambio**.

Por ejemplo:

- el valor de una suma permanece cuando intercambiamos sus sumandos;
- la paridad de un entero par permanece al elevarlo al cuadrado;
- la longitud de un segmento permanece bajo ciertos movimientos rígidos del plano.

Más adelante encontraremos invariantes mucho más profundos: dimensión, grado, orden, rango, clases de isomorfismo y otros. La pregunta elemental «¿qué cambia y qué permanece?» es la semilla de ese lenguaje.

Conservar una propiedad no significa conservarlo todo. Comparemos dos cambios sobre el mismo par de números. Empezamos con 4 y 9. En el primero intercambiamos las entradas; en el segundo aumentamos la primera en 1 y disminuimos la segunda en 1.

Situación	Entradas, en orden	Suma	Producto
Inicial	$4, 9$	13	36
Intercambiar	$9, 4$	13	36
Transferir una unidad	$5, 8$	13	40

En estos casos la suma no distingue los dos cambios, pero el producto sí. Por eso decir «la transformación conserva el resultado» es insuficiente si no hemos indicado el resultado de qué operación. Tampoco debemos confundir «las entradas siguen siendo las mismas, en otro orden» con «la suma sigue siendo la misma». El segundo cambio conserva la suma del ejemplo aunque modifica ambas entradas.

Podemos proponer la pregunta general: ¿aumentar una entrada y disminuir la otra en la misma cantidad conserva siempre la suma? La tabla sugiere esa pauta. La justificación mediante las leyes de las operaciones se estudiará en C3; aquí debemos separar la observación comprobada de la afirmación pendiente.

Control. Parte de $2, 5$. Compara intercambiar las entradas con aumentar la primera en 2 y disminuir la segunda en 2. ¿Qué distingue la suma y qué distingue el producto? ¿Qué puedes concluir sobre todos los pares a partir de este control?

Solución. El par inicial tiene suma 7 y producto 10. El intercambio produce $5, 2$, con suma 7 y producto 10. El otro cambio produce $4, 3$, con suma 7 y producto 12. La suma no distingue estas situaciones; el producto distingue el segundo cambio del intercambio. Hemos verificado este par, no todos los pares. Para reconocer qué estamos comparando, retoma §1.3, operaciones y relaciones; para precisar la fuerza de los datos, retoma §1.5, evidencia y conjetura.

1.8. Una idea, varias representaciones

Una misma relación matemática puede presentarse de formas distintas.

Consideremos la regla:

> A cada número le asignamos su doble aumentado en uno.

Podemos escribirla verbalmente, como acabamos de hacer.

Podemos representarla simbólicamente mediante $2x + 1$.

Podemos construir una tabla:

x	$2x + 1$
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

Cada representación destaca algo distinto.

La frase verbal hace visible el procedimiento.

La expresión $2x + 1$ concentra la regla.

La tabla hace visible cómo varían algunos valores y permite reconocer rápidamente una regularidad.

No hay una representación universalmente superior. Una habilidad matemática importante consiste en cambiar de representación cuando el cambio permite ver una propiedad que antes estaba oculta.

Representar no es decorar. Un diagrama, una tabla o una fórmula sólo son útiles si revelan información.

En esta colección no utilizaremos representaciones visuales como adorno. Las usaremos cuando permitan:

- detectar una pauta;
- comparar casos;
- distinguir dependencias;
- hacer visible una transformación;
- reconocer una estructura.

Lo que una tabla finita permite reconstruir. Supongamos que sólo se nos entregan estos datos:

Entrada	Salida
0	2
1	4
2	6

La regla «duplica la entrada y suma 2» reproduce la tabla. Pero también lo hace esta otra regla, definida para todas las entradas enteras: «para $0, 1, 2$, duplica y suma 2; para cualquier otro entero, duplica y suma 3». En la entrada 3, la primera da 8 y la segunda 9. Las reglas son distintas aunque la tabla disponible no las distingue.

No se trata de decidir cuál parece más natural. Si el único dato es la tabla, ambas son compatibles. Si además se nos dice que la regla siempre consiste en duplicar y sumar una cantidad fija, hemos recibido una restricción nueva. Las condiciones del problema pueden descartar candidatos; la apariencia de los primeros valores no reemplaza esas condiciones.

Control. Se agrega a la tabla la fila $3 \mapsto 8$. ¿Esto selecciona una de las dos reglas anteriores? ¿Prueba que no pueda existir ninguna otra regla compatible con las cuatro filas?

Solución. Descarta la segunda regla y conserva la primera entre esos dos candidatos. No establece unicidad entre todas las reglas posibles. Por ejemplo, «duplica y suma 2, excepto en la entrada 4, donde entrega 100» coincide en las cuatro filas y difiere en otra entrada. La comprobación adicional discrimina los candidatos comparados, pero no agota los que no fueron considerados. Si falta esta distinción, retoma §1.2, casos y conjetura, y §1.5, alcance de una comprobación finita. Después escribe por separado las filas observadas y la regla que estás proponiendo.

1.9. Generalizar exige controlar el dominio de la afirmación

Consideremos la observación:

$2^2 - 2 = 2$, $3^2 - 3 = 6$, $4^2 - 4 = 12$, $5^2 - 5 = 20$.

Todos los resultados son pares.

Podemos conjeturar que $n^2 - n$ es par para todo entero n.

La conjetura es correcta, pero conviene observar algo importante: la frase «para todo entero n» forma parte de la afirmación. Si cambiamos el dominio, podemos cambiar el problema.

Por ejemplo, si n pudiera ser cualquier número real, decir que $n^2 - n$ es «par» dejaría de tener el mismo sentido, porque la paridad es una propiedad de enteros.

Esto anticipa una regla general de lectura matemática:

> Una afirmación no está completamente determinada sólo por su fórmula; también importan las condiciones bajo las cuales se interpreta.

Más adelante esas condiciones aparecerán mediante dominios, hipótesis y cuantificadores. Por ahora debemos aprender a buscarlas incluso cuando están escritas en lenguaje ordinario.

Una pregunta disciplinada. Cuando una pauta parece general, conviene preguntar:

1. ¿sobre qué objetos estamos hablando?
2. ¿qué casos hemos comprobado?
3. ¿qué afirmación exacta queremos proponer?
4. ¿podemos encontrar un caso que la destruya?
5. si no encontramos uno, ¿qué tipo de razón necesitaríamos para justificarla?

Generalizar matemáticamente no es adivinar una fórmula vistosa. Es formular con precisión una afirmación cuyo alcance conocemos.

1.10. Leer algebraicamente

Podemos reunir lo aprendido en una rutina de lectura.

Ante una expresión, igualdad, fórmula o problema, conviene preguntar:

1. ¿Cuáles son los objetos?
2. ¿Qué operaciones aparecen?
3. ¿Qué relaciones se afirman?
4. ¿Qué condiciones restringen los objetos?
5. ¿Estamos mirando un caso particular o una familia de casos?
6. ¿Qué cambia cuando modificamos el ejemplo?
7. ¿Qué permanece?
8. ¿Qué patrón parece repetirse?
9. ¿Qué afirmación general sugiere?
10. ¿Qué evidencia tenemos?
11. ¿Qué contraejemplo podríamos buscar?
12. ¿Qué faltaría justificar para convertir la conjetura en conocimiento matemático?

No todas las preguntas serán útiles en cada problema. La rutina sirve para instalar un hábito: **leer antes de operar y decidir antes de transformar**.

Éste es uno de los cambios centrales de la transición a la matemática universitaria. Cada vez habrá menos instrucciones del tipo «aplica esta fórmula» y más situaciones en las que debamos reconocer por nosotros mismos qué información es relevante y qué estructura organiza el problema.

1.11. Síntesis

El álgebra no comienza cuando aparecen letras. Comienza cuando una situación particular se convierte en objeto de comparación y generalización.

En este capítulo hemos aprendido a distinguir varios movimientos intelectuales:

```
calcular
↓
comparar
↓
describir objetos, operaciones y relaciones
↓
detectar regularidades
↓
formular una conjetura
↓
```

```
buscar contraejemplos
↓
preguntar qué permanece
↓
preguntar qué debe justificarse
```

Todavía no hemos formalizado las leyes de las operaciones, la lógica ni la demostración. Eso es deliberado.

El capítulo siguiente examinará con mayor precisión expresiones, variables, igualdad e identidad. Después estudiaremos qué propiedades autorizan las transformaciones algebraicas. Sólo entonces comenzaremos a sistematizar el lenguaje lógico y las técnicas de demostración.

Por ahora basta con que haya cambiado la pregunta.

Ya no preguntamos solamente:

> ¿cuánto da?

También preguntamos:

> ¿qué clase de objeto estoy mirando?, ¿qué operación actúa?, ¿qué relación se afirma?, ¿qué patrón se repite?, ¿qué permanece y qué tendría que demostrar?

Ejercicios

Los ejercicios están ordenados por función matemática. No todos piden calcular; varios exigen explicar, comparar o decidir qué puede concluirse.

A. Leer antes de transformar

1. En $5x - 3$, identifica los objetos visibles y las operaciones. Explica por qué no aparece todavía una relación.
2. Compara $5x - 3$ con $5x - 3 = 12$. ¿Qué elemento nuevo aparece en la segunda escritura y qué cambia en su significado?
3. Clasifica cada escritura como expresión o afirmación de una relación: $a^2 + b^2$, $a^2 + b^2 = c^2$, $m < n$, $4 \mid 28$, $3(y + 1)$.
4. En $2(a + b) = 2a + 2b$, identifica las operaciones y la relación principal. Sin justificar todavía la igualdad en general, explica qué afirma la escritura.
5. Explica la diferencia entre $x + 4$ y $x + 4 = 0$ sin resolver ninguna ecuación.
6. Un estudiante dice que «$7 \mid 35$ es una división». Explica con precisión por qué esa lectura es incorrecta.

B. Casos, patrones y generalidad

7. Calcula $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$ y formula una conjetura sobre la paridad del producto de dos enteros consecutivos.
8. Examina $n^2 - n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Formula una conjetura precisa e indica cuál es el dominio sobre el que la propones.
9. Observa 1, $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$ y $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Formula una conjetura que describa los resultados.
10. Calcula $(-1)^n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Describe el patrón en palabras y luego mediante una regla que distinga dos casos.
11. Busca seis valores iniciales de 2^n y describe dos regularidades diferentes que observes. Distingue claramente «regularidad observada» de «afirmación demostrada».
12. Construye cinco ejemplos numéricos que sugieran una regla general propia. Escribe por separado: los casos, la regularidad observada y la conjetura.

C. Contraejemplos y límites de la evidencia

13. Refuta: «para todos los números reales a, b, se cumple $a - b = b - a$».
14. Refuta: «si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$» para números reales.
15. Refuta: «la suma de dos enteros impares es impar».
16. Un estudiante comprueba veinte valores de n y observa que una fórmula produce siempre un número primo. Explica por qué eso no basta para demostrar que la fórmula produce primos para todo n.
17. Considera $n^2 + n + 41$. Comprueba algunos valores iniciales y encuentra un valor que destruya la afirmación «siempre es primo».
18. Inventa una afirmación universal falsa sobre enteros que resulte plausible al mirar al menos tres casos iniciales. Luego encuentra un contraejemplo.

D. Comparar comportamientos

19. Compara $14 + 9$ con $9 + 14$, y $14 - 9$ con $9 - 14$. Describe el cambio aplicado y lo que ocurre con el resultado en cada operación.
20. Compara $3 \cdot 8$ con $8 \cdot 3$, y $3/8$ con $8/3$. Formula una pregunta general sugerida por el contraste.
21. Considera los pares $2 + 7 = 9$, $5 + 4 = 9$ y $12 + (-3) = 9$. ¿Qué cambia entre los ejemplos y qué permanece?
22. Considera 4^2, 6^2, 10^2 y 14^2. ¿Qué propiedad de las bases permanece en los cuadrados? Formula la observación sin intentar demostrarla.
23. Da un ejemplo de una transformación de una expresión que preserve su valor en los casos que pruebes y otro ejemplo de una transformación que no lo preserve.
24. Explica, con un ejemplo propio, qué significa estudiar «el comportamiento de una operación» en lugar de limitarse a efectuarla.

E. Representaciones

25. Traduce al lenguaje simbólico: «tres veces un número, menos cinco».
26. Explica la diferencia entre «tres veces un número, menos cinco» y «tres veces la diferencia entre un número y cinco». Escribe ambas expresiones.
27. Representa «la suma de dos enteros consecutivos» usando una sola letra.
28. Construye una tabla de cinco valores para la regla $3x + 2$. ¿Qué información se hace más visible en la tabla que en la expresión aislada?
29. Una tabla contiene los pares $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$, $(4, 9)$. Propón una expresión sencilla que reproduzca esos valores. Explica por qué cinco pares compatibles no demuestran que esa expresión sea la única regla posible.
30. Da un ejemplo de una idea matemática elemental que puedas expresar verbalmente, mediante símbolos y mediante una tabla. Explica qué revela mejor cada representación.

F. Pensamiento estructural y síntesis

31. Explica por qué «enteros con suma» y «movimientos de un cuadrado que lo llevan sobre sí mismo» podrían ser comparables desde un punto de vista estructural, aunque sus objetos sean completamente distintos. No uses todavía vocabulario de teoría de grupos.
32. Considera el paso de $8 + 13$ a $13 + 8$. Identifica la transformación y una cantidad que permanece. Explica por qué la palabra «invariante» requiere mencionar la transformación considerada.
33. Considera el paso de un entero par n a su cuadrado n^2. ¿Qué propiedad parece preservarse? ¿Qué tendría que hacerse más adelante para convertir la observación en una afirmación demostrada?

34. Analiza la escritura $a(b+c) = ab+ac$ mediante la rutina de lectura algebraica: objetos, operaciones, relación, familia de casos, posible regularidad y cuestión de justificación.
35. Un estudiante afirma: «como $2^2+1=5$, $4^2+1=17$ y $6^2+1=37$, entonces n^2+1 es primo para todo entero par n». Evalúa el razonamiento y encuentra un contraejemplo.
36. Escribe un párrafo matemático breve que responda: **¿qué diferencia hay entre resolver un cálculo y reconocer una estructura?** Tu respuesta debe mencionar al menos objetos, operaciones o relaciones, y generalidad.

G. Reglas distintas para los mismos datos

37. Una tabla para entradas enteras contiene $0 \mapsto 2$, $1 \mapsto 5$ y $2 \mapsto 8$. Escribe dos reglas completas que reproduzcan esas filas y den salidas distintas en 3. Calcula ambas salidas. Explica qué dato nuevo permitiría distinguir tus dos candidatos y qué no demostraría todavía ese dato.
38. El costo de un servicio para $1, 2, 3$ usos es, respectivamente, $7, 10, 13$. Propón dos reglas para cualquier cantidad entera no negativa de usos que coincidan con esos datos y difieran cuando no hay usos. Añade una condición verbal que haga elegir una de ellas. Distingue el costo observado de la condición que tú agregaste.
39. Se estudia una operación con dos entradas enteras. Sólo se conoce la tabla de las entradas 0 y 1: al combinar $0,0$ sale 0; $0,1$ y $1,0$ dan 1; $1,1$ da 2. Propón dos operaciones completas compatibles, una que siempre sea la suma ordinaria y otra que falle en conservar el resultado al intercambiar alguna pareja de entradas. Comprueba tu pareja y explica el límite de la tabla.

H. Objetos, operaciones y relaciones en nuevos contextos

40. Ana tiene 7 fichas y Beto 5. Ana entrega dos fichas a Beto sin perder ninguna. Identifica objetos, operación y una relación numérica que se conserve. Compara esta entrega con intercambiar los nombres de los dueños en el registro inicial. Explica por qué tener el mismo total no significa que todos los datos sean iguales.
41. Trabajamos con las letras a, b y con la operación de escribir una detrás de otra, conservando el orden. Completa los cuatro resultados posibles para dos entradas de una letra. Identifica una propiedad que todos esos resultados compartan y una relación que distinga ab de ba. Compara lo observado con intercambiar dos sumandos numéricos, sin usar teoría de grupos.
42. Un reloj tiene posiciones $0, 1, \ldots, 11$; después de 11 se vuelve a 0. Desde la posición 10 se avanza cuatro posiciones. Describe el recorrido y compara la posición final con la suma entera $10+4$. Identifica objetos, operación y relación en ambos contextos. ¿Un caso donde ambos resultados coincidan mostraría que las dos operaciones son siempre iguales?

I. Conjeturas y casos frontera

43. Al calcular x^2 para $x = 1, 2, 3$, se obtiene un valor mayor o igual que x. Formula la conjetura que extendería esa observación a todos los reales y refútala con una entrada entre 0 y 1. Comprueba también 0 y -1. Propón un dominio más estrecho sobre el cual convendría investigar la pauta, sin presentar tus comprobaciones como demostración.
44. Los casos $8/2 < 8$, $12/3 < 12$ y $20/5 < 20$ sugieren «dividir un número positivo por cualquier número positivo siempre lo disminuye». Evalúa los casos frontera con divisor 1, $1/2$ y 0. Decide cuáles son contraejemplos admisibles y formula una nueva pregunta cuyo rango respete lo observado.

45. Tres cuadrados tienen lados $1, 2, 3$. Calcula sus perímetros y áreas, y formula una conjetura que extienda a todos los rectángulos positivos la comparación que sugieren. Busca un contraejemplo usando un rectángulo de lados $1, 9$ y otro de lados $4, 4$. Explica qué restricción de los ejemplos iniciales se perdió al generalizar.

J. Elegir una representación y reconocer sus límites

46. Se resumen tres salidas escribiéndolas ordenadas: $0, 1, 4$. Se pierde qué entrada produjo cada una. Construye dos tablas sobre las mismas entradas $0, 1, 2$ que tengan ese mismo resumen, pero asignen salidas distintas a la entrada 0. Para responder «¿qué entrada dio 4?», elige entre el resumen y una tabla completa. Explica la información perdida.
47. Una persona camina en una recta. En el recorrido A va directamente de 0 a 3 y después directamente de 3 a 0, sin desvíos. En B permanece en 0. Ambos se resumen con «posición final: 0». Elige una representación que permita responder cuánto se recorrió y cuál permita responder dónde terminó. Calcula las distancias y explica por qué el resumen final no basta para ambas preguntas.
48. Dos procedimientos de rebaja de un precio positivo son: A, quitar 2 unidades; B, quitar la quinta parte del precio. Para un precio de 10, ambos dan 8. Escribe cada regla en palabras y con símbolos; elige un segundo precio que las distinga y organiza ambos casos en una tabla. Identifica los objetos, operaciones y relaciones. Explica qué concluirías si sólo estuvieran permitidos estos dos procedimientos, y qué no concluirías sin esa restricción.

Soluciones

Las soluciones respetan deliberadamente los prerrequisitos del Capítulo 1. Cuando una afirmación requiere teoría posterior, se explica qué puede concluirse ahora y qué deberá justificarse más adelante.

A. Leer antes de transformar

1. En $5x - 3$ aparecen los símbolos 5, x y 3, y también las expresiones $5x$ y $5x - 3$. Las operaciones son multiplicación y resta. No aparece una relación porque la escritura no compara $5x - 3$ con otro objeto mediante $=$, $<$, $\mid$ u otro signo relacional.

Idea transferible: una expresión puede contener varias operaciones sin afirmar todavía que dos objetos estén relacionados.

2. En $5x - 3 = 12$ aparece la relación de igualdad. La expresión $5x - 3$ deja de estar aislada: ahora se afirma que, bajo las condiciones pertinentes, tiene el mismo valor que 12.

No hemos resuelto la ecuación; sólo hemos identificado qué tipo de escritura es.

3.

- $a^2 + b^2$: expresión.
- $a^2 + b^2 = c^2$: afirmación de igualdad.
- $m < n$: afirmación de orden.
- $4 \mid 28$: afirmación de divisibilidad.
- $3(y + 1)$: expresión.

La presencia de operaciones no convierte automáticamente una escritura en una afirmación.

4. Aparecen suma y multiplicación. La relación principal es igualdad. La escritura afirma que las expresiones $2(a + b)$ y $2a + 2b$ tienen el mismo valor para los objetos y condiciones bajo los cuales se interprete la igualdad.

En este capítulo no necesitamos justificar todavía por qué esa igualdad es general; su justificación sistemática llegará al estudiar las leyes de las operaciones.

5. $x + 4$ es una expresión: no afirma nada por sí sola. $x + 4 = 0$ es una afirmación de igualdad que impone una condición sobre los valores que pueda tomar x.

6. El símbolo | no indica que se esté realizando la operación 35/7. La escritura $7 \mid 35$ afirma una relación: que 35 es múltiplo de 7, o equivalentemente, que existe un entero que multiplicado por 7 produce 35.

B. Casos, patrones y generalidad

7. Los productos son $2, 6, 12, 20, 30$, todos pares.

Conjetura: **para todo entero n, el producto $n(n+1)$ es par**.

Los cálculos proporcionan evidencia. La afirmación general todavía necesitaría una justificación válida para cualquier entero.

8. Los valores son $0, 2, 6, 12, 20, 30$. Todos son pares.

Una conjetura precisa es: **para todo entero n, $n^2 - n$ es par**.

El dominio importa: la palabra «par» tiene sentido aquí porque estamos hablando de enteros.

9. Los resultados son $1, 4, 9, 16, 25$, es decir, $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$.

Conjetura: **la suma de los primeros n enteros impares positivos es n^2**.

10. Los valores son $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1$.

Regla: - si n es par, $(-1)^n = 1$; - si n es impar, $(-1)^n = -1$.

Todavía no hemos probado la regla para todos los enteros no negativos; la hemos formulado a partir del patrón y del significado de potencia.

11. Por ejemplo, para $n = 1, \ldots, 6$ se obtiene $2, 4, 8, 16, 32, 64$.

Dos regularidades: 1. todos los valores son pares; 2. la última cifra sigue $2, 4, 8, 6, 2, 4, \ldots$.

Ambas son observaciones. Para convertirlas en teoremas habría que justificar que continúan para todos los exponentes del dominio.

12. Respuesta abierta. Un ejemplo válido:

Casos: $1^2 + 1 = 2$, $2^2 + 2 = 6$, $3^2 + 3 = 12$, $4^2 + 4 = 20$, $5^2 + 5 = 30$.

Regularidad: todos los resultados son pares.

Conjetura: para todo entero n, $n^2 + n$ es par.

Lo esencial es separar los datos observados de la afirmación general.

C. Contraejemplos y límites de la evidencia

13. Toma $a = 5$ y $b = 2$. Entonces $a - b = 3$, mientras que $b - a = -3$. Como la afirmación decía «para todos», un solo caso que falle basta para refutarla.

14. Toma $a = 1$ y $b = -1$. Se cumple $a^2 = b^2 = 1$, pero $a \neq b$. La afirmación es falsa.

15. Toma dos impares, por ejemplo 3 y 5. Su suma es 8, que es par. Por tanto, la afirmación universal es falsa.

16. Veinte comprobaciones cubren sólo veinte casos. Si la afirmación pretende valer para todos los valores posibles de n, todavía podría existir un contraejemplo fuera de los casos examinados.

La ausencia de contraejemplos en una búsqueda finita no constituye una demostración universal.

17. Para varios valores pequeños aparecen números primos. Sin embargo, para $n = 41$:

$$41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43,$$

que es compuesto. Por lo tanto, «siempre es primo» es falso.

18. Respuesta abierta. Ejemplo:

Afirmación: «$n^2 + n + 1$ es primo para todo entero positivo n».

Casos: - $n = 1$: 3, primo; - $n = 2$: 7, primo; - $n = 3$: 13, primo.

Contraejemplo: - $n = 4$: $21 = 3 \cdot 7$, no primo.

El ejercicio muestra que una pauta muy convincente en los primeros casos puede fallar inmediatamente después.

D. Comparar comportamientos

19. $14 + 9 = 23$ y $9 + 14 = 23$: al intercambiar los términos, el resultado se conserva.

$14 - 9 = 5$ y $9 - 14 = -5$: al aplicar el mismo tipo de cambio —intercambiar los términos— el resultado no se conserva.

La comparación muestra que operaciones diferentes pueden responder de manera diferente a una misma transformación de sus entradas.

20. $3 \cdot 8 = 24$ y $8 \cdot 3 = 24$, mientras que $3/8 \neq 8/3$.

Pregunta general sugerida: **¿para qué operaciones el intercambio de los dos argumentos conserva el resultado?**

En el capítulo 3 esta pregunta se convertirá en una propiedad formal.

21. Cambian los sumandos: $(2, 7)$, $(5, 4)$ y $(12, -3)$. Permanece el resultado de la suma: 9.

Una misma relación final puede realizarse mediante objetos concretos diferentes.

22. Las bases $4, 6, 10, 14$ son pares, y sus cuadrados $16, 36, 100, 196$ también lo son.

Observación: **al elevar al cuadrado un entero par, parece preservarse la paridad par**.

Los ejemplos no son todavía una demostración general.

23. Respuesta abierta.

Ejemplo que preserva valor: transformar $7 + 12$ en $12 + 7$; ambos valen 19.

Ejemplo que no preserva valor: transformar $7 - 12$ en $12 - 7$; se pasa de -5 a 5.

Lo importante es especificar la transformación y comparar una propiedad antes y después.

24. Respuesta modelo: estudiar el comportamiento de una operación significa observar qué ocurre cuando variamos sus entradas o las transformamos, y buscar propiedades que se repiten. Por ejemplo, sumar $a + b$ y luego intercambiar a $b + a$ permite preguntar si el resultado depende del orden, en vez de limitarse a calcular un caso particular.

E. Representaciones

25. «Tres veces un número, menos cinco» puede representarse como $3x - 5$.

26. «Tres veces un número, menos cinco» se representa como $3x - 5$.

«Tres veces la diferencia entre un número y cinco» se representa como $3(x - 5)$.

No son iguales en general. La primera resta 5 después de triplicar; la segunda resta primero y triplica después toda la diferencia.

27. Si el primer entero es n, el siguiente es $n+1$. La suma es $n+(n+1)$.

No necesitamos simplificar todavía; la expresión ya representa la relación verbal.

28. Una tabla posible:

x	$3x+2$
0	2
1	5
2	8
3	11
4	14

La tabla hace visible, por ejemplo, que al aumentar x en 1, los valores mostrados aumentan en 3. La expresión simbólica comprime la regla para cualquier entrada.

29. Una regla sencilla es $2x+1$.

Sin embargo, cinco pares no determinan de manera única una regla posible: pueden construirse otras expresiones que coincidan en esos cinco valores y difieran después. Por tanto, los datos apoyan la regla propuesta, pero no prueban su unicidad.

30. Respuesta abierta. Ejemplo:

Verbal: «a cada entero le asignamos su cuadrado».

Simbólico: x^2.

Tabla: $(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)$.

La frase verbal explica la acción, la fórmula la condensa y la tabla muestra casos concretos y crecimiento.

F. Pensamiento estructural y síntesis

31. Los objetos son distintos: en un caso son enteros y en otro movimientos geométricos. Sin embargo, en ambos contextos puede existir una manera de combinar dos objetos, puede haber una operación que no cambie nada y puede tener sentido preguntar si una operación puede deshacerse.

La comparación es estructural porque se centra en la organización y el comportamiento, no en la naturaleza material de los objetos.

32. La transformación es intercambiar los dos sumandos. La cantidad que permanece es el valor de la suma, 21.

Decir «21 es un invariante» sin más sería incompleto. Es invariante **respecto de esa transformación concreta** en este ejemplo: intercambiar los sumandos.

33. Si n es par, los ejemplos sugieren que n^2 también es par. Para convertirlo en una afirmación demostrada habría que dar una razón que funcione para cualquier entero par, no sólo para los valores comprobados.

Más adelante podremos expresar un entero par en una forma general y usarla en una demostración.

34. En $a(b+c) = ab+ac$:

- objetos: a, b, c y las expresiones construidas con ellos;
- operaciones: suma y multiplicación;
- relación: igualdad;
- familia de casos: los valores permitidos de a, b, c;
- regularidad sugerida: multiplicar una suma por a parece producir el mismo resultado que multiplicar cada término por a y sumar;

- cuestión pendiente: justificar por qué la igualdad vale en todos los casos del dominio.

En este capítulo la lectura es suficiente; la ley que justifica la transformación se estudiará sistemáticamente después.

35. Los tres casos apoyan una conjetura, pero no una conclusión universal.

Un contraejemplo es $n = 8$:

$8^2 + 1 = 65 = 5 \cdot 13$,

que no es primo. Por tanto, la afirmación es falsa.

El error del estudiante no fue calcular mal; fue atribuir a unos pocos ejemplos una fuerza lógica que no tienen.

36. Respuesta modelo:

Resolver un cálculo consiste en obtener información sobre un caso concreto, por ejemplo hallar el valor de $17 + 8$. Reconocer una estructura exige mirar más allá del resultado y preguntar qué objetos intervienen, qué operaciones o relaciones los conectan y qué propiedades continúan siendo válidas al cambiar los ejemplos. El cálculo puede aportar evidencia, pero el pensamiento estructural busca una organización que explique una familia de casos.

G. Reglas distintas para los mismos datos

37. Una regla es «multiplica por 3 y suma 2», es decir, $3x + 2$. Otra es «si la entrada es $0, 1$ o 2, multiplica por 3 y suma 2; para cualquier otra entrada entera, multiplica por 3 y suma 3». Ambas están especificadas para todas las entradas enteras y dan respectivamente 2, $5, 8$ en las filas entregadas.

En 3, la primera da 11 y la segunda 12. Conocer la salida real en esa entrada distinguiría esos dos candidatos: 11 apoyaría al primero y descartaría al segundo; 12 haría lo contrario. Una salida distinta descartaría ambos. Ninguno de esos resultados probaría por sí solo que no existan otros candidatos compatibles con todos los datos observados. El ejercicio pide reglas distintas, no sólo dos maneras de escribir la misma regla.

38. Primera regla: cobrar 4 de cargo fijo y 3 por cada uso, incluso cuando hay cero usos; su expresión es $4 + 3n$. Segunda: cobrar 0 cuando no hay usos y, cuando hay al menos uno, cobrar $4 + 3n$. En $1, 2, 3$, ambas dan $7, 10, 13$; en 0, dan 4 y 0.

La condición «el cargo fijo se cobra incluso si no se utiliza el servicio» selecciona la primera. La condición «sin usos no se cobra nada» selecciona la segunda. La tabla no afirma ninguna de estas condiciones: sólo informa tres costos. No se debe presentar una condición añadida como si fuera una conclusión de esas filas. Las dos reglas respetan la interpretación de n como cantidad entera no negativa, sin inventar usos negativos.

39. La primera operación suma siempre las dos entradas. La segunda también las suma, excepto cuando la primera es 2 y la segunda 3: en ese caso entrega 0. Esta excepción define un resultado único para cada pareja y no afecta ninguna de las cuatro entradas conocidas, por lo que ambas operaciones reproducen la tabla.

En la segunda operación, combinar $2, 3$ da 0, mientras combinar $3, 2$ da la suma ordinaria 5. El intercambio cambia el resultado. En la primera, ambas sumas valen 5. La tabla inicial sólo compara parejas cuyas entradas son 0 o 1; su simetría visible no establece cómo se comporta la operación fuera de esas entradas. No estamos demostrando una ley general de operaciones: estamos construyendo dos posibilidades que los datos finitos no distinguen.

H. Objetos, operaciones y relaciones en nuevos contextos

40. Los objetos son las cantidades asignadas a cada persona y las fichas que se trasladan. La operación de entrega cambia el registro $\text{Ana} : 7, \text{Beto} : 5$ a $\text{Ana} : 5, \text{Beto} : 7$. La relación «las dos cantidades suman 12» permanece, pues $7 + 5 = 12$ y $5 + 7 = 12$.

Intercambiar los nombres en el registro inicial produce las mismas cantidades finales asociadas a los nombres, pero es un cambio de descripción: por sí mismo no afirma que se hayan trasladado fichas. La entrega sí describe una acción física. El total coincide antes y después, pero la cantidad de Ana cambia, la de Beto cambia y los procedimientos descritos difieren. Un registro de cantidades puede representar el estado final sin conservar la historia que llevó a él.

41. Los cuatro resultados son:

Primera entrada	Segunda entrada	Resultado
a	a	aa
a	b	ab
b	a	ba
b	b	bb

Todos tienen dos letras. ab y ba tienen incluso las mismas letras y el mismo número de cada una, pero no son la misma escritura ordenada: la primera empieza por a y la segunda por b. Los objetos son letras o cadenas, la operación es escribir en orden y la relación de igualdad compara las escrituras completas. En $2 + 5$ y $5 + 2$, el intercambio conserva el resultado numérico 7; en estas cadenas, conservar la longitud no equivale a conservar el resultado. La propiedad elegida y la clase de objetos importan.

42. El recorrido es $10 \to 11 \to 0 \to 1 \to 2$, así que la posición final es 2. En los enteros, $10 + 4 = 14$. El reloj trabaja con doce posiciones y la operación consiste en avanzar por el recorrido circular; la suma ordinaria trabaja con enteros. El número 14 es un entero admisible, pero no una de las etiquetas del reloj.

La relación «posición final igual a 2» describe el reloj; «suma igual a 14» describe la cuenta entera. No se puede reemplazar una por otra ignorando los objetos del contexto. Desde 3, avanzar cuatro posiciones termina en 7, que también es $3 + 4$; ese caso coincidente no hace idénticas las operaciones. El ejemplo desde 10 ya muestra una diferencia. No hace falta teoría de congruencias para leer el recorrido dado.

I. Conjeturas y casos frontera

43. La conjetura sería: «para todo real x, $x^2 \geq x$». Con $x = 1/2$ resulta $x^2 = 1/4 < 1/2$, así que es falsa. En 0 hay igualdad y en -1 se obtiene $1 \geq -1$. Estos casos favorables no anulan el contraejemplo: una afirmación universal debe cubrir también la entrada $1/2$.

Un dominio más estrecho que se puede investigar es el de los enteros positivos; otra propuesta es estudiar los reales mayores o iguales que 1. En este punto se han propuesto nuevas afirmaciones, no demostrado que todos sus casos funcionen. La diferencia decisiva es que el primer dominio probado contenía sólo unos pocos enteros, mientras la conjetura incluía entradas fraccionarias.

44. La afirmación se refuta con $8/1 = 8$: la entrada y el divisor son positivos, pero el resultado no es estrictamente menor. También $8/(1/2) = 16 > 8$ la refuta, mostrando que el resultado incluso puede aumentar. Con divisor 0, la división no tiene valor y, además, ese divisor no es positivo; no es un contraejemplo admisible a la afirmación tal como fue escrita.

Una nueva pregunta es: «¿dividir un número positivo por un divisor mayor que 1 siempre produce un número menor?». Es más precisa que la primera y compatible con los tres casos iniciales. Su justificación general mediante orden y operaciones queda pendiente. No basta

cambiar “positivo” por “distinto de cero”, porque eso introduciría además divisores negativos que no hemos estudiado en la comparación.

45. Los cuadrados tienen perímetros $4, 8, 12$ y áreas $1, 4, 9$. Sugieren: «entre rectángulos de lados positivos, el de mayor perímetro siempre tiene mayor área».

El rectángulo de lados $1, 9$ tiene perímetro $2(1 + 9) = 20$ y área 9. El de lados $4, 4$ tiene perímetro 16 y área 16. El primero tiene mayor perímetro y menor área, así que refuta la conjetura; ambos tienen lados positivos y son entradas admisibles.

En los ejemplos iniciales los dos lados de cada figura eran iguales. Al extender a todos los rectángulos se retiró esa restricción y apareció la posibilidad de una figura alargada. Se puede volver a investigar la comparación sólo entre cuadrados, pero tres cálculos no reemplazan la justificación general de esa versión.

J. Elegir una representación y reconocer sus límites

46. Dos tablas posibles son:

Entrada	Tabla A	Tabla B
0	0	4
1	1	1
2	4	0

Ambas tienen las salidas $0, 1, 4$ si se las ordena y se omiten las entradas. Pero en A la entrada 0 da 0, y en B da 4. La salida 4 procede de 2 en A y de 0 en B. Para identificar la entrada hace falta la tabla que conserve las asociaciones, u otra representación que las indique.

El resumen conserva cuáles salidas aparecen en estos datos y cuántas veces, pero pierde el vínculo entre entrada y salida. No es sólo una tabla corta: incluso para las tres entradas observadas se ha eliminado información necesaria.

47. La posición final es 0 en los dos casos, así que ese resumen responde dónde terminó. Para calcular lo recorrido necesitamos conservar los tramos, por ejemplo con la lista ordenada A: $0 \to 3 \to 0$ y B: permanecer en 0, junto con la información de que los tramos son directos y sin desvíos.

En A se recorren 3 unidades de ida y 3 de vuelta: total 6. En B se recorren 0. El regreso al mismo lugar no significa ausencia de movimiento. La representación final conserva la posición, pero no el recorrido ni su longitud. La condición “sin desvíos” importa: conocer sólo los extremos de un tramo no excluiría viajes adicionales de ida y vuelta. Tampoco estos datos informan cuánto tiempo tomó cada recorrido.

48. Con precio p, A se escribe $p - 2$ y B se escribe $p - p/5$. Las frases indican respectivamente una cantidad fija y una cantidad que depende del precio. Para distinguirlas elegimos $p = 20$:

Precio inicial	A: quitar 2	B: quitar la quinta parte
10	8	8
20	18	16

Los objetos son precios y cantidades retiradas; las operaciones son resta y, en B, división para calcular la quinta parte. La relación comparada es igualdad entre los precios finales. En 10 coincide el resultado, pero los procedimientos no son el mismo; en 20 se distinguen.

Si se sabe que el procedimiento real debe ser A o B, una salida 18 para precio 20 selecciona A, y una salida 16 selecciona B. Una salida diferente descartaría ambos candidatos. Sin

esa restricción, dos filas no garantizan una regla única para otros precios. La tabla facilita comparar esos casos; las frases y expresiones conservan el procedimiento completo declarado. Para precios menores que 2, A daría un resultado negativo: si el contexto lo prohíbe, haría falta restringir su aplicación, aunque los dos precios usados aquí son admisibles.

Capítulo 2

Expresiones, variables, igualdad e identidad

En el capítulo anterior aprendimos a mirar una escritura algebraica antes de lanzarnos a calcular. Distinguimos objetos, operaciones y relaciones; vimos que los ejemplos pueden sugerir una conjetura sin demostrarla y comenzamos a preguntar qué cambia y qué permanece.

Ahora debemos afinar esa lectura.

La dificultad no está en reconocer letras o signos. Está en comprender **qué papel desempeñan**. La misma letra puede ser una incógnita que buscamos, un número elegido arbitrariamente, una entrada que puede variar o un parámetro que fija una familia de problemas. Del mismo modo, el signo = puede aparecer en una igualdad numérica, en una ecuación que sólo satisfacen ciertos valores o en una identidad que pretende valer para todos los valores admisibles.

El objetivo de este capítulo es aprender a interpretar esos usos con precisión antes de estudiar, en el capítulo siguiente, qué leyes permiten transformar legítimamente una expresión en otra.

2.1. Una letra no significa una sola cosa

En la escuela es frecuente asociar automáticamente una letra con «el número que hay que encontrar». Esa interpretación sirve en problemas como $x+3=7$: allí x funciona efectivamente como una **incógnita**.

Pero el álgebra utiliza letras de maneras mucho más variadas.

Consideremos las siguientes escrituras:

- $x+3=7$;
- «sea x un número real»;
- $2x+1$;
- x^2+ax+1;
- a_n.

La letra x no cumple el mismo papel en todos los casos.

Incógnita. En $x+3=7$, buscamos los valores de x que hacen verdadera la igualdad. La letra representa un valor todavía no determinado, sujeto a una condición.

Valor arbitrario. Cuando escribimos «sea x un número real», no estamos intentando descubrir x. Elegimos un número real cualquiera y razonamos sin depender de cuál haya sido elegido. Aquí la letra sirve para mantener abierta la generalidad.

Entrada variable. En una expresión como $2x+1$, podemos permitir que x tome distintos valores y observar los resultados que produce la expresión. No hay ninguna pregunta obligatoria del tipo «¿cuánto vale x?». La escritura describe una dependencia entre la elección de x y el valor obtenido.

Parámetro. En $x^2 + ax + 1$, podemos decidir que x varíe mientras a se mantiene fijo. En ese contexto, a actúa como **parámetro**: controla qué expresión de la familia estamos considerando.

Si $a = 0$, tenemos $x^2 + 1$; si $a = 3$, tenemos $x^2 + 3x + 1$; si $a = -2$, tenemos $x^2 - 2x + 1$.

Pero el papel de las letras no está grabado en los símbolos. En otro problema podríamos fijar x y dejar variar a. Por eso la pregunta correcta no es «¿qué significa la letra a?», sino:

¿Qué papel le asigna este contexto a a?

Índices y etiquetas. También encontraremos letras que organizan familias de objetos. En $a_1, a_2, a_3, \ldots$, el subíndice permite distinguir términos de una sucesión. Más adelante aparecerán índices en sumas, matrices y familias de conjuntos.

La idea central es simple pero decisiva:

Una letra es un símbolo. Su papel matemático depende del contexto.

2.2. Las expresiones tienen estructura interna

Tomemos la expresión $3x^2 - 2x + 5$.

Podríamos pensarla como una receta: elevar x al cuadrado, multiplicar por 3, restar $2x$ y sumar 5. Pero para leer álgebra con soltura conviene verla también como un objeto con partes organizadas.

En ella aparecen subexpresiones como x^2, $3x^2$, $2x$ y $3x^2 - 2x$. Esas partes no están colocadas al azar: las operaciones y los signos de agrupación determinan cómo se construye la expresión completa.

La operación principal. Una manera útil de leer una expresión es preguntar cuál es la **última operación estructural** que combina sus grandes partes.

Por ejemplo:

- en $a(b + c)$, la operación principal es una multiplicación entre a y $b + c$;
- en $\frac{x+1}{x-2}$, la operación principal es una división;
- en $(x + 1)^2$, la operación principal es elevar al cuadrado la subexpresión $x + 1$;
- en $x^2 + 3x - 4$, la expresión completa se organiza mediante sumas y restas de términos.

Esta lectura evita errores de interpretación. No es lo mismo $3(x + 2)$ que $3x + 2$, ni $\frac{1}{x+1}$ que $\frac{1}{x} + 1$.

Los paréntesis contienen información. Los paréntesis no son decoración tipográfica. Modifican la estructura.

Comparemos $2x + 6$ con $2(x + 3)$. Más adelante justificaremos que producen el mismo valor para todo número del contexto habitual. Sin embargo, estructuralmente no están escritas de la misma manera: la primera exhibe una suma entre $2x$ y 6; la segunda exhibe una multiplicación entre 2 y la suma $x + 3$.

La forma puede importar aun cuando los valores coincidan.

Esto será central durante todo el libro. Una forma factorizada puede mostrar raíces; una forma desarrollada puede hacer visibles coeficientes; una representación matricial puede hacer visible una transformación; una descomposición puede revelar subestructuras.

El álgebra no consiste únicamente en obtener una forma «más simple». Consiste muchas veces en elegir la forma que hace visible la propiedad que queremos estudiar.

2.3. Sustituir y evaluar

Si tenemos la expresión $x^2 - 3x + 1$ y elegimos $x = 2$, podemos **evaluarla** sustituyendo 2 por x:

$x^2 - 3x + 1 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$.

Aquí no hemos resuelto una ecuación. Nadie nos preguntó qué valor de x hace verdadera una condición. Simplemente elegimos un valor admisible y calculamos el valor correspondiente de la expresión.

Esta diferencia parece pequeña, pero conviene fijarla desde ahora:

- **evaluar** una expresión es asignar valores a sus variables y calcular;
- **resolver** una ecuación es determinar qué valores hacen verdadera una igualdad condicionada.

La sustitución debe respetar la estructura. Supongamos que evaluamos $3(x-2)^2$ en $x = 5$.

Debemos sustituir x dentro de toda la estructura:

$3(5-2)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$.

No podemos reemplazar símbolos de manera mecánica ignorando agrupaciones o exponentes.

No todo valor es admisible. Consideremos ahora $\frac{1}{x-2}$.

Para $x = 5$, obtenemos $\frac{1}{3}$.

Para $x = 0$, obtenemos $-\frac{1}{2}$.

Pero para $x = 2$ aparece $\frac{1}{0}$, que no está definida en la aritmética que estamos usando.

Por tanto, antes de evaluar debemos preguntar:

> ¿Para qué valores tiene sentido la expresión?

Llamaremos **dominio de interpretación**, de manera operativa, al conjunto de valores que estamos permitiendo para las variables y para los cuales las operaciones de la expresión están definidas.

Todavía no estamos definiendo formalmente una función. Estamos instalando un hábito previo: **ninguna expresión debe leerse separada de las condiciones que permiten interpretarla**.

El dominio puede cambiar el significado. La expresión $x^2 - 2$ puede interpretarse para enteros, racionales, reales o números más amplios que estudiaremos después. La escritura es la misma, pero las preguntas que podemos hacer dependen del dominio.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución racional, pero sí tiene soluciones reales.

La expresión no cambió. Cambió el universo de valores admitidos.

Otro ejemplo: decir que $n^2 - n$ es «par» tiene sentido cuando n es entero. Si permitimos que n sea un real arbitrario, la palabra *par* deja de ser una propiedad pertinente para la mayoría de los valores.

Esto muestra que una fórmula por sí sola rara vez agota el significado matemático. También importan:

- el dominio;
- las condiciones declaradas;
- el papel de cada símbolo;
- la pregunta que estamos formulando.

Cuando más adelante escribamos definiciones y teoremas, esas condiciones deberán quedar explícitas con mucho mayor rigor.

Una evaluación sin valor no es una igualdad falsa. Antes de juzgar una igualdad, debemos comprobar que sus miembros representan valores en la entrada elegida. Considera

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0.$$

Hay dos divisiones, por lo que deben excluirse $x=1$ y $x=-1$. En las demás entradas reales podemos evaluar ambos miembros y compararlos.

Entrada	Miembro izquierdo	Lectura de la igualdad
0	$-1+1=0$	Verdadera en esta entrada
2	$1+1/3=4/3$	Falsa en esta entrada
1	Aparece $1/0$	No es una evaluación admisible
-1	Aparece $1/0$ en el segundo término	No es una evaluación admisible

En 2 hay dos números reales que no son iguales. En 1 ni siquiera tenemos un valor real para el primer miembro. Decir simplemente «la igualdad falla» ocultaría esa diferencia. Una expresión sin valor tampoco se vuelve válida porque otra parte de la cuenta sí pueda calcularse.

Control. Compara $0/(x-2)=0$ en $x=3$ y en $x=2$. ¿El numerador cero elimina la restricción?

Solución. En 3, el cociente es $0/1=0$ y la igualdad es verdadera. En 2, aparece $0/0$, que no representa un número real determinado. El numerador cero no autoriza dividir por cero. Si se confunden estos estados, retoma §2.2 para identificar cada división y §2.3 para comprobar cada denominador antes de evaluar.

2.4. Variables libres y contexto abierto

Consideremos la escritura x^2+1.

La letra x aparece disponible para recibir valores. No se ha fijado un valor ni se ha impuesto una condición sobre ella. En este sentido diremos, de manera todavía informal, que x aparece **libre**.

La expresión por sí sola no es verdadera ni falsa. Es simplemente una expresión abierta.

Si escribimos $x^2+1=5$, la variable sigue apareciendo en una condición: algunos valores harán verdadera la igualdad y otros no.

Si decimos «para todo número real x, $x^2+1>0$», la letra ya se encuentra dentro de una afirmación general cuyo alcance está especificado por la frase «para todo número real».

La teoría precisa de variables libres, variables ligadas, predicados y cuantificadores llegará más adelante. Por ahora necesitamos sólo una advertencia:

> **La presencia de una letra no nos dice, por sí sola, si estamos ante una expresión abierta, una condición o una afirmación general.**

Debemos leer la frase matemática completa.

2.5. Parámetros: una familia dentro de una sola fórmula

La expresión $ax+b$ contiene tres letras. Sin contexto, no sabemos cuál de ellas debe variar y cuáles deben permanecer fijas.

Supongamos que declaramos: «fijemos a y b, y dejemos variar x». Entonces cada elección del par (a, b) determina una expresión distinta en x.

- si $a = 2$ y $b = 1$, obtenemos $2x + 1$;
- si $a = -1$ y $b = 4$, obtenemos $-x + 4$;
- si $a = 0$ y $b = 7$, obtenemos la expresión constante 7.

En este contexto, a y b son parámetros.

Un parámetro organiza una familia. Pensemos en $x^2 + ax + 1$.

La letra a no es algo que necesariamente debamos «resolver». Puede servir para recorrer una familia entera de expresiones:

$x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 - 3x + 1$, etc.

Esta idea será muy importante más adelante. Los parámetros aparecerán en familias de ecuaciones, polinomios, matrices, transformaciones y estructuras.

El mismo símbolo puede cambiar de papel. Si ahora fijamos $x = 2$ y dejamos variar a, la expresión se convierte en $5 + 2a$. En ese nuevo contexto, a es la variable que cambia.

No existe una clasificación absoluta del símbolo. Existe una clasificación **dentro de una situación matemática concreta**.

Cambiar qué letra se fija cambia la pregunta. En $(a+x)/(x-1)$ las letras no llegan con un papel permanente. Si fijamos $a = 2$ y dejamos variar x, obtenemos $(2 + x)/(x - 1)$, con $x \neq 1$. Si fijamos $x = 2$ y dejamos variar a, obtenemos $(a + 2)/1$, que puede evaluarse para cualquier real a. Cambian la letra que recorre entradas y la restricción de esas entradas.

Contexto	Se mantiene fijo	Entrada que cambia	Expresión resultante	Restricción
Primero	$a = 2$	x	$(2 + x)/(x - 1)$	$x \neq 1$
Segundo	$x = 2$	a	$a + 2$	Ninguna sobre $a \in \mathbb{R}$

No se ha resuelto una ecuación: se han organizado dos familias de evaluaciones. Para pedir una incógnita habría que añadir una condición, por ejemplo un valor que deba alcanzar la expresión. Antes de operar, escribe qué se fija, qué puede variar y qué restricciones sobreviven a esa decisión.

Control. Fija ahora $a = -1$ y deja variar x. Un borrador dice «queda $(x - 1)/(x - 1)$, que siempre vale 1». ¿Qué palabra necesita corregirse?

Solución. "Siempre" debe limitarse a $x \neq 1$. En cada entrada admitida el numerador y denominador son el mismo número no nulo, por lo que el cociente vale 1. En $x = 1$, ambos son cero y no hay evaluación. Que el parámetro haga coincidir las partes no elimina el denominador. Recupera §2.1 para revisar los papeles de las letras y §2.3 para conservar las restricciones después de sustituir.

2.6. El signo igual no es una flecha

Uno de los hábitos más resistentes de la aritmética escolar consiste en leer = como «da» o «ahora viene el resultado».

Así, una línea como $7 + 5 = 12$ puede interpretarse mentalmente como una instrucción: «suma siete y cinco; da doce».

Pero la igualdad dice algo más simétrico:

$7 + 5$ y 12 representan el mismo número.

Por eso también podemos escribir $12 = 7 + 5$.

La escritura puede parecer extraña si estamos acostumbrados a leer de izquierda a derecha como una secuencia de instrucciones, pero matemáticamente expresa la misma igualdad.

Igualdad como relación. Cuando escribimos $A = B$, afirmamos que los dos miembros representan el mismo objeto o valor dentro del contexto considerado.

Eso tiene consecuencias importantes para la escritura matemática.

No debemos usar = como si significara:

- «y después»;
- «entonces»;
- «el siguiente paso es»;
- «aproximadamente»;
- «produce».

Cada signo = de una cadena debe afirmar una igualdad real.

Por ejemplo, la cadena

$3 + 4 = 7 = 14/2$

es correcta: los tres miembros valen 7.

En cambio,

$3 + 4 = 7 \cdot 2 = 14$

es incorrecta como cadena de igualdades, porque $3 + 4 = 7$, mientras $7 \cdot 2 = 14$ y $7 \neq 14$.

El problema no es estético. La cadena está afirmando algo falso.

Las cadenas de igualdades condensan razonamiento. Una cadena correcta como

$2(x + 3) = 2x + 6 = 6 + 2x$

afirma que, bajo las condiciones en que esas transformaciones sean válidas, todas las expresiones representan el mismo valor.

En C3 estudiaremos precisamente **por qué** ciertos reemplazos son legítimos. Aquí basta entender qué está afirmando el signo igual cuando aparece.

2.7. Igualdad particular, ecuación e identidad

El mismo símbolo = aparece en situaciones matemáticamente diferentes.

Una igualdad particular. $2+3 = 5$ es una igualdad concreta. No hay variables abiertas ni valores por determinar.

Una ecuación. $x^2 = 4$ impone una condición sobre x.

No es verdadera para todos los números reales. Es verdadera para ciertos valores y falsa para otros.

Resolver la ecuación significa determinar los valores admisibles que hacen verdadera esa igualdad.

Una identidad. Consideremos $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

En el dominio usual de los números reales, esta igualdad pretende ser válida para **todo** valor de x.

A una igualdad de este tipo la llamamos **identidad** sobre el dominio especificado.

La diferencia fundamental entre ecuación e identidad no está en el aspecto del signo =. Está en el alcance de lo que se afirma:

- una ecuación selecciona los valores que satisfacen una condición;

- una identidad afirma que dos expresiones coinciden para todos los valores admisibles del dominio indicado.

El dominio forma parte de la identidad. Decir simplemente «esto es una identidad» puede ser incompleto.

Por ejemplo, $x^2 = y^2$ no es una identidad en dos variables reales: sólo es verdadera para ciertos pares (x, y).

En cambio, $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ sí pretende valer para todo par de números reales x, y.

Cuando el dominio cambie, debemos revisar qué operaciones están disponibles y para qué valores están definidas.

2.8. Coincidir donde ambas expresiones existen no significa tener el mismo dominio

Consideremos

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

y $x+1$.

Si $x \neq 1$, la primera expresión puede reescribirse, una vez justificadas las leyes correspondientes, de modo que produce el mismo valor que $x+1$.

Pero en $x = 1$ ocurre algo distinto:

- $x+1$ está perfectamente definida y vale 2;
- $\frac{x^2-1}{x-1}$ no está definida, porque el denominador es 0.

Por tanto, no debemos borrar silenciosamente la restricción $x \neq 1$.

Podemos afirmar:

> Para todo número real $x \neq 1$, $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$.

Lo que no debemos hacer es concluir que las dos escrituras tienen exactamente el mismo dominio natural.

La simplificación puede ocultar información. Este ejemplo muestra una idea que reaparecerá muchas veces:

> Una transformación algebraica puede conservar valores en un dominio restringido y, al mismo tiempo, ocultar la razón por la cual ciertos valores estaban excluidos.

Por eso las restricciones de dominio deben acompañar al razonamiento.

Cuando resolvamos ecuaciones racionales, estudiemos funciones o tomemos límites, perder una restricción puede cambiar el problema.

Dominio natural y entradas permitidas por el contexto. El dominio natural indica dónde las operaciones escritas pueden evaluarse. El dominio declarado indica qué entradas decide admitir el problema; debe estar contenido en el natural. Una expresión puede tener valor en una entrada que el contexto haya excluido.

Compara $(x-3)/(x-3)$ y 1. La primera tiene dominio natural formado por todos los reales excepto 3; la segunda puede evaluarse en cualquier real. En una actividad que declare $x > 3$, ambas reglas admiten exactamente esas entradas y dan siempre 1. Así coinciden tanto las entradas permitidas como los valores sobre ese dominio declarado. La noción formal de

igualdad de funciones se estudiará en C9; aquí basta registrar esas dos coincidencias por separado.

Entrada	¿La primera expresión tiene valor?	¿La segunda tiene valor?	¿La actividad $x > 3$ la permite?
2	Sí, 1	Sí, 1	No
3	No	Sí, 1	No
4	Sí, 1	Sí, 1	Sí

Restringir una regla no cambia su fórmula, pero sí las entradas que estamos estudiando. En cambio, permitir una entrada donde una división no existe exigiría definir un nuevo valor por otra regla: no sería una mera declaración de dominio.

Control. ¿Podemos declarar $x \leq 3$ como dominio completo de ambas expresiones sin modificar sus reglas? ¿Y $x < 3$?

Solución. El primer dominio incluye 3, donde la primera expresión no tiene valor, así que no sirve para ambas. El segundo excluye 3 y está contenido en los dos dominios naturales: en todas sus entradas ambas dan 1. Para distinguir restricción contextual y operación imposible, vuelve a §2.3; para reconocer qué cambia al quitar entradas, vuelve a C1 §1.8, información conservada por una representación.

2.9. Una misma cantidad puede tener formas diferentes

Comparemos $2(x + 3)$ y $2x + 6$.

La primera forma muestra con claridad un producto entre 2 y $x + 3$.

La segunda muestra una suma de dos términos.

Si sabemos que ambas representan el mismo valor para todos los números del dominio usual, podemos elegir la forma que resulte más útil para una tarea concreta.

Algo semejante ocurre con $(x - 1)(x + 1)$ y $x^2 - 1$.

La forma factorizada permite ver inmediatamente dos factores. La forma desarrollada exhibe una diferencia de cuadrados.

«Más simple» depende del propósito. No existe siempre una única forma «más simple».

Si queremos evaluar en $x = 1$, $2(x + 3)$ es tan manejable como $2x + 6$.

Si queremos identificar el factor $x - 1$, la expresión $(x - 1)(x + 1)$ puede ser mucho más informativa que $x^2 - 1$.

Si queremos comparar coeficientes, quizá ocurra lo contrario.

El dominio algebraico incluye la capacidad de elegir representaciones.

Pero todavía falta justificar. En este capítulo estamos aprendiendo a reconocer cuándo dos formas parecen representar lo mismo y bajo qué condiciones.

Todavía no hemos establecido sistemáticamente las leyes que nos autorizan a pasar de una forma a otra.

Ésa será la tarea de C3.

2.10. Errores de lectura que conviene detectar

Los errores algebraicos no siempre provienen de cálculos difíciles. Muchos nacen de una mala interpretación de la escritura.

Error 1: toda letra debe resolverse. Ante $3x+1$, preguntar «¿cuánto vale x?» carece de sentido si no se ha dado ninguna condición adicional.

La expresión puede estudiarse sin resolver nada.

Error 2: confundir evaluación con ecuación. Evaluar x^2+1 en $x=3$ produce 10.

Resolver $x^2+1=10$ pregunta qué valores de x hacen verdadera la igualdad.

Son tareas distintas.

Error 3: usar = como marcador de pasos. La cadena $5+2=7\cdot 3=21$ es falsa como igualdad encadenada.

Si queremos describir una secuencia de acciones, debemos escribirla de otra manera y reservar = para igualdad.

Error 4: olvidar restricciones. De $\frac{x^2-1}{x-1}$ no debemos pasar a $x+1$ y luego actuar como si $x=1$ siempre hubiese sido admisible.

Error 5: confundir muchos casos con identidad. Comprobar que dos expresiones coinciden para $x=0,1,2,3,4$ no demuestra, por sí solo, que sean idénticas en todos los reales.

Error 6: creer que la letra determina el papel. En $ax+b$, las letras a,b,x no llegan etiquetadas como «parámetros» o «variables». Esa elección depende del contexto del problema.

2.11. Una rutina de lectura simbólica

Antes de manipular una escritura algebraica, conviene recorrer mentalmente esta secuencia:

1. **¿Qué tipo de escritura tengo?** ¿Una expresión, una igualdad, una desigualdad, una condición?
2. **¿Qué papel cumple cada símbolo?** ¿Incógnita, valor arbitrario, variable libre, parámetro, índice?
3. **¿Cuál es el dominio?** ¿Qué valores estamos permitiendo?
4. **¿Hay valores inadmisibles?** ¿Alguna operación deja de estar definida?
5. **¿Qué afirma exactamente el signo =?**
6. **¿La igualdad es particular, una ecuación o una identidad?**
7. **¿Dos formas coinciden en todo el dominio o sólo bajo restricciones?**
8. **¿Qué información hace visible cada forma?**
9. **¿Qué ley necesitaría para justificar una transformación?**

La última pregunta es el punto de llegada de este capítulo.

Hasta aquí hemos aprendido a **interpretar**.

Ahora estamos preparados para preguntar por la **legitimidad de las transformaciones**.

Ejercicios

Todos los ejercicios de este capítulo son originales para *Álgebra para matemáticos*, aunque su dificultad y tipología se calibran con el corpus universitario y los textos de referencia del capítulo.

A. El papel de las letras

1. En $x + 5 = 12$, describe el papel de x.
2. En la frase «sea n un entero», explica por qué n no debe interpretarse automáticamente como una incógnita.
3. En $ax + b$, supón que a y b son fijos y x varía. Clasifica el papel de cada letra.
4. En $x^2 + ax + 1$, fija $x = 2$ y deja variar a. ¿Qué letra funciona ahora como variable?
5. Da dos contextos distintos en los que la misma letra m desempeñe papeles diferentes.
6. Explica por qué la pregunta «¿cuánto vale x?» no está determinada por la expresión $3x - 7$.

B. Leer la estructura de una expresión

7. En $4(x - 3)^2$, identifica tres subexpresiones y describe la operación principal.
8. Compara la estructura de $3(x + 2)$ y $3x + 2$. No evalúes todavía.
9. En $\frac{x+1}{x^2+4}$, identifica numerador, denominador y las operaciones internas de cada uno.
10. Explica por qué $\frac{1}{x+1}$ y $\frac{1}{x} + 1$ no tienen la misma estructura. Compruébalo además con $x = 1$.
11. Escribe una expresión cuya operación principal sea una división y cuyo numerador tenga como operación principal una suma.
12. Para $a - (b + c)$ y $(a - b) + c$, describe cómo cambia la agrupación.

C. Sustitución, evaluación y dominio

13. Evalúa $x^2 - 4x + 3$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 5$.
14. Evalúa $2(a + b)^2$ en $a = 1$, $b = -3$.
15. Determina qué valores reales no son admisibles en $\frac{1}{x-4}$.
16. Determina qué valores reales no son admisibles en $\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}$.
17. Explica por qué «evaluar $\frac{1}{x-2}$ en $x = 2$» no produce un número real.
18. La expresión $\frac{3}{a-b}$ se interpreta sobre números reales. Formula con palabras la restricción necesaria sobre a y b.

D. Parámetros y familias

19. En $x^2 + ax + 1$, escribe las expresiones de la familia correspondientes a $a = 0$, $a = 1$, $a = -2$ y $a = 5$.
20. En $ax + b$, toma $(a, b) = (2, -1)$, $(-3, 4)$ y $(0, 5)$. ¿Qué tres expresiones en x obtienes?
21. Explica cómo puede cambiar el papel de a en $x^2 + ax + 1$ si fijamos x y dejamos variar a.
22. Diseña una familia de expresiones dependiente de un parámetro k y muestra tres miembros distintos de la familia.

E. El signo igual

23. Decide cuáles de estas cadenas son correctas como cadenas de igualdad:
    - a) $4 + 5 = 9 = 18/2$;
    - b) $4 + 5 = 9 \cdot 2 = 18$;
    - c) $3^2 = 9 = 12 - 3$;
    - d) $10 - 4 = 6 = 2 \cdot 3$.
24. Reescribe correctamente la cadena incorrecta $5 + 3 = 8 \cdot 4 = 32$ de modo que exprese dos cálculos sucesivos sin afirmar una igualdad falsa.
25. Explica por qué $12 = 7 + 5$ es tan legítimo como $7 + 5 = 12$.

26. Un estudiante escribe $2 + 6 = 8 + 3 = 11$. Señala exactamente qué igualdad falsa está afirmando.
27. Construye una cadena de cuatro expresiones diferentes que sean todas iguales a 12.

F. Ecuación, identidad y condición

28. Clasifica cada caso como igualdad particular, ecuación/condición o identidad sobre los reales:
    - a) $7 - 2 = 5$;
    - b) $x + 4 = 9$;
    - c) $2(x + 1) = 2x + 2$;
    - d) $x^2 = 9$;
    - e) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.
29. Para $x^2 = 9$, indica qué valores reales satisfacen la ecuación. Explica por qué eso no la convierte en identidad.
30. Da un ejemplo de una igualdad con una variable que sea verdadera para algunos números reales pero no para todos.
31. Da un ejemplo de una identidad elemental en dos variables reales.
32. Explica por qué comprobar una igualdad para cinco valores de x no basta, en general, para declararla identidad.

G. Dominio e identidades condicionadas

33. Compara $\frac{x^2-4}{x-2}$ y $x + 2$. ¿Para qué valores reales están ambas expresiones definidas?
34. Explica con precisión qué restricción debe acompañar a la igualdad $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$.
35. Considera $\frac{x(x-5)}{x} = x - 5$. ¿Qué valor debe excluirse del miembro izquierdo? ¿Qué ocurre con el miembro derecho en ese valor?
36. Un estudiante cancela x en $\frac{x^2}{x} = x$ y concluye que ambas expresiones tienen exactamente el mismo dominio real. Explica el error.
37. Construye un ejemplo propio de dos expresiones que coincidan para todos los valores donde la primera está definida, pero que no tengan el mismo dominio natural.

H. Formas y significado

38. Compara $3(x - 2)$ y $3x - 6$. ¿Qué estructura hace visible cada forma?
39. Compara $(x - 4)(x + 4)$ y $x^2 - 16$. Sin desarrollar una teoría de factorización, explica qué información resulta más visible en cada forma.
40. Explica por qué no siempre tiene sentido preguntar cuál de dos formas algebraicamente equivalentes es «la más simple» sin especificar el propósito.

I. Síntesis

41. Analiza completamente la escritura $\frac{a(x+1)}{x-2} = 3$ bajo el supuesto de que a es un parámetro real y x la incógnita. Identifica papeles, dominio y tipo de igualdad. No resuelvas la ecuación.
42. Escribe un párrafo matemático que explique por qué **interpretar correctamente una expresión debe preceder a transformarla**. Tu respuesta debe mencionar al menos variable, dominio, igualdad y alguna posible restricción.

J. Evaluar bajo restricciones superpuestas

43. Considera $(x-2)/(x-2)+1/(x+1)$ sobre los reales. Escribe todas las restricciones y evalúa, o rechaza justificadamente la evaluación, en $x=2,-1,0,3$. Explica por qué reemplazar el primer cociente por 1 antes de registrar su dominio puede cambiar la respuesta.
44. Para $1/(a-b)+1/(a+b)$, identifica las restricciones sobre las dos entradas reales y estudia $(a,b)=(2,1),(1,1),(1,-1),(0,2)$. Distingue un resultado igual a cero de una expresión que no tiene valor.
45. La expresión $1/(1-1/x)$ contiene una división dentro de otra. Determina su dominio real y evalúa o rechaza los valores $x=0,1,2,-1$. Indica en qué nivel de la expresión aparece cada impedimento.
46. Se declara que las entradas de $(x+1)/(x-1)$ deben ser reales no negativos. Clasifica $x=-2,0,1,3$ según dos preguntas distintas: ¿las operaciones tienen valor?, ¿la entrada está permitida en esta actividad? Calcula donde corresponda y escribe el dominio efectivo.
47. Para $0/(ab)+1/(a-b)$ sobre entradas reales, identifica todas las restricciones y evalúa o rechaza $(0,1),(2,2),(2,-2),(1,2)$. Un borrador omite el primer término porque su numerador es cero: explica qué información pierde.

K. Igualdad puntual, identidad restringida y reglas con dominio

48. Compara x^2 y x. Decide si la igualdad es identidad sobre cada dominio declarado: las entradas $0,1$; las entradas $-1,0,1$; todos los reales. Distingue la igualdad particular en 1 de la afirmación sobre cada dominio y explica cuándo las dos reglas tienen las mismas entradas permitidas y valores.
49. Compara x/y y y/x sobre entradas reales. Determina el dominio natural de cada expresión y el común. Comprueba su igualdad cuando $x=y\neq 0$ y cuando $y=-x\neq 0$. ¿Es identidad sobre todas las entradas del dominio común? Da un caso que decida esa última pregunta.
50. La igualdad $2x+1=x+3$ es verdadera en $x=2$. Evalúala también en 0 y decide si es identidad sobre todos los reales. Si declaramos como único valor admisible $x=2$, ¿cambia la respuesta sobre identidad? Explica qué cambia y qué permanece en la escritura.
51. La expresión $0/x$ vale cero en cada entrada real no nula. Se proponen dos reglas completas: A entrega siempre 0; B entrega 0 si la entrada no es nula y 5 si es nula. Compara sus coincidencias con la expresión original y entre sí. ¿La coincidencia fuera de cero obliga a una única manera de completar la entrada ausente?
52. Examina la cadena
$$\frac{x-2}{x-2}=1=\frac{x+3}{x+3}.$$
Determina el dominio natural de cada miembro y el dominio donde la cadena completa tiene sentido. Evalúa o rechaza $x=0,2,-3$. Explica por qué escribir el miembro central no elimina las restricciones de los extremos.

L. Cambiar los papeles de parámetro y entrada

53. En $(a+1)/(x-2)$, compara tres contextos: fijar $a=2$ y variar x; fijar $x=3$ y variar a; fijar $x=2$ y variar a. Escribe la expresión y el dominio en cada uno. Explica por qué elegir $a=-1$ no rescata el tercer contexto y por qué todavía no hay una ecuación que resolver.
54. Para $x/(ax-1)$, fija sucesivamente $a=0,1,-1$ y describe las tres reglas en la entrada x, con sus restricciones. Después fija $x=0$ y $x=1$, dejando variar a. Compara los

dominios y explica por qué el caso $a = 0$ no debe tratarse como si excluyera una entrada $1/a$.

55. Considera $(a - x)/(a + x)$. Construye una tabla fijando $a = 2$ y variando $x = 0, 2, -2$, y otra fijando $x = 2$ y variando $a = 0, 2, -2$. Identifica los papeles y restricciones. ¿El dato común con $a = x = 2$ permite afirmar que intercambiar los papeles conserva todos los valores?
56. Para $(a + 1)x + 2$, compara: $a = -1$ fijo y x variable; $x = 0$ fijo y a variable; $x = 2$ fijo y a variable. Evalúa cada contexto para entradas variables $-1, 0, 1$. Explica por qué obtener una constante no impide que una letra siga recorriendo entradas y por qué no hay que buscar su valor por hábito.

M. Mismos valores, dominios diferentes

57. Construye dos expresiones que den $x + 2$ en cada entrada de su dominio natural: una debe excluir sólo 0 y la otra exactamente 0 y 1. No declares restricciones arbitrarias: los valores excluidos deben surgir de las operaciones escritas. Compara qué ocurre en $0, 1, 2$.
58. Construye dos expresiones en entradas reales a, b que siempre den cero donde existan, pero cuyos dominios naturales no estén contenidos uno en el otro. Exhibe una entrada permitida sólo por la primera, otra sólo por la segunda y una permitida por ambas. Explica qué significa coincidir en la parte común.
59. Partiendo de $1/(x + 1)$, construye una expresión que dé los mismos valores donde exista pero tenga además excluida la entrada 2. Escribe ambos dominios naturales y compáralos después de declarar que sólo se permiten reales $x \geq 3$. Distingue una exclusión por operación de una exclusión por contexto.
60. Fija dos parámetros reales distintos a, b. Construye dos expresiones en x que den x en cada entrada admisible y excluyan respectivamente sólo a y sólo b. Compara ambas en las entradas a y b y en el dominio común. Decide qué cambiaría si los parámetros coincidieran. Identifica los papeles antes de interpretar las igualdades.

Soluciones

A. El papel de las letras

1. En $x + 5 = 12$, x funciona como incógnita: la igualdad impone una condición y buscamos los valores que la satisfacen. En este caso elemental existe un único valor real, pero el punto del ejercicio es identificar el papel de la letra antes de resolver.

2. La frase «sea n un entero» elige un entero sin especificar cuál. La letra puede representar un entero arbitrario sobre el cual queremos razonar. No aparece ninguna condición que nos pida descubrir su valor.

3. Bajo la declaración dada, x es la variable que puede cambiar. Los símbolos a y b se mantienen fijos y actúan como parámetros que determinan cuál miembro de la familia $ax + b$ estamos estudiando.

4. Al fijar $x = 2$, la expresión queda $4 + 2a + 1 = 5 + 2a$. Si dejamos variar a, es a quien desempeña el papel de variable.

5. Ejemplo 1: en $m + 2 = 9$, m puede ser una incógnita. Ejemplo 2: en «sea m un entero cualquiera», m representa un valor arbitrario. La letra es la misma; cambia el contexto.

6. $3x - 7$ es una expresión, no una ecuación. No se ha impuesto ninguna condición que seleccione un valor particular de x. Podemos evaluar la expresión para muchos valores de x, pero no hay nada que «resolver».

B. Leer la estructura de una expresión

7. En $4(x-3)^2$ aparecen, por ejemplo, las subexpresiones $x-3$, $(x-3)^2$ y $4(x-3)^2$. La operación principal es la multiplicación de 4 por $(x-3)^2$.

8. En $3(x+2)$, la suma $x+2$ está agrupada y toda ella se multiplica por 3. En $3x+2$, primero aparece el producto $3x$ y luego se suma 2. La organización interna es distinta aunque posteriormente podamos estudiar relaciones entre ambas formas.

9. El numerador es $x+1$ y su operación interna principal es una suma. El denominador es x^2+4 y también está organizado como suma, una de cuyas partes es la potencia x^2. La operación principal de la expresión completa es la división.

10. En $\frac{1}{x+1}$ el denominador completo es $x+1$. En $\frac{1}{x}+1$, la división $1/x$ se realiza primero y después se suma 1. Con $x=1$, la primera vale $1/2$ y la segunda vale 2, por lo que ni siquiera coinciden en ese caso.

11. Un ejemplo es $\frac{x+3}{x^2+1}$. La operación principal es la división y el numerador $x+3$ tiene como operación principal una suma.

12. En $a-(b+c)$, primero se considera la suma $b+c$ y luego se resta el resultado a a. En $(a-b)+c$, primero se forma $a-b$ y luego se suma c. Los paréntesis indican agrupaciones distintas.

C. Sustitución, evaluación y dominio

13. Para $x=0$, $x^2-4x+3=3$.
Para $x=1$, $1-4+3=0$.
Para $x=5$, $25-20+3=8$.

14. Sustituyendo $a=1$ y $b=-3$:
$2(a+b)^2=2(1-3)^2=2(-2)^2=8$.

15. En $\frac{1}{x-4}$ el denominador no puede ser 0. Por tanto, $x=4$ no es admisible. Sobre los reales, el dominio natural es $\mathbb{R}$ excluyendo 4.

16. El denominador $(x-1)(x+3)$ es 0 cuando $x=1$ o $x=-3$. Esos dos valores deben excluirse.

17. Con $x=2$, el denominador $x-2$ vale 0, de modo que aparece $1/0$. La división por cero no está definida en los números reales; por eso la evaluación no produce un número real.

18. Debe cumplirse $a-b\neq 0$, es decir, $a\neq b$.

D. Parámetros y familias

19. Para $a=0$: x^2+1.
Para $a=1$: x^2+x+1.
Para $a=-2$: x^2-2x+1.
Para $a=5$: x^2+5x+1.

20. Con $(a,b)=(2,-1)$: $2x-1$.
Con $(a,b)=(-3,4)$: $-3x+4$.
Con $(a,b)=(0,5)$: 5.

21. Si fijamos x, entonces el valor de x deja de cambiar dentro del problema. La expresión resultante depende de a, de modo que a puede pasar a ser la variable. El papel no pertenece intrínsecamente a la letra.

22. Respuesta abierta. Ejemplo: $x^2 + k$. Para $k = 0, 1, -4$ obtenemos x^2, $x^2 + 1$ y $x^2 - 4$. Aquí k parametriza una familia de expresiones en x.

E. El signo igual

23.

a) Correcta: $4 + 5 = 9$ y $9 = 18/2$.
b) Incorrecta: $4 + 5 = 9$, pero $9 \cdot 2 = 18$, así que la cadena afirma falsamente $9 = 18$.
c) Correcta: $3^2 = 9$ y $12 - 3 = 9$.
d) Correcta: $10 - 4 = 6$ y $2 \cdot 3 = 6$.

24. Una escritura correcta podría ser: «Primero $5 + 3 = 8$; luego $8 \cdot 4 = 32$». También puede escribirse en dos líneas separadas. Lo importante es no usar un único signo igual para afirmar que $5 + 3$, $8 \cdot 4$ y 32 son todos el mismo número.

25. La igualdad es una relación simétrica: si dos expresiones representan el mismo número, el orden en que las escribimos a ambos lados no cambia ese hecho. 12 y $7 + 5$ representan ambos el número 12.

26. La escritura afirma $2 + 6 = 8$, lo cual es verdadero, y además $8 = 8 + 3$, es decir, $8 = 11$, lo cual es falso. El segundo signo igual es el incorrecto.

27. Por ejemplo: $12 = 6 + 6 = 3 \cdot 4 = 24/2$. Todas las expresiones representan 12.

F. Ecuación, identidad y condición

28.

a) $7 - 2 = 5$: igualdad particular.
b) $x + 4 = 9$: ecuación o condición.
c) $2(x + 1) = 2x + 2$: identidad sobre los reales.
d) $x^2 = 9$: ecuación o condición.
e) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$: identidad sobre los reales.

29. Los valores reales que satisfacen $x^2 = 9$ son $x = 3$ y $x = -3$. No es identidad porque, por ejemplo, $x = 0$ no la satisface.

30. Ejemplo: $x + 1 = 4$. Es verdadera para $x = 3$ y falsa para la mayoría de los demás números reales.

31. Un ejemplo es $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, válida para todos los números reales x, y.

32. Cinco comprobaciones cubren sólo cinco casos. Una identidad sobre los reales pretende valer para todos los valores admisibles. Podría existir un valor no comprobado en el que la igualdad falle.

G. Dominio e identidades condicionadas

33. $x + 2$ está definida para todo número real. La expresión $\frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida en $x = 2$. Ambas están definidas simultáneamente para todos los reales excepto 2.

34. La igualdad debe acompañarse de la condición $x \neq 2$:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x+2, \qquad x \neq 2.$$

La condición recuerda que la expresión racional original no existe en $x = 2$.

35. En $\frac{x(x-5)}{x}$ debe excluirse $x = 0$. El miembro derecho $x - 5$ sí está definido en $x = 0$ y vale -5. Por eso las expresiones coinciden donde la primera está definida, pero no tienen el mismo dominio natural.

36. La cancelación presupone $x \neq 0$, porque el denominador de la expresión original es x. Aunque el resultado escrito x esté definido en 0, ese valor no pertenecía al dominio de $\frac{x^2}{x}$. El error consiste en confundir igualdad de valores en el dominio permitido con igualdad de dominios.

37. Ejemplo: $\frac{x^2-9}{x-3}$ y $x + 3$. Para todo $x \neq 3$ producen el mismo valor, pero la primera no está definida en $x = 3$ y la segunda sí.

H. Formas y significado

38. $3(x - 2)$ hace visible un producto entre 3 y la diferencia $x - 2$. $3x - 6$ hace visible una diferencia entre los términos $3x$ y 6. Las dos formas pueden ser útiles para preguntas distintas.

39. $(x - 4)(x + 4)$ hace visibles los factores $x - 4$ y $x + 4$. $x^2 - 16$ hace visible una diferencia entre dos cuadrados. La utilidad de cada forma depende de qué queramos estudiar.

40. «Más simple» no es una propiedad absoluta. Una forma factorizada puede ser mejor para estudiar factores o valores que anulan una expresión; una forma desarrollada puede ser mejor para comparar coeficientes o sumar expresiones. Sin especificar la tarea, la comparación es incompleta.

I. Síntesis

41. En $\frac{a(x+1)}{x-2} = 3$, a es un parámetro real fijo y x es la incógnita.

La expresión de la izquierda contiene una división, por lo que $x = 2$ no es admisible.

La igualdad no es una identidad en x: impone una condición que sólo ciertos valores de x pueden satisfacer, dependiendo además del parámetro a.

Resolverla requeriría encontrar, para cada situación pertinente, los valores admisibles de x que hacen verdadera la igualdad. Eso queda fuera de la tarea pedida.

42. Respuesta modelo:

Interpretar una expresión debe preceder a transformarla porque los símbolos no tienen significado aislado del contexto. Una variable puede ser incógnita, parámetro o valor que simplemente puede variar; además, toda expresión se interpreta dentro de un dominio que puede excluir ciertos valores. El signo de igualdad afirma que dos miembros representan el mismo objeto o valor bajo las condiciones pertinentes, y una transformación puede dejar de ser válida si se pierde alguna restricción, como un denominador que no puede ser cero. Sólo después de identificar esos elementos podemos decidir qué transformación tiene sentido y qué propiedad tendría que justificarla.

J. Evaluar bajo restricciones superpuestas

43. Deben cumplirse $x \neq 2$ y $x \neq -1$. En 2, el primer cociente es $0/0$, por lo que la expresión no tiene valor; que el segundo término sí lo tenga no repara la división. En -1, el primer cociente vale 1, pero el segundo divide por cero y la expresión completa tampoco tiene valor.

En 0 se obtiene $(-2)/(-2)+1/1 = 2$. En 3, $1/1+1/4 = 5/4$. El reemplazo por 1 coincide con el primer cociente en su dominio $x \neq 2$; si se olvida esa condición, se atribuiría indebidamente a la expresión original el valor $4/3$ en 2.

44. Las restricciones son $a \neq b$ y $a \neq -b$, porque ambos denominadores deben ser no nulos. En $(2, 1)$, el valor es $1 + 1/3 = 4/3$. En $(1, 1)$, $a - b = 0$, y en $(1, -1)$, $a + b = 0$; ambas evaluaciones son inadmisibles.

En $(0, 2)$, los denominadores son -2 y 2, ambos no nulos, y la suma es $-1/2 + 1/2 = 0$. Aquí el cero es un valor bien definido, obtenido al sumar dos números. No debe confundirse con dividir por cero, que impediría disponer de esos números.

45. Primero $x \neq 0$ para que exista $1/x$. Una vez calculada esa parte, $1 - 1/x$ debe ser no nulo, lo que excluye $x = 1$. Así el dominio natural son los reales excepto 0 y 1.

En 0 falla la división interna. En 1, la división interna sí existe y vale 1, pero el denominador externo queda 0. En 2, el valor es $1/(1 - 1/2) = 2$. En -1, es $1/(1 - (-1)) = 1/2$. No basta inspeccionar el denominador más exterior como una escritura aislada: antes debe poder evaluarse cada una de sus partes.

46. La expresión tiene dominio natural $x \neq 1$. La condición de la actividad añade $x \geq 0$, de modo que el dominio efectivo está formado por los reales no negativos distintos de 1.

En -2, las operaciones tienen valor $(-1)/(-3) = 1/3$, pero la actividad excluye esa entrada por ser negativa. En 0, la entrada está permitida y el valor es -1. En 1, la entrada cumple no negatividad, pero la división no existe, así que no pertenece al dominio efectivo. En 3, la entrada está permitida y el valor es $4/2 = 2$. Tener un valor numérico no equivale a estar autorizado por el contexto, y satisfacer la condición contextual no basta si alguna operación falla.

47. Se requiere $ab \neq 0$, es decir, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, y también $a \neq b$. En $(0, 1)$ falla el primer denominador; el segundo término vale -1, pero la expresión completa no tiene valor. En (2, 2) el primer término es $0/4 = 0$ y falla el segundo denominador.

En $(2, -2)$, los denominadores son -4 y 4, y el resultado es $1/4$. En $(1, 2)$, son 2 y -1, y el resultado es -1. Omitir $0/(ab)$ sin conservar su restricción permitiría indebidamente entradas donde $ab = 0$. Sólo cuando el denominador es no nulo se puede afirmar que ese cociente vale cero.

K. Igualdad puntual, identidad restringida y reglas con dominio

48. Sobre el dominio formado por $0, 1$, las dos evaluaciones coinciden: $0^2 = 0$ y $1^2 = 1$. Como se verificaron todas las entradas de ese dominio finito, allí es una identidad. Con esas mismas entradas declaradas, ambas reglas tienen iguales valores y entradas permitidas.

Sobre $-1, 0, 1$, falla en -1, pues $(-1)^2 = 1 \neq -1$, y no es identidad. Tampoco es identidad sobre todos los reales; ese mismo contraejemplo basta. La igualdad particular en 1 sólo compara un caso. Puede integrar una identidad sobre un dominio pequeño sin convertirse por ello en identidad sobre uno mayor.

49. La primera expresión exige $y \neq 0$; la segunda, $x \neq 0$. Su dominio común requiere ambas condiciones, pero sus dominios naturales por separado son diferentes.

Si $x = y \neq 0$, cada cociente vale 1. Si $y = -x \neq 0$, ambos valen -1, porque cada entrada es el opuesto de la otra y es no nula. Sobre cada uno de esos dominios restringidos las expresiones coinciden. Sin embargo, en $(x, y) = (1, 2)$, que pertenece al dominio común, se obtiene $1/2$

y 2. Por tanto no hay identidad sobre todo el dominio común. Coincidir bajo una relación adicional entre las entradas no autoriza a retirar esa relación.

50. En 2, los dos miembros valen 5. En 0, el primero vale 1 y el segundo 3, así que la igualdad es falsa y no es identidad sobre todos los reales. Puede leerse como una ecuación que impone una condición; comprobar una solución no la convierte en identidad real.

Si el dominio declarado sólo contiene 2, la igualdad vale en cada entrada de ese dominio, por lo que sí es identidad allí. Ambas expresiones siguen teniendo dominio natural real; no cambiaron las operaciones ni la escritura. Cambió el alcance de la afirmación. Una identidad sobre un dominio de una sola entrada no afirma nada sobre las demás.

51. La expresión original excluye 0 por su denominador. A y B están definidas en todas las entradas reales por sus reglas declaradas; ambas coinciden con $0/x$ donde éste existe. Pero A entrega 0 en la entrada 0 y B entrega 5, así que no son la misma regla sobre su dominio completo.

Completar la entrada ausente no consiste en evaluar $0/0$: requiere una regla nueva para ese caso. La coincidencia en el dominio original no determina ese nuevo valor. Los dos candidatos dan una refutación concreta de la supuesta unicidad de la extensión. Si restringimos tanto A como B a entradas no nulas, tienen las mismas entradas y salidas; esa igualdad restringida no se extiende a todo su dominio.

52. El primer miembro excluye 2; el tercero excluye -3; la constante central está definida para cualquier real. La cadena completa sólo tiene sentido si $x \neq 2$ y $x \neq -3$. En cada entrada común, los cocientes son un número no nulo dividido por sí mismo y ambos valen 1, así que la cadena es una identidad en ese dominio restringido.

En 0, los tres miembros valen 1. En 2, el miembro izquierdo no tiene valor aunque el central y el derecho sí; la cadena completa no es admisible. En -3 falla el miembro derecho. El signo igual compara todos los miembros; una constante situada entre ellos no convierte las otras expresiones en constantes definidas en todas partes.

L. Cambiar los papeles de parámetro y entrada

53. Con $a = 2$, queda $3/(x-2)$, con entrada variable x y restricción $x \neq 2$. Con $x = 3$, queda $(a+1)/1 = a+1$, con entrada variable a y cualquier valor real admitido. En estos dos contextos la otra letra es el dato fijo.

Con $x = 2$, el denominador es cero para cualquier a, así que no existe una entrada real admisible de a para esa expresión. Tomar $a = -1$ produce $0/0$ y no lo repara. Los dominios pueden cambiar, incluso quedar sin entradas, al fijar un parámetro. No se ha impuesto un valor que la expresión deba alcanzar, por lo que se describen evaluaciones y no una incógnita seleccionada por una ecuación.

54. Con $a = 0$, el denominador es -1, así que queda $-x$ y toda entrada real x es admisible. Con $a = 1$, queda $x/(x-1)$ y se excluye $x = 1$. Con $a = -1$, queda $x/(-x-1)$ y se excluye $x = -1$.

Si fijamos $x = 0$, queda $0/(-1) = 0$ para todo real a, sin restricciones adicionales. Si fijamos $x = 1$, queda $1/(a-1)$ y se excluye $a = 1$. Para parámetros $a \neq 0$, puede localizarse la entrada excluida mediante $x = 1/a$, pero esa escritura no tiene sentido en $a = 0$. Allí hay que volver al denominador original, que nunca es cero. El parámetro controla el dominio, no sólo los resultados.

$a = 2$ fijo; entrada x	Valor

55. Las tablas son:

$a = 2$ fijo; entrada x	Valor
0	1
2	0
-2	No definido

$x = 2$ fijo; entrada a	Valor
0	-1
2	0
-2	No definido

En la primera, a es dato fijo y se excluye $x = -2$; en la segunda, x es dato fijo y se excluye $a = -2$. El punto común $a = x = 2$ da cero, pero comparar las entradas variables iguales a 0 produce 1 y -1. Por tanto ese punto coincidente no garantiza coincidencia de las dos familias de evaluaciones. La estructura del numerador registra cuál letra se resta a cuál.

56. En el primer contexto queda $0 \cdot x + 2 = 2$ para cualquier real x. En el segundo queda $(a + 1) \cdot 0 + 2 = 2$ para cualquier real a. En el tercero queda $2(a + 1) + 2 = 2a + 4$.

Entrada de la letra variable	Primer contexto	Segundo contexto	Tercer contexto
-1	2	2	2
0	2	2	4
1	2	2	6

En los dos primeros, las entradas pueden variar aunque el resultado no cambie. La letra variable se identifica por la declaración del contexto, no por la necesidad de que cambie la salida. Numéricamente ambas reglas constantes coinciden; los papeles asignados a los símbolos siguen siendo distintos. Ninguno de los contextos impone una ecuación que seleccione una entrada.

M. Mismos valores, dominios diferentes

57. Una respuesta es

$$x + 2 + \frac{0}{x}, \qquad x + 2 + \frac{0}{x(x-1)}.$$

La primera excluye sólo 0; la segunda excluye 0 y 1, donde se anula su denominador. En cada entrada admisible el término añadido vale cero, por lo que ambas dan $x + 2$.

En 0 ninguna está definida, aunque $x + 2$ por sí sola sí lo esté. En 1, la primera da 3 y la segunda no tiene valor. En 2, ambas dan 4. Los dominios diferentes provienen de divisiones expresas; no de un cambio verbal del rango. No se puede borrar el término cero junto con sus restricciones y afirmar que se conservó toda la regla original.

58. Podemos tomar $0/(a - b)$ y $0/(ab)$. La primera requiere $a \neq b$; la segunda, $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Cada cociente da cero cuando su denominador es no nulo.

En $(0, 1)$ existe la primera y no la segunda. En $(1, 1)$ existe la segunda y no la primera. Así ninguno de los dominios naturales está contenido en el otro. En $(1, 2)$ existen ambas y valen cero. En cualquier otra entrada común también dan cero, pues cada denominador allí

es no nulo. Coincidir en esa parte común compara valores bajo todas las restricciones juntas; no afirma igualdad de los dominios ni permite evaluar fuera de ellos.

59. Una posibilidad es

$$\frac{1}{x+1}+\frac{0}{x-2}.$$

La expresión inicial excluye sólo -1; la nueva excluye -1 y 2. En las entradas de la nueva, el segundo término es cero y ambas dan $1/(x+1)$. En 2, la inicial vale $1/3$ y la nueva no existe.

Al declarar $x \geq 3$, todas las entradas de ese rango pertenecen a los dos dominios naturales. Ambas reglas tienen entonces las mismas entradas permitidas y los mismos valores, aunque sus dominios naturales sigan siendo diferentes. Por ejemplo, 0 es matemáticamente admisible en ambas pero queda excluido por el contexto; 2 queda excluido por el contexto y además por una operación de la nueva expresión. Una restricción de actividad no modifica las operaciones originales.

60. Tomamos

$$x+\frac{0}{x-a}, \qquad x+\frac{0}{x-b}.$$

a, b son parámetros fijos y x recorre entradas reales. El primer dominio excluye sólo a; el segundo, sólo b. En cada uno, el término añadido vale cero y el resultado es x.

Como $a \neq b$, en $x = a$ la primera expresión no tiene valor y la segunda sí, con resultado a. En $x = b$ sucede lo contrario: la primera da b y la segunda no existe. En las entradas distintas de ambos parámetros, las dos dan el mismo valor x, pero tienen dominios naturales diferentes. Si $a = b$, las expresiones y los dominios coinciden; siguen excluyendo ese valor común. Una igualdad de resultados sobre la parte compartida no basta para borrar la restricción que el parámetro determina.

Capítulo 3

Leyes de las operaciones y transformaciones justificadas

Los dos primeros capítulos enseñaron a leer el lenguaje algebraico: distinguir objetos, operaciones y relaciones; reconocer el papel de una variable; controlar el dominio; diferenciar una ecuación de una identidad.

Ahora aparece una pregunta más exigente.

Cuando escribimos

$2(x+3) = 2x+6$,

¿por qué podemos reemplazar la primera expresión por la segunda?

Cuando pasamos de

$x+5 = 12$

a

$x = 7$,

¿qué transformación hemos realizado y por qué conserva exactamente las soluciones?

Y cuando alguien «cancela» un factor, divide por una expresión o eleva ambos miembros al cuadrado, ¿cómo sabemos si el paso es reversible?

Este capítulo introduce una regla de trabajo que permanecerá durante toda la colección:

> **Una transformación algebraica no se acepta porque "se hace así", sino porque existe una propiedad que la justifica bajo hipótesis precisas.**

El propósito no es volver lento el cálculo. Es construir una fluidez más profunda: poder transformar con rapidez **porque entendemos qué estamos haciendo**.

3.1. Una respuesta correcta puede contener un razonamiento incorrecto

Consideremos el siguiente intento de resolver $x+4=9$:

$$\begin{aligned} x+4 &= 9 \\ x &= 9-4 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

El resultado es correcto. Pero la frase escolar «el 4 pasa restando» oculta la transformación real. No hemos movido ningún objeto a través del signo igual. Hemos sumado -4 a ambos miembros:

$$\begin{aligned} x+4 &= 9 \\ (x+4)+(-4) &= 9+(-4) \\ x+(4+(-4)) &= 5 \\ x+0 &= 5 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

La primera cadena es una abreviación útil sólo cuando sabemos reconstruir la segunda.

Ahora observemos un razonamiento diferente:

$$x = 1$$
$$x^2 = 1.$$

El paso es válido: si $x = 1$, entonces $x^2 = 1$. Pero el camino inverso no recupera la información original, porque $x^2 = 1$ también es cierto cuando $x = -1$.

Este contraste introduce dos preguntas que acompañarán todo el capítulo:

1. **¿el paso es válido?**
2. **¿el paso puede revertirse sin perder ni añadir posibilidades?**

Llegar a una respuesta correcta no basta para validar una cadena. Una solución matemática debe poder defender sus transformaciones.

3.2. La igualdad permite sustituir iguales por iguales

Si $A = B$, entonces A y B representan el mismo objeto o valor en el contexto considerado.

Por eso, cuando una operación está definida, podemos sustituir uno por otro.

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Si $a = b$, entonces $ac = bc$.

Estas afirmaciones no dicen que sumar o multiplicar «mantenga la igualdad por magia». Dicen que aplicar la misma operación a dos objetos iguales produce nuevamente resultados iguales.

Simetría y transitividad. También utilizaremos dos propiedades básicas de la igualdad.

Si $A = B$, entonces $B = A$.

Y si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.

Estas dos ideas hacen posible escribir cadenas como

$E_1 = E_2 = E_3$,

pero cada enlace debe ser correcto.

La cadena no significa «primero hago esto y después aquello». Afirma que todas las expresiones escritas representan el mismo valor.

Igualdad no significa equivalencia de condiciones. Hay que distinguir dos situaciones.

En una cadena de **expresiones**, queremos mantener el mismo valor.

En una cadena de **ecuaciones**, queremos mantener el mismo conjunto de soluciones.

Esa distinción será decisiva más adelante en el capítulo.

3.3. Las leyes básicas de la suma y el producto

Trabajaremos principalmente con números racionales y reales, donde disponemos de suma y multiplicación con propiedades muy familiares.

La diferencia respecto de una presentación escolar es que ahora las propiedades se convierten en **herramientas explícitas de razonamiento**.

Conmutatividad. Para números a y b,
$a + b = b + a$
y
$ab = ba$.

La conmutatividad permite **intercambiar** el orden de dos términos o factores.

No permite reagrupar tres objetos. Para eso necesitamos otra propiedad.

Asociatividad. Para números a, b, c,
$(a + b) + c = a + (b + c)$
y
$(ab)c = a(bc)$.

La asociatividad permite **reagrupar** sin cambiar el orden.

Por eso, cuando sólo intervienen sumas podemos escribir $a+b+c$ sin especificar paréntesis: cualquier agrupación produce el mismo resultado.

Lo mismo ocurre con un producto de varios factores.

Elementos neutros. Existe un número 0 tal que $a + 0 = a$ para todo a.

Existe un número 1 tal que $a \cdot 1 = a$ para todo a.

El 0 es el **neutro aditivo** y el 1 es el **neutro multiplicativo**.

No son números especiales sólo por costumbre: cumplen funciones estructurales diferentes.

Distributividad. La multiplicación se relaciona con la suma mediante
$a(b + c) = ab + ac$.

También tenemos $(a + b)c = ac + bc$, que puede verse como la misma ley combinada con conmutatividad.

La distributividad no es simplemente una regla para «sacar paréntesis». Es una relación profunda entre las dos operaciones.

Intercambiar no es reagrupar. Uno de los errores conceptuales más frecuentes consiste en atribuir cualquier cambio de orden o paréntesis a una vaga «propiedad conmutativa».

Comparemos:
$a + (b + c) = (a + b) + c$
y
$a + b = b + a$.

En la primera igualdad no hemos intercambiado a, b, c. Conservamos el orden y cambiamos la agrupación. Usamos asociatividad.

En la segunda intercambiamos los dos sumandos. Usamos conmutatividad.

En una transformación larga pueden intervenir ambas.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c && \text{[asociatividad]} \\ &= (b + a) + c && \text{[conmutatividad]} \\ &= b + (a + c) && \text{[asociatividad]}. \end{aligned}$$

La cadena es elemental, pero enseña una disciplina esencial: **nombrar la propiedad exacta**.

3.4. Inversos: deshacer una operación

Para cada número a existe un número $-a$ tal que
$a + (-a) = 0$.
Llamamos $-a$ **inverso aditivo** de a.
En cambio, si $a \neq 0$, existe a^{-1} tal que
$aa^{-1} = 1$.
Llamamos a^{-1} **inverso multiplicativo** de a.

Por qué los inversos son únicos. La existencia de un inverso no basta para justificar que lo llamemos «el inverso». También debemos probar su unicidad.

Si $a + u = 0$ y $a + v = 0$, entonces

$$u = u + 0 = u + (a + v) = (u + a) + v = 0 + v = v.$$

Usamos los neutros, la asociatividad y la conmutatividad. Por tanto, el inverso aditivo es único y podemos denotarlo por $-a$.

Si $au = 1$ y $av = 1$, entonces

$$u = u(av) = (ua)v = 1v = v.$$

El inverso multiplicativo también es único. Su existencia se exige sólo cuando $a \neq 0$.

El cero marca una diferencia. El número 0 tiene inverso aditivo: su inverso aditivo es él mismo, porque $0 + 0 = 0$.

Pero 0 no tiene inverso multiplicativo.

Si existiera un número u con $0u = 1$, obtendríamos una contradicción con una propiedad que demostraremos pronto: $0u = 0$ para cualquier u.

Por eso dividir por cero no es una operación permitida.

Las hipótesis forman parte de la regla. La afirmación «todo número tiene inverso multiplicativo» es falsa.

La afirmación correcta, en $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, es:

> Todo número **no nulo** tiene inverso multiplicativo.

La condición $a \neq 0$ no es una nota al margen. Es parte de la afirmación matemática.

3.5. Resta y división como operaciones derivadas

La resta puede interpretarse mediante suma e inverso aditivo:
$a - b = a + (-b)$.
Esto permite explicar su comportamiento a partir de la suma.
Por ejemplo,
$a - (b + c) = a + (-(b + c))$.
Más adelante derivaremos cómo se distribuye el signo menos sobre una suma.
La división puede interpretarse mediante multiplicación e inverso:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}, \qquad b \neq 0.$$

Por tanto, toda regla que involucre división debe conservar visible la condición de que el divisor sea no nulo.

Una ventaja conceptual. Al reducir resta y división a operaciones e inversos, disminuye la cantidad de reglas independientes que necesitamos memorizar.

En lugar de aprender muchas recetas, podemos reconstruirlas a partir de unas pocas propiedades.

3.6. Consecuencias que ya no deben memorizarse

Primera consecuencia: $a \cdot 0 = 0$. En muchas clases se aprende que «cualquier número por cero da cero».

Ahora lo demostraremos a partir de las leyes básicas.

Como $0 + 0 = 0$, tenemos

$a \cdot 0 = a(0 + 0)$.

Aplicando distributividad,

$a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

Así,

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

Sumamos el inverso aditivo de $a \cdot 0$ a ambos miembros:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) \\ 0 &= a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))) \\ 0 &= a \cdot 0 + 0 \\ 0 &= a \cdot 0. \end{aligned}$$

Por simetría de la igualdad,

$a \cdot 0 = 0$.

Este argumento ilustra una idea central:

> una regla familiar puede ser una consecuencia necesaria de propiedades más fundamentales.

Reglas de signos como consecuencias.

El producto por un inverso aditivo. Queremos justificar $(-a)b = -(ab)$.

Observemos:

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b && \text{[distributividad]} \\ &= 0b && \text{[inverso aditivo]} \\ &= 0. && \text{[}0b = 0\text{]} \end{aligned}$$

Por definición de inverso aditivo, $(-a)b$ es el inverso aditivo de ab. Por tanto,

$(-a)b = -(ab)$.

De manera semejante,

$a(-b) = -(ab)$.

Menos por menos. Aplicando el resultado anterior,

$(-a)(-b) = -((-a)b)$.

Pero $(-a)b = -(ab)$, así que

$(-a)(-b) = -(-(ab))$.

Como el inverso aditivo del inverso de un número es el número original,

$(-a)(-b) = ab$.

«Menos por menos da más» deja así de ser una regla aislada. Es una consecuencia de distributividad, neutros e inversos.

El inverso del inverso. Como $a + (-a) = 0$, también por conmutatividad $(-a) + a = 0$.
Entonces a es el inverso aditivo de $-a$. Por tanto,
$-(-a) = a$.

Cancelación aditiva y multiplicativa.

Cancelación aditiva. Si $a + c = b + c$, podemos sumar $-c$ a ambos miembros:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ (a + c) + (-c) &= (b + c) + (-c) \\ a &= b. \end{aligned}$$

No hemos «borrado c». Hemos aplicado una operación reversible.

Cancelación multiplicativa. Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, podemos multiplicar ambos miembros por c^{-1}:

$$\begin{aligned} ac &= bc \\ (ac)c^{-1} &= (bc)c^{-1} \\ a(cc^{-1}) &= b(cc^{-1}) \\ a &= b. \end{aligned}$$

La hipótesis $c \neq 0$ es indispensable.

Si $c = 0$, la igualdad $ac = bc$ se convierte en $0 = 0$, independientemente de los valores de a y b. Ya no contiene información suficiente para concluir $a = b$.

El criterio del producto nulo. En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$,

$$ab = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Si $ab = 0$ y $a = 0$, ya tenemos una de las alternativas. Si $a \neq 0$, multiplicamos por su inverso:

$$b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0.$$

Recíprocamente, si cualquiera de los factores es cero, el producto es cero por la primera consecuencia de esta sección. La disponibilidad de inversos para los factores no nulos es esencial para esta demostración.

3.7. Distributividad en ambos sentidos

La igualdad
$a(b + c) = ab + ac$
puede leerse de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.
De izquierda a derecha solemos decir que **desarrollamos**.
De derecha a izquierda reconocemos un factor común y **factorizamos**:
$ab + ac = a(b + c)$.
No son dos leyes diferentes. Son dos usos de la misma igualdad.

La dirección depende del objetivo. Si queremos calcular mentalmente $17 \cdot 101$, podemos escribir

$17(100 + 1) = 1700 + 17 = 1717$.

Si queremos comprender $6x + 6y$, la forma $6(x + y)$ hace visible el factor común.

Ninguna forma es absolutamente superior. La pregunta correcta es:

¿Qué forma hace visible la información que necesito?

3.8. Expresiones equivalentes y dominio

Recordemos las expresiones

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

y $x + 1$.

Como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, para $x \neq 1$ obtenemos

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Pero el valor $x = 1$ estaba excluido de la expresión original.

La transformación no autoriza a olvidarlo.

Podemos decir que ambas expresiones producen el mismo valor para todo x del dominio de la primera. No podemos decir sin más que tienen el mismo dominio natural.

Preservar valores no implica preservar dominio. Ésta es una distinción central.

Una transformación puede:

- conservar valores donde ambas expresiones están definidas;
- cambiar la forma;
- ocultar restricciones;
- producir una nueva expresión definida en más puntos que la original.

La restricción debe viajar con el razonamiento.

3.9. Transformar una ecuación no es lo mismo que transformar una expresión

En una expresión buscamos conservar un valor.

En una ecuación queremos conservar las soluciones.

Consideremos

$x + 5 = 12$.

Sumar -5 a ambos miembros produce

$x = 7$.

El paso es reversible: desde $x = 7$ podemos sumar 5 a ambos miembros y recuperar $x + 5 = 12$.

Por tanto, las dos ecuaciones tienen exactamente las mismas soluciones.

Multiplicar por un número no nulo. Si $A = B$ y $c \neq 0$, entonces $cA = cB$.

Y desde $cA = cB$ podemos volver a $A = B$ multiplicando por c^{-1}.

Por eso el paso es reversible.

Multiplicar por cero. Si multiplicamos $x = 1$ por 0, obtenemos $0 = 0$.

La ecuación original tenía una sola solución. La nueva igualdad es verdadera para cualquier x.

La transformación perdió toda la información.

3.10. Transformaciones reversibles y transformaciones que pierden información

Si $x = 1$, entonces $x^2 = 1$.

Pero de $x^2 = 1$ no se sigue únicamente $x = 1$; también $x = -1$ satisface la nueva ecuación.

Elevar al cuadrado puede introducir soluciones adicionales.

Otro ejemplo: si $x = 2$, entonces $(x - 2)(x + 5) = 0$.

Pero la ecuación $(x - 2)(x + 5) = 0$ también admite $x = -5$.

La pregunta correcta. Cuando transformamos una ecuación debemos preguntar:

> ¿Puedo regresar desde la nueva ecuación a la anterior sin imponer información adicional?

Si la respuesta es sí, tenemos una transformación reversible.

Si la respuesta es no, debemos tratar la nueva condición con cautela y verificar las soluciones obtenidas.

La lógica formal de estas relaciones llegará más adelante. Por ahora basta reconocer la asimetría.

Dividir por una expresión exige saber que no es cero. Supongamos que tenemos $x(x - 1) = 0$.

Si dividimos por x, obtendríamos $x - 1 = 0$ y concluiríamos $x = 1$.

Pero hemos perdido la solución $x = 0$.

El paso «dividir por x» sólo sería reversible bajo la hipótesis $x \neq 0$.

Como esa hipótesis no formaba parte del problema, la división no es legítima si pretendemos conservar todas las soluciones.

Regla de trabajo. Antes de dividir por una expresión E, preguntar:

> ¿Sé que $E \neq 0$?

Si no lo sabemos, la división puede eliminar casos importantes.

Esta pregunta reaparecerá constantemente en ecuaciones, polinomios, matrices y estructuras abstractas.

Qué conserva cada transformación. Antes de aceptar un paso conviene precisar qué se quiere conservar. El mismo factor puede ser seguro en una expresión y exigir una separación de casos en una ecuación.

Situación	Transformación	Información que debe conservarse
Expresión	$\frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x + 1$	El valor, con la restricción original $x \neq 2$
Ecuación	$x + 1 = 4$ pasa a $(x - 2)(x + 1) = 4(x - 2)$	Las soluciones: aparece $x = 2$ además de $x = 3$

Situación	Transformación	Información que debe conservarse
Ecuación con dominio declarado	El paso anterior, trabajando sólo con $x \neq 2$	Las soluciones del problema restringido: únicamente $x = 3$

En la primera fila, $x = 2$ nunca fue una entrada admisible. Simplificar conserva los valores originales si conservamos también esa exclusión. En la segunda, $x = 2$ sí era una entrada admisible de la ecuación inicial, pero no una solución: sus miembros valían 3 y 4. Multiplicarlos por $x - 2$ los convierte en 0 y 0. El paso hace verdadera una igualdad que antes era falsa. En la tercera fila, esa entrada ya estaba excluida, y multiplicar o dividir por $x - 2$ resulta reversible dentro del dominio declarado.

El dominio no cambia silenciosamente para acomodar el procedimiento. Si el problema se plantea para todos los reales, imponer $x \neq 2$ crea un subproblema y obliga a examinar por separado $x = 2$.

Control. Resuelve $\frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$ y compara el resultado con el de $x + 1 = 3$ planteada para todos los reales. Explica qué conserva la simplificación.

Resolución. La ecuación fraccionaria exige $x \neq 2$. En ese dominio podemos cancelar el factor no nulo y obtener $x + 1 = 3$, cuyo único candidato es $x = 2$. El candidato está excluido: la ecuación original no tiene soluciones. La ecuación $x + 1 = 3$ sobre todos los reales sí tiene la solución 2. La simplificación conserva valores y soluciones **en el dominio original**; olvidar la restricción cambia el problema. Si la dificultad estuvo en identificar la entrada excluida, vuelve a §2.3; si estuvo en distinguir valor y solución, contrasta §§3.8–3.9.

3.11. Cancelar no significa borrar símbolos

Consideremos

$$\frac{x(x+2)}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Como x es un factor común no nulo,

$$\frac{x(x+2)}{x} = x + 2.$$

Pero en

$$\frac{x+2}{x}$$

el símbolo x no es factor de todo el numerador. No podemos «tacharlo» con el denominador. De hecho,

$$\frac{x+2}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = 1 + \frac{2}{x}, \qquad x \neq 0.$$

La cancelación es una consecuencia de multiplicar por un inverso. Por eso actúa sobre **factores**, no sobre términos separados por suma o resta.

Un buen diagnóstico visual no basta. Que dos símbolos se parezcan o aparezcan «arriba y abajo» no autoriza una cancelación.

La pregunta debe ser:

¿Existe realmente un factor común y es no nulo en el dominio considerado?

Buscar el factor de todo el numerador. Para cancelar, primero hay que identificar un producto completo. Consideremos
$\frac{(x-1)(x+2)+(x-1)}{x-1}$, con $x \neq 1$.

El factor $x-1$ aparece en ambos sumandos del numerador. La distributividad permite escribir el numerador entero como $(x-1)((x+2)+1)$. Ahora sí tenemos un producto y podemos multiplicar por el inverso del denominador:
$\frac{(x-1)((x+2)+1)}{x-1} = (x+2)+1 = x+3$, con $x \neq 1$.

Comparemos esa expresión con
$\frac{(x-1)(x+2)+1}{x-1}$.

Aquí el segundo sumando no contiene el factor $x-1$. La descomposición correcta es $x+2+\frac{1}{x-1}$, siempre con $x \neq 1$. Cancelar el factor del primer sumando no elimina el denominador del segundo.

En $x=3$, la primera expresión vale 6 y la segunda vale $11/2$. Este cálculo detecta que no son la misma expresión; la justificación general viene de examinar la estructura de sus sumandos y aplicar distributividad. Un caso numérico basta para refutar una identidad, pero no reemplaza la explicación de una identidad verdadera.

Control. Simplifica $\frac{(x-1)(x+2)+(x-1)c}{x-1}$, donde c es un real fijo. ¿Qué cambia si el último sumando del numerador se sustituye por c?

Resolución. En el primer caso, ambos sumandos tienen factor $x-1$: el numerador es $(x-1)(x+2+c)$ y el resultado es $x+2+c$, con $x \neq 1$. En el segundo obtenemos $x+2+\frac{c}{x-1}$, con la misma restricción. Si $c=0$, las dos formas simplificadas coinciden; si $c \neq 0$, coinciden solamente cuando $\frac{c}{x-1} = c$, es decir, cuando $x=2$. Esta coincidencia puntual no autoriza la cancelación propuesta para todo x. Para recuperar la factorización, vuelve a §3.7; para recuperar la condición sobre el inverso, vuelve a §§3.4–3.6.

3.12. Cadenas justificadas: escribir álgebra como argumento

Una cadena algebraica puede leerse como una demostración en miniatura.

Por ejemplo, para justificar $-(a+b) = (-a)+(-b)$ podemos mostrar que $(-a)+(-b)$ es el inverso aditivo de $a+b$:

$$\begin{aligned}
(a+b)+((-a)+(-b)) &= ((a+b)+(-a))+(-b) \\
&= (a+(b+(-a)))+(-b) \\
&= (a+((-a)+b))+(-b) \\
&= ((a+(-a))+b)+(-b) \\
&= (0+b)+(-b) \\
&= b+(-b) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cada paso puede asociarse con una propiedad: asociatividad, conmutatividad, neutro o inverso.

Cuánto detalle escribir. Al comienzo conviene hacer visibles más pasos.

Con la práctica, una cadena puede comprimirse. Pero la compresión es legítima sólo cuando el lector podría reconstruir los pasos omitidos.

La meta no es escribir siempre la versión más larga. La meta es poder defenderla.

Detallar y abreviar sin cambiar el argumento. Un argumento detallado ayuda a reconocer sus mecanismos. Una vez comprendidos, puede escribirse una versión más breve que conserve las justificaciones decisivas.

Para resolver $4(x+3)-2x=18$ sobre los reales, una ruta detallada es:

$$\begin{aligned}
4(x+3)-2x &= 18 \\
4x+12-2x &= 18 && \text{[distributividad]} \\
(4x-2x)+12 &= 18 && \text{[reagrupar e intercambiar sumandos]} \\
(4-2)x+12 &= 18 && \text{[distributividad en sentido inverso]} \\
2x+12 &= 18 && \text{[calcular } 4-2\text{]} \\
2x &= 6 && \text{[sumar } -12 \text{ a ambos miembros]} \\
x &= 3 && \text{[multiplicar por } 1/2\text{]}.
\end{aligned}$$

Una ruta económica escribe $4(x+3)-2x = 2x+12$, justificando esa identidad por distributividad y agrupación de términos. La ecuación queda $2x+12=18$; sumar -12 y dividir por $2\neq 0$ da $x=3$. La verificación en la ecuación inicial es $4(3+3)-2\cdot 3 = 24-6 = 18$.

La versión breve conserva las razones de la versión detallada. Repetir una línea, insertar $+0$ sin necesidad o deshacer un paso para rehacerlo aumenta la longitud sin explicar una decisión nueva. En cambio, escribir la condición de un divisor o separar su posible valor cero sí conserva información que podría perderse.

En los ejercicios de cadenas detalladas, haz visibles las transformaciones que permiten reconstruir el argumento. Después ensaya una versión más económica y explica qué pasos comprimiste. La extensión adecuada depende de lo que necesita comprender el lector.

Control. Presenta una ruta detallada y una breve para $5(x-2)-3(x-2)=8$. ¿Qué ventaja tiene reconocer un factor común?

Resolución. Una ruta detallada desarrolla: $5x-10-3x+6=8$; por agrupación y cálculo, $2x-4=8$; sumando 4, $2x=12$; dividiendo por $2\neq 0$, $x=6$. La ruta breve factoriza primero: $(5-3)(x-2)=8$, luego $2(x-2)=8$. Dividir por 2 y sumar 2 da $x=6$. Ambas rutas son reversibles. La verificación es $5(6-2)-3(6-2)=20-12=8$. Factorizar aprovecha el bloque repetido $x-2$ y evita desarrollar para volver a agrupar. Si no reconociste el bloque, vuelve a §3.7; si faltó justificar la división, vuelve a §3.9.

3.13. Diagnóstico: encontrar el primer paso inválido

Consideremos:

$$\begin{aligned}
x^2 &= x \\
x^2 - x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x-1 &= 0 \\
x &= 1.
\end{aligned}$$

La conclusión omite una solución.

¿Dónde aparece el primer problema?

Los tres primeros pasos son válidos.

El paso

$x(x-1)=0 \to x-1=0$

equivale a dividir por x sin saber que $x\neq 0$.

Precisamente allí se pierde la solución $x = 0$.

Diagnosticar mejor que etiquetar. No basta decir «la solución está mala».

Un diagnóstico matemático debe poder señalar:

1. el primer paso incorrecto;
2. la propiedad que se intentó usar;
3. la hipótesis faltante;
4. qué información se perdió o añadió;
5. cómo reparar el razonamiento.

Este modo de leer errores será esencial en demostraciones posteriores.

3.14. Cierre — protocolo de transformación justificada

Antes de transformar, preguntar:

1. **¿Qué estoy transformando?** ¿Una expresión o una ecuación?
2. **¿Cuál es el dominio?**
3. **¿Qué valores están excluidos?**
4. **¿Qué propiedad autoriza el paso?**
5. **¿La propiedad exige una hipótesis?**
6. **¿El paso conserva el valor?**
7. **Si es una ecuación, conserva exactamente las soluciones?**
8. **¿El paso puede revertirse?**
9. **¿La nueva forma sirve al objetivo?**
10. **¿Puedo reconstruir la justificación si he abreviado?**

Éste es el nuevo estándar algebraico.

No basta con mover símbolos hasta obtener una forma familiar.

> **Transformar algebraicamente es reemplazar expresiones o condiciones mediante pasos cuya validez puede defenderse.**

Ejercicios

Todos los ejercicios son originales para *Álgebra para matemáticos*, calibrados con el corpus universitario y las fuentes rectoras del capítulo.

A. Identificar la propiedad

1. Indica qué propiedad justifica $a + b = b + a$.
2. Indica qué propiedad justifica $(ab)c = a(bc)$.
3. Indica qué propiedad justifica $a + 0 = a$.
4. Indica qué propiedad justifica $a(b + c) = ab + ac$.
5. Explica por qué pasar de $a + (b + c)$ a $(a + b) + c$ no usa conmutatividad.
6. En la cadena $a + (b + c) = (a + b) + c = (b + a) + c$, identifica la propiedad usada en cada paso.

B. Neutros e inversos

7. Explica la diferencia entre 0 como neutro aditivo y $-a$ como inverso aditivo de a.
8. Explica la diferencia entre 1 como neutro multiplicativo y a^{-1} como inverso multiplicativo de a.
9. ¿Cuál es el inverso aditivo de 0? Justifica.

10. ¿Por qué la frase «todo número real tiene inverso multiplicativo» es falsa?
11. Si $a \neq 0$, completa y justifica: $a \cdot (\ \ ) = 1$.
12. Reescribe $a - b$ usando sólo suma e inverso aditivo, y $\frac{a}{b}$ usando producto e inverso multiplicativo.

C. Consecuencias derivadas

13. Demuestra que $0a = 0$ para todo número real a.
14. Demuestra que $-(-a) = a$.
15. Demuestra que $(-a)b = -(ab)$.
16. Demuestra que $a(-b) = -(ab)$.
17. Deduce que $(-a)(-b) = ab$.
18. Demuestra que $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

D. Conmutatividad, asociatividad y distributividad

19. Justifica cada paso:
$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ &= (b + a) + c \\ &= b + (a + c). \end{aligned}$$
20. Transforma $3(x + 4)$ en $3x + 12$ e identifica la propiedad.
21. Transforma $7x + 7y$ en una forma factorizada e identifica la propiedad usada en sentido inverso.
22. Explica por qué $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ no se deduce de distributividad.
23. Desarrolla correctamente $(a + b)^2$ justificando la estructura del cálculo.
24. Elige una forma más útil para calcular mentalmente $19 \cdot 101$ y explica tu elección.

E. Cancelación

25. A partir de $a + c = b + c$, deriva $a = b$ justificando cada paso.
26. A partir de $ac = bc$ con $c \neq 0$, deriva $a = b$.
27. Explica por qué no puede omitirse $c \neq 0$ en el ejercicio anterior.
28. Simplifica $\frac{x(x+5)}{x}$ indicando el dominio.
29. Explica por qué $\frac{x+5}{x}$ no permite cancelar x.
30. Corrige el razonamiento falso $\frac{2x+6}{2} = x + 6$.

F. Dominio y expresiones equivalentes

31. Compara $\frac{x^2-9}{x-3}$ y $x + 3$. Indica el dominio de cada expresión y dónde coinciden.
32. Simplifica $\frac{x^2+2x}{x}$ conservando la restricción original.
33. Explica por qué $\frac{x^2+2x}{x}$ y $x + 2$ no tienen el mismo dominio natural.
34. Construye dos expresiones que coincidan donde la primera está definida, pero cuyos dominios naturales sean diferentes.
35. Determina la restricción necesaria para $\frac{(x-4)(x+1)}{x-4} = x + 1$.
36. Un estudiante sustituye $x = 4$ después de simplificar el ejercicio anterior. Explica exactamente el error.

G. Transformaciones de ecuaciones

37. Explica por qué sumar 5 a ambos miembros de una ecuación es reversible.
38. Explica por qué multiplicar ambos miembros por 7 es reversible.
39. Explica por qué multiplicar ambos miembros por 0 no es reversible.

40. Da un ejemplo donde elevar ambos miembros al cuadrado introduzca una solución adicional.
41. Analiza el paso de $x = 3$ a $(x-3)(x+2) = 0$. ¿Es válido? ¿Es reversible?
42. Explica la diferencia entre «el paso es válido» y «el paso es reversible».

H. Dividir y perder soluciones

43. Encuentra el primer paso inválido:
$$\begin{aligned} x^2 &= 2x \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x - 2 &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$
44. Repara el argumento anterior para obtener todas las soluciones.
45. En $x(x+4) = x(x-1)$, explica por qué dividir inmediatamente por x requiere separar un caso.
46. Resuelve la ecuación anterior sin perder soluciones y señala en qué momento controlas el caso $x = 0$.
47. Da un ejemplo de una ecuación donde dividir por una expresión variable elimine una solución.
48. Formula en palabras una regla segura antes de dividir ambos miembros por una expresión que contiene la incógnita.

I. Diagnóstico de razonamientos

49. Localiza el primer error:
$$\begin{aligned} 2(x+3) &= 2x + 3 \\ &= 2x + 6. \end{aligned}$$
50. Localiza el primer error:
$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x} &= \frac{x}{x} + 2 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$
51. Localiza el primer error:
$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$
52. Localiza el primer error:
$$a + (b + c) = (b + a) + c.$$
Un estudiante afirma que el único paso se justifica por conmutatividad. ¿Qué falta en su explicación?
53. Repara la cadena $3 + 5 = 8 \cdot 2 = 16$ para que exprese correctamente dos cálculos sucesivos.
54. Construye una secuencia de tres transformaciones que parta de una afirmación verdadera, contenga un paso inválido y termine nuevamente en una afirmación verdadera. Explica por qué el resultado final correcto no salva el razonamiento.
55. Construye una cadena justificada que haga explícitas las justificaciones sustantivas que lleve $-(a-(b-c))$ hasta una forma sin paréntesis anidados. Usa sólo la definición de resta, reglas de inversos, asociatividad y conmutatividad de la suma. Después presenta una versión más económica y explica qué justificaciones has comprimido.

56. Desarrolla $(a-b)(c-d)$ hasta obtener $ac-ad-bc+bd$ mediante una cadena de transformaciones justificadas, interpretando cada resta como suma de un inverso y justificando distributividad y reglas de signos. Después presenta una versión más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
57. Resuelve $3(2x-5)-4(x+1)=5(x-2)+7$ mediante una cadena de transformaciones reversibles. Justifica las transformaciones estructurales y verifica la solución en la ecuación original. Después presenta una versión más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
58. Resuelve $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+2}{4}=\frac{x-5}{6}+1$ mediante una cadena de transformaciones reversibles. Explica por qué el número usado para eliminar denominadores es seguro y verifica la solución. Después presenta una versión más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
59. Audita la siguiente cadena: indica cuáles pasos son reversibles y cuál puede añadir soluciones.
$$\begin{aligned} x-1&=2\\ (x-1)^2&=4\\ x^2-2x+1&=4\\ x^2-2x-3&=0. \end{aligned}$$
Luego determina qué soluciones de la ecuación final satisfacen la ecuación inicial.
60. Escribe una explicación matemática de 8–12 líneas que responda: **¿por qué una transformación algebraica es una forma de razonamiento y no sólo una manipulación de símbolos?** Debes mencionar propiedad, hipótesis, dominio, reversibilidad y conservación de información.

K. Transformaciones bajo dominios distintos

61. Se pasa de $x-1=3$ a $(x-1)^2=9$. Compara las soluciones de ambas ecuaciones cuando el dominio declarado es: a) todos los reales; b) $x\geq 1$; c) $x\leq 1$. Decide en cada caso si este paso conserva exactamente las soluciones. Justifica las posibilidades de la ecuación cuadrática sin usar una fórmula de resolución.
62. La ecuación $x+1=4$ se multiplica en ambos miembros por $x-2$. Determina las soluciones antes y después, primero sobre todos los reales y luego sobre $x>2$. Un estudiante impone $x>2$ al final para defender su procedimiento: explica qué tendría que hacer si el problema original se planteó sobre todos los reales.
63. Audita dos procedimientos para $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$. Uno multiplica por $x-1$ y obtiene $1=2$; otro multiplica por $(x-1)^2$ y obtiene $x-1=2(x-1)$. Explica por qué ambos multiplicadores son seguros en el dominio original y por qué el segundo procedimiento puede dar un candidato que debe rechazarse si se olvida ese dominio.

L. Dos rutas y una misma justificación

64. Resuelve $(x-1)(x+2)=(x-1)(x+5)$ por dos rutas: restar y factorizar, y separar el caso $x=1$ antes de dividir. Compara sus justificaciones y explica por qué una ruta más corta puede ser más clara sin omitir casos.
65. Resuelve $\frac{3x-2}{4}-\frac{x+1}{6}=\frac{5}{12}$ por dos rutas: multiplicar toda la ecuación por 12, y reunir primero el miembro izquierdo en una sola fracción. Identifica qué justificaciones comparten las rutas y verifica la respuesta en la escritura original.
66. Compara dos resoluciones de $\frac{x+2}{x-3}=\frac{2x-1}{x-3}$. En la primera se elimina el denominador; en la segunda se resta el miembro derecho y se simplifica la fracción resultante. Presenta ambas completas y explica cómo una de ellas detecta antes que no hay soluciones.

M. Reparar errores que se compensan

67. Para reales a, x, un estudiante escribe $a(x+2) = ax + 2 = ax + 2 + 2(a-1) = ax + 2a$. La primera y la última expresión sí coinciden para todo a, x. Localiza los enlaces que fallan, determina para qué valores del parámetro quedan correctos y repara la cadena. Da un caso numérico que muestre por qué llegar al valor correcto no valida los pasos intermedios.
68. Audita $2 - (x-3) = 2 - x - 3 = -x - 1 = -x - 1 + 6 = 5 - x$. Comprueba que el inicio y el final coinciden, identifica el primer error y el ajuste posterior que lo oculta, y escribe una cadena correcta. Explica por qué aquí ningún valor de x vuelve correcta la cadena completa.
69. Un razonamiento parte de $x(x-4) = 0$, divide por x, obtiene $x - 4 = 0$, concluye $x = 4$ y termina escribiendo otra vez $x(x-4) = 0$. Su última condición es idéntica a la primera. Audita la cadena en $x = 0$ y en $x = 4$, y repara el argumento para conservar todas las soluciones. Distingue comprobar una solución de demostrar que no falta otra.

N. Diseñar y recuperar casos

70. Sean a, b, c parámetros reales fijos. Diseña una resolución de $(x-a)(x-b) = c(x-a)$ que divida por $x - a$ sin perder casos: examina primero $a \neq b + c$ y después $a = b + c$. Explica qué pierde la división en el primer caso y por qué en el segundo puede parecer que recupera el mismo número aun siendo indefinida allí.
71. Sean p, q reales fijos. Partiendo de $x = p$, construye una transformación por multiplicación que produzca $(x-q)(x-p) = 0$. Determina cuándo añade una solución distinta y cuándo conserva las soluciones de esta ecuación particular aun sin poder invertir el multiplicador en todo el dominio. Si $p \neq q$, reconstruye la respuesta original a partir de los candidatos nuevos y decide en qué dominio la multiplicación sería reversible por su inversa.
72. Sean a, b reales fijos. Resuelve $\frac{(x-a)(x-b)}{x-a} = 0$ conservando el dominio, tanto si $a \neq b$ como si $a = b$. Compara cancelar el factor común con eliminar el denominador y resolver una ecuación producto. Diseña con estos parámetros un ejemplo que tenga una solución y otro que no tenga ninguna.

Soluciones

A. Identificar la propiedad

1. La igualdad $a + b = b + a$ expresa la **conmutatividad de la suma**: intercambiar el orden de los sumandos no cambia el resultado.

2. $(ab)c = a(bc)$ expresa la **asociatividad del producto**: cambia la agrupación, no el orden de los factores.

3. $a + 0 = a$ usa la propiedad del **neutro aditivo**.

4. $a(b + c) = ab + ac$ es la **distributividad** del producto respecto de la suma.

5. En $a + (b + c) = (a + b) + c$ el orden a, b, c permanece. Sólo cambian los paréntesis. Por tanto, la propiedad es asociatividad, no conmutatividad.

6. Primer paso: asociatividad de la suma.
Segundo paso: conmutatividad de a y b.

B. Neutros e inversos

7. El número 0 es un único objeto que deja inalterado a cualquier a bajo suma: $a + 0 = a$. En cambio, $-a$ depende de a y satisface $a + (-a) = 0$. Uno es neutro; el otro deshace aditivamente a un elemento concreto.

8. El número 1 deja inalterado a cualquier a bajo producto: $a \cdot 1 = a$. El inverso a^{-1} depende de a y, si $a \neq 0$, satisface $aa^{-1} = 1$.

9. El inverso aditivo de 0 es 0, porque $0 + 0 = 0$, que es precisamente la condición para ser inverso aditivo de 0.

10. Es falsa porque 0 no tiene inverso multiplicativo. No existe un real u tal que $0u = 1$.

11. Debe escribirse $a \cdot a^{-1} = 1$, con la hipótesis $a \neq 0$.

12. $a - b = a + (-b)$.
Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$.

C. Consecuencias derivadas

13. Como $0 = 0 + 0$,

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

Sumamos el inverso aditivo de $0a$ a ambos miembros. Se obtiene $0 = 0a$, y por simetría $0a = 0$.

14. Por definición, $a + (-a) = 0$. Por conmutatividad, $(-a) + a = 0$. Así, a es el inverso aditivo de $-a$. Por tanto $-(-a) = a$.

15. Calculamos

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0.$$

Entonces $(-a)b$ es el inverso aditivo de ab, por lo que $(-a)b = -(ab)$.

16. De modo análogo,

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0.$$

Por tanto, $a(-b) = -(ab)$.

17. Aplicamos el resultado anterior:

$$(-a)(-b) = -((-a)b).$$

Pero $(-a)b = -(ab)$, así que

$$(-a)(-b) = -(-(ab)) = ab.$$

18. Basta mostrar que $(-a)+(-b)$ es el inverso de $a+b$:

$$\begin{aligned}(a+b)+((-a)+(-b)) &= a+(b+(-a))+(-b)\\ &= a+((-a)+b)+(-b)\\ &= (a+(-a))+b+(-b)\\ &= 0+0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, $-(a+b)=(-a)+(-b)$.

D. Conmutatividad, asociatividad y distributividad

19.

$$\begin{aligned}a+(b+c) &= (a+b)+c \quad \text{[asociatividad]}\\ &= (b+a)+c \quad \text{[conmutatividad]}\\ &= b+(a+c) \quad \text{[asociatividad]}.\end{aligned}$$

20. Por distributividad,
$3(x+4)=3x+3\cdot 4=3x+12$.

21. Usando distributividad en sentido inverso,
$7x+7y=7(x+y)$.

22. La distributividad exige multiplicar cada término del segundo factor. Como $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$, aparecen cuatro productos, no sólo dos.

23.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

La última igualdad usa conmutatividad del producto y suma de términos iguales.

24. $19\cdot 101=19(100+1)=1900+19=1919$.
La forma $19(100+1)$ hace visible la distributividad y permite cálculo mental inmediato.

E. Cancelación

25.

$$\begin{aligned}a+c &= b+c\\ (a+c)+(-c) &= (b+c)+(-c)\\ a+(c+(-c)) &= b+(c+(-c))\\ a+0 &= b+0\\ a &= b.\end{aligned}$$

26. Como $c\neq 0$, existe c^{-1}:

$$\begin{aligned}ac &= bc\\ (ac)c^{-1} &= (bc)c^{-1}\\ a(cc^{-1}) &= b(cc^{-1})\\ a &= b.\end{aligned}$$

27. Si $c = 0$, entonces $ac = bc$ se reduce a $0 = 0$ para cualesquiera a, b. Por ejemplo, $2 \cdot 0 = 5 \cdot 0$, pero $2 \neq 5$.

28. El dominio original exige $x \neq 0$. Para esos valores,

$$\frac{x(x+5)}{x} = x + 5.$$

La respuesta debe conservar $x \neq 0$.

29. En $x + 5$, x es un término de una suma, no un factor común de todo el numerador. No existe una cancelación multiplicativa que permita borrarlo.

30. La división correcta es

$$\frac{2x+6}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{6}{2} = x + 3.$$

También puede factorizarse el numerador: $\frac{2(x+3)}{2} = x + 3$.

F. Dominio y expresiones equivalentes

31. $\frac{x^2-9}{x-3}$ está definida para $x \neq 3$. $x + 3$ está definida para todo real.

Como $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, coinciden para todo $x \neq 3$.

32. El dominio original exige $x \neq 0$.

$$\frac{x^2+2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x + 2, \qquad x \neq 0.$$

33. $x + 2$ está definida en $x = 0$, mientras la expresión original tiene denominador x y no está definida allí.

34. Ejemplo: $\frac{x^2-1}{x-1}$ y $x + 1$. Coinciden para $x \neq 1$, pero sólo la segunda está definida en $x = 1$.

35. La igualdad

$$\frac{(x-4)(x+1)}{x-4} = x + 1$$

requiere $x \neq 4$.

36. Al simplificar se obtiene una expresión escrita que sí puede evaluarse en $x = 4$, pero ese valor no pertenecía al dominio de la expresión original. La simplificación no autoriza a ampliar retrospectivamente el dominio del problema.

G. Transformaciones de ecuaciones

37. Si sumamos 5 a ambos miembros y luego sumamos -5, recuperamos la ecuación original. La operación tiene una inversa y, por tanto, el paso es reversible.

38. Multiplicar por 7 es reversible porque $7 \neq 0$ y existe $1/7$. Podemos multiplicar después por $1/7$ para recuperar la ecuación original.

39. Multiplicar por 0 convierte cualquier igualdad en $0 = 0$. Se pierde la información que distinguía unas soluciones de otras. No existe inverso multiplicativo de 0.

40. De $x = 2$ se sigue $x^2 = 4$. Pero $x^2 = 4$ también admite $x = -2$. El cuadrado introdujo una posibilidad adicional.

41. El paso es válido: si $x = 3$, entonces $x - 3 = 0$ y el producto vale 0. Pero no es reversible, porque $(x - 3)(x + 2) = 0$ también admite $x = -2$.

42. Un paso válido garantiza que toda solución de la condición original satisface la nueva. Un paso reversible garantiza además el regreso: toda solución de la nueva satisface la original. Sólo en el segundo caso se conserva exactamente la información.

H. Dividir y perder soluciones

43. Los tres primeros pasos son válidos. El primer paso inválido es

$x(x - 2) = 0 \to x - 2 = 0,$

porque equivale a dividir por x sin saber que $x \neq 0$. Se pierde $x = 0$.

44. Desde $x(x-2) = 0$, un producto de reales es cero cuando al menos uno de los factores es cero. Por tanto,

$x = 0$ o $x - 2 = 0,$

y las soluciones son $x = 0$ y $x = 2$.

45. Si dividimos por x, necesitamos $x \neq 0$. Pero $x = 0$ puede ser una solución y debe verificarse separadamente antes de imponer esa condición.

46. La ecuación es

$x(x + 4) = x(x - 1).$

Llevamos todo a un miembro:

$$x[(x + 4) - (x - 1)] = 0.$$

Entonces

$x \cdot 5 = 0,$

de donde $x = 0$.

Si se desea dividir por x, primero habría que separar el caso $x = 0$; precisamente ese caso resulta ser la solución.

47. Ejemplo: $x(x - 3) = 0$. Dividir por x produce $x - 3 = 0$ y elimina la solución $x = 0$.

48. Regla segura: antes de dividir por una expresión que contiene la incógnita, determinar si puede ser cero. Si puede serlo, separar ese caso o usar otro método que no lo elimine.

I. Diagnóstico de razonamientos

49. El primer paso ya es incorrecto:

$2(x + 3) \neq 2x + 3.$

La distributividad exige multiplicar ambos términos: $2(x + 3) = 2x + 6$.

50. El primer paso no es una identidad en el dominio $x \neq 0$. Por ejemplo, para $x = 2$ el miembro izquierdo vale 2 y el derecho vale 3. Para $x = 1$ sí coinciden, pero esa coincidencia no justifica la transformación general.

Al separar una fracción, ambos términos del numerador conservan el mismo denominador, con $xeq0$:

$$\frac{x + 2}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x}.$$

51. El paso $x^2 = 4 \to x = 2$ pierde la solución $x = -2$. No es una transformación reversible.

52. La igualdad es correcta, pero no se obtiene sólo por conmutatividad. Una justificación detallada es:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (b + a) + c.$$

Primero se usa asociatividad y luego conmutatividad.

53. Una escritura correcta es:
$3 + 5 = 8$.
Luego:
$8 \cdot 2 = 16$.
No debe escribirse una sola cadena porque $8 \neq 16$.

54. Un ejemplo es comenzar con $x = 1$:

$$\begin{aligned} x &= 1 && \text{[afirmación inicial]} \\ x^2 &= 1 && \text{[paso válido: elevar al cuadrado]} \\ x &= -1 && \text{[paso inválido]} \\ x^2 &= 1 && \text{[consecuencia de la línea anterior].} \end{aligned}$$

La última igualdad es verdadera cuando la afirmación inicial $x = 1$ es verdadera, pero el paso $x^2 = 1 \to x = -1$ no está justificado: de $x^2 = 1$ se obtienen dos posibilidades, $x = 1$ y $x = -1$. El hecho de terminar en una afirmación verdadera no repara el razonamiento roto.

J. Cadenas largas y síntesis

Para los ejercicios 55–58, las cadenas siguientes muestran una ruta detallada. Una comparación económica puede terminar el 55 en $-a + b - c$, desarrollar el 56 aplicando distributividad y reunir los signos, reducir el 57 a $2x - 19 = 5x - 3$, y reducir el 58 a $5x - 10 = 2x + 2$ después de multiplicar por 12. Esas abreviaciones conservan definición de resta, distributividad, agrupación y condiciones de divisores no nulos. Comprimirlas exige saber reconstruirlas; no exige repetir pasos para alcanzar una cuota.

55. Una cadena posible es:

$$\begin{aligned} -(a - (b - c)) &= -(a + (-(b - c))) && \text{[definición de resta]} \\ &= (-a) + (-(-(b - c))) && \text{[inverso de una suma]} \\ &= (-a) + (b - c) && \text{[doble inverso]} \\ &= (-a) + (b + (-c)) && \text{[definición de resta]} \\ &= ((-a) + b) + (-c) && \text{[asociatividad]} \\ &= (b + (-a)) + (-c) && \text{[conmutatividad]} \\ &= b + ((-a) + (-c)) && \text{[asociatividad]} \\ &= b + (-(a + c)) && \text{[inverso de una suma, sentido inverso]} \\ &= b - (a + c). && \text{[definición de resta]} \end{aligned}$$

También es legítimo detenerse en $-a + b - c$. La cadena muestra que una expresión con varias restas puede reconstruirse usando sólo suma e inversos.

56. Interpretamos las restas mediante inversos:

$$\begin{aligned}
(a-b)(c-d) &= (a+(-b))(c+(-d)) && \text{[definición de resta]}\\
&= a(c+(-d))+(-b)(c+(-d)) && \text{[distributividad]}\\
&= ac+a(-d)+(-b)(c+(-d)) && \text{[distributividad]}\\
&= ac+a(-d)+((-b)c+(-b)(-d)) && \text{[distributividad]}\\
&= ac+(-(ad))+((-b)c+(-b)(-d)) && \text{[regla de signo]}\\
&= ac+(-(ad))+((-(bc))+(-b)(-d)) && \text{[regla de signo]}\\
&= ac+(-(ad))+((-(bc))+bd) && \text{[menos por menos, derivado]}\\
&= (ac+(-(ad)))+((-(bc))+bd) && \text{[asociatividad]}\\
&= ac-ad-bc+bd. && \text{[notación de resta]}
\end{aligned}$$

La cadena no usa «FOIL» como regla independiente: todo proviene de distributividad e inversos.

57. Partimos de

$$3(2x-5)-4(x+1)=5(x-2)+7.$$

Una cadena reversible es:

$$\begin{aligned}
3(2x-5)-4(x+1) &= 5(x-2)+7 &&\\
6x-15-4(x+1) &= 5(x-2)+7 && \text{[distributividad]}\\
6x-15-4x-4 &= 5(x-2)+7 && \text{[distributividad]}\\
2x-19 &= 5(x-2)+7 && \text{[reagrupar y reducir]}\\
2x-19 &= 5x-10+7 && \text{[distributividad]}\\
2x-19 &= 5x-3 && \text{[reducir]}\\
-19 &= 3x-3 && \text{[sumar } -2x \text{ a ambos lados]}\\
-16 &= 3x && \text{[sumar 3 a ambos lados]}\\
-\frac{16}{3} &= x && \text{[multiplicar por } 1/3\text{]}.
\end{aligned}$$

El último paso es reversible porque $3 \neq 0$.

Verificación:

$$3\left(2\left(-\frac{16}{3}\right)-5\right)-4\left(-\frac{16}{3}+1\right)=5\left(-\frac{16}{3}-2\right)+7=-\frac{89}{3}.$$

58. La ecuación es

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{x+2}{4}=\frac{x-5}{6}+1.$$

El mínimo común múltiplo de $3, 4, 6$ es 12. Como $12 \neq 0$, multiplicar ambos miembros por 12 es reversible:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{4} &= \frac{x-5}{6} + 1 \\
4(2x-1) - 3(x+2) &= 2(x-5) + 12 \\
8x - 4 - 3(x+2) &= 2(x-5) + 12 && \text{[distributividad]} \\
8x - 4 - 3x - 6 &= 2(x-5) + 12 && \text{[distributividad]} \\
5x - 10 &= 2(x-5) + 12 && \text{[reducir]} \\
5x - 10 &= 2x - 10 + 12 && \text{[distributividad]} \\
5x - 10 &= 2x + 2 && \text{[reducir]} \\
3x - 10 &= 2 && \text{[sumar } -2x\text{]} \\
3x &= 12 && \text{[sumar 10]} \\
x &= 4. && \text{[multiplicar por 1/3]}
\end{aligned}$$

Verificación:

$$\frac{8-1}{3} - \frac{4+2}{4} = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6},$$

mientras

$$\frac{4-5}{6} + 1 = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}.$$

59. La primera transformación

$x - 1 = 2 \to (x-1)^2 = 4$

es válida pero no reversible: al elevar al cuadrado puede añadirse la posibilidad $x - 1 = -2$.

Los pasos posteriores son identidades o sumas de la misma cantidad y preservan las soluciones de la ecuación ya ampliada.

La identidad $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ permite escribir la ecuación final como

$(x-3)(x+1) = 0$,

con soluciones $x = 3$ y $x = -1$.

La ecuación inicial $x - 1 = 2$ sólo admite $x = 3$. Por tanto, $x = -1$ es la solución adicional introducida por el cuadrado.

60. Respuesta modelo:

Una transformación algebraica es una forma de razonamiento porque cada cambio de escritura afirma algo que debe ser matemáticamente válido. Para pasar de una expresión a otra necesitamos una propiedad, como asociatividad o distributividad; para transformar una ecuación debemos además controlar si conservamos exactamente sus soluciones. Las hipótesis son parte del proceso: dividir por una cantidad exige saber que no es cero. El dominio determina qué operaciones están definidas y qué valores están excluidos. Algunas transformaciones son reversibles y permiten recuperar la condición anterior; otras sólo funcionan en una dirección y pueden añadir o eliminar posibilidades. Por eso una cadena algebraica no es simplemente un movimiento de símbolos: es una secuencia de afirmaciones cuya información y validez deben poder defenderse.

K. Transformaciones bajo dominios distintos

61. Sobre todos los reales, la primera ecuación da $x = 4$. En la segunda, poniendo $u = x - 1$, tenemos $u^2 = 9$. Como $u^2 - 9 = (u-3)(u+3)$, un producto nulo exige $u = 3$ o $u = -3$: los candidatos son $x = 4$ y $x = -2$. El cuadrado añade -2 y el paso no es reversible sobre todos los reales.

Con $x \geq 1$, sólo 4 pertenece al dominio de los dos problemas. Dentro de ese dominio, $x - 1 \geq 0$ descarta la posibilidad -3, y el paso sí conserva exactamente las soluciones. Con $x \leq 1$, la ecuación inicial no tiene soluciones, mientras la nueva admite -2: vuelve a perderse la reversibilidad. El paso hacia el cuadrado es válido en los tres dominios; su regreso depende de qué candidatos admite el dominio declarado.

62. La ecuación inicial tiene sólo $x = 3$. La nueva es $(x - 2)(x + 1) = 4(x - 2)$. Restando el miembro derecho y factorizando se obtiene $(x - 2)(x - 3) = 0$, con soluciones 2 y 3. La multiplicación es válida hacia adelante, pero sobre todos los reales añade 2, porque allí el factor multiplicador es cero.

Sobre el dominio declarado $x > 2$, el factor $x - 2$ es no nulo, puede invertirse y ambas ecuaciones tienen únicamente la solución 3. Si el dominio inicial era todo $\mathbb{R}$, el estudiante no puede sustituirlo retrospectivamente por $x > 2$: debe analizar también $x \leq 2$. En esa parte del dominio, $x + 1 \leq 3$, de modo que la ecuación original no tiene soluciones. Así se justifica que la única solución global es 3, mediante un examen de ambos casos, no mediante un cambio silencioso del problema.

63. El dominio original es $x \neq 1$. Allí, tanto $x - 1$ como $(x - 1)^2$ son distintos de cero: multiplicar por cualquiera de ellos es reversible.

El primer procedimiento produce $1 = 2$, que no es verdadero para ninguna entrada. No hay soluciones. El segundo produce $x - 1 = 2(x - 1)$; restando $x - 1$ a ambos miembros, $0 = x - 1$, cuyo único candidato es 1. Ese candidato está fuera del dominio original y debe rechazarse. En el dominio original, la segunda ecuación tampoco tiene soluciones. Lo que introduce el candidato inadmisible no es la multiplicación correctamente restringida, sino interpretar después una ecuación polinómica sobre un dominio más amplio. La sustitución de 1 en las fracciones originales no produce valores.

L. Dos rutas y una misma justificación

64. Primera ruta: restamos el miembro derecho y aplicamos distributividad en sentido inverso:

$(x - 1)((x + 2) - (x + 5)) = 0$.

El paréntesis interior vale -3, así que $-3(x - 1) = 0$. Dividir por $-3 \neq 0$ da $x - 1 = 0$, y sumar 1 da $x = 1$. Todos los pasos son reversibles sobre los reales.

Segunda ruta: si $x = 1$, ambos miembros originales valen cero, por lo que sí es solución. Si $x \neq 1$, podemos dividir por $x - 1$ y obtenemos $x + 2 = x + 5$. Restar x da $2 = 5$, imposible; ese caso no aporta soluciones. El examen es exhaustivo porque toda entrada es 1 o distinta de 1.

Ambas rutas justifican la única solución 1. La primera evita una bifurcación usando un divisor constante no nulo; la segunda muestra por qué cancelar sin separar casos habría eliminado precisamente la solución. La claridad se evalúa por las razones y los casos visibles, no por el número de líneas.

65. Los denominadores son constantes no nulas, así que el dominio es todo $\mathbb{R}$.

Primera ruta: multiplicar ambos miembros por $12 \neq 0$ es reversible y da $3(3x - 2) - 2(x + 1) = 5$. Por distributividad, $9x - 6 - 2x - 2 = 5$; agrupando, $7x - 8 = 5$. Sumar 8 y dividir por $7 \neq 0$ da $x = 13/7$.

Segunda ruta: llevar las fracciones al denominador común 12 da

$\frac{3(3x-2)-2(x+1)}{12} = \frac{5}{12}$,

y el miembro izquierdo es $\frac{7x-8}{12}$. Multiplicar por 12 conduce a la misma ecuación $7x-8 = 5$ y al mismo resultado. Las dos rutas usan equivalencia de fracciones, distributividad, agrupación y operaciones con inversa; cambia el orden en que se presentan esas razones.

Verificación: para $x = 13/7$, el primer término vale $25/28$ y el segundo $10/21$. Su diferencia es $75/84 - 40/84 = 35/84 = 5/12$. La coincidencia en la ecuación original confirma el candidato; las transformaciones reversibles garantizan que no falta otro.

66. Ambas rutas empiezan por $x \neq 3$.

Al multiplicar por $x - 3$, no nulo en ese dominio, obtenemos $x + 2 = 2x - 1$. Restar x y sumar 1 da $x = 3$, que está excluido. Por tanto, no hay soluciones. El candidato no puede comprobarse en la ecuación original porque sus denominadores serían cero.

Al restar el miembro derecho, la ecuación equivale a $\frac{(x+2)-(2x-1)}{x-3} = 0$, es decir, $\frac{3-x}{x-3} = 0$. Como $3 - x = -(x - 3)$, el miembro izquierdo es -1 para todo $x \neq 3$. La ecuación queda $-1 = 0$, imposible.

La segunda ruta muestra inmediatamente que la diferencia de los dos miembros es constante y nunca nula; la primera da un candidato y exige contrastarlo con el dominio. Ambas son correctas si conservan $x \neq 3$. La ruta breve no elimina la condición que hace legítima la simplificación.

M. Reparar errores que se compensan

67. Distributividad da $a(x + 2) = ax + 2a$, no $ax + 2$. El primer enlace requeriría $2a = 2$, es decir, $a = 1$. El segundo añade $2(a - 1)$ a una sola expresión y sólo conserva su valor si $a = 1$. El tercer enlace sí es una identidad: $ax + 2 + 2(a - 1) = ax + 2 + 2a - 2 = ax + 2a$.

Para $a = 1$, todos los enlaces quedan correctos, sea cual sea x; eso no justifica una identidad con parámetro real arbitrario. Para $a = 2, x = 1$, la secuencia de valores es $6, 4, 6, 6$. La caída de 6 a 4 y la vuelta a 6 exhiben dos cambios de valor que se compensan.

La reparación es $a(x + 2) = ax + a \cdot 2 = ax + 2a$, por distributividad y conmutatividad del producto. Ya no hace falta añadir una corrección posterior. Las expresiones inicial y final pueden coincidir aunque la cadena que pretende conectarlas sea falsa.

68. La expresión original vale $2 - x + 3 = 5 - x$. El primer enlace distribuye mal el inverso aditivo: restar $x - 3$ exige restar x y sumar 3, no restar ambos. El supuesto segundo valor $2 - x - 3 = -x - 1$ difiere del original en 6, para todo x.

El enlace $2 - x - 3 = -x - 1$ sí es correcto. El paso $-x - 1 = -x - 1 + 6$ no conserva el valor: añade 6 a una sola expresión y compensa exactamente el error inicial. El último enlace $-x - 1 + 6 = 5 - x$ vuelve a ser correcto. Ninguna elección de x hace que sumar 6 deje inalterado un real; por tanto, no hay un valor que convierta la cadena completa en una cadena de igualdades verdaderas.

Una reparación es $2 - (x - 3) = 2 + (-(x + (-3))) = 2 + ((-x) + 3) = 5 - x$. Se usan definición de resta, inverso de una suma, doble inverso y agrupación. El final correcto ya se obtiene mediante enlaces que conservan el valor.

69. En $x = 0$, la condición inicial es verdadera, $0 \cdot (-4) = 0$, pero la condición $x - 4 = 0$ es falsa. El primer paso pretende dividir por cero y elimina esa posibilidad. En $x = 4$, todas las condiciones son verdaderas y la división por x sí está definida. Que el procedimiento funcione en una solución no demuestra que preserve las demás.

La reparación separa casos. Si $x = 0$, la ecuación original queda satisfecha. Si $x \neq 0$, dividir por x es reversible y da $x = 4$, que pertenece a ese caso. Las soluciones son exactamente 0 y 4.

Volver a la condición original al final permite comprobar que 4 es solución; no repara la pérdida de 0 ocurrida en la ruta. Para justificar exhaustividad hay que mostrar que todo valor admisible que satisface la ecuación se considera en uno de los casos y que no hay otras soluciones en ellos.

N. Diseñar y recuperar casos

70. Restar $c(x-a)$ y factorizar da $(x-a)(x-b-c)=0$. Los posibles valores son $x=a$ y $x=b+c$.

Una resolución segura por división comienza con $x=a$: ambos miembros originales valen cero, así que siempre es solución. En el caso $x\neq a$, podemos dividir por $x-a$, obtener $x-b=c$ y concluir $x=b+c$, conservando $x\neq a$.

Si $a\neq b+c$, el segundo candidato pertenece al caso de división. Hay dos soluciones distintas, a y $b+c$; dividir sin examinar el factor nulo omitiría a.

Si $a=b+c$, el candidato del caso $x\neq a$ contradice la restricción de ese caso y se rechaza allí. Sólo queda la solución a, ya recuperada por el caso separado. Si se divide sin registrar el dominio, aparece formalmente ese mismo número al resolver $x-b=c$, pero el paso de división estaba indefinido en él. Obtener un número correcto por esa ruta no la hace válida. La solución queda justificada por el caso $x=a$, no por dividir por cero.

71. Reescribimos $x=p$ como $x-p=0$ restando p y multiplicamos ambos miembros por $x-q$. La nueva ecuación es $(x-q)(x-p)=0$. La transformación hacia adelante es válida para todo real, pues no introduce divisiones.

La original tiene sólo p. La nueva tiene p y q. Si $p\neq q$, añade una solución distinta: q no satisface $x=p$ y se descarta al volver a la ecuación original. Si $p=q$, la nueva es $(x-p)^2=0$ y tiene sólo p, porque un real con cuadrado cero es cero. En este caso particular las soluciones coinciden, aunque el multiplicador $x-p$ no tenga inversa en la solución. La coincidencia se demuestra examinando la ecuación resultante, no dividiendo por un factor nulo.

Si $p\neq q$, declarar de antemano el dominio $x\neq q$ hace que $x-q$ tenga inversa para todas sus entradas. Dentro de ese dominio la multiplicación sí es reversible por división y conserva la solución p. La hipótesis de multiplicador no nulo garantiza el regreso en general; cuando falla, hay que analizar la ecuación concreta para saber si realmente se añadieron posibilidades.

72. El dominio original exige $x\neq a$. Cancelar el factor no nulo da $x-b=0$ dentro de ese dominio. El único candidato es b.

Si $a\neq b$, el candidato pertenece al dominio y es la única solución. Si $a=b$, el candidato está excluido y no hay soluciones.

Eliminar el denominador es reversible sobre $x\neq a$ y conduce a $(x-a)(x-b)=0$. Como el primer factor no puede ser cero en ese dominio, sólo puede anularse $x-b$; se obtienen los mismos casos. Resolver el producto sobre todos los reales y aceptar a olvidaría la exclusión inicial. Cuando $a=b$, ese olvido convertiría un problema sin soluciones en uno con una solución inadmisible.

Con $a=1, b=4$, la ecuación $\frac{(x-1)(x-4)}{x-1}=0$ tiene sólo $x=4$; la sustitución produce $0/3=0$. Con $a=b=1$, $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$ no tiene soluciones: fuera de 1 vale $x-1\neq 0$, y en 1 no está definida. Los dos ejemplos comprueban que la relación entre los parámetros afecta la admisibilidad del candidato, sin alterar la regla de cancelación.

Capítulo 4

Proposiciones y conectivos lógicos

En el capítulo anterior aprendimos a preguntar qué autoriza una transformación algebraica y si un paso puede revertirse. Decíamos, por ejemplo:

> si una ecuación implica otra, el paso puede ser válido sin ser reversible.

Ahora necesitamos un lenguaje capaz de expresar esa diferencia con precisión.

La lógica proposicional estudia la estructura de afirmaciones construidas mediante unas pocas operaciones: negar, unir mediante «y», unir mediante «o», condicionar mediante «si... entonces...» y afirmar equivalencia mediante «si y sólo si».

El objetivo no es convertir el lenguaje matemático en una colección de símbolos. Es hacer visible su arquitectura.

> **La lógica proposicional separa el contenido de una afirmación de la forma en que su verdad depende de otras afirmaciones.**

4.1. ¿Qué es una proposición?

Consideremos estas expresiones:

1. «7 es primo».
2. «$2 + 3 = 6$».
3. «¿Es 11 un número primo?».
4. «Calcula 5!».
5. «$x + 2 = 5$».

Las dos primeras son afirmaciones declarativas. Podemos preguntar si son verdaderas o falsas: la primera es verdadera y la segunda falsa.

La tercera es una pregunta y la cuarta una orden. No afirman algo que podamos clasificar directamente como verdadero o falso.

La quinta parece una afirmación, pero su verdad depende del valor de x. Si $x = 3$, es verdadera; si $x = 4$, es falsa. Mientras no fijemos x ni expresemos qué valores estamos considerando, no tenemos todavía una proposición cerrada.

Llamaremos **proposición** a una afirmación declarativa a la que, en el contexto dado, corresponde un valor de verdad.

El contexto importa. «El número n es par» no determina por sí solo una proposición si n no ha sido fijado. En cambio, después de escribir «sea $n = 12$», la frase sí determina una afirmación verdadera.

Más adelante estudiaremos sistemáticamente expresiones abiertas y cuantificadores. Por ahora basta reconocer la frontera.

4.2. Proposición y valor de verdad no son lo mismo

Una proposición es la afirmación; su **valor de verdad** es uno de dos valores:

- V: verdadero;
- F: falso.

Por ejemplo, sea

P: «13 es primo».

Entonces P es una proposición y su valor de verdad es V.

Sea

Q: «4 es impar».

Entonces Q es una proposición y su valor de verdad es F.

Proposiciones atómicas. Para el análisis proposicional podemos tratar algunas afirmaciones como unidades indivisibles.

Si escribimos

P: «12 es par»

y

Q: «12 es múltiplo de 3»,

podemos construir una afirmación nueva: «12 es par y 12 es múltiplo de 3».

En ese análisis, P y Q son **proposiciones atómicas** y la nueva afirmación es **compuesta**.

La lógica proposicional abstrae del contenido interno de P y Q para estudiar cómo se combina su verdad.

4.3. Negación y alcance

La **negación** de P, escrita $\neg P$, es verdadera exactamente cuando P es falsa.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Si

P: «17 es par»,

entonces $\neg P$ puede leerse «17 no es par».

Negar no es cambiar palabras al azar. Cuando una afirmación es compuesta, debemos saber exactamente qué está siendo negado.

Comparemos:

$\neg(P \wedge Q)$

y

$(\neg P) \wedge Q$.

En la primera fórmula, la negación afecta a toda la conjunción $P \wedge Q$.

En la segunda, sólo afecta a P.

Los paréntesis determinan el **alcance** de la negación.

Todavía no transformaremos sistemáticamente una negación de una conjunción en otra fórmula. Esa será materia de C5. Aquí el objetivo es leer la estructura correcta.

4.4. Conjunción: exigir dos condiciones

La **conjunción** de P y Q se escribe

$P \wedge Q$

y se lee «P y Q».

Es verdadera únicamente cuando ambas proposiciones son verdaderas.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por ejemplo, sea

P: «18 es par»

y

Q: «18 es múltiplo de 3».

Entonces $P \wedge Q$ es verdadera.

Si sustituimos Q por «18 es primo», la conjunción se vuelve falsa, aunque P siga siendo verdadera.

Hipótesis múltiples. En matemática es frecuente que una afirmación requiera simultáneamente varias condiciones. Decir

«n es entero positivo y n es par»

contiene una conjunción, aunque no aparezca el símbolo $\wedge$.

4.5. Disyunción: al menos una condición

La **disyunción** se escribe

$P \vee Q$

y se lee «P o Q».

En lógica matemática, $\vee$ se interpreta por defecto de manera **inclusiva**: la disyunción es verdadera cuando al menos una de las proposiciones es verdadera, incluyendo el caso en que ambas lo son.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esto puede diferir del uso cotidiano de «o».

«Puedes elegir té o café» puede sugerir que no se permite elegir ambos. Pero el conectivo $\vee$ no contiene esa exclusión por sí mismo.

Lectura matemática. La ecuación $(x-1)(x+2)=0$ conduce a la condición

$x = 1$ o $x = -2$.

No hay aquí una exigencia de exclusividad lógica; simplemente al menos una de las alternativas debe cumplirse.

4.6. El condicional material

La afirmación

$P \Rightarrow Q$

se lee «si P, entonces Q».

P es el **antecedente** y Q el **consecuente**.

Su tabla de verdad es:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El único caso en que el condicional es falso es aquel en que el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Leer un condicional como ausencia de contraejemplos. Supongamos:

P: «un entero n es múltiplo de 4»;

Q: «n es par».

La afirmación $P \Rightarrow Q$ sostiene que no existe un caso en que n sea múltiplo de 4 pero no sea par.

Un número que no sea múltiplo de 4 no constituye, por sí solo, un contraejemplo. Para refutar el condicional necesitamos un caso con P verdadera y Q falsa.

No es causalidad. $P \Rightarrow Q$ no significa que P cause Q.

Por ejemplo, «si 10 es par, entonces $2+2=4$» tiene antecedente y consecuente verdaderos, aunque no exista relación causal entre ambas afirmaciones.

La lógica proposicional registra condiciones de verdad, no mecanismos físicos de producción.

Un caso verdadero y una regla válida. Fijemos un entero n y llamemos P a «n es par» y Q a «n es múltiplo de 3». Estas propiedades permiten realizar las cuatro filas del condicional con números concretos:

n	P	Q	$P \Rightarrow Q$	Lectura del caso
6	V	V	V	Se cumple el antecedente y también el consecuente
2	V	F	F	Se cumple el antecedente, pero falla el consecuente
3	F	V	V	El caso no cumple el antecedente
5	F	F	V	El caso tampoco cumple el antecedente

En $n = 6$, el condicional es verdadero. Ese hecho no autoriza la regla general «si un entero es par, entonces es múltiplo de 3»: $n = 2$ la refuta. Tampoco los casos 3 y 5 permiten concluir que su antecedente sea verdadero; sólo muestran que no ocurrió la combinación que hace falso al condicional.

Hay una distinción cercana que conviene fijar desde ahora. Un **argumento** propone obtener una conclusión a partir de unas premisas. Para revisar su validez proposicional buscamos

una valuación que haga verdaderas todas las premisas y falsa la conclusión. Si existe, el argumento no es válido; si ninguna valuación lo permite, es válido. Esta prueba examina todas las combinaciones de verdad, no sólo un ejemplo favorable. Más adelante estudiaremos cómo organizar demostraciones completas; aquí trabajamos únicamente con la semántica de estos conectivos.

Control. Un estudiante observa que 6 es par y múltiplo de 3 y afirma: «a partir de que un entero es par, puedo concluir que es múltiplo de 3». Identifica la premisa y la conclusión, y presenta el caso que decide la validez de ese paso.

Resolución. La premisa es P y la conclusión es Q. Para refutar el paso necesitamos $P = V, Q = F$, no un caso en que ambas sean verdaderas. El entero 2 realiza esa valuación: es par y no es múltiplo de 3. El paso propuesto no es válido. El condicional correspondiente a $n = 6$ sigue siendo verdadero; lo que falla es usar ese caso para garantizar el paso para cualquier entero. Si buscaste un número impar como contraejemplo, vuelve a la fila V, F de §4.6; si confundiste la afirmación con su valor, vuelve a §4.2.

4.7. Condición suficiente y condición necesaria

El condicional $P \Rightarrow Q$ puede expresarse de varias maneras.

P es suficiente para Q. Si sabemos P, eso basta para concluir Q.
Por tanto:

«P es condición suficiente para Q» significa $P \Rightarrow Q$.

Q es necesaria para P. Si P ocurre, Q no puede faltar.
Por tanto:

«Q es condición necesaria para P» también significa $P \Rightarrow Q$.

«Sólo si». La frase

«P sólo si Q»

significa que Q es necesaria para P. Por tanto:
$P \Rightarrow Q$.
Éste es uno de los giros lingüísticos que más errores produce.

«Si». La frase

«P si Q»

significa que Q es suficiente para P:
$Q \Rightarrow P$.
La dirección debe leerse desde la función lógica, no desde el orden de aparición de las palabras.

Traducir buscando el caso prohibido. Las palabras «necesario» y «suficiente» pueden leerse mediante una misma pregunta: **¿qué combinación de verdad excluye la frase?**

Sean P: «un entero fijado es múltiplo de 6» y Q: «ese entero es múltiplo de 3».

Frase	Caso que prohíbe	Simbolización
Ser múltiplo de 6 basta para ser múltiplo de 3	$P = V, Q = F$	$P \Rightarrow Q$

Frase	Caso que prohíbe	Simbolización
Ser múltiplo de 3 es necesario para ser múltiplo de 6	$P = V, Q = F$	$P \Rightarrow Q$
Es múltiplo de 6 sólo si es múltiplo de 3	$P = V, Q = F$	$P \Rightarrow Q$
Es múltiplo de 3 si es múltiplo de 6	$P = V, Q = F$	$P \Rightarrow Q$

Todas dicen que no puede cumplirse P mientras falla Q. Ninguna excluye $P = F, Q = V$: el entero 3 es múltiplo de 3 y no es múltiplo de 6. Por eso que una condición sea necesaria no significa que sea suficiente.

Para leer una frase, identifica primero las afirmaciones completas; después determina qué condición no puede faltar cuando la otra ocurre. Si la frase habla de dos requisitos unidos por «y», conserva ambos dentro del consecuente antes de evaluar el condicional.

Control. Sean A: «un entero fijado es múltiplo de 10» y B: «ese entero es par». Traduce «ser par es necesario para ser múltiplo de 10» y escribe una frase con «si» que mantenga la dirección. ¿La traducción afirma también que ser par basta?

Resolución. La frase prohíbe $A = V, B = F$, así que se traduce $A \Rightarrow B$. Con «si»: «el entero es par si es múltiplo de 10». No afirma $B \Rightarrow A$: el entero 2 es par y no es múltiplo de 10. La traducción y el examen matemático son tareas distintas: primero reproducimos lo que dice la frase; luego averiguamos si es verdadero. Si invertiste el condicional, vuelve a las lecturas «P si Q» y «P sólo si Q» de esta sección.

4.8. Conversa, inversa y contraposición

Partimos del condicional

$P \Rightarrow Q$.

Podemos construir tres afirmaciones relacionadas.

Conversa. $Q \Rightarrow P$.

Inversa. $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Contraposición. $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Estas fórmulas no tienen todas el mismo comportamiento.

Comparemos sus tablas:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

La columna del condicional original coincide con la de su contraposición.

La conversa coincide con la inversa, pero no con el condicional original.

En C5 aprenderemos a expresar este hecho mediante equivalencias y transformaciones. Aquí basta reconocerlo semánticamente.

Ejemplo. «Si un entero es múltiplo de 4, entonces es par».

- conversa: «si es par, entonces es múltiplo de 4» — falsa;

- contraposición: «si no es par, entonces no es múltiplo de 4» — verdadera cuando el original lo es.

Una dirección no concede la otra. Sean P: «un entero fijado es múltiplo de 6» y Q: «ese entero es múltiplo de 3». El condicional $P \Rightarrow Q$ vale para cualquier entero: si $n = 6k$, entonces $n = 3(2k)$. La conversa $Q \Rightarrow P$ no tiene esa garantía; el entero 3 cumple Q y falla P.

En ese mismo caso $n = 3$, la inversa $\neg P \Rightarrow \neg Q$ también falla: no ser múltiplo de 6 no obliga a dejar de ser múltiplo de 3. En cambio, la contraposición $\neg Q \Rightarrow \neg P$ conserva la columna de verdad del original. No propone recorrer la flecha al revés sin más: cambia la dirección y niega **ambas** condiciones.

El bicondicional pide que las dos direcciones se sostengan. En $n = 12$, P y Q son verdaderas y el bicondicional vale V; en $n = 3$, sus valores son distintos y vale F. Por tanto, un caso con coincidencia de valores no demuestra que las condiciones sean necesarias y suficientes para todos los enteros.

Control. Para P: «el entero es múltiplo de 4» y Q: «es par», evalúa el original, la conversa, la inversa, la contraposición y el bicondicional en $n = 10$. Explica qué revela el caso y qué debe justificarse de forma general.

Resolución. En 10, $P = F$ y $Q = V$. El original $P \Rightarrow Q$ vale V; la conversa $Q \Rightarrow P$ vale F; la inversa $\neg P \Rightarrow \neg Q$ vale F; la contraposición $\neg Q \Rightarrow \neg P$ vale V; el bicondicional vale F. El caso refuta la conversa y la inversa como afirmaciones para todos los enteros, y refuta la doble dirección. Para justificar el original en general, si $n = 4k$, entonces $n = 2(2k)$ y es par. La tabla completa de §4.8 garantiza la coincidencia entre original y contraposición para cualquier valuación, no sólo para el entero 10. Si cambiaste únicamente el orden o únicamente las negaciones, compara otra vez las tres fórmulas de esta sección.

4.9. Bicondicional: poder ir en ambas direcciones

El **bicondicional** se escribe

$P \Leftrightarrow Q$

y se lee «P si y sólo si Q».

Es verdadero cuando P y Q tienen el mismo valor de verdad.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

También puede leerse:

- «P es condición necesaria y suficiente para Q»;
- «P exactamente cuando Q».

Conexión con C3. En C3 distinguíamos transformaciones válidas en una sola dirección de transformaciones reversibles.

Si una condición P lleva a Q y también Q lleva a P, el bicondicional registra precisamente esa reciprocidad.

No usaremos todavía el símbolo $\Leftrightarrow$ como una señal para ejecutar cadenas largas de reescrituras. Ese uso algebraico comenzará en C5.

4.10. Sintaxis, paréntesis y conectivo principal

Una fórmula proposicional tiene estructura.

Comparemos:

$P \vee (Q \wedge R)$

y

$(P \vee Q) \wedge R$.

Contienen los mismos símbolos atómicos y los mismos conectivos, pero no tienen la misma estructura.

En la primera, el conectivo principal es $\vee$.

En la segunda, el conectivo principal es $\wedge$.

Subfórmulas inmediatas. En $P \vee (Q \wedge R)$, las dos partes unidas por el conectivo principal son:

- P;
- $Q \wedge R$.

A su vez, $Q \wedge R$ posee dos componentes: Q y R.

Podemos imaginar esta estructura como un árbol:



El alcance vuelve a importar. $\neg(P \Rightarrow Q)$ tiene como conectivo principal $\neg$.

$(\neg P) \Rightarrow Q$ tiene como conectivo principal $\Rightarrow$.

Los paréntesis no son decoración. Determinan qué fórmula estamos escribiendo.

4.11. Tablas de verdad como semántica explícita

Una tabla de verdad enumera sistemáticamente todas las posibles asignaciones de valores de verdad a las proposiciones atómicas.

Con una variable hay 2 valuaciones.

Con dos variables hay $2^2 = 4$.

Con tres variables hay $2^3 = 8$.

Orden sistemático de filas. Para tres variables P, Q, R podemos organizar:

P	Q	R
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

La primera columna cambia más lentamente; la última, más rápidamente.

Columnas auxiliares. Para evaluar
$(P \vee Q) \Rightarrow \neg R$,
no conviene adivinar la columna final. Construimos primero:

1. $P \vee Q$;
2. $\neg R$;
3. el condicional completo.

P	Q	R	$P \vee Q$	$\neg R$	$(P \vee Q) \Rightarrow \neg R$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

La tabla hace explícita la semántica de la fórmula completa.

4.12. Tautología, contradicción y contingencia

Una fórmula es una **tautología** si es verdadera en todas las valuaciones.
Ejemplo:
$P \vee \neg P$.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

Una fórmula es una **contradicción** si es falsa en todas las valuaciones.
Ejemplo:
$P \wedge \neg P$.

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

Una fórmula es una **contingencia** si es verdadera en algunas valuaciones y falsa en otras.
Por ejemplo, $P \Rightarrow Q$ es contingente.

Una idea importante. La clasificación no depende del contenido concreto de P y Q, sino de la forma de la fórmula y de todas las valuaciones posibles.

C5 desarrollará procedimientos de transformación que permitirán reconocer muchas de estas propiedades sin reconstruir siempre una tabla completa.

4.13. Traducir entre lenguaje matemático y símbolos

La simbolización no consiste en sustituir palabras mecánicamente. Debemos identificar la estructura.

Ejemplo 1. «Si un entero es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3».
Sea
P: «el entero es múltiplo de 6»;
Q: «el entero es múltiplo de 3».
La forma es
$P \Rightarrow Q$.

Ejemplo 2. «Ser múltiplo de 6 es suficiente para ser par».
Si
P: «es múltiplo de 6»
y
Q: «es par»,
la forma es otra vez $P \Rightarrow Q$.

Ejemplo 3. «Ser divisible por 2 es necesario para ser divisible por 6».
Sea
P: «es divisible por 6»;
Q: «es divisible por 2».
Como Q es necesaria para P, la forma es
$P \Rightarrow Q$.

Traducir de regreso. La fórmula
$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
puede verbalizarse:

> «Si se cumplen P y Q, entonces se cumple R».

La dirección simbólica y la verbal deben entrenarse ambas.

4.14. Cierre — leer una afirmación lógicamente

Ante una afirmación matemática, podemos seguir este protocolo:

1. **¿Es una proposición?**
2. **¿Cuáles son sus componentes atómicos?**
3. **¿Cuál es el conectivo principal?**
4. **¿Cuál es el alcance de cada negación?**
5. **¿Qué estructura fijan los paréntesis?**
6. **Si hay un condicional, cuál es el antecedente y cuál el consecuente?**
7. **¿Qué condición es suficiente y cuál necesaria?**
8. **¿Qué valuaciones hacen verdadera la fórmula?**
9. **¿Necesito una tabla de verdad para resolver la duda?**
10. **¿La fórmula es tautología, contradicción o contingencia?**

La pregunta final es:

> **¿Puedo distinguir qué dice una afirmación de cómo está construida su verdad?**

C4 nos enseña a leer esa arquitectura. En C5 aprenderemos a transformarla algebraicamente.

Ejercicios

Todos los ejercicios han sido redactados para *Álgebra para matemáticos* y calibrados con el corpus rector del capítulo.

A. Proposición, contexto y valor de verdad

1. Decide cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones: «9 es primo», «$5 + 7$», «¿8 es par?», «$2^5 = 32$».
2. Explica por qué «$x^2 = 4$» no determina por sí sola una proposición si x no ha sido fijado.
3. Si se declara $x = 2$, determina el valor de verdad de «$x^2 = 4$».
4. Decide si «Todo triángulo tiene tres lados» es una proposición y señala su valor de verdad.
5. Decide si «Encuentra todos los divisores de 18» es una proposición. Justifica.
6. Da un ejemplo de una expresión abierta que se convierta en proposición al fijar una variable.
7. Sea P: «21 es múltiplo de 7». Indica qué es P y cuál es su valor de verdad.
8. Explica la diferencia entre una proposición y su valor de verdad.

B. Atomicidad, negación, conjunción y disyunción

9. Sean P: «12 es par» y Q: «12 es múltiplo de 3». Escribe en símbolos «12 es par y múltiplo de 3».
10. Con las mismas P, Q, determina el valor de verdad de $P \wedge Q$.
11. Sea R: «12 es primo». Determina los valores de $P \wedge R$ y $P \vee R$.
12. Si P es falsa, ¿qué valor tiene $\neg P$? Explica.
13. Explica la diferencia estructural entre $\neg(P \wedge Q)$ y $(\neg P) \wedge Q$ sin transformar ninguna de las dos fórmulas.
14. Construye la tabla de verdad de $P \vee Q$ y señala en qué fila es falsa.
15. Explica por qué la disyunción lógica es inclusiva.
16. Da una frase cotidiana en la que «o» suene exclusiva y explica por qué no debe identificarse automáticamente con $\vee$.

C. El condicional y su lenguaje

17. Construye la tabla de verdad de $P \Rightarrow Q$.
18. ¿Cuál es la única valuación que hace falso $P \Rightarrow Q$?
19. Explica por qué una valuación con $P = F$ no constituye un contraejemplo a $P \Rightarrow Q$.
20. Sea P: «n es múltiplo de 8» y Q: «n es par». Expresa «si n es múltiplo de 8, entonces es par».
21. En $P \Rightarrow Q$, identifica antecedente y consecuente.
22. Traduce «P es suficiente para Q» a símbolos.
23. Traduce «Q es necesaria para P» a símbolos.
24. Traduce «P sólo si Q» a símbolos.
25. Traduce «P si Q» a símbolos.
26. Explica por qué «P sólo si Q» y «P si Q» tienen direcciones distintas.
27. Si «ser múltiplo de 12» es suficiente para «ser múltiplo de 3», identifica antecedente y consecuente.
28. Escribe una afirmación matemática verdadera de la forma $P \Rightarrow Q$ donde no exista una relación causal entre P y Q.

D. Conversa, inversa, contraposición y bicondicional

29. Dado $P \Rightarrow Q$, escribe su conversa.
30. Dado $P \Rightarrow Q$, escribe su inversa.
31. Dado $P \Rightarrow Q$, escribe su contraposición.
32. Para «si un entero es múltiplo de 4, entonces es par», escribe la conversa y decide si es verdadera.
33. Escribe la contraposición de la afirmación anterior y explica su significado.
34. Mediante una tabla de verdad, comprueba que $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q \Rightarrow \neg P$ tienen la misma columna final.
35. Construye la tabla de verdad de $P \Leftrightarrow Q$.
36. Explica en palabras qué significa afirmar que P es condición necesaria y suficiente para Q.

E. Sintaxis y estructura

37. Identifica el conectivo principal de $P \vee (Q \wedge R)$.
38. Identifica el conectivo principal de $(P \vee Q) \wedge R$.
39. En $\neg(P \Rightarrow Q)$, identifica el alcance de la negación y el conectivo principal.
40. En $(\neg P) \Rightarrow Q$, identifica el conectivo principal y compara la estructura con la del ejercicio anterior.
41. Dibuja un árbol sintáctico simple para $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.
42. Inserta paréntesis de dos maneras distintas en $P \vee Q \wedge R$ para obtener dos estructuras diferentes.

F. Tablas de verdad

43. Construye la tabla de verdad de $\neg P \vee Q$.
44. Construye la tabla de verdad de $(P \wedge Q) \Rightarrow P$.
45. Construye la tabla de verdad de $P \Rightarrow (P \vee Q)$.
46. Construye la tabla de verdad de $(P \vee Q) \wedge \neg P$.
47. Construye la tabla de verdad de $(P \wedge Q) \Leftrightarrow Q$.
48. Construye la tabla de verdad de $P \vee (Q \wedge R)$ usando ocho filas.
49. Construye la tabla de verdad de $(P \vee Q) \wedge R$ y compárala con la del ejercicio 48. ¿Coinciden siempre?
50. Construye la tabla de verdad de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

G. Tautología, contradicción y contingencia

51. Clasifica $P \vee \neg P$ mediante tabla de verdad.
52. Clasifica $P \wedge \neg P$ mediante tabla de verdad.
53. Clasifica $P \Rightarrow Q$.
54. Clasifica $(P \wedge Q) \Rightarrow P$.
55. Clasifica $(P \Leftrightarrow Q) \wedge P$.

H. Traducción, diagnóstico y síntesis

56. Sean P: «n es divisible por 6» y Q: «n es divisible por 3». Simboliza «ser divisible por 3 es necesario para ser divisible por 6».
57. Sean P: «n es par» y Q: «n es múltiplo de 4». Un estudiante traduce «n es par sólo si es múltiplo de 4» como $Q \Rightarrow P$. Diagnostica el error y escribe la traducción correcta.
58. Verbaliza con precisión $(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg R)$.
59. Para la fórmula $(P \vee Q) \Rightarrow R$, identifica sus componentes, conectivo principal, número de filas de su tabla y una valuación que la haga falsa.

60. Explica en 8–12 líneas por qué la lógica proposicional es útil para leer matemáticas aunque todavía no sepamos transformar fórmulas mediante leyes de equivalencia. Debes mencionar estructura, valor de verdad, conectivo principal, condicional y tablas de verdad.

I. Traducir condiciones sin invertirlas

61. Sea n un entero fijado, P: «n es múltiplo de 12» y Q: «n es múltiplo de 4». Simboliza «no puede ser múltiplo de 12 sin ser múltiplo de 4», indicando el caso que la frase excluye. Escribe después una verbalización con «suficiente», otra con «necesario» y otra con «sólo si». Explica qué dirección no está afirmada y da un entero que la refute.
62. Sea n un entero fijado. Denota por R «n es múltiplo de 12», por P «n es par» y por Q «n es múltiplo de 3». Traduce «ser múltiplo de 12 basta para satisfacer a la vez las otras dos condiciones» y verbaliza la fórmula de regreso usando «necesario». ¿Se afirma que cumplir las otras dos condiciones basta para ser múltiplo de 12? Responde con un entero concreto.
63. Para un real fijado x, sean P: «$x > 0$» y Q: «$x \neq 0$». Traduce «para que sea positivo es necesario que no sea cero», y expresa la misma dirección con «si» y «sólo si». Un estudiante la reemplaza por «no ser cero es suficiente para ser positivo». Identifica qué caso refutaría cada frase y decide cuáles son verdaderas para cualquier real.

J. Refutar una inferencia mediante una valuación

64. Un argumento tiene premisas $P \Rightarrow Q$ y Q, y conclusión P. Construye una valuación que haga verdaderas las dos premisas y falsa la conclusión. Realízala con P: «un entero fijado es múltiplo de 8» y Q: «es múltiplo de 4». Compara el argumento con uno que use las premisas $P \Rightarrow Q$ y P para concluir Q.
65. Se propone concluir R a partir de $P \Rightarrow (Q \vee R)$ y $\neg Q$. Busca una valuación que refute el argumento. Después añade la premisa P y decide si todavía puede haber un contraejemplo. Explica qué información faltaba, sin transformar fórmulas mediante leyes de equivalencia.
66. Un estudiante usa $P \vee Q$ y P como premisas y concluye $\neg Q$. Construye una valuación que refute el paso y un ejemplo con propiedades de un entero que la realice. ¿Añadir la premisa «no se cumplen ambas» repararía el argumento? Justifica mediante los valores de verdad.

K. Paréntesis y alcance de los conectivos

67. Compara $A = P \Rightarrow (Q \wedge R)$ y $B = (P \Rightarrow Q) \wedge R$. Indica el conectivo principal y las subfórmulas inmediatas de cada una. Construye las ocho filas de verdad y determina exactamente en cuáles difieren. Explica por qué un valor verdadero de A puede coexistir con un valor falso de B.
68. Sean $A = \neg(P \Rightarrow Q)$ y $B = (\neg P) \Rightarrow Q$. Localiza el alcance de la negación en ambas, construye sus cuatro filas y encuentra todas las valuaciones que las distinguen. Decide si basta observar una fila en que coinciden para considerar intercambiables las fórmulas.
69. Compara $A = (P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R$ y $B = P \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$. Identifica qué afirma cada conectivo principal, construye las ocho filas y señala exactamente los casos que distinguen las fórmulas. Verbaliza ambas conservando sus agrupaciones.

L. Verdad de un caso y validez de un argumento

70. Sean P: «un entero fijado es par» y Q: «es múltiplo de 3». En $n = 6$, evalúa el condicional $(P \vee Q) \Rightarrow P$. Después decide si el argumento con premisa $P \vee Q$

y conclusión P es válido. Construye su tabla y un caso aritmético que decida la pregunta. Explica por qué las dos respuestas no se contradicen.

71. Analiza el argumento con premisas $P \Rightarrow Q$ y P, y conclusión Q. Construye una tabla que muestre cuándo todas las premisas son verdaderas y decide su validez. Luego fija P: «7 es par» y Q: «7 es múltiplo de 3». ¿La falsedad de la conclusión en ese caso invalida el argumento? Explica qué condición exige un contraejemplo.
72. Se tienen como premisas $P \Rightarrow Q$ y $P \Rightarrow R$, y se concluye $Q \Rightarrow R$. Encuentra todas las valuaciones que hacen verdaderas ambas premisas y falsa la conclusión. Realiza un contraejemplo con P: «un entero fijado es múltiplo de 12», Q: «es múltiplo de 3» y R: «es par». ¿Añadir $Q \Rightarrow P$ vuelve válido el argumento? Justifica sin leyes de reescritura.

Soluciones

A. Proposición, contexto y valor de verdad

1. «9 es primo» es una proposición y es falsa. «$5+7$» es una expresión, no una afirmación. «¿8 es par?» es una pregunta, no una proposición. «$2^5 = 32$» es una proposición y es verdadera.

2. Su verdad depende del valor de x. Por ejemplo, con $x = 2$ es verdadera, mientras con $x = 3$ es falsa. Sin fijar x ni introducir una condición que cierre la afirmación, no hay un único valor de verdad.

3. Con $x = 2$, la afirmación se convierte en $2^2 = 4$, es decir, $4 = 4$. Su valor de verdad es V.

4. Sí. Es una afirmación declarativa con valor de verdad. Es verdadera, pues tener tres lados forma parte de la definición usual de triángulo.

5. No. Es una orden o instrucción. Pide realizar una tarea, pero no afirma algo que pueda clasificarse directamente como verdadero o falso.

6. Ejemplo: «$x + 1 = 5$». No tiene un único valor de verdad mientras x esté libre. Si fijamos $x = 4$, obtenemos la proposición verdadera «$4 + 1 = 5$».

7. P es una proposición atómica para nuestro análisis. Es verdadera porque $21 = 3 \cdot 7$.

8. La proposición es la afirmación misma; el valor de verdad es la clasificación V o F que le corresponde. Dos proposiciones distintas pueden compartir el mismo valor de verdad.

B. Atomicidad, negación, conjunción y disyunción

9. La simbolización es $P \wedge Q$.

10. Ambas proposiciones son verdaderas: 12 es par y $12 = 4 \cdot 3$. Por tanto, $P \wedge Q$ es verdadera.

11. P es verdadera y R falsa. Entonces $P \wedge R$ es falsa, mientras $P \vee R$ es verdadera porque al menos una de las dos proposiciones es verdadera.

12. $\neg P$ es verdadera. La negación invierte el valor de verdad de P.

13. En $\neg(P \wedge Q)$, el alcance de $\neg$ es toda la fórmula $P \wedge Q$. En $(\neg P) \wedge Q$, la negación afecta sólo a P y el conectivo principal es $\wedge$. Son estructuras distintas aunque usen los mismos símbolos básicos.

14.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La única fila falsa es $P = F, Q = F$.

15. Porque $P \vee Q$ se define como verdadera cuando al menos una proposición es verdadera, y eso incluye la valuación $P = V, Q = V$.

16. Ejemplo: «Para el postre puedes elegir helado o fruta», que en cierto contexto puede sugerir elegir exactamente uno. El símbolo $\vee$ no incorpora esa exclusión: con $P = V, Q = V$ sigue siendo verdadero.

C. El condicional y su lenguaje

17.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

18. La única valuación falsa es $P = V$ y $Q = F$.

19. Un contraejemplo debe mostrar que se cumple lo prometido como hipótesis pero falla la conclusión. Si P es falsa, el caso no satisface el antecedente y por tanto no muestra un fracaso del paso de P a Q.

20. La simbolización es $P \Rightarrow Q$.

21. P es el antecedente y Q el consecuente.

22. $P \Rightarrow Q$.

23. También $P \Rightarrow Q$: si P ocurre, Q es una condición que necesariamente debe cumplirse.

24. $P \Rightarrow Q$.

25. $Q \Rightarrow P$.

26. «P sólo si Q» dice que Q es necesaria para P, de modo que $P \Rightarrow Q$. En cambio «P si Q» dice que Q basta para obtener P, de modo que $Q \Rightarrow P$.

27. Antecedente: «ser múltiplo de 12». Consecuente: «ser múltiplo de 3». La forma es $P \Rightarrow Q$.

28. Ejemplo: «Si 10 es par, entonces $2 + 2 = 4$». Ambas proposiciones son verdaderas, así que el condicional es verdadero, pero la paridad de 10 no causa la suma $2 + 2 = 4$.

D. Conversa, inversa, contraposición y bicondicional

29. La conversa es $Q \Rightarrow P$.

30. La inversa es $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

31. La contraposición es $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

32. La conversa es: «si un entero es par, entonces es múltiplo de 4». Es falsa; por ejemplo, 2 es par pero no es múltiplo de 4.

33. La contraposición es: «si un entero no es par, entonces no es múltiplo de 4». Expresa que cualquier número que falle la condición de ser par también debe fallar la de ser múltiplo de 4.

34.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Las dos columnas finales comparadas son V, F, V, V. Por tanto tienen el mismo comportamiento de verdad.

35.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

36. Significa que cada una de las condiciones implica la otra: si se cumple P, se cumple Q, y si se cumple Q, se cumple P. Semánticamente, el bicondicional es verdadero cuando ambas tienen el mismo valor de verdad.

E. Sintaxis y estructura

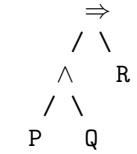
37. El conectivo principal es $\vee$. Sus subfórmulas inmediatas son P y $Q \wedge R$.

38. El conectivo principal es $\wedge$. Sus subfórmulas inmediatas son $P \vee Q$ y R.

39. El alcance de la negación es toda la fórmula $P \Rightarrow Q$. El conectivo principal de la fórmula completa es $\neg$.

40. El conectivo principal es $\Rightarrow$. La negación afecta sólo a P. En el ejercicio anterior la negación era externa al condicional completo; aquí forma parte del antecedente.

41. Un árbol posible es:



El nodo superior muestra que el condicional es el conectivo principal.

42. Dos posibilidades son $P \vee (Q \wedge R)$ y $(P \vee Q) \wedge R$. Los paréntesis cambian cuál conectivo es principal y, en general, cambian el valor de la fórmula.

F. Tablas de verdad

43.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

44.

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

45.

P	Q	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

46.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

47.

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	V

48.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

49.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

No coinciden siempre. Por ejemplo, con $P = V, Q = V, R = F$, la fórmula del ejercicio 48 vale V, mientras la de este ejercicio vale F.

50. Construimos columnas auxiliares:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

G. Tautología, contradicción y contingencia

51. $P \vee \neg P$ es una tautología:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

La columna final es siempre verdadera.

52. $P \wedge \neg P$ es una contradicción:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

La columna final es siempre falsa.

53. $P \Rightarrow Q$ es una contingencia: es falsa en $P = V, Q = F$ y verdadera en las otras tres valuaciones.

54. La tabla ya apareció en el ejercicio 44: la columna final es siempre V. Por tanto, $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ es una tautología.

55.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \Leftrightarrow Q) \wedge P$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	F

La fórmula es contingente: es verdadera en una valuación y falsa en las demás.

H. Traducción, diagnóstico y síntesis

56. Si P significa «n es divisible por 6» y Q «n es divisible por 3», decir que Q es necesaria para P significa que siempre que ocurra P debe ocurrir Q. La forma es $P \Rightarrow Q$.

57. El estudiante invirtió la dirección de «sólo si». La frase «n es par sólo si es múltiplo de 4» afirma que ser múltiplo de 4 es una condición necesaria para ser par. Con P: «es par» y Q: «es múltiplo de 4», la traducción correcta es $P \Rightarrow Q$. La afirmación matemática resultante es falsa, pero la traducción lógica de la frase es ésa.

58. Una verbalización precisa es: «Si se cumplen simultáneamente P y Q, entonces R no se cumple». El antecedente es $P \wedge Q$ y el consecuente es $\neg R$.

59. Las proposiciones atómicas son P, Q, R. El conectivo principal es $\Rightarrow$; el antecedente es $P \vee Q$ y el consecuente R. Hay tres variables, por lo que la tabla tiene $2^3 = 8$ filas. La fórmula es falsa exactamente cuando $P \vee Q$ es verdadera y R falsa; por ejemplo $P = V, Q = F, R = F$.

60. Respuesta modelo:

La lógica proposicional permite hacer visible la **estructura** de una afirmación sin depender de su contenido particular. Cada proposición tiene un **valor de verdad**, pero una fórmula compuesta depende además de cómo se conectan sus partes. Identificar el **conectivo principal** permite saber cuál es la operación lógica que organiza toda la fórmula. En un **condicional**, distinguir antecedente y consecuente evita invertir hipótesis y conclusiones o confundir condición necesaria con suficiente. Las **tablas de verdad** convierten estas reglas en un procedimiento explícito: muestran qué ocurre bajo todas las valuaciones posibles. Esto permite detectar contraejemplos, comparar fórmulas y clasificar tautologías o contradicciones. Antes de aprender a transformar fórmulas algebraicamente, debemos ser capaces de leer con precisión qué fórmula tenemos delante y qué significa su verdad.

I. Traducir condiciones sin invertirlas

61. La frase excluye $P = V, Q = F$, por lo que expresa $P \Rightarrow Q$. Tres verbalizaciones son: «ser múltiplo de 12 es suficiente para ser múltiplo de 4»; «ser múltiplo de 4 es necesario para ser múltiplo de 12»; «n es múltiplo de 12 sólo si es múltiplo de 4».

El original se justifica porque $n = 12k$ implica $n = 4(3k)$. No afirma $Q \Rightarrow P$, es decir, no dice que ser múltiplo de 4 baste para ser múltiplo de 12. El entero 4 tiene $Q = V, P = F$ y refuta esa dirección. Esa misma valuación no refuta el original: su antecedente es falso.

62. La traducción es $R \Rightarrow (P \wedge Q)$: el consecuente es la conjunción completa. Una verbalización con «necesario» es «ser par y ser múltiplo de 3 son requisitos necesarios para ser múltiplo de 12». También puede decirse que cada uno de esos requisitos es necesario, sin suprimir el otro de la frase original.

Si $n = 12k$, entonces $n = 2(6k)$ y $n = 3(4k)$, por lo que ambas condiciones se cumplen. La fórmula no afirma $(P \wedge Q) \Rightarrow R$. Para $n = 6$, $P = V, Q = V, R = F$: satisface los dos requisitos pero no es múltiplo de 12. Por tanto, esos requisitos juntos tampoco bastan en este ejemplo.

63. La primera frase expresa $P \Rightarrow Q$. Con «si»: «x no es cero si x es positivo»; con «sólo si»: «x es positivo sólo si no es cero». Su único caso refutador sería $P = V, Q = F$, es decir, un real positivo que fuese cero; no existe tal real.

La frase del estudiante expresa $Q \Rightarrow P$. Su caso refutador es $Q = V, P = F$. El real -1 lo realiza: no es cero y no es positivo. Las tres primeras verbalizaciones son verdaderas para cualquier real; el reemplazo es falso como afirmación general. En $x = 1$ ambas direcciones son verdaderas, pero ese caso favorable no elimina el contraejemplo -1.

J. Refutar una inferencia mediante una valuación

64. Para que la conclusión P sea falsa, ponemos $P = F$. La segunda premisa exige $Q = V$. Con esos valores, $P \Rightarrow Q = V$, así que las dos premisas son verdaderas y la conclusión falsa: el argumento no es válido.

El entero 4 realiza el caso: es múltiplo de 4 y no de 8. La regla general «todo múltiplo de 8 es múltiplo de 4» es verdadera; aun así, no permite regresar desde Q a P.

En el argumento comparado, tener $P = V$ y $P \Rightarrow Q = V$ obliga a $Q = V$, pues con $Q = F$ el condicional sería falso. No existe una valuación con ambas premisas verdaderas y conclusión falsa. Ese segundo argumento sí es válido. La diferencia es qué extremo de la dirección se aporta como premisa.

65. Ponemos $P = F, Q = F, R = F$. El condicional vale V porque su antecedente es falso, y $\neg Q$ vale V. La conclusión R vale F. Por tanto, el argumento con sólo las dos premisas iniciales no es válido.

Si añadimos P como premisa, toda valuación relevante debe tener $P = V$. Para que $P \Rightarrow (Q \vee R)$ sea verdadero, la disyunción debe ser verdadera. La premisa $\neg Q$ exige $Q = F$, y una disyunción con ese primer componente sólo puede ser verdadera si $R = V$. No queda un caso con todas las premisas verdaderas y conclusión falsa; el argumento ampliado sí es válido.

La información faltante era que se cumplía el antecedente. Saber que una de las alternativas es falsa no permite invocar el consecuente de un condicional cuyo antecedente no está establecido.

66. La valuación $P = V, Q = V$ hace verdaderas las dos premisas $P \vee Q$ y P, pero falsa la conclusión $\neg Q$. La disyunción inclusiva permite precisamente que ambas sean verdaderas. Un ejemplo es P: «n es par», Q: «n es múltiplo de 3», con $n = 6$.

La premisa adicional «no se cumplen ambas» se escribe $\neg(P \wedge Q)$. Si además $P = V$, la conjunción sería verdadera cuando $Q = V$, contradiciendo esa nueva premisa. Por tanto, toda valuación que haga verdaderas las tres premisas tiene $Q = F$ y $\neg Q = V$. El argumento reparado es válido. La exclusión se añadió expresamente; no estaba contenida en el símbolo $\vee$.

K. Paréntesis y alcance de los conectivos

67. En A, el principal es $\Rightarrow$ y sus componentes inmediatos son P y $Q \wedge R$. En B, el principal es $\wedge$ y sus componentes son $P \Rightarrow Q$ y R.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \Rightarrow Q$	A	B
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

Difieren exactamente cuando $P = F$ y $R = F$, con cualquiera de los dos valores de Q. En esos casos, A es un condicional de antecedente falso y vale V; B es una conjunción que exige R y vale F. Cambiar los paréntesis hizo que R dejara de formar parte del consecuente y pasara a ser una exigencia de toda la fórmula.

68. En A, la negación afecta al condicional completo y es el conectivo principal. En B, sólo niega P; el principal es el condicional.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	A	B
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F

Difieren en $P = V, Q = V$ y en $P = F, Q = V$, es decir, cuando $Q = V$, sea cual sea P. Coinciden en las otras dos filas, pero eso no autoriza reemplazar una por otra para cualquier valuación. Basta una fila distinta para refutar esa pretensión; para justificar coincidencia general tendría que coincidir la columna completa.

69. En A, el principal es $\Rightarrow$: «si P y Q tienen el mismo valor de verdad, entonces R». En B, el principal es $\Leftrightarrow$: «P si y sólo si se cumple que, si Q, entonces R». En la segunda, se compara el valor de P con el del condicional entero.

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	A	B
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F

Difieren exactamente cuando $P = F, R = V$, con cualquiera de los valores de Q. Allí el consecuente verdadero hace verdadero a A; en B, el condicional $Q \Rightarrow R$ es verdadero y tiene valor distinto de P, por lo que el bicondicional es falso. Las otras seis filas coinciden, pero no hacen equivalentes las fórmulas en todas las valuaciones.

L. Verdad de un caso y validez de un argumento

70. En $n = 6$, $P = V, Q = V$, así que el condicional vale V.

P	Q	Premisa $P \vee Q$	Conclusión P	$(P \vee Q) \Rightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

La tercera fila tiene premisa verdadera y conclusión falsa, de modo que el argumento no es válido. El entero 3 realiza esa fila: es múltiplo de 3 y no es par.

No hay contradicción entre las respuestas. La evaluación en 6 describe una valuación particular. La validez del argumento exige que ninguna valuación con premisa verdadera tenga conclusión falsa. La tabla muestra que la fórmula condicional es contingente, no una garantía para cualquier valuación.

71. La tabla es:

P	Q	Premisa $P \Rightarrow Q$	Premisa P	Todas las premisas verdaderas	Conclusión Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F

Sólo la primera fila hace verdaderas todas las premisas; allí la conclusión también es verdadera. No hay contraejemplo y el argumento es válido.

Para las afirmaciones sobre 7, $P = F, Q = F$ y $P \Rightarrow Q = V$. La conclusión es falsa, pero también es falsa una premisa, P. Eso no refuta la validez. Un contraejemplo exige simultáneamente todas las premisas verdaderas y la conclusión falsa. La validez preserva la verdad cuando las premisas son verdaderas; no convierte en verdaderas las premisas ni garantiza una conclusión verdadera cuando alguna premisa falla.

72. La conclusión $Q \Rightarrow R$ es falsa sólo si $Q = V, R = F$. Con esos valores, para que la premisa $P \Rightarrow R$ sea verdadera se necesita $P = F$. La otra premisa $P \Rightarrow Q$ entonces vale V. Por tanto, existe exactamente una valuación refutadora: $P = F, Q = V, R = F$.

El entero 3 realiza ese caso: no es múltiplo de 12, sí es múltiplo de 3 y no es par. Las dos implicaciones iniciales son verdaderas incluso como reglas generales sobre enteros, pero eso no hace que ser múltiplo de 3 baste para ser par. Tener una misma condición suficiente para dos propiedades no vuelve a una de esas propiedades suficiente para la otra.

Si añadimos $Q \Rightarrow P$, supongamos que todas las premisas son verdaderas. Si $Q = F$, la conclusión $Q \Rightarrow R$ es verdadera. Si $Q = V$, la nueva premisa obliga a $P = V$, y $P \Rightarrow R$ obliga a $R = V$, por lo que la conclusión también es verdadera. Los dos casos de Q cubren todas las valuaciones: el argumento ampliado sí es válido. No se ha supuesto verdadera la nueva premisa para los enteros del ejemplo; se ha analizado qué garantiza la estructura cuando todas sus premisas son verdaderas.

Capítulo 5

Álgebra de proposiciones y formas normales

En C4 aprendimos a **leer** una fórmula proposicional. Sabemos localizar su conectivo principal, construir una tabla de verdad, distinguir implicación de bicondicional y reconocer tautologías, contradicciones y contingencias.

Ahora cambia la pregunta.

Supongamos que dos fórmulas producen exactamente la misma columna final en todas las valuaciones. ¿Podemos reemplazar una por la otra? ¿Podemos transformar una fórmula extensa hasta hacer visible una estructura más simple? ¿Podemos llevar cualquier fórmula a una forma estandarizada?

Ése es el paso propiamente algebraico.

> **Transformar una fórmula proposicional no consiste en cambiar símbolos libremente: consiste en sustituir subfórmulas por otras de comportamiento semántico idéntico.**

La disciplina será la misma que en C3: cada paso debe tener una ley, una dirección y un alcance precisos.

5.1. De la coincidencia semántica a la equivalencia lógica

Consideremos las fórmulas $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q \Rightarrow \neg P$. En C4 verificamos mediante tabla que sus columnas finales coinciden.

Cuando dos fórmulas tienen el mismo valor de verdad bajo **toda** valuación de sus variables proposicionales, diremos que son **lógicamente equivalentes**.

Escribiremos

$A \equiv B$.

La expresión $A \equiv B$ no introduce un nuevo conectivo dentro de la fórmula proposicional que estamos analizando. Es una afirmación acerca de dos fórmulas: dice que, semánticamente, se comportan igual en todas las valuaciones.

Esto debe distinguirse de $A \Leftrightarrow B$. El bicondicional es una fórmula y, para una valuación concreta, puede ser verdadero o falso. En cambio, $A \equiv B$ afirma una coincidencia global.

Criterio por bicondicional. Tenemos un criterio inmediato:

> **Dos fórmulas A y B son lógicamente equivalentes si y sólo si $A \Leftrightarrow B$ es una tautología.**

La razón es directa. El bicondicional es verdadero exactamente cuando sus dos componentes tienen el mismo valor de verdad. Por tanto, será verdadero en todas las valuaciones exactamente cuando A y B coincidan en todas ellas.

Refutar una equivalencia. Para demostrar $A \equiv B$ por tabla debemos revisar todas las valuaciones relevantes.

Para demostrar que $A \not\equiv B$ basta mucho menos: encontrar **una sola valuación** en la que difieran.

Ese patrón reaparecerá constantemente en matemática: una afirmación universal exige control global; un contraejemplo basta para refutarla.

5.2. Una equivalencia es una regla de reemplazo

La utilidad algebraica de $A \equiv B$ aparece cuando A no está aislada, sino dentro de una fórmula mayor.

Supongamos que sabemos

$\neg\neg P \equiv P$.

Entonces, dentro de

$(Q \vee \neg\neg P) \wedge R$

podemos reemplazar únicamente la subfórmula $\neg\neg P$ por P y obtener

$(Q \vee P) \wedge R$.

No hemos cambiado arbitrariamente el resto de la fórmula.

Principio de sustitución de equivalentes.

> **Si una subfórmula se reemplaza por otra lógicamente equivalente, el valor de verdad de la fórmula completa se conserva bajo toda valuación.**

La intuición es composicional: los conectivos determinan su resultado únicamente a partir de los valores de verdad de sus componentes. Si un componente conserva siempre su valor, la fórmula mayor no puede detectar el reemplazo.

La forma debe coincidir. Una ley sólo puede aplicarse a una subfórmula que tenga la estructura adecuada.

Saber que $\neg\neg X \equiv X$ no autoriza a borrar dos signos de negación que no formen una doble negación sobre la **misma subfórmula**.

De manera semejante, la ley de absorción que veremos más adelante no se aplica por semejanza visual: debe localizarse exactamente su patrón.

Esta precisión de alcance será indispensable en cadenas largas.

5.3. Leyes estructurales: identidad, dominación, idempotencia y complemento

Comenzamos con leyes sencillas que eliminan información redundante.

Identidad. $P \wedge V \equiv P$ y $P \vee F \equiv P$.

Conjuntar con una verdad segura no añade restricción; disyuntar con una falsedad segura no añade posibilidad.

Dominación. $P \vee V \equiv V$ y $P \wedge F \equiv F$.

Una verdad basta para hacer verdadera una disyunción; una falsedad basta para hacer falsa una conjunción.

Idempotencia. $P \vee P \equiv P$ y $P \wedge P \equiv P$.

Repetir una condición no cambia su contenido lógico.

Complemento. $P \vee \neg P \equiv V$ y $P \wedge \neg P \equiv F$.

La primera es el tercero excluido en este marco bivalente; la segunda expresa que una proposición y su negación no pueden ser simultáneamente verdaderas.

Doble negación. $\neg\neg P \equiv P$.

Estas leyes parecen elementales, pero en una fórmula extensa su valor es estratégico. Con frecuencia una transformación previa tiene como objetivo **hacer aparecer** un patrón de complemento, idempotencia o dominación.

Una primera simplificación. Por ejemplo,

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \equiv P \wedge (Q \vee \neg Q) \equiv P \wedge V \equiv P.$$

La simplificación no estaba visible al comienzo. Fue necesario factorizar P para producir el complemento $Q \vee \neg Q$.

5.4. Conmutatividad y asociatividad: preparar el terreno

La conjunción y la disyunción son conmutativas:
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$,
$P \vee Q \equiv Q \vee P$.
También son asociativas:
$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$,
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$.

Estas leyes rara vez simplifican por sí solas. Su función más importante es **reorganizar** la fórmula para que otra ley pueda actuar.

Consideremos
$(P \vee Q) \vee \neg P$.
Podemos reordenar y reagrupar:

$$\begin{aligned}
(P \vee Q) \vee \neg P &\equiv P \vee (Q \vee \neg P) && \text{[asociatividad]} \\
&\equiv P \vee (\neg P \vee Q) && \text{[conmutatividad]} \\
&\equiv (P \vee \neg P) \vee Q && \text{[asociatividad]} \\
&\equiv V \vee Q && \text{[complemento]} \\
&\equiv V. && \text{[dominación]}
\end{aligned}$$

El paso conceptual importante no es que podamos permutar símbolos, sino que sabemos **para qué** hacerlo.

5.5. Leyes de De Morgan y control de negaciones

Las leyes de De Morgan son:
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$,
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

Pueden verificarse por tabla de verdad. Pero una vez establecidas, ya no necesitamos reconstruir la tabla cada vez: se convierten en reglas de transformación.

La negación atraviesa el conectivo y lo cambia. Un modo útil de recordar la estructura —sin sustituir la comprensión— es:

```
¬ atraviesa ∧  →  ∨
¬ atraviesa ∨  →  ∧
```

Cada componente queda negado.

Negaciones anidadas. Consideremos
$\neg(P \vee (Q \wedge \neg R))$.
Aplicamos De Morgan desde afuera hacia adentro:

$$\begin{aligned}\neg(P \vee (Q \wedge \neg R)) &\equiv \neg P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)\\ &\equiv \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg\neg R)\\ &\equiv \neg P \wedge (\neg Q \vee R).\end{aligned}$$

Al final, cada negación afecta directamente a una proposición atómica. Esa configuración será esencial para las formas normales.

Error típico. Es falso que
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.
Basta la valuación $P = V, Q = F$: la primera fórmula es verdadera y la segunda falsa.
Una ley recordada con el conectivo equivocado deja de ser una equivalencia.

5.6. Distributividad y factorización lógica

La lógica proposicional posee dos leyes distributivas:
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
La primera recuerda de inmediato a la distributividad algebraica ordinaria. La segunda suele resultar menos familiar, porque en aritmética la suma no distribuye sobre el producto. Aquí ambas son válidas.

Desarrollar y factorizar. Las equivalencias pueden leerse en ambas direcciones.
De izquierda a derecha **desarrollamos**. De derecha a izquierda **factorizamos**.
Por ejemplo,
$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv P \wedge (Q \vee R)$.
La dirección adecuada depende del objetivo.

- Para obtener una FND puede convenir desarrollar una conjunción sobre una disyunción.
- Para simplificar puede convenir factorizar y hacer visible un complemento o una absorción.
- Para obtener una FNC puede convenir distribuir una disyunción sobre una conjunción.

Un ejemplo no intuitivo. Para llevar $P \vee (Q \wedge R)$ a forma conjuntiva:
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
La fórmula resultante es una conjunción de disyunciones: ya tiene la arquitectura básica de una FNC.

5.7. Absorción y simplificación estratégica

Las leyes de absorción son:
$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$,
$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.
Podemos justificarlas algebraicamente a partir de leyes anteriores. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} P \vee (P \wedge Q) &\equiv (P \wedge V) \vee (P \wedge Q) && \text{[identidad]} \\ &\equiv P \wedge (V \vee Q) && \text{[distributividad inversa]} \\ &\equiv P \wedge V && \text{[dominación]} \\ &\equiv P. && \text{[identidad]} \end{aligned}$$

Absorción escondida. En una fórmula larga el patrón puede no aparecer literalmente. Consideremos
$(Q \wedge P) \vee P$.
Por conmutatividad,
$(Q \wedge P) \vee P \equiv (P \wedge Q) \vee P$,
y por conmutatividad de $\vee$,
$(P \wedge Q) \vee P \equiv P \vee (P \wedge Q) \equiv P$.
Aquí reordenar no fue un fin: fue una preparación para reconocer absorción.

5.8. Eliminar implicaciones y bicondicionales

Las formas normales que estudiaremos se expresarán usando únicamente $\neg$, $\wedge$ y $\vee$. Por eso necesitamos eliminar $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$.

Implicación. La equivalencia fundamental es
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
Puede verificarse directamente por tabla: ambas fórmulas son falsas sólo cuando $P = V$ y $Q = F$.
La negación de una implicación queda entonces:

$$\begin{aligned} \neg(P \Rightarrow Q) &\equiv \neg(\neg P \vee Q) \\ &\equiv \neg\neg P \wedge \neg Q \\ &\equiv P \wedge \neg Q. \end{aligned}$$

Esto recupera una idea de C4: un condicional falla exactamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Bicondicional. Podemos usar
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
Eliminando las implicaciones:
$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$.
Otra forma útil es
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.
La primera forma ya tiene arquitectura de FNC; la segunda, de FND.

Elegir la expansión según el objetivo. Si buscamos FND, la segunda representación suele ser más conveniente.
Si buscamos FNC, la primera suele ahorrar trabajo.
Ésta es una primera muestra de estrategia: una equivalencia puede ser correcta en varias formas, pero no todas son igualmente útiles para el objetivo presente.

5.9. Cadenas largas de equivalencias

Una cadena lógica extensa debe leerse como un argumento matemático. Cada enlace afirma que la fórmula de la izquierda puede reemplazarse por la de la derecha sin cambiar el valor de verdad bajo ninguna valuación.

Consideremos

$\neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)]$.

Queremos simplificarla.

$$
\begin{aligned}
&\neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)] && \\
&\equiv \neg[(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)] && \text{[eliminar implicaciones]} \\
&\equiv \neg[\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)] && \text{[distributividad inversa]} \\
&\equiv \neg[\neg P \vee F] && \text{[complemento]} \\
&\equiv \neg(\neg P) && \text{[identidad]} \\
&\equiv P. && \text{[doble negación]}
\end{aligned}
$$

La ruta es corta porque reconocimos una factorización decisiva.

Una ruta más larga también puede ser correcta. Podríamos haber aplicado De Morgan a la negación exterior, eliminado después cada implicación, distribuido y simplificado. El resultado sería el mismo, pero con más pasos.

En este capítulo no buscamos siempre la cadena más corta. Primero queremos una cadena **segura y auditable**. Luego aprenderemos a mejorarla.

Igualdad de destino, diversidad de rutas. Dos estudiantes pueden producir cadenas distintas y ambas ser correctas. La pregunta editorial no es «¿usó exactamente la ruta modelo?», sino:

1. ¿cada paso es una equivalencia válida?;
2. ¿el alcance de la ley está controlado?;
3. ¿la estrategia llega al objetivo pedido?;
4. ¿la escritura permite auditar el razonamiento?

5.10. Literales, términos y cláusulas

Para hablar de formas normales necesitamos algunas unidades estructurales.

Un **literal** es una proposición atómica o la negación de una proposición atómica.

Ejemplos: P, $\neg P$, Q, $\neg R$.

Un **término conjuntivo** es una conjunción de uno o más literales.

Ejemplos:

$P \wedge \neg Q$,

$P \wedge Q \wedge \neg R$.

Una **cláusula disyuntiva** es una disyunción de uno o más literales.

Ejemplos:

$P \vee \neg Q$,

$\neg P \vee Q \vee R$.

Estas definiciones no dicen todavía que una fórmula sea normal. Nos entregan los bloques con los que construiremos FND y FNC.

Término no significa «verdadero». Un término conjuntivo puede ser verdadero o falso según la valuación. Lo mismo una cláusula. Los nombres describen **estructura sintáctica**, no valor de verdad.

5.11. Forma normal disyuntiva

Una fórmula está en **forma normal disyuntiva (FND)** cuando es una disyunción de uno o más términos conjuntivos de literales.

Por ejemplo,

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$$

está en FND.

En cambio,

$P \wedge (Q \vee R)$

no está en FND porque la disyunción aparece dentro de una conjunción.

Procedimiento por leyes. Para obtener una FND suele funcionar:

1. eliminar $\Leftrightarrow$;
2. eliminar $\Rightarrow$;
3. llevar negaciones hasta los literales;
4. distribuir $\wedge$ sobre $\vee$;
5. simplificar términos imposibles o redundantes.

Ejemplo:

$$P \wedge (Q \vee \neg R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg R).$$

Ya tenemos una FND.

FND no significa mínima. La fórmula

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

está en FND, pero además se simplifica a P. Por tanto, estar en forma normal no garantiza ser la escritura más corta.

5.12. Forma normal conjuntiva

Una fórmula está en **forma normal conjuntiva (FNC)** cuando es una conjunción de una o más cláusulas disyuntivas de literales.

Por ejemplo,

$$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R)$$

está en FNC.

La fórmula

$P \vee (Q \wedge R)$

no está en FNC, pero distributividad produce

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$

que sí está en FNC.

Procedimiento por leyes. Para obtener FNC:

1. eliminar $\Leftrightarrow$;
2. eliminar $\Rightarrow$;
3. llevar negaciones hasta los literales;
4. distribuir $\vee$ sobre $\wedge$;
5. simplificar cláusulas tautológicas o redundantes cuando sea útil.

Dos arquitecturas para una misma fórmula. Una fórmula puede tener una FND y una FNC equivalentes entre sí y con la fórmula original. No se trata de dos significados distintos, sino de dos representaciones normalizadas del mismo comportamiento semántico.

5.13. Formas normales canónicas desde tablas de verdad

Las transformaciones algebraicas pueden requerir ingenio. La tabla de verdad ofrece, en cambio, un procedimiento universal.

FND canónica: mirar las filas verdaderas. Para cada fila donde una fórmula F sea verdadera construimos un término que sea verdadero **exactamente en esa fila**.

Si una fila tiene

$P = V, Q = F, R = V$,

el término correspondiente es

$P \wedge \neg Q \wedge R$.

Usamos la variable sin negar cuando vale V y negada cuando vale F.

Luego disyuntamos todos los términos correspondientes a filas verdaderas.

FNC canónica: mirar las filas falsas. Para cada fila donde F sea falsa construimos una cláusula que sea falsa **exactamente en esa fila**.

Si una fila tiene

$P = V, Q = F, R = V$,

queremos una disyunción cuyos tres literales sean falsos en esa fila. Por tanto usamos

$\neg P \vee Q \vee \neg R$.

Aquí el signo se invierte respecto del valor de la fila:

- si una variable vale V, usamos su negación;
- si vale F, usamos la variable sin negar.

Luego conjuntamos todas las cláusulas correspondientes a filas falsas.

Teorema de existencia de formas normales.

Toda fórmula proposicional finita es lógicamente equivalente a alguna FND y a alguna FNC.

La demostración es constructiva.

- Si la fórmula tiene filas verdaderas, la disyunción de los términos que representan esas filas es verdadera exactamente donde la fórmula original lo es.
- Si tiene filas falsas, la conjunción de las cláusulas que excluyen esas filas es falsa exactamente donde la fórmula original lo es.

Los casos extremos se representan por F para una contradicción y por V para una tautología, o mediante formas equivalentes que contengan literales si se desea conservar variables.

No necesitamos una teoría más avanzada para garantizar la existencia: la propia tabla de verdad construye las formas.

Los casos extremos y las listas vacías. La convención de esta sección admite las constantes V y F como representaciones de los casos extremos. Para entender el procedimiento canónico, interpretaremos una disyunción sin términos como F y una conjunción sin cláusulas como V. La primera no ofrece ninguna fila verdadera; la segunda no impone ninguna exclusión.

Con las variables declaradas P, Q, hay cuatro filas. Una tautología utiliza todas en su FND canónica:

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

Su FNC canónica no tiene cláusulas, porque no hay filas falsas, y se representa por V. Para una contradicción ocurre lo opuesto: su FND canónica no tiene términos y se representa por F; su FNC canónica incluye una cláusula por cada fila:

$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$.

La conjunción anterior es falsa en todas las filas: cada valuación hace falsa la cláusula construida específicamente para ella. No hay que inventar una fila verdadera para una contradicción ni una fila falsa para una tautología.

Comportamiento con P, Q declaradas	Términos de la FND canónica	Cláusulas de la FNC canónica
Siempre verdadero	4	0: se representa por V
Siempre falso	0: se representa por F	4

Una escritura como $P \vee \neg P$ representa una tautología con literales, pero no es la FND canónica relativa a P, Q: sus términos no contienen la variable Q. Ser equivalente y ser canónica respecto de una lista dada son requisitos diferentes.

Control. Para las variables declaradas P, Q, ¿puede $P \wedge \neg P$ ser una FND equivalente a una contradicción sin ser su FND canónica? ¿Qué ocurre con $P \vee \neg P$ como FNC de una tautología?

Resolución. Sí. $P \wedge \neg P$ es un término conjuntivo de literales y, por tanto, una FND de un término; siempre es falso. No es la FND canónica, que no tiene términos verdaderos y se representa por F. Análogamente, $P \vee \neg P$ es una FNC de una cláusula siempre verdadera; no es la FNC canónica de la tautología, que no tiene cláusulas y se representa por V. Las formas normales ordinarias permiten esas escrituras; el procedimiento canónico selecciona exactamente las filas pertinentes. Si la dificultad estuvo en reconocer un término o una cláusula, vuelve a §§5.10–5.12; si estuvo en seleccionar filas, vuelve al comienzo de §5.13.

5.14. Normalizar no es minimizar

Una **forma normal** cumple una arquitectura sintáctica determinada.

Una **forma mínima** busca reducir algún criterio de tamaño: número de literales, número de conectivos, número de cláusulas u otro.

Son problemas diferentes.

Una forma canónica puede crecer mucho. Con n variables existen 2^n valuaciones. Si una fórmula es verdadera en muchas filas, su FND canónica puede contener muchos términos, cada uno con n literales.

Una fórmula corta como $P \vee Q$ tiene tabla con tres filas verdaderas. Su FND canónica respecto de las variables P, Q es

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

Es correcta y canónica, pero mucho más larga que $P \vee Q$.

Canonizar puede facilitar comparación. La utilidad de una forma canónica no es necesariamente compactar. Es ofrecer una representación sistemática derivada directamente de la semántica.

Dos fórmulas con la misma tabla producirán la misma FND canónica y la misma FNC canónica, salvo reordenamientos triviales.

Primera advertencia algorítmica. El crecimiento de 2^n anuncia un fenómeno que reaparecerá muchas veces: un procedimiento completamente sistemático puede ser costoso. Aquí sólo registramos la idea; no desarrollaremos teoría de complejidad.

Declarar las variables y el criterio de tamaño. La fórmula P no depende del valor de Q ni de R. Sin embargo, su forma canónica cambia cuando decidimos que esas variables también formarán parte de la tabla de comparación.

Con sólo P declarada, la FND canónica es P. Con P, Q declaradas, las filas verdaderas son (V, V) y (V, F), y la FND canónica pasa a ser $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$. Con P, Q, R, cada una de esas filas se desdobla según el valor de R: aparecen cuatro términos de tres literales. Por distributividad y complemento, todas esas escrituras siguen siendo equivalentes a P.

Para comparar tamaños, aquí contaremos **apariciones de literales**, no variables distintas. En $P \wedge \neg Q$, el literal P cuenta una vez y $\neg Q$ una vez; la negación no añade otra aparición de literal. En dos términos que repiten P, se cuentan sus dos apariciones. Los paréntesis no se cuentan.

Variables declaradas	Filas verdaderas de P	Literales en su FND canónica	Filas falsas de P	Literales en su FNC canónica
P	1	1	1	1
P, Q	2	4	2	4
P, Q, R	4	12	4	12

Añadir una variable que la fórmula no utiliza duplica las filas verdaderas y falsas: cada valuación previa se extiende con esa variable verdadera o falsa. No cambia el significado original. La forma canónica describe ahora una tabla más grande.

Antes de decir «esta forma es menor», declara qué comparas: apariciones de literales, términos, cláusulas o conectivos. Una reducción respecto de una escritura concreta no demuestra por sí sola que se haya alcanzado el mínimo entre todas las escrituras posibles.

Control. Sin enumerar todos los términos, compara los tamaños canónicos de $Q \vee R$ con las variables declaradas Q, R y con P, Q, R.

Resolución. Con Q, R, hay tres filas verdaderas y una falsa: la FND canónica tiene tres términos y seis apariciones de literales; la FNC canónica tiene una cláusula y dos apariciones. Al añadir P, las filas se duplican: seis términos de tres literales, con dieciocho apariciones, y dos cláusulas de tres literales, con seis apariciones. La fórmula compacta $Q \vee R$ sigue teniendo sólo dos apariciones y no depende de P. Si confundiste la cantidad de variables con las apariciones, compara §5.10 con el criterio fijado aquí; si omitiste la duplicación de filas, vuelve a §4.11.

5.15. Estrategias de transformación

Conocer las leyes no basta. Una fórmula extensa puede admitir muchas transformaciones correctas, pero algunas nos alejan del objetivo.

Estrategia A — normalización sistemática. Si el objetivo es obtener FND o FNC y no vemos un atajo claro:

```
1. eliminar ↔
2. eliminar →
3. empujar ¬ hasta los literales
4. decidir si buscamos FND o FNC
5. distribuir en la dirección necesaria
6. simplificar
```

Es una estrategia robusta, aunque no siempre corta.

Estrategia B — simplificación oportunista. Antes de expandir conviene mirar:

- ¿hay un complemento escondido?;
- ¿puedo absorber una parte?;
- ¿puedo factorizar?;
- ¿puedo reagrupar para producir $P \vee \neg P$ o $P \wedge \neg P$?;
- ¿una expansión va a duplicar innecesariamente grandes subfórmulas?

Ejemplo. Para
$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$,
una expansión no ayuda. Factorizar produce inmediatamente
$P \wedge (Q \vee \neg Q) \equiv P$.

Verificar por una segunda vía. En problemas importantes puede ser útil comprobar el resultado por tabla de verdad. La tabla no reemplaza la derivación cuando se pide una cadena algebraica, pero puede detectar un error.

Aprender matemática implica también desarrollar controles independientes.

Comparar rutas sin perder el objetivo. Sea $X = Q \vee R$ y consideremos $G = (P \wedge X) \vee (P \wedge \neg X)$. Una simplificación local reconoce el bloque repetido completo:
$G \equiv P \wedge (X \vee \neg X) \equiv P \wedge V \equiv P$.

Aquí complemento se aplica a X y a su negación, aunque X sea una fórmula compuesta. No se ha negado por separado un símbolo que aparezca dentro del bloque.

Una normalización sistemática trabaja directamente con Q, R:

$$\begin{aligned} G &\equiv (P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge (\neg Q \wedge \neg R)) && \text{[De Morgan]} \\ &\equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) && \text{[distributividad]}. \end{aligned}$$

Esta última escritura es una FND equivalente, pero no canónica respecto de P, Q, R: sus dos primeros términos no incluyen todas las variables. Para obtener la FND canónica de P en esas variables habría que desdoblarlos y conservar exactamente las cuatro filas con $P = V$.

El control semántico de ambas rutas puede hacerse separando los valores de P. Si $P = F$, todos los términos de G son falsos. Si $P = V$, una de $X, \neg X$ es verdadera y G es verdadero. Por eso G siempre comparte el valor de P. La ruta local exhibe una ley útil; la sistemática produce la arquitectura solicitada; la canónica enumera filas. Elige la ruta según lo que necesites entregar.

Control. Simplifica $G \Rightarrow R$ sin expandir primero todo G. Da una FNC y comprueba la equivalencia por los casos que podrían hacer falso al condicional.

Resolución. Como $G \equiv P$, podemos reemplazar el antecedente completo y obtener $P \Rightarrow R \equiv \neg P \vee R$. Una sola cláusula constituye una FNC. El original sólo es falso cuando $G = V$, $R = F$; como G y P coinciden en toda valuación, eso ocurre exactamente cuando $P = V, R = F$, la misma combinación que hace falsa a $\neg P \vee R$. El valor de Q no altera el resultado. Si

aplicaste una ley a símbolos dispersos, vuelve a §5.2; si no identificaste el antecedente, vuelve a §4.10.

5.16. Cierre — protocolo de transformación proposicional

Ante una fórmula extensa, preguntaremos:

1. **¿Qué quiero obtener?** ¿Simplificar, demostrar equivalencia, producir FND o FNC?
2. **¿Cuál es el conectivo principal?**
3. **¿Hay $\Rightarrow$ o $\Leftrightarrow$ que convenga eliminar?**
4. **¿Las negaciones afectan ya sólo a literales?**
5. **¿Puedo reordenar o reagrupar para hacer visible una ley?**
6. **¿Hay complementos, idempotencias, dominaciones o absorciones?**
7. **¿Conviene distribuir o factorizar?**
8. **¿Cada paso es una equivalencia y no sólo una implicación?**
9. **¿La forma final cumple realmente la estructura pedida?**
10. **¿Puedo verificar el resultado mediante una segunda estrategia?**

La nueva competencia puede formularse así:

> **Transformar proposicionalmente es diseñar una cadena de sustituciones equivalentes, controlando estructura, alcance y objetivo.**

C4 enseñó a leer la verdad de una fórmula. C5 enseña a transformar su forma sin cambiar esa verdad.

Ejercicios

Todos los ejercicios son originales para *Álgebra para matemáticos* y han sido calibrados con el corpus rector del capítulo. En las cadenas de equivalencias, justifica los pasos sustantivos.

A. Reconocer equivalencia y no equivalencia

1. Mediante tabla de verdad, decide si $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
2. Decide si $P \wedge Q \equiv P \vee Q$. Si no lo son, da una valuación que lo muestre.
3. Explica la diferencia entre escribir $P \Leftrightarrow Q$ y escribir $P \equiv Q$.
4. Verifica por tabla que $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$.
5. Decide si $P \Rightarrow Q \equiv Q \Rightarrow P$ y produce una contra-valuación si falla.
6. Demuestra que $A \equiv B$ si y sólo si $A \Leftrightarrow B$ es tautología.

B. Leyes básicas

7. Simplifica $P \wedge V$.
8. Simplifica $P \vee F$.
9. Simplifica $(P \vee P) \wedge Q$.
10. Simplifica $P \vee \neg P$ y clasifica el resultado.
11. Simplifica $P \wedge \neg P$ y clasifica el resultado.
12. Simplifica $\neg\neg(P \vee Q)$.

C. Reordenar y reagrupar estratégicamente

13. Simplifica $(P \vee Q) \vee \neg P$ justificando los reordenamientos.
14. Simplifica $(P \wedge Q) \wedge P$.
15. Reordena $Q \vee (\neg P \vee P)$ para hacer visible una ley de complemento y simplifica.
16. Simplifica $(Q \wedge \neg P) \wedge P$.

17. Transforma $(P \vee Q) \vee (R \vee \neg Q)$ hasta una forma donde sea inmediata la simplificación.
18. Explica por qué conmutatividad y asociatividad suelen funcionar como leyes **preparatorias** y da un ejemplo propio.

D. De Morgan y negaciones anidadas

19. Lleva $\neg(P \wedge Q)$ a una forma donde las negaciones afecten sólo a literales.
20. Lleva $\neg(P \vee (Q \wedge R))$ a forma con negaciones sólo sobre literales.
21. Simplifica $\neg\neg(\neg P \vee Q)$ dejando negaciones sólo sobre literales.
22. Lleva $\neg[(P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)]$ a una forma donde cada negación afecte a una proposición atómica.
23. Decide si $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$. Si falla, produce una contra-valuación.
24. Transforma $\neg[\neg P \vee \neg(Q \wedge R)]$ hasta una fórmula sin dobles negaciones y con negaciones sólo sobre literales.

E. Distributividad y absorción

25. Lleva $P \wedge (Q \vee R)$ a una disyunción de conjunciones.
26. Lleva $P \vee (Q \wedge R)$ a una conjunción de disyunciones.
27. Factoriza $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
28. Simplifica $P \vee (P \wedge Q)$ demostrando la absorción mediante leyes anteriores.
29. Simplifica $(Q \wedge P) \vee P$ haciendo visible primero el patrón de absorción.
30. Simplifica $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ sin tabla de verdad.

F. Eliminar implicaciones y bicondicionales

31. Reescribe $P \Rightarrow Q$ usando sólo $\neg, \vee$.
32. Reescribe $\neg(P \Rightarrow Q)$ usando sólo $\neg, \wedge, \vee$ y simplifica.
33. Reescribe $(P \Rightarrow Q) \wedge R$ sin $\Rightarrow$.
34. Reescribe $P \Leftrightarrow Q$ en una FNC que use sólo $\neg, \wedge, \vee$.
35. Reescribe $P \Leftrightarrow Q$ en una FND que use sólo $\neg, \wedge, \vee$.
36. Elimina $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$ de $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R$ sin exigir todavía una forma normal final.

G. Cadenas largas justificadas

37. Simplifica $\neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)]$ mediante una cadena sistemática de transformaciones justificadas y llega a una sola literal. Después compara con una ruta más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
38. Demuestra por equivalencias, mediante una cadena de transformaciones justificadas, que $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge P] \Rightarrow R$ es una tautología. Después compara con una ruta más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
39. Demuestra que $\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ mediante transformaciones explícitas y justificadas, eliminando conectivos paso a paso. Después compara con una ruta más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
40. Simplifica $[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)] \vee [(\neg P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)]$ mediante transformaciones explícitas y justificadas y clasifica la fórmula final. Después compara con una ruta más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
41. Simplifica $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)$ hasta una fórmula con una sola variable proposicional.
42. Lleva $\neg[(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow P)]$ mediante una cadena de transformaciones justificadas a una fórmula que use sólo literales, $\wedge$ y $\vee$, y simplifica todo lo posible. Después compara con una ruta más económica y explica qué justificaciones has comprimido.
43. Demuestra que $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ mediante una cadena de equivalencias.

44. Encuentra dos rutas distintas para simplificar $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$: una por factorización estratégica y otra mediante una expansión o reagrupación diferente. Compara las longitudes.

H. Diagnóstico de derivaciones

45. Encuentra el primer paso inválido:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(Q \wedge P).$$

46. Un estudiante escribe $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge R$. Diagnostica la ley mal aplicada y corrige el paso.
47. Encuentra el primer paso inválido:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q \vee P.$$

48. Un estudiante simplifica $P \vee (P \wedge Q)$ como $(P \vee P) \wedge Q \equiv P \wedge Q$. Localiza el error y repara la derivación.
49. Un estudiante afirma que $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv P \vee \neg P \wedge Q$. Explica el problema de estructura/paréntesis y produce una derivación correcta.
50. En una supuesta cadena de equivalencias aparece el paso $P \Rightarrow Q \to \neg P \vee Q$, escrito con una flecha de implicación entre fórmulas de la cadena. Explica por qué esa notación no expresa correctamente lo que se necesita en una cadena de equivalencias.

I. Forma normal disyuntiva

51. Decide si $(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge Q)$ está en FND y justifica por definición.
52. Decide si $P \wedge (Q \vee R)$ está en FND. Si no, conviértela a FND.
53. Obtén una FND de $P \wedge (Q \Rightarrow R)$.
54. Obtén una FND de $\neg(P \Rightarrow Q)$.
55. Obtén una FND de $P \Leftrightarrow Q$.
56. Lleva $(P \vee Q) \wedge R$ a FND y verifica que cada término final sea una conjunción de literales.

J. Forma normal conjuntiva

57. Decide si $(P \vee \neg Q) \wedge (R \vee Q)$ está en FNC y justifica.
58. Decide si $P \vee (Q \wedge R)$ está en FNC. Si no, conviértela a FNC.
59. Obtén una FNC de $P \Rightarrow (Q \wedge R)$.
60. Obtén una FNC de $\neg(P \wedge Q)$.
61. Obtén una FNC de $P \Leftrightarrow Q$.
62. Lleva $(P \wedge Q) \vee R$ a FNC y verifica la arquitectura final.

K. Formas canónicas desde tablas

63. Construye la FND canónica de $P \vee Q$ a partir de sus filas verdaderas.
64. Construye la FNC canónica de $P \wedge Q$ a partir de sus filas falsas.
65. Una fórmula $F(P, Q)$ es verdadera sólo en las filas (V, F) y (F, V). Construye su FND canónica.
66. Para la misma fórmula del ejercicio 65, construye su FNC canónica.
67. La fórmula $G(P, Q, R)$ es falsa únicamente en la fila (V, F, V). Construye su FNC canónica.
68. Explica constructivamente por qué toda fórmula proposicional finita admite FND y FNC.

L. Síntesis y transferencia

69. Sin que se indique el método, simplifica y clasifica

$$[(P \Rightarrow Q) \land (P \Rightarrow \neg Q)] \Rightarrow \neg P.$$

70. Construye una fórmula en FND que sea verdadera exactamente cuando **exactamente una** de P, Q, R sea verdadera.
71. Construye una FNC que sea falsa exactamente cuando $P = V, Q = F, R = V$, y explica por qué una sola cláusula basta.
72. Compara dos estrategias para estudiar

$$(P \Leftrightarrow Q) \land (Q \Leftrightarrow R).$$

Una debe partir de equivalencias algebraicas y otra de la tabla de verdad. Explica qué revela mejor cada método y construye una FND razonable de la fórmula.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E — prueba algebraica larga.** Demuestra, sin tabla de verdad, la **ley de consenso**

$$(P \land Q) \lor (\neg P \land R) \lor (Q \land R) \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land R).$$

La demostración debe hacer explícito por qué el término $Q \land R$ es redundante y contener una cadena suficientemente detallada de equivalencias justificadas.

74. **Nivel E — resolución proposicional.** Demuestra algebraicamente que

$$[(P \lor Q) \land (\neg P \lor R)] \Rightarrow (Q \lor R)$$

es una tautología. No uses una tabla de verdad como método principal: elimina primero la implicación y lleva la fórmula, mediante equivalencias, hasta V.

75. **Nivel F — formas normales y reducción.** Sea $M(P, Q, R)$ la fórmula que debe ser verdadera exactamente cuando **al menos dos** de P, Q, R son verdaderas.

(a) Construye la FND canónica de M.

(b) Obtén y demuestra una FND reducida.

(c) Construye la FNC canónica de M.

(d) Obtén y demuestra una FNC reducida.

(e) Demuestra algebraicamente, sin tabla, que tus formas reducidas FND y FNC son equivalentes.

76. **Nivel F — normalización completa.** Simplifica mediante una cadena de transformaciones justificadas

$$H = \neg[(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (R \lor \neg P)].$$

Elimina primero $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$, empuja todas las negaciones hasta literales y simplifica hasta una conjunción mínima. Explica por qué la forma final puede leerse simultáneamente como FND y como FNC. Después compara con una ruta más económica y explica qué justificaciones has comprimido.

77. **Nivel F — ciclo de implicaciones.** Considera

$$G = (P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \land (R \Rightarrow P).$$

(a) Obtén una FNC inmediata eliminando las implicaciones.

(b) Deriva algebraicamente una FND reducida.

(c) Determina exactamente qué valuaciones satisfacen G.

(d) Explica por qué G expresa que P, Q, R deben compartir valor de verdad.

78. **Nivel G — teorema de cancelación booleana.** Sean A, B, C fórmulas cualesquiera. Demuestra que si

$$A \wedge C \equiv B \wedge C \qquad \text{y} \qquad A \vee C \equiv B \vee C,$$

entonces necesariamente $A \equiv B$.

Da dos demostraciones: una por valuaciones, separando los casos $C = V$ y $C = F$, y otra puramente algebraica. Finalmente muestra, con contraejemplos, que ninguna de las dos hipótesis por separado basta.

79. **Nivel G — cuatro variables y dependencia estructural.** Sea

$$H = (P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow \neg R) \wedge (R \Leftrightarrow S).$$

(a) Sin construir una tabla completa de dieciséis filas, determina todas las valuaciones que satisfacen H.

(b) Construye la FND canónica.

(c) Obtén una FNC compacta eliminando los bicondicionales.

(d) Justifica rigurosamente que las dos formas obtenidas son equivalentes a H.

80. **Nivel G — síntesis tipo prueba.** Demuestra que

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)] \Rightarrow (P \Rightarrow S)$$

es una tautología de dos maneras independientes:

(a) mediante una cadena algebraica extensa que elimine todas las implicaciones y termine en V;

(b) suponiendo falsa la fórmula y mostrando que las condiciones necesarias conducen a contradicción.

Concluye explicando qué estructura general de las implicaciones está haciendo visible el ejercicio.

N. Elegir la representación según el objetivo

81. Sea $A = (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee R$, con P, Q, R declaradas. Elige y construye una representación para cada objetivo: a) decidir rápidamente cuándo A es falsa; b) enumerar exactamente todas sus filas verdaderas. Justifica la equivalencia, cuenta las apariciones de literales de ambas representaciones y explica por qué la escritura mayor puede ser la adecuada para el segundo objetivo.
82. Para $B = (P \Leftrightarrow Q) \vee R$, obtén una FND y una FNC mediante leyes. Elige cuál hace más visible que $R = V$ basta para satisfacer B y cuál expone los casos que pueden hacerla falsa. Compara sus apariciones de literales y aclara si esta comparación prueba un mínimo global.
83. Considera $C = (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$. Construye una FNC útil para auditar cada exigencia por separado y una FND compacta útil para describir cómo satisfacer C. Cuenta sus apariciones de literales y determina cuántos términos tendría su FND canónica respecto de P, Q, R. Justifica qué gana y qué pierde cada representación.

O. Variables declaradas y formas canónicas

84. Construye las FND y FNC canónicas de $P \Leftrightarrow Q$ primero con P, Q declaradas y después con P, Q, R declaradas, en ese orden. Explica cómo el valor de R cambia las filas y los tamaños sin cambiar la condición sobre P, Q. Verifica que las formas ampliadas se reducen a las originales.
85. Una fórmula exige únicamente que Q sea falsa. Construye sus FND y FNC canónicas con sólo Q declarada y después con P, Q declaradas. Indica cómo se leen las mismas filas si el orden de columnas se cambia a Q, P. ¿Cambiar el orden modifica el significado? ¿Qué tamaños tendrían ambas formas al declarar P, Q, R?
86. Aplica la convención de constantes y listas vacías a una tautología y una contradicción: a) sin variables declaradas; b) con P, Q declaradas. Indica cuántas valuaciones hay en cada contexto y cuántos términos o cláusulas aporta cada construcción canónica. Explica qué representa un término sin literales y una cláusula sin literales.

P. Alcance de una sustitución

87. Un estudiante pretende eliminar «dos negaciones de P» en $D = \neg P \vee \neg(Q \vee \neg P)$ y obtiene $P \vee \neg Q$. Localiza el problema de alcance, simplifica correctamente y produce una valuación que refute el resultado propuesto. Indica a qué subfórmula sí se puede aplicar doble negación durante la reparación.
88. En $E = (P \vee Q) \wedge ((P \vee Q) \vee R)$, un estudiante dice «absorbo porque aparece P» y concluye P. Identifica el bloque que realmente cumple el patrón de absorción, repara la simplificación y refuta la respuesta del estudiante. Explica por qué una subfórmula compuesta puede ocupar el lugar de una letra en una ley.
89. Audita el paso $\neg[(P \Rightarrow Q) \vee R] \equiv [(\neg P \Rightarrow \neg Q) \wedge \neg R]$. Decide qué subfórmula fue negada incorrectamente, da un contraejemplo y repara la fórmula hasta obtener literales. Comprueba la reparación describiendo exactamente la única fila verdadera.

Q. Diseñar desde la tabla prescrita

90. Con las variables declaradas P, Q, R, diseña una fórmula verdadera exactamente en las filas (V, V, F), (V, F, F), (F, V, V) y (F, F, V). Construye ambas formas canónicas y una forma compacta. Explica qué variable puede cambiar sin alterar la verdad y justifica la equivalencia sin limitarte a una sola fila.
91. Diseña una fórmula verdadera sólo en $(P, Q, R) = (V, F, V)$ y (V, F, F). Construye su FND canónica, una FNC compacta y su FNC canónica completa. Justifica por qué es lícito eliminar una variable en la forma compacta y compara las apariciones de literales de las tres representaciones.
92. Para las variables declaradas P, Q, R, S, diseña una fórmula sin constantes que no tenga ninguna fila falsa y otra que no tenga ninguna fila verdadera. Justifícalas mediante leyes, describe cómo construir sus formas canónicas sin escribir todos los bloques y calcula sus tamaños en apariciones de literales. Explica cómo interviene la convención de listas vacías.

Soluciones

A. Reconocer equivalencia y no equivalencia

1. Construimos:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Las columnas finales coinciden. Por tanto,
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.

2. No son equivalentes. Con $P = V, Q = F$,
$P \wedge Q = F$,
pero $P \vee Q = V$.
Una sola contra-valuación basta para refutar la equivalencia.

3. $P \Leftrightarrow Q$ es una **fórmula** cuyo valor depende de la valuación de P, Q.
$P \equiv Q$ es una afirmación metalingüística: asegura que P y Q —entendidos aquí como fórmulas— tienen el mismo valor bajo toda valuación. Si P y Q son proposiciones atómicas distintas e independientes, no son lógicamente equivalentes: la valuación $P = V$, $Q = F$ las distingue.

4.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Las columnas relevantes son V, F, V, V en ambos casos. Son equivalentes.

5. No. Con $P = V, Q = F$,
$P \Rightarrow Q = F$,
mientras $Q \Rightarrow P = V$ porque su antecedente Q es falso.

6. Por definición, $A \equiv B$ significa que para toda valuación v, A y B reciben el mismo valor.

El bicondicional $A \Leftrightarrow B$ es verdadero exactamente cuando sus componentes tienen el mismo valor. Por tanto:

- si $A \equiv B$, el bicondicional es verdadero en toda valuación y es tautología;
- si $A \Leftrightarrow B$ es tautología, en toda valuación sus componentes coinciden, luego $A \equiv B$.

B. Leyes básicas

7. $P \wedge V \equiv P$ por identidad de la conjunción.

8. $P \vee F \equiv P$ por identidad de la disyunción.

9.

$$(P \vee P) \wedge Q \equiv P \wedge Q$$

por idempotencia de $\vee$.

10. $P \vee \neg P \equiv V$ por complemento. Es una tautología.

11. $P \wedge \neg P \equiv F$ por complemento. Es una contradicción.

12. Por doble negación aplicada a la subfórmula completa,
$\neg\neg(P \vee Q) \equiv P \vee Q$.

C. Reordenar y reagrupar estratégicamente

13.

$$\begin{aligned}(P \vee Q) \vee \neg P &\equiv P \vee (Q \vee \neg P) && \text{[asociatividad]}\\ &\equiv P \vee (\neg P \vee Q) && \text{[conmutatividad]}\\ &\equiv (P \vee \neg P) \vee Q && \text{[asociatividad]}\\ &\equiv V \vee Q && \text{[complemento]}\\ &\equiv V. && \text{[dominación]}\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}(P \wedge Q) \wedge P &\equiv P \wedge (Q \wedge P)\\ &\equiv P \wedge (P \wedge Q)\\ &\equiv (P \wedge P) \wedge Q\\ &\equiv P \wedge Q.\end{aligned}$$

Se usaron asociatividad, conmutatividad e idempotencia.

15.

$$\begin{aligned}Q \vee (\neg P \vee P) &\equiv Q \vee (P \vee \neg P) && \text{[conmutatividad]}\\ &\equiv Q \vee V && \text{[complemento]}\\ &\equiv V. && \text{[dominación]}\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}(Q \wedge \neg P) \wedge P &\equiv Q \wedge (\neg P \wedge P) && \text{[asociatividad]}\\ &\equiv Q \wedge F && \text{[complemento]}\\ &\equiv F. && \text{[dominación]}\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}(P \vee Q) \vee (R \vee \neg Q) &\equiv P \vee Q \vee R \vee \neg Q\\ &\equiv P \vee R \vee (Q \vee \neg Q)\\ &\equiv P \vee R \vee V\\ &\equiv V.\end{aligned}$$

Las dos primeras reescrituras condensan asociatividad y conmutatividad.

18. Conmutatividad y asociatividad no suelen eliminar conectivos; permiten colocar componentes en una posición útil para otra ley. Por ejemplo,
$Q \vee (\neg P \vee P)$
se reordena como $Q \vee (P \vee \neg P)$ para hacer visible $P \vee \neg P \equiv V$, después de lo cual dominación produce V.

D. De Morgan y negaciones anidadas

19. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.
Las negaciones ya afectan sólo a literales.

20.

$$\begin{aligned}\neg(P \vee (Q \wedge R)) &\equiv \neg P \wedge \neg(Q \wedge R)\\ &\equiv \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R).\end{aligned}$$

21. La doble negación afecta a toda la subfórmula:
$\neg\neg(\neg P \vee Q) \equiv \neg P \vee Q$.

22.
$$\begin{aligned}\neg[(P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)] &\equiv \neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg R \vee S) \\ &\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg R \wedge \neg S) \\ &\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg S).\end{aligned}$$

23. No. Con $P = V, Q = F$:
$\neg(P \wedge Q) = \neg F = V$,
pero $\neg P \wedge \neg Q = F \wedge V = F$.
La ley correcta cambia $\wedge$ por $\vee$.

24.
$$\begin{aligned}\neg[\neg P \vee \neg(Q \wedge R)] &\equiv \neg\neg P \wedge \neg\neg(Q \wedge R) && \text{[De Morgan]} \\ &\equiv P \wedge (Q \wedge R) && \text{[doble negación]} \\ &\equiv P \wedge Q \wedge R. && \text{[asociatividad]}\end{aligned}$$

E. Distributividad y absorción

25. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

26. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

27. Por distributividad en sentido inverso,
$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv P \wedge (Q \vee R)$.

28. Una derivación de absorción es:

$$\begin{aligned}P \vee (P \wedge Q) &\equiv (P \wedge V) \vee (P \wedge Q) && \text{[identidad]} \\ &\equiv P \wedge (V \vee Q) && \text{[distributividad inversa]} \\ &\equiv P \wedge V && \text{[dominación]} \\ &\equiv P. && \text{[identidad]}\end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned}(Q \wedge P) \vee P &\equiv (P \wedge Q) \vee P && \text{[conmutatividad]} \\ &\equiv P \vee (P \wedge Q) && \text{[conmutatividad]} \\ &\equiv P. && \text{[absorción]}\end{aligned}$$

30. Usamos la distributividad inversa en la forma $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \vee (B \wedge C)$:

$$\begin{aligned}(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) &\equiv P \vee (Q \wedge \neg Q) \\ &\equiv P \vee F \\ &\equiv P.\end{aligned}$$

F. Eliminar implicaciones y bicondicionales

31. $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.

32.
$$\begin{aligned}\neg(P \Rightarrow Q) &\equiv \neg(\neg P \vee Q) \\ &\equiv \neg\neg P \wedge \neg Q \\ &\equiv P \wedge \neg Q.\end{aligned}$$

33. $(P \Rightarrow Q) \wedge R \equiv (\neg P \vee Q) \wedge R$.

34.
$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P).$$
Ésta es una FNC.

35. El bicondicional es verdadero cuando ambos valores coinciden:
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.
Ésta es una FND.

36.
$$\begin{aligned}(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R &\equiv \neg(P \Leftrightarrow Q) \vee R \\ &\equiv \neg[(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \vee R.\end{aligned}$$
Ya no aparecen $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$. Si se quisiera continuar hacia forma normal, aplicaríamos De Morgan a la negación exterior.

G. Cadenas largas justificadas

Las soluciones 37–40 y 42 muestran rutas detalladas. Para compararlas con rutas económicas, en 37 y 40 puede simplificarse cada bloque de dos condicionales antes de desarrollar la negación o la disyunción exterior; en 38 puede justificarse semánticamente que las premisas fuerzan R; en 39 puede partirse de la FND del bicondicional y negar sus dos términos; en 42 basta observar que el primer condicional falso exige $P = V$ y el segundo falso exige $P = F$. La vía semántica sirve de control independiente y no sustituye una cadena algebraica cuando ésta se pide. En 76, la identidad $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ y el bloque $P \wedge (P \Leftrightarrow Q) \equiv P \wedge Q$ permiten comprimir la ruta, conservando De Morgan, eliminación del bicondicional y las absorciones que justifican ese bloque. La comparación debe explicar esas razones, no añadir líneas para alcanzar una cuota.

Rutas económicas de comparación:

- **37.** $\neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)] \equiv \neg[\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)] \equiv \neg\neg P \equiv P$. Se comprimen eliminación de implicaciones, distributividad inversa, complemento e identidad.
- **38.** El antecedente equivale a $P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \equiv P \wedge Q \wedge R$: distribuir y eliminar los términos con complemento justifica cada reducción. La fórmula completa equivale entonces a $\neg(P \wedge Q \wedge R) \vee R \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee R \equiv V$. Se comprimen eliminación de implicaciones, las reducciones del antecedente, De Morgan, complemento y dominación.
- **39.** $\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv \neg[(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)] \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$. Se comprimen eliminación del bicondicional, De Morgan y dobles negaciones; conmutatividad da la forma pedida.
- **40.** Sus bloques equivalen respectivamente a $\neg P$ y P, por eliminación de implicaciones, distributividad inversa y complemento. Su disyunción se reduce a $\neg P \vee P \equiv V$.
- **42.** $\neg[(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow P)] \equiv (P \wedge \neg Q) \wedge (R \wedge \neg P) \equiv F$. Se comprimen De Morgan, negación de cada implicación, reagrupación para exponer $P \wedge \neg P$ y dominación.
- **76.** La fórmula equivale a $(P \Leftrightarrow Q) \wedge P \wedge \neg R \equiv P \wedge Q \wedge \neg R$. Para justificar el bloque comprimido, expandir el bicondicional en FND da $P \wedge [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \equiv (P \wedge Q) \vee F \equiv P \wedge Q$, por distributividad, idempotencia y complemento. La otra compresión usa negación de implicación y De Morgan sobre $R \vee \neg P$.

Estas rutas conservan las razones de las cadenas detalladas siguientes; su menor extensión no elimina ninguna condición de equivalencia.

37. Aplicamos deliberadamente una sola transformación sustantiva por línea:

$$
\begin{aligned}
&\neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)] \\
&\equiv \neg(P \Rightarrow Q) \vee \neg(P \Rightarrow \neg Q) && \text{[De Morgan]} \\
&\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(P \Rightarrow \neg Q) && \text{[eliminar la primera implicación]} \\
&\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q) && \text{[eliminar la segunda implicación]} \\
&\equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q) && \text{[De Morgan, primer término]} \\
&\equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg P \wedge \neg\neg Q) && \text{[De Morgan, segundo término]} \\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg P \wedge \neg\neg Q) && \text{[doble negación]} \\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) && \text{[doble negación]} \\
&\equiv P \wedge (\neg Q \vee Q) && \text{[distributividad inversa]} \\
&\equiv P \wedge V && \text{[complemento]} \\
&\equiv P. && \text{[identidad]}
\end{aligned}
$$

La ruta sistemática tiene diez transformaciones. Una ruta estratégica más corta sería factorizar antes de negar; ambas son correctas, pero ésta hace visible la disciplina de sustitución local.

38. Sea
$F = [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge P] \Rightarrow R$.
Eliminamos la implicación exterior y luego las interiores:

$$
\begin{aligned}
F &\equiv \neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge P] \vee R \\
&\equiv \neg[(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P] \vee R \\
&\equiv [\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee R) \vee \neg P] \vee R \\
&\equiv [(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg P] \vee R \\
&\equiv (\neg P \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (Q \wedge \neg R) \vee R \\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee R \\
&\equiv \neg P \vee [\neg Q \vee (Q \wedge \neg R)] \vee R \\
&\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee \neg R) \vee R \\
&\equiv \neg P \vee \neg Q \vee (\neg R \vee R) \\
&\equiv \neg P \vee \neg Q \vee V \\
&\equiv V.
\end{aligned}
$$

En dos pasos usamos la identidad derivada $A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$, que puede verificarse por distributividad y absorción. La conclusión $F \equiv V$ demuestra que la fórmula es tautológica.

Cómo pensar este problema. La fórmula expresa transitividad del razonamiento: si P lleva a Q, Q lleva a R y además P ocurre, entonces R debe ocurrir. La derivación algebraica confirma esa estructura.

39. Partimos de la definición del bicondicional por dos condicionales y reemplazamos una subfórmula por vez:

$$\begin{aligned}
\neg(P \Leftrightarrow Q) &\equiv \neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)] && \text{[bicondicional]}\\
&\equiv \neg(P \Rightarrow Q) \vee \neg(Q \Rightarrow P) && \text{[De Morgan]}\\
&\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(Q \Rightarrow P) && \text{[eliminar primera implicación]}\\
&\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P) && \text{[eliminar segunda implicación]}\\
&\equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg Q \vee P) && \text{[De Morgan]}\\
&\equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P) && \text{[De Morgan]}\\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P) && \text{[doble negación]}\\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) && \text{[doble negación]}\\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). && \text{[conmutatividad]}
\end{aligned}$$

La fórmula final dice exactamente que P y Q tienen valores distintos: uno verdadero y el otro falso.

40. Aplicamos los reemplazos de manera local para que la cadena sea auditable:

$$\begin{aligned}
&[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)] \vee [(\neg P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)]\\
&\equiv [(\neg P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)] \vee [(\neg P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)] && \text{[eliminar implicación]}\\
&\equiv [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)] \vee [(\neg P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)] && \text{[eliminar implicación]}\\
&\equiv [\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)] \vee [(\neg P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)] && \text{[distributividad inversa]}\\
&\equiv [\neg P \vee F] \vee [(\neg P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)] && \text{[complemento]}\\
&\equiv \neg P \vee [(\neg P \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)] && \text{[identidad]}\\
&\equiv \neg P \vee [(P \vee R) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg R)] && \text{[eliminar implicación]}\\
&\equiv \neg P \vee [(P \vee R) \wedge (P \vee \neg R)] && \text{[eliminar implicación]}\\
&\equiv \neg P \vee [P \vee (R \wedge \neg R)] && \text{[distributividad inversa]}\\
&\equiv \neg P \vee (P \vee F) && \text{[complemento]}\\
&\equiv \neg P \vee P && \text{[identidad]}\\
&\equiv V. && \text{[complemento]}
\end{aligned}$$

La fórmula es una **tautología**. Estructuralmente, el primer bloque equivale a $\neg P$ y el segundo a P; por eso su disyunción cubre todos los casos.

41.

$$\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q) &\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)\\
&\equiv \neg P \vee (Q \wedge \neg Q)\\
&\equiv \neg P \vee F\\
&\equiv \neg P.
\end{aligned}$$

La fórmula afirma, en efecto, que si P obligara simultáneamente a Q y a $\neg Q$, entonces P no puede ser verdadero.

42. Aplicamos una transformación local por línea:

$$
\begin{aligned}
&\neg[(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow P)] \\
&\equiv \neg(P \Rightarrow Q) \wedge \neg(R \Rightarrow P) && \text{[De Morgan]} \\
&\equiv \neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg(R \Rightarrow P) && \text{[eliminar primera implicación]} \\
&\equiv \neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg R \vee P) && \text{[eliminar segunda implicación]} \\
&\equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg R \vee P) && \text{[De Morgan]} \\
&\equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg\neg R \wedge \neg P) && \text{[De Morgan]} \\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \wedge (\neg\neg R \wedge \neg P) && \text{[doble negación]} \\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \wedge (R \wedge \neg P) && \text{[doble negación]} \\
&\equiv (P \wedge \neg P) \wedge (\neg Q \wedge R) && \text{[conmutatividad y asociatividad]} \\
&\equiv F \wedge (\neg Q \wedge R) && \text{[complemento]} \\
&\equiv F. && \text{[dominación]}
\end{aligned}
$$

La contradicción tiene además una lectura semántica: para que $P \Rightarrow Q$ sea falsa necesitamos $P = V$, mientras para que $R \Rightarrow P$ sea falsa necesitamos $P = F$. Es imposible satisfacer ambas exigencias a la vez.

43.

$$
\begin{aligned}
P \Rightarrow (Q \wedge R) &\equiv \neg P \vee (Q \wedge R) && \text{[eliminar } \Rightarrow\text{]} \\
&\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) && \text{[distributividad]} \\
&\equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R). && \text{[reintroducir } \Rightarrow\text{]}
\end{aligned}
$$

Cada paso es reversible, por lo que tenemos equivalencia.

44. Ruta 1: factorizar respecto de P.

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
&\equiv P \wedge (Q \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
&\equiv P \vee (\neg P \wedge Q) \\
&\equiv (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \\
&\equiv V \wedge (P \vee Q) \\
&\equiv P \vee Q.
\end{aligned}
$$

Ruta 2: factorizar respecto de Q los términos primero y tercero.
Reordenamos:

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
&\equiv [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)] \vee (P \wedge \neg Q) \\
&\equiv [(P \vee \neg P) \wedge Q] \vee (P \wedge \neg Q) \\
&\equiv Q \vee (P \wedge \neg Q) \\
&\equiv (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q) \\
&\equiv (P \vee Q) \wedge V \\
&\equiv P \vee Q.
\end{aligned}
$$

Las rutas tienen longitudes semejantes pero hacen visibles estructuras distintas. La primera reconoce una partición por Q dentro del caso P; la segunda reconoce una partición por P dentro del caso Q.

H. Diagnóstico de derivaciones

45. El primer paso es inválido:
$\neg(P \wedge Q) \not\equiv \neg P \wedge \neg Q$.
De Morgan exige cambiar $\wedge$ por $\vee$:
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.
Por ejemplo, con $P = V, Q = F$, la fórmula correcta vale V, mientras $\neg P \wedge \neg Q$ vale F.

46. Se aplicó distributividad de forma incompleta. La ley correcta es
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
El factor P debe aparecer en **ambas** cláusulas.

47. El primer paso es inválido. La eliminación correcta de la implicación es
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$,
no $P \vee Q$.
Con $P = V, Q = F$, el condicional vale F y $P \vee Q$ vale V.

48. La distribución fue mal aplicada. De $P \vee (P \wedge Q)$ se obtiene

$$(P \vee P) \wedge (P \vee Q),$$

no $(P \vee P) \wedge Q$.
Entonces

$$(P \vee P) \wedge (P \vee Q) \equiv P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

por idempotencia y absorción.

49. Sin paréntesis, $P \vee \neg P \wedge Q$ es ambiguo o depende de una convención de precedencia; además no muestra correctamente la factorización.
La derivación correcta es

$$\begin{aligned}(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) &\equiv (P \vee \neg P) \wedge Q \\ &\equiv V \wedge Q \\ &\equiv Q.\end{aligned}$$

50. Una cadena de equivalencias necesita afirmar que cada fórmula puede sustituirse por la siguiente en ambas direcciones semánticamente. El símbolo apropiado es $\equiv$ en el metanivel de la derivación:
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
Escribir sólo una implicación entre las dos fórmulas afirmaría una relación más débil y no justificaría un reemplazo reversible en una cadena de equivalencias.

I. Forma normal disyuntiva

51. Sí. Es una disyunción de dos términos conjuntivos:

- $P \wedge \neg Q$;
- $R \wedge Q$.

Cada componente de esos términos es un literal.

52. No está en FND porque contiene una disyunción dentro de una conjunción. Distribuimos:
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
La forma final sí es FND.

53.
$$P \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv P \wedge (\neg Q \vee R) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R).$$
Es FND.

54. Ya obtuvimos:
$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$.
Un único término conjuntivo cuenta como FND.

55. Una FND natural es
$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.
Cada término representa uno de los dos casos en que P, Q comparten valor de verdad.

56.
$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R).$$
Los dos términos finales son conjunciones de literales, por lo que la fórmula está en FND.

J. Forma normal conjuntiva

57. Sí. Es una conjunción de dos cláusulas disyuntivas:

- $P \vee \neg Q$;
- $R \vee Q$.

Todos sus componentes son literales.

58. No está en FNC. Aplicamos distributividad:
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

59.
$$P \Rightarrow (Q \wedge R) \equiv \neg P \vee (Q \wedge R) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R).$$
Es FNC.

60. Por De Morgan,
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.
Una sola cláusula disyuntiva cuenta como FNC.

61. Una FNC inmediata es
$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$.
Proviene de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

62. Distribuimos R sobre la conjunción:
$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R).$$
La forma final es una conjunción de dos cláusulas disyuntivas de literales.

K. Formas canónicas desde tablas

63. La tabla de $P \vee Q$ es verdadera en (V, V), (V, F) y (F, V).

Los términos correspondientes son:

- (V, V): $P \wedge Q$;
- (V, F): $P \wedge \neg Q$;
- (F, V): $\neg P \wedge Q$.

Por tanto, la FND canónica es

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

Se simplifica a $P \vee Q$, pero la forma canónica conserva explícitamente cada fila verdadera.

64. $P \wedge Q$ es falsa en (V, F), (F, V) y (F, F).

Construimos una cláusula falsa en cada fila:

- (V, F): $\neg P \vee Q$;
- (F, V): $P \vee \neg Q$;
- (F, F): $P \vee Q$.

La FNC canónica es

$$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q).$$

Aunque se puede simplificar a $P \wedge Q$, ésa es la forma canónica obtenida directamente de las filas falsas.

65. Las filas verdaderas son (V, F) y (F, V). Por tanto,

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

Es la FND canónica del XOR de dos variables.

66. La fórmula es falsa en (V, V) y (F, F).

- Para (V, V), la cláusula falsa exacta es $\neg P \vee \neg Q$.
- Para (F, F), la cláusula falsa exacta es $P \vee Q$.

Por tanto,

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q).$$

67. Queremos una cláusula falsa exactamente cuando $P = V, Q = F, R = V$.

Los literales deben ser falsos en esa fila:

- para $P = V$: $\neg P$;
- para $Q = F$: Q;
- para $R = V$: $\neg R$.

Así,

$G \equiv \neg P \vee Q \vee \neg R$.

Como sólo hay una fila falsa, una sola cláusula forma la FNC canónica.

68. Sea F una fórmula con n variables.

Para cada fila donde F sea verdadera construimos una conjunción de n literales que sea verdadera exactamente en esa fila: variable positiva si en la fila vale V, negada si vale F. La disyunción de todos esos términos coincide con F en todas las filas; por tanto es una FND equivalente.

Para cada fila falsa construimos una disyunción de n literales que sea falsa exactamente en esa fila: variable negada si en la fila vale V, positiva si vale F. La conjunción de esas cláusulas coincide con F en todas las filas; por tanto es una FNC equivalente.

Los casos tautología y contradicción se representan por V y F respectivamente. Así, toda fórmula finita admite ambas formas normales.

L. Síntesis y transferencia

69. Sea

$A = (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)$.

Del ejercicio 41 sabemos, o podemos reconstruir, que

$A \equiv \neg P$.

Entonces

$$\begin{aligned} A \Rightarrow \neg P &\equiv \neg P \Rightarrow \neg P \\ &\equiv \neg(\neg P) \vee \neg P \\ &\equiv P \vee \neg P \\ &\equiv V. \end{aligned}$$

La fórmula es una tautología.

Cómo pensar este problema. Antes de expandir el condicional exterior, conviene simplificar su antecedente. Esa decisión evita una expansión mucho mayor.

70. «Exactamente una» de P, Q, R verdadera significa que ocurre uno de tres casos mutuamente excluyentes:

1. P verdadera, Q, R falsas;
2. Q verdadera, P, R falsas;
3. R verdadera, P, Q falsas.

La FND es

$$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R).$$

Es además la FND canónica relativa a esas tres filas verdaderas.

71. Para ser falsa exactamente en $(P, Q, R) = (V, F, V)$, una cláusula debe contener literales todos falsos en esa fila:

$\neg P \vee Q \vee \neg R$.

En cualquier otra fila al menos uno de esos literales cambia a verdadero, por lo que la cláusula se vuelve verdadera. Una sola cláusula basta porque sólo queremos excluir una valuación.

72. La fórmula

$F = (P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)$

exige que P y Q compartan valor y que Q y R también lo compartan. Por tanto, las tres variables deben tener el mismo valor.

Ruta semántica. La tabla de ocho filas muestra que F sólo es verdadera en

(V, V, V) y (F, F, F).

Por eso una FND canónica inmediata es

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R).$$

Ruta algebraica. Sustituimos cada bicondicional por su FND:

$$F \equiv [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \wedge [(Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)].$$

Al distribuir aparecen cuatro combinaciones. Dos contienen $Q \wedge \neg Q$ y desaparecen por contradicción; sobreviven exactamente

$P \wedge Q \wedge R$

y

$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$.

La tabla revela de manera transparente **qué valuaciones** sobreviven. La vía algebraica revela **por qué los casos mixtos se anulan estructuralmente**. Ambas son útiles, pero responden preguntas distintas.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Sea

$$F = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R).$$

El término sospechoso es $Q \wedge R$. Para decidir si aporta valuaciones nuevas introducimos una tautología dentro de él:

$$\begin{aligned} Q \wedge R &\equiv Q \wedge R \wedge V \\ &\equiv Q \wedge R \wedge (P \vee \neg P) \\ &\equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R). \end{aligned}$$

Sustituyendo en F,

$$\begin{aligned} F &\equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\ &\equiv [(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge R)] \vee [(\neg P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)] \\ &\equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R), \end{aligned}$$

porque

$$(P \wedge Q) \vee [(P \wedge Q) \wedge R] \equiv P \wedge Q$$

y

$$(\neg P \wedge R) \vee [(\neg P \wedge R) \wedge Q] \equiv \neg P \wedge R$$

por absorción.

Por tanto,

$$\boxed{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)}.$$

La razón estructural es precisa: si $Q \wedge R$ es verdadera, entonces o bien P es verdadera, en cuyo caso ya es verdadero $P \wedge Q$, o bien P es falsa, en cuyo caso ya es verdadero $\neg P \wedge R$. El término de consenso no añade ninguna valuación nueva.

74. Partimos de

$$F = [(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)] \Rightarrow (Q \vee R).$$

Eliminamos la implicación:

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg[(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)] \vee (Q \vee R) \\ &\equiv \neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee R) \vee Q \vee R \\ &\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R) \vee Q \vee R. \end{aligned}$$

Reordenamos para agrupar los términos útiles:

$$F \equiv [Q \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \vee [R \vee (P \wedge \neg R)].$$

Aplicamos distributividad:

$$\begin{aligned} Q \vee (\neg P \wedge \neg Q) &\equiv (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \\ &\equiv (Q \vee \neg P) \wedge V \\ &\equiv Q \vee \neg P, \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} R \vee (P \wedge \neg R) &\equiv (R \vee P) \wedge (R \vee \neg R) \\ &\equiv (R \vee P) \wedge V \\ &\equiv R \vee P. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F &\equiv (Q \vee \neg P) \vee (R \vee P) \\ &\equiv Q \vee R \vee (\neg P \vee P) \\ &\equiv Q \vee R \vee V \\ &\equiv V. \end{aligned}$$

La fórmula es una tautología:

$$\boxed{F \equiv V}.$$

La lectura semántica subyacente es la regla de resolución: si $P \vee Q$ y $\neg P \vee R$ son verdaderas, el valor de P obliga a que al menos una de Q, R sea verdadera.

75. La condición "al menos dos verdaderas" se cumple en cuatro filas:

$$(V, V, F), \quad (V, F, V), \quad (F, V, V), \quad (V, V, V).$$

(a) FND canónica. Cada fila verdadera produce un mintermino:

$$\begin{aligned} M \equiv &(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \\ &\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R). \end{aligned}$$

(b) FND reducida. La condición "al menos dos" equivale a que sea verdadera alguna pareja:

$$\boxed{M \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R).}$$

Para justificarla algebraicamente, expandimos cada término con la variable ausente:

$$P \wedge Q \equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R),$$

$$P \wedge R \equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R),$$

$$Q \wedge R \equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R).$$

Al unir los tres desarrollos y eliminar repeticiones por idempotencia recuperamos exactamente la FND canónica.

(c) FNC canónica. M es falsa cuando hay cero o una proposición verdadera:

$$(F, F, F), \quad (V, F, F), \quad (F, V, F), \quad (F, F, V).$$

Las cláusulas canónicas correspondientes son

$$\begin{aligned} M \equiv &(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\ &\wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R). \end{aligned}$$

(d) FNC reducida. Al menos dos son verdaderas si y sólo si ninguna pareja tiene sus dos componentes falsos. Si como máximo una es verdadera, las otras dos forman una pareja falsa; si una pareja tiene sus dos componentes falsos, queda como máximo una verdadera. Por tanto, cada una de las tres parejas debe tener al menos un miembro verdadero. Equivalentemente:

$$\boxed{M \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R).}$$

(e) Equivalencia algebraica de las formas reducidas. Partimos de la FNC:

$$\begin{aligned} &(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \\ &\equiv [P \vee (Q \wedge R)] \wedge (Q \vee R) \\ &\equiv [P \wedge (Q \vee R)] \vee [(Q \wedge R) \wedge (Q \vee R)] \\ &\equiv [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)] \vee (Q \wedge R) \\ &\equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R). \end{aligned}$$

Así las dos formas reducidas son equivalentes sin recurrir a una tabla.

76. Para distinguir el nombre de la fórmula de la constante falsa F, usamos H. Sea

$$H = \neg[(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (R \vee \neg P)].$$

Comenzamos usando $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$:

$$\begin{aligned} H &\equiv (P \Leftrightarrow Q) \wedge \neg(R \vee \neg P) \\ &\equiv (P \Leftrightarrow Q) \wedge (\neg R \wedge \neg\neg P) \\ &\equiv (P \Leftrightarrow Q) \wedge \neg R \wedge P. \end{aligned}$$

Eliminamos ahora el bicondicional en FNC:

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} H &\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge \neg R \wedge P \\ &\equiv P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge \neg R \\ &\equiv [(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)] \wedge (\neg Q \vee P) \wedge \neg R \\ &\equiv [F \vee (P \wedge Q)] \wedge (\neg Q \vee P) \wedge \neg R \\ &\equiv (P \wedge Q) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge \neg R. \end{aligned}$$

Distribuimos una vez más:

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \wedge (\neg Q \vee P) &\equiv (P \wedge Q \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q \wedge P) \\ &\equiv F \vee (P \wedge Q) \\ &\equiv P \wedge Q. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{H \equiv P \wedge Q \wedge \neg R}.$$

Esta expresión es una **FND** porque es una disyunción de un solo término, y ese término es una conjunción de literales. También puede leerse como **FNC**:

$$(P) \wedge (Q) \wedge (\neg R),$$

es decir, una conjunción de tres cláusulas unitarias.

La simplificación muestra además exactamente cuándo la fórmula original es verdadera: P y Q deben ser verdaderas y R falsa.

77. Consideremos

$$G = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P).$$

(a) FNC inmediata. Eliminando las implicaciones:

$$\boxed{G \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P).}$$

Cada factor es ya una cláusula.

(b) FND reducida. Distribuimos primero las dos primeras cláusulas:

$$\begin{aligned} (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \equiv &(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \\ &\vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R) \\ \equiv &(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R). \end{aligned}$$

Ahora conjuntamos con $(\neg R \vee P)$.

Para el primer término:

$$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg R \vee P) \equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee F.$$

Para el segundo:

$$(\neg P \wedge R) \wedge (\neg R \vee P) \equiv F \vee F \equiv F.$$

Para el tercero:

$$(Q \wedge R) \wedge (\neg R \vee P) \equiv F \vee (P \wedge Q \wedge R).$$

Por tanto,

$$\boxed{G \equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R).}$$

(c) Valuaciones. Sólo satisfacen G

$$(F, F, F) \quad \text{y} \quad (V, V, V).$$

(d) Interpretación. Si alguna proposición del ciclo es verdadera, las implicaciones fuerzan sucesivamente la verdad de las otras dos. Si alguna es falsa, recorrer el ciclo en sentido lógico impide que aparezca una combinación mixta estable. El ciclo completo obliga a que las tres compartan valor.

78. Supongamos

$$A \wedge C \equiv B \wedge C \tag{1}$$

y

$$A \vee C \equiv B \vee C. \tag{2}$$

Primera demostración: por valuaciones.
Sea v una valuación arbitraria.

- Si $v(C) = V$, de (1) obtenemos $v(A \wedge C) = v(A)$ y $v(B \wedge C) = v(B)$. Como ambos valores son iguales, $v(A) = v(B)$.
- Si $v(C) = F$, de (2) obtenemos $v(A \vee C) = v(A)$ y $v(B \vee C) = v(B)$. Nuevamente $v(A) = v(B)$.

En toda valuación, independientemente del valor de C, A y B coinciden. Por definición,

$$\boxed{A \equiv B}.$$

Segunda demostración: algebraica.
De (2), conjuntamos ambos lados con $\neg C$:

$$(A \vee C) \wedge \neg C \equiv (B \vee C) \wedge \neg C.$$

Distribuyendo,

$$(A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \equiv (B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C),$$

de donde

$$A \wedge \neg C \equiv B \wedge \neg C. \tag{3}$$

Ahora descomponemos A según $C \vee \neg C$:

$$\begin{aligned} A &\equiv A \wedge V \\ &\equiv A \wedge (C \vee \neg C) \\ &\equiv (A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C) \\ &\equiv (B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \quad \text{por (1) y (3)} \\ &\equiv B \wedge (C \vee \neg C) \\ &\equiv B. \end{aligned}$$

Cada hipótesis aislada es insuficiente.
Para la primera, toma $C = F$, $A = P$, $B = Q$. Entonces

$$A \wedge C \equiv F \equiv B \wedge C,$$

pero $P \not\equiv Q$.
Para la segunda, toma $C = V$, $A = P$, $B = Q$. Entonces

$$A \vee C \equiv V \equiv B \vee C,$$

pero nuevamente $P \not\equiv Q$.
Las dos hipótesis se complementan: una controla el caso $C = V$ y la otra el caso $C = F$.

79. La fórmula es

$$H = (P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow \neg R) \wedge (R \Leftrightarrow S).$$

(a) Valuaciones sin tabla completa.
Las tres condiciones imponen:

$$Q = P, \qquad Q = \neg R, \qquad S = R.$$

Por tanto,

$$R = \neg P, \qquad S = \neg P.$$

Todo queda determinado por el valor de P.
Si $P = V$:

$$(P, Q, R, S) = (V, V, F, F).$$

Si $P = F$:

$$(P, Q, R, S) = (F, F, V, V).$$

No hay otras posibilidades.
(b) FND canónica.
Los dos minterminos correspondientes son

$$\boxed{H \equiv (P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S).}$$

(c) FNC compacta.
Usamos

$$A \Leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P \Leftrightarrow Q &\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P), \\ Q \Leftrightarrow \neg R &\equiv (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee Q), \\ R \Leftrightarrow S &\equiv (\neg R \vee S) \wedge (\neg S \vee R). \end{aligned}$$

Por tanto una FNC compacta es

$$\boxed{\begin{aligned} H \equiv &(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\ &\wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee Q) \\ &\wedge (\neg R \vee S) \wedge (\neg S \vee R). \end{aligned}}$$

(d) Justificación de equivalencia.

La FNC procede directamente de reemplazar cada bicondicional por una fórmula equivalente; por sustitución de equivalentes, conserva exactamente el valor de H.

La FND canónica enumera exactamente las dos valuaciones que satisfacen simultáneamente las tres igualdades lógicas deducidas en (a). Cada mintermino es verdadero en una y sólo una de ellas. En cualquier otra valuación falla al menos uno de los tres bicondicionales.

Por tanto ambas formas representan exactamente la misma función booleana que H.

80. Sea

$$F = [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)] \Rightarrow (P \Rightarrow S).$$

(a) Demostración algebraica.

Eliminamos la implicación principal:

$$F \equiv \neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)] \vee (\neg P \vee S).$$

Aplicamos De Morgan:

$$F \equiv \neg(P \Rightarrow Q) \vee \neg(Q \Rightarrow R) \vee \neg(R \Rightarrow S) \vee \neg P \vee S.$$

Usamos $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$:

$$F \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg S) \vee \neg P \vee S.$$

Reordenamos:

$$F \equiv [\neg P \vee (P \wedge \neg Q)] \vee (Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg S) \vee S.$$

Simplificamos el primer corchete:

$$\begin{aligned} \neg P \vee (P \wedge \neg Q) &\equiv (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \\ &\equiv V \wedge (\neg P \vee \neg Q) \\ &\equiv \neg P \vee \neg Q. \end{aligned}$$

Entonces

$$F \equiv \neg P \vee [\neg Q \vee (Q \wedge \neg R)] \vee (R \wedge \neg S) \vee S.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \neg Q \vee (Q \wedge \neg R) &\equiv (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \\ &\equiv \neg Q \vee \neg R. \end{aligned}$$

Por tanto

$$F \equiv \neg P \vee \neg Q \vee [\neg R \vee (R \wedge \neg S)] \vee S.$$

Una vez más,

$$\neg R \vee (R \wedge \neg S) \equiv \neg R \vee \neg S.$$

Así,

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg S \vee S \\ &\equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee V \\ &\equiv V. \end{aligned}$$

Luego F es tautología.

(b) Demostración por contradicción semántica.

Para que una implicación sea falsa, su antecedente debe ser verdadero y su consecuente falso.

Supongamos entonces que F es falsa. Deben cumplirse simultáneamente:

$$P \Rightarrow Q, \qquad Q \Rightarrow R, \qquad R \Rightarrow S,$$

y debe ser falsa $P \Rightarrow S$.

La falsedad de $P \Rightarrow S$ exige

$$P = V, \qquad S = F.$$

Como $P = V$ y $P \Rightarrow Q$ es verdadera, necesariamente $Q = V$.

Como $Q = V$ y $Q \Rightarrow R$ es verdadera, necesariamente $R = V$.

Como $R = V$ y $R \Rightarrow S$ es verdadera, necesariamente $S = V$.

Pero ya habíamos obtenido $S = F$. Contradicción.

Por tanto no existe valuación que haga falsa a F, y nuevamente

$$\boxed{F \equiv V}.$$

La estructura general es la **transitividad encadenada de la implicación**: si la verdad de P fuerza la de Q, la de Q fuerza la de R y la de R fuerza la de S, entonces la verdad de P fuerza necesariamente la de S.

N. Elegir la representación según el objetivo

81. Factorizamos los dos primeros términos: $A \equiv P \wedge (Q \vee \neg Q) \vee R \equiv P \vee R$. Esta cláusula, con dos apariciones de literales, permite leer que A es falsa exactamente cuando $P = F, R = F$, sea cual sea Q.

Para enumerar las filas verdaderas usamos la FND canónica:

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$.

Los cuatro primeros términos cubren todas las filas con $P = V$; los dos últimos cubren $P = F, R = V$. Son las seis filas verdaderas de $P \vee R$, sin duplicaciones. Cada término contiene tres literales, por lo que hay dieciocho apariciones. La forma grande no reduce el tamaño; identifica cada fila por separado, que es precisamente el segundo objetivo. No es necesario expandir la fórmula compacta para decidir sus casos falsos.

82. La expansión disyuntiva del bicondicional da $B \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$, una FND de tres términos y cinco apariciones de literales. El término unitario R hace visible que $R = V$ basta para satisfacerla.

Usando la expansión conjuntiva y distribuyendo R:

$B \equiv [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)] \vee R \equiv (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P \vee R)$.

Esta FNC tiene dos cláusulas y seis apariciones de literales. La primera falla en $P = V$, $Q = F, R = F$; la segunda en $P = F, Q = V, R = F$. Son exactamente los dos casos de bicondicional falso y R falso. Ambas formas son equivalentes por las leyes utilizadas. La FND tiene una aparición menos que esta FNC; eso compara dos escrituras concretas y no demuestra un mínimo entre todas las representaciones posibles.

83. Eliminar implicaciones da la FNC $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$, con cuatro apariciones. Sus dos cláusulas conservan visibles las dos exigencias: cuando P es verdadero, se necesita Q y también R.

Por distributividad inversa, esa FNC equivale a $\neg P \vee (Q \wedge R)$, una FND de dos términos y tres apariciones. Sus alternativas son claras: basta que P sea falso, o que Q, R sean ambos verdaderos.

Con $P = F$, las cuatro elecciones de Q, R satisfacen la fórmula; con $P = V$, sólo $Q = V$, $R = V$ la satisface. Por tanto, la FND canónica tiene cinco términos de tres literales, con quince apariciones. Cada uno identifica una fila, mientras los dos términos compactos agrupan varias. La FNC separa exigencias; la FND compacta agrupa maneras de satisfacerlas; la canónica enumera cada posibilidad. Todas conservan el mismo comportamiento semántico.

O. Variables declaradas y formas canónicas

84. Con P, Q, la FND canónica es $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$, y la FNC canónica es $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$. Cada una tiene dos bloques de dos literales, con cuatro apariciones.

Al declarar también R, la FND canónica es

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$.

La FNC canónica es

$(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$.

Cada fila previa se extiende con $R = V$ y $R = F$. Hay cuatro bloques de tres literales en cada forma, con doce apariciones. En la FND, factorizar cada pareja según $R \vee \neg R$ y usar complemento recupera los dos términos originales. En la FNC, cada pareja tiene la forma $(X \vee \neg R) \wedge (X \vee R) \equiv X \vee (\neg R \wedge R) \equiv X$, y recupera las dos cláusulas originales. R figura en las formas canónicas ampliadas, pero su valor no decide la verdad del bicondicional.

85. Con sólo Q, ambas formas canónicas son $\neg Q$: un término o una cláusula de un literal.

Con P, Q, las filas verdaderas son (V, F) y (F, F), y la FND es $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. Las filas falsas son (V, V) y (F, V), y la FNC es $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q)$. Cada forma tiene dos bloques y cuatro apariciones. Factorización y complemento reducen las dos a $\neg Q$.

En el orden Q, P, las filas verdaderas se escriben (F, V) y (F, F); las falsas, (V, V) y (V, F). Cambia la posición de cada coordenada, no la condición «Q falsa». Manteniendo identificadas las variables, las formas sólo requieren reordenar literales o bloques.

Con P, Q, R, hay cuatro filas verdaderas y cuatro falsas. Cada forma canónica tiene cuatro bloques de tres literales, con doce apariciones. Las variables adicionales no alteran el significado; duplican las extensiones de cada fila previa.

86. Sin variables declaradas hay una única valuación, la asignación vacía: no queda ninguna elección por realizar. Una tautología es verdadera en ella, así que su FND canónica contiene un término sin literales, interpretado como una conjunción vacía, V; su FNC no tiene cláusulas y también se representa por V.

Una contradicción es falsa en esa valuación. Su FND no tiene términos y se representa por F; su FNC contiene una cláusula sin literales, interpretada como una disyunción vacía, F. No deben confundirse «una cláusula vacía» y «ninguna cláusula»: la primera excluye la única valuación; la segunda no excluye ninguna.

Con P, Q, hay cuatro valuaciones. La tautología tiene cuatro términos canónicos de dos literales en su FND y ninguna cláusula en su FNC. La contradicción tiene ningún término en su FND y cuatro cláusulas canónicas de dos literales en su FNC. Las formas no vacías tienen ocho apariciones de literales; las representaciones constantes tienen cero. Son las mismas verdades extremas sobre dos contextos de comparación distintos.

P. Alcance de una sustitución

87. Los signos de negación sobre las dos apariciones de P no están anidados sobre una misma subfórmula. La doble negación exige el patrón $\neg\neg X$, no dos signos encontrados en lugares distintos.

De Morgan sobre el segundo término da

$D \equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg\neg P) \equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge P)$.

Ahora sí aparece la subfórmula $\neg\neg P$ dentro de ese término y puede reemplazarse por P. Distribuyendo:

$\neg P \vee (\neg Q \wedge P) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee P) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

Con $P = V, Q = V$, el original vale F, mientras el resultado propuesto $P \vee \neg Q$ vale V. Ese caso refuta la sustitución. La reparación aplica cada ley a un bloque con la estructura exacta que exige.

88. La ley es $X \wedge (X \vee Y) \equiv X$. Aquí $X = P \vee Q$ y $Y = R$, de modo que $E \equiv P \vee Q$. No puede reemplazarse el bloque completo por una sola parte P.

Con $P = F, Q = V, R = F$, ambos factores de E son verdaderos, por lo que $E = V$, pero la respuesta propuesta P vale F.

La ley depende de los valores del bloque X, que pueden ser V o F, y no de cuántos símbolos tenga dentro. Por eso el mismo esquema vale para una subfórmula compuesta. Precisamente por eso hay que conservar ese bloque entero al sustituir. El resultado $P \vee Q$ es una cláusula y, por tanto, una FNC de una cláusula; también es una FND de dos términos unitarios.

89. De Morgan sobre la disyunción exterior da $\neg(P \Rightarrow Q) \wedge \neg R$. El paso propuesto reemplaza la negación de todo el condicional por un condicional con ambos componentes negados. Esos bloques no son equivalentes.

Con $P = F, Q = F, R = F$, el condicional $P \Rightarrow Q$ vale V, por lo que el original vale F. En cambio, $\neg P \Rightarrow \neg Q$ vale V y $\neg R$ vale V, así que el resultado propuesto vale V.

La reparación es

$\neg[(P \Rightarrow Q) \vee R] \equiv \neg(P \Rightarrow Q) \wedge \neg R \equiv (P \wedge \neg Q) \wedge \neg R$.

El último paso usa eliminación de implicación y De Morgan: $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$. La fórmula sólo es verdadera en $P = V, Q = F, R = F$, pues exige esos tres literales simultáneamente. Es una FND de un término y una FNC de tres cláusulas unitarias.

Q. Diseñar desde la tabla prescrita

90. Los cuatro minterminos dan la FND canónica

$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$.

Las filas falsas restantes son $(V, V, V), (V, F, V), (F, V, F), (F, F, F)$, por lo que la FNC canónica es

$(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

Agrupar las dos primeras filas verdaderas y las dos últimas por el valor de Q simplifica la FND a $(P \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R)$. La condición es que P, R tengan valores distintos; Q puede cambiar sin alterar la verdad.

Cada mintermino selecciona exactamente su fila y cada cláusula canónica excluye exactamente una fila falsa. Esa descripción cubre las ocho valuaciones, no sólo un ejemplo. Las formas canónicas tienen doce apariciones cada una; la FND compacta tiene cuatro.

91. La FND canónica es $(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$. Al factorizar se obtiene $P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R) \equiv P \wedge \neg Q$.

Esta última es una FNC de dos cláusulas unitarias. Eliminar R es lícito porque, cuando $P = V, Q = F$, ambos valores de R están permitidos, y cuando falla uno de esos requisitos, ninguno está permitido.

Las seis filas falsas producen la FNC canónica

$(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

Las cláusulas corresponden, en orden, a $(V, V, V), (V, V, F), (F, V, V), (F, V, F), (F, F, V), (F, F, F)$. La conjunción es falsa exactamente en esas filas y verdadera en las dos prescritas. La FND canónica tiene seis apariciones, la FNC compacta dos y la FNC canónica dieciocho. Ninguna de estas equivalencias autoriza eliminar una variable de un término aislado sin comprobar qué filas nuevas se aceptarían.

92. Una opción siempre verdadera es $T = (P \vee Q) \vee \neg(P \vee Q)$: complemento aplicado al bloque $P \vee Q$ da $T \equiv V$. Una opción siempre falsa es $K = (R \wedge S) \wedge \neg(R \wedge S)$: complemento sobre $R \wedge S$ da $K \equiv F$.

Con cuatro variables declaradas hay dieciséis valuaciones. La FND canónica de T incluye un mintermino por cada una: en cada bloque, las variables verdaderas se escriben sin negar y las falsas negadas. Son dieciséis términos de cuatro literales, con sesenta y cuatro apariciones. Su FNC canónica no tiene cláusulas y se representa por V.

La FND canónica de K no tiene términos y se representa por F. Su FNC canónica incluye una cláusula por cada valuación, negando las variables que valen V y dejando positivas las que valen F. Son dieciséis cláusulas de cuatro literales, con sesenta y cuatro apariciones. Cada fila hace falsa su propia cláusula.

Las constantes no aparecen en las fórmulas diseñadas, pero sí pueden aparecer en sus representaciones canónicas extremas conforme a la convención de §5.13. Las variables que no usa cada fórmula siguen interviniendo en la tabla declarada; su inclusión no cambia el comportamiento constante.

Capítulo 6

Cuantificadores, predicados y lenguaje matemático

En los capítulos 4 y 5 trabajamos con proposiciones completas: afirmaciones que ya podían ser verdaderas o falsas. Pero la matemática real está llena de frases como "x es par", "$x^2 < y$", "n divide a m" o "x tiene una raíz cuadrada". Antes de decidir su verdad necesitamos saber **qué objetos pueden ocupar esas variables** y **qué estamos afirmando acerca de ellos**.

Aquí aparece una capa nueva del lenguaje matemático. Ya no basta con combinar proposiciones mediante $\neg$, $\wedge$, $\vee$ o $\Rightarrow$. Debemos aprender a manejar **predicados, dominios, variables libres y ligadas, cuantificadores, alcance y dependencia**.

La pregunta rectora del capítulo es:

> **¿Cómo convertimos una condición abierta en una afirmación matemática precisa, y cómo leemos exactamente qué promete una frase con "para todo", "existe" o "existe un único"?**

Salvo indicación contraria, los dominios que usemos serán no vacíos. No desarrollaremos todavía una teoría formal de lógica de primer orden; el objetivo es operativo y matemático: leer, escribir, negar y comparar afirmaciones cuantificadas con la precisión que exigirá todo el resto del libro.

6.1. De una expresión abierta a una afirmación

Comparemos tres escrituras:

- $x + 3$;
- $x + 3 = 7$;
- $4 + 3 = 7$.

La primera es una **expresión**: representa un objeto numérico una vez que se conoce x. La segunda es una **condición abierta**: según el valor que adopte x, puede resultar verdadera o falsa. La tercera ya es una **proposición**: no queda ninguna variable sin determinar y podemos asignarle un valor de verdad.

A una condición como

$P(x) : x + 3 = 7$

la llamaremos **predicado** en la variable x. Si sustituimos $x = 4$, obtenemos la proposición verdadera $P(4)$. Si sustituimos $x = 10$, obtenemos la proposición falsa $P(10)$.

Hay otra forma de cerrar la condición: cuantificarla. Por ejemplo,

$\exists x \in \mathbb{R}\ (x + 3 = 7)$

dice que existe al menos un real que satisface la condición, mientras que

$\forall x \in \mathbb{R}\ (x + 3 = 7)$

dice que todos los reales la satisfacen. La primera afirmación es verdadera; la segunda, falsa.

La lección inicial es sencilla pero decisiva:

Una fórmula con variables libres no es, en general, una afirmación completa. Para obtener una proposición debemos fijar valores o ligar las variables mediante cuantificadores.

6.2. Predicados y dominio de discurso

El predicado no vive aislado del conjunto de objetos que estamos autorizados a considerar. Ese conjunto se llama **dominio**, **universo de discurso** o simplemente universo.

Consideremos

$P(x) : x^2 = 2.$

La pregunta "¿existe un x tal que $P(x)$?" tiene respuestas distintas según el dominio:

- en $\mathbb{Z}$, no hay solución;
- en $\mathbb{Q}$, tampoco;
- en $\mathbb{R}$, sí: $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.

Por eso la escritura

$\exists x\, P(x)$

es incompleta si el contexto no deja claro qué objetos puede recorrer x.

El dominio puede aparecer explícitamente, como en $\forall n \in \mathbb{Z}$, o quedar fijado por el contexto. En un texto bien escrito, esa información nunca debería ser ambigua.

El mismo símbolo, distinta afirmación. La fórmula

$\forall x\ (x^2 \geq x)$

es verdadera si el dominio es $\{0, 1\}$, pero falsa sobre $\mathbb{R}$, pues $x = \frac{1}{2}$ da $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

El dominio no es un detalle externo: forma parte del significado matemático de la afirmación.

6.3. Variables libres y variables ligadas

Una variable es **libre** cuando todavía no está controlada por un cuantificador dentro de la expresión considerada. Es **ligada** cuando un cuantificador determina su alcance.

Ejemplos:

- en $x^2 > 0$, la variable x es libre;
- en $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$, x está ligada por $\forall$;
- en $\forall x\, P(x, y)$, x está ligada y y queda libre;
- en $\forall x\, \exists y\, R(x, y)$, ambas variables están ligadas.

Una fórmula puede contener simultáneamente variables libres y ligadas. Mientras quede una variable libre cuyo valor no esté fijado por el contexto, no tenemos todavía una proposición cerrada.

El nombre de la variable no es lo esencial. Las afirmaciones

$\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$

y

$\forall t \in \mathbb{R}\ (t^2 \geq 0)$

tienen el mismo significado. Cambiar el nombre de una variable ligada es inocuo si se hace de manera coherente y no se produce una colisión con otra variable que ya tenga función distinta.

Más adelante veremos un error típico: renombrar una variable ligada con el mismo nombre de una variable libre puede cambiar el significado al **capturarla**.

6.4. El cuantificador universal

El símbolo $\forall$ se lee "para todo" o "para cada". La afirmación

$$\forall x \in D\ P(x)$$

dice que **cada elemento** del dominio D satisface el predicado P.

Por ejemplo,

$\forall n \in \mathbb{Z}\ (n + 0 = n)$

es verdadera. No afirma que exista algún entero con esa propiedad, sino que ninguno queda fuera.

Una afirmación universal es fuerte. Para establecer $\forall x \in D\ P(x)$ no basta comprobar muchos casos. Incluso un millón de ejemplos compatibles no elimina la posibilidad de que exista un caso posterior que falle.

En un dominio finito pequeño podríamos revisar todos los elementos. En dominios grandes o infinitos, normalmente necesitaremos un argumento general. Ese repertorio de argumentos será tema de C10; aquí nos importa reconocer la estructura lógica del objetivo.

Universal con condición. Una forma extremadamente común es

$$\forall x \in D\ [A(x) \Rightarrow B(x)].$$

Se lee: "para todo x del dominio, si x cumple A, entonces cumple B". Los objetos que no satisfacen A no constituyen contraejemplos, porque en ellos el antecedente es falso.

6.5. Refutar un universal: el poder de un contraejemplo

Hay una asimetría fundamental entre demostrar y refutar una afirmación universal.

Para confirmar

$\forall x \in D\ P(x)$

necesitamos controlar todos los casos. Para refutarla basta encontrar un solo elemento $a \in D$ tal que $P(a)$ sea falsa.

Ese elemento se llama **contraejemplo**.

Consideremos la afirmación:

> Para todo entero n, se cumple $n^2 > n$.

Basta tomar $n = 0$. Entonces $0^2 > 0$ es falso. Por tanto la afirmación universal es falsa.

Un contraejemplo debe respetar exactamente el dominio y las hipótesis. Si la afirmación dice "todo entero par mayor que 2…", un número impar o el entero 2 no puede refutarla.

Ejemplo no es demostración. Encontrar cinco casos en los que una propiedad funciona puede sugerir una conjetura. No demuestra una afirmación universal. En cambio, encontrar un solo caso en el que falla sí decide la cuestión en sentido negativo.

6.6. El cuantificador existencial

El símbolo $\exists$ se lee "existe al menos uno". La afirmación

$$\exists x \in D\ P(x)$$

dice que hay **por lo menos un elemento** del dominio que satisface P.

Para demostrar una afirmación existencial concreta suele bastar exhibir un **testigo**.

Por ejemplo,

$\exists n \in \mathbb{Z}\ (n^2 = 49)$

es verdadera porque $n = 7$ es un testigo. También $n = -7$ lo es. La existencia no implica unicidad.

Existencia no significa "sé cuál es". En matemática avanzada existen demostraciones de existencia que no construyen explícitamente el objeto. En este capítulo, sin embargo, la mayoría de nuestros ejemplos serán constructivos: producir un testigo será el modo más transparente de entender el cuantificador.

Refutar un existencial. Para mostrar que $\exists x \in D\, P(x)$ es falsa debemos establecer que **ningún** elemento del dominio funciona. La mera frase "no encontré ninguno" no es un argumento.

6.7. Negar cuantificadores

Éste es uno de los núcleos del capítulo.

Negar "todos cumplen P" significa afirmar "hay al menos uno que no cumple P". Por eso:

$$\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x).$$

Del mismo modo, negar "existe alguno que cumple P" significa afirmar "ninguno cumple P", es decir:

$$\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x).$$

Estas leyes son los análogos cuantificados de las leyes de De Morgan de C5: al atravesar el cuantificador, la negación **cambia** $\forall$ **por** $\exists$ **y** $\exists$ **por** $\forall$.

La negación debe seguir avanzando. Supongamos

$$\forall n \in \mathbb{Z}\, [E(n) \Rightarrow E(n^2)],$$

donde $E(n)$ significa "n es par". Su negación no es simplemente cambiar $\forall$ por $\exists$. Debemos negar también el contenido:

$$\exists n \in \mathbb{Z}\, \neg[E(n) \Rightarrow E(n^2)].$$

Por C5, $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$. Así obtenemos

$$\exists n \in \mathbb{Z}\, [E(n) \wedge \neg E(n^2)].$$

Es decir: "existe un entero par cuyo cuadrado no es par".

"No todos" y "ninguno" no son lo mismo. "no todos los elementos cumplen P" se traduce como $\exists x\, \neg P(x)$.

"ningún elemento cumple P" se traduce como $\forall x\, \neg P(x)$.

Confundir estas dos frases es uno de los errores lógicos más frecuentes.

Nota pedagógica — Cuando el dominio no contiene objetos. Aquí hacemos una excepción explícita a la convención de dominios no vacíos: permitimos $D = \varnothing$, es decir, un dominio sin elementos. Para cualquier predicado definido sobre D, $\forall x \in D\, P(x)$ es verdadera: no hay un elemento que la refute. En cambio, $\exists x \in D\, P(x)$ es falsa: no hay un testigo. Esto no atribuye una propiedad a un objeto inexistente; describe qué exige cada cuantificador.

Dominio sin elementos	Valor	Razón
$\forall x \in D\, P(x)$	Verdadero	No hay contraejemplo
$\exists x \in D\, P(x)$	Falso	No hay testigo

Dominio sin elementos	Valor	Razón
$\neg\forall x \in D\, P(x)$	Falso	Su equivalente existencial no tiene testigo
$\forall x \in D\, \neg P(x)$	Verdadero	Tampoco hay contraejemplo para este universal

Control resuelto. En $D = \varnothing$, «todos los objetos satisfacen P» y «ningún objeto satisface P» son ambas verdaderas, mientras que «alguno satisface P» es falsa. No hay contradicción: los dos universales no afirman existencia. En un dominio no vacío, en cambio, no pueden ser ambos verdaderos. Al leer una cuantificación restringida, pregunta por separado si hay objetos que satisfagan la restricción y qué se afirma de ellos.

6.8. Cuantificación restringida

La notación
$\forall x \in A\, P(x)$
dice que sólo nos interesan los elementos de A. Conceptualmente puede leerse como

$$\forall x\, [x \in A \Rightarrow P(x)].$$

En cambio,
$\exists x \in A\, P(x)$
se interpreta como

$$\exists x\, [x \in A \wedge P(x)].$$

La diferencia entre implicación y conjunción es esencial.

Para un universal restringido, un objeto que no pertenece a A no debe convertirse en contraejemplo. Para un existencial restringido, el testigo debe cumplir simultáneamente dos requisitos: pertenecer a A y satisfacer P.

No desarrollaremos aún operaciones con conjuntos; C7 dará a $\in$, subconjunto, unión, intersección y complemento un tratamiento sistemático. Aquí usamos la pertenencia sólo para expresar dominios restringidos.

Negaciones restringidas. De las reglas anteriores obtenemos directamente:

$$\neg[\forall x \in A\, P(x)] \equiv \exists x \in A\, \neg P(x),$$

$$\neg[\exists x \in A\, P(x)] \equiv \forall x \in A\, \neg P(x).$$

6.9. Alcance, paréntesis y variables

Todo cuantificador tiene un **alcance**: la parte de la fórmula sobre la cual actúa.

Comparemos:

$$\forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$$

y

$$(\forall x\, P(x)) \vee Q(x).$$

En la primera fórmula, las dos apariciones de x están bajo el alcance del cuantificador. En la segunda, sólo la aparición dentro de $P(x)$ está ligada; la x de $Q(x)$ queda libre.

Los paréntesis no son decoración. Determinan qué fragmento está cuantificado.

Renombrar sin capturar. En

$\forall x\, P(x, y)$

podemos cambiar la variable ligada x por t y escribir $\forall t\, P(t, y)$. Pero no deberíamos renombrarla como y sin más, porque la y original era libre. La escritura $\forall y\, P(y, y)$ ha ligado una variable que antes no lo estaba y, por tanto, puede expresar algo distinto.

La disciplina de alcance cumple aquí la misma función que el control de subfórmulas en C5: antes de transformar símbolos debemos saber **qué estructura estamos modificando**.

Nota pedagógica — Renombrar exige seguir cada aparición. Una misma letra puede tener apariciones libres y ligadas dentro de una fórmula. En $\forall x\, [R(x, y) \land \exists y\, S(x, y, z)]$, las dos apariciones de x en los predicados están ligadas por el universal. La aparición de y en R es libre; la de y en S está ligada por el existencial. La aparición de z es libre. El cuantificador interior no alcanza hacia la izquierda fuera de su propio subenunciado.

Para renombrar con seguridad, toma letras que no aparezcan en la fórmula. Primero escribe $\forall x\, [R(x, y) \land \exists t\, S(x, t, z)]$ y después $\forall u\, [R(u, y) \land \exists t\, S(u, t, z)]$. Se conserva la aparición libre de y y la dependencia del testigo interior respecto de u. Sustituir todas las letras iguales sin identificar su alcance puede cambiar el problema.

Control resuelto. Con $D = \{0, 1\}$ y el parámetro libre $y = 0$, $\forall x \in D\, (x \leq y)$ es falsa porque $1 \not\leq 0$. La sustitución indebida $\forall y \in D\, (y \leq y)$ es verdadera. Capturar el parámetro convirtió una comparación con un valor fijado en otra afirmación. El renombrado correcto es $\forall t \in D\, (t \leq y)$, que conserva el contraejemplo $t = 1$.

6.10. Dos cuantificadores: el orden importa

Cuando aparecen cuantificadores de distinto tipo, cambiar su orden puede cambiar radicalmente el significado.

Consideremos, sobre $\mathbb{R}$:

$$\forall x\, \exists y\, (y > x).$$

La afirmación es verdadera: dado un real x, podemos elegir $y = x + 1$.

Comparemos con

$$\exists y\, \forall x\, (y > x).$$

Ahora se pide un único real y que sea mayor que **todos** los reales. Eso es imposible.

La diferencia verbal es:

- $\forall x \exists y$: **para cada** x podemos buscar un y, posiblemente distinto;
- $\exists y \forall x$: debe existir **un mismo** y que funcione para todos los x.

Cuantificadores del mismo tipo. Bajo condiciones ordinarias,

$\forall x \forall y\, P(x, y)$

y

$\forall y \forall x\, P(x, y)$

expresan lo mismo. Análogamente ocurre con dos existenciales. El peligro aparece especialmente al intercambiar $\forall$ y $\exists$.

Nota pedagógica — Buscar por filas o buscar una columna común. Para una relación entre dos dominios finitos, representa cada primer objeto en una fila y cada posible testigo en una columna. Marca verdadero o falso en cada casilla. $\forall x\,\exists y\,R(x,y)$ pide al menos una casilla verdadera en cada fila; $\exists y\,\forall x\,R(x,y)$ pide una columna completamente verdadera. El segundo criterio exige un testigo que sirva simultáneamente a todos.

Control resuelto. Sean las filas a, b y las columnas p, q, r, con esta tabla:

R	p	q	r
a	V	F	V
b	F	V	V

Cada fila tiene un testigo, y además r sirve a ambas. Las dos fórmulas son verdaderas. Si cambiamos solamente $R(b,r)$ a falso, cada fila conserva algún testigo, pero ninguna columna sirve a ambas: la primera fórmula sigue siendo verdadera y la segunda pasa a falsa. Tener permiso para elegir según la fila no significa estar obligado a elegir testigos distintos; cuando hay una columna común, también podemos usarla en todas las filas. En dominios vacíos hay que volver a las definiciones de los cuantificadores, pues puede faltar una fila o una columna.

6.11. Dependencia entre variables y elección de testigos

En

$$\forall x\ \exists y\ R(x,y),$$

el valor de y puede elegirse **después** de conocer x. Por ello el testigo puede depender de x.

Ejemplo:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (y = 2x).$$

Una elección natural es $y = 2x$. No estamos exhibiendo un único número real; estamos dando una regla de elección que produce un testigo para cada x.

En cambio, en

$$\exists y\ \forall x\ R(x,y),$$

el y debe fijarse **antes** de recorrer todos los x. Ya no puede adaptarse a cada caso.

Esta idea anticipa un tema futuro: una regla que asigna a cada entrada una salida. C9 estudiará las funciones de forma sistemática. Aquí sólo necesitamos comprender la dependencia lógica.

Una advertencia. De $\forall x \exists y\,R(x,y)$ no se sigue automáticamente que haya un único y para cada x, ni que la elección sea canónica. La afirmación promete existencia local, nada más.

6.12. "Existe un único": el cuantificador de unicidad

La notación

$$\exists! x\ P(x)$$

se lee "existe un único x tal que $P(x)$". Contiene dos afirmaciones distintas:

1. **existencia:** al menos un elemento satisface P;
2. **unicidad:** no hay dos elementos distintos que satisfagan P.

Una expansión útil es

$$\exists x\,[P(x) \wedge \forall y\,(P(y) \Rightarrow y = x)].$$

El primer $P(x)$ garantiza existencia. El universal posterior dice que cualquier otro candidato y que satisfaga P debe coincidir con x.

Por ejemplo,

$\exists! x \in \mathbb{R}\ (x + 3 = 5)$

es verdadera: $x = 2$ existe y cualquier real que satisfaga la ecuación debe ser 2.

En cambio,

$\exists! x \in \mathbb{R}\ (x^2 = 4)$

es falsa. Hay soluciones, pero son dos: 2 y -2.

Existencia y unicidad deben comprobarse por separado.

Nota pedagógica — Tres preguntas sobre los testigos. Existencia, a lo sumo un testigo y exactamente un testigo son afirmaciones distintas. La condición «a lo sumo uno» se expresa como $\forall u\,\forall v\,[(P(u) \wedge P(v)) \Rightarrow u = v]$. No exige que exista alguno: se cumple también cuando ningún objeto satisface P. Para obtener unicidad existencial debemos añadir $\exists x\,P(x)$.

Número de testigos	Existe alguno	Hay a lo sumo uno	Existe exactamente uno
0	F	V	F
1	V	V	V
2 o más	V	F	F

Control resuelto. En $D = \{0, 1, 2\}$, para $P_a(x) : x < a$, hay cero testigos si $a = 0$, uno si $a = 1$ y dos si $a = 2$. Por eso la afirmación $\exists! x \in D\,P_a(x)$ falla por falta de existencia en el primer caso y por falta de unicidad en el tercero. Su negación dice: ningún objeto satisface P_a, o hay dos objetos distintos que lo satisfacen. Si D está vacío —excepción explícita a la convención inicial—, se cumple «a lo sumo uno», pero falla «existe exactamente uno».

6.13. Traducir lenguaje matemático a símbolos

La traducción correcta comienza identificando tres cosas:

1. **dominio**;
2. **cuantificador**;
3. **predicado y conectivos internos**.

Ejemplo:

> Todo entero par es divisible por 2.

Una formalización natural es

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ [E(n) \Rightarrow D_2(n)],$$

donde $E(n)$ significa "n es par" y $D_2(n)$ significa "2 divide a n".

Ejemplo:

> Algunos enteros no son cuadrados perfectos.

Puede escribirse

$$\exists n \in \mathbb{Z}\ \neg C(n),$$

donde $C(n)$ significa "n es un cuadrado perfecto".

Palabras que revelan estructura.

- “todo”, “cada”, “cualquiera” suelen señalar $\forall$;
- “algún”, “existe”, “hay al menos uno” suelen señalar $\exists$;
- “ningún” suele convertirse en $\forall x\, \neg P(x)$ o, equivalentemente, $\neg \exists x\, P(x)$;
- “no todos” significa $\exists x\, \neg P(x)$;
- “exactamente uno” señala $\exists!$.

No debemos traducir palabra por palabra: debemos traducir **estructura por estructura**.

6.14. Traducir símbolos a lenguaje matemático

La dirección inversa exige la misma disciplina. Consideremos

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (y > x).$$

Una lectura fiel es:

> Para todo número real x, existe un número real y mayor que x.

Una lectura defectuosa sería:

> Existe un real mayor que todos los reales.

Esa frase corresponde al orden inverso de cuantificadores.

Leer desde afuera hacia adentro. Una rutina segura es:

1. leer el cuantificador más externo;
2. fijar mentalmente su variable;
3. pasar al siguiente cuantificador;
4. respetar el orden;
5. leer finalmente el predicado interno.

Por ejemplo,

$$\exists m \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{Z}\ (m + n = n)$$

se lee: “existe un entero m tal que, para todo entero n, se cumple $m+n = n$”. La afirmación resulta verdadera porque $m = 0$ funciona para todos los n.

6.15. Diagnóstico de errores de cuantificación

Los errores más importantes de este capítulo no son de cálculo, sino de significado.

Error 1: cambiar el cuantificador al traducir. “Todo entero tiene un sucesor entero” no significa “existe un entero que es sucesor de todos los enteros”.

Error 2: negar sin cambiar cuantificador. La negación de $\forall x\, P(x)$ no es $\forall x\, \neg P(x)$, sino $\exists x\, \neg P(x)$.

Error 3: ignorar el dominio. El predicado $x^2 = 2$ produce afirmaciones existenciales distintas sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$.

Error 4: confundir testigo dependiente con testigo fijo. En $\forall x \exists y$, el y puede variar con x. En $\exists y \forall x$, no.

Error 5: confundir existencia con unicidad. Encontrar un testigo prueba existencia, no existencia única.

Error 6: perder el alcance. Mover paréntesis o renombrar variables puede ligar una variable que antes era libre.

Ante una solución dudosa conviene localizar **el primer paso donde cambia el significado**, no sólo el lugar donde aparece un resultado falso.

6.16. Cierre — protocolo de lectura cuantificada

Cuando encuentres una afirmación con variables y cuantificadores, utiliza esta rutina:

```
1. ¿CUÁL ES EL DOMINIO?
2. ¿CUÁL ES EL PREDICADO?
3. ¿QUÉ VARIABLES ESTÁN LIBRES?
4. ¿QUÉ VARIABLES ESTÁN LIGADAS?
5. ¿QUÉ CUANTIFICADOR LIGA A CADA VARIABLE?
6. ¿CUÁL ES EL ALCANCE DE CADA CUANTIFICADOR?
7. ¿EN QUÉ ORDEN APARECEN?
8. ¿UN TESTIGO PUEDE DEPENDER DE VARIABLES ANTERIORES?
9. ¿CÓMO SE NIEGA LA AFIRMACIÓN COMPLETA?
10. ¿QUÉ BASTARÍA PARA REFUTARLA O PARA EXHIBIR EXISTENCIA?
```

El paso conceptual de C6 puede resumirse así:

$$\text{condición abierta} \longrightarrow \text{dominio} + \text{cuantificación} \longrightarrow \text{afirmación precisa.}$$

A partir de ahora, expresiones como “para todo”, “existe” y “existe un único” dejarán de ser palabras de apoyo y se convertirán en parte visible de la estructura matemática.

Ejercicios del capítulo

A — Predicados y dominios. 1. Clasifica cada escritura como **expresión**, **predicado abierto** o **proposición**: (a) $x+1$; (b) $x+1=5$; (c) $4+1=5$; (d) n es par; (e) “6 es par”.

2. Sea $P(x): x^2=2$. Decide la verdad de $\exists x\, P(x)$ cuando el dominio es (a) $\mathbb{Z}$; (b) $\mathbb{Q}$; (c) $\mathbb{R}$.

3. Sea $P(x): x^2 \geq x$. Decide si $\forall x\, P(x)$ es verdadera sobre (a) $\{0,1\}$; (b) $\mathbb{Z}$; (c) $\mathbb{R}$.

4. Para $Q(x): 1/x > 0$, explica por qué el dominio $\mathbb{R}$ exige una precisión adicional antes de evaluar $Q(0)$.

5. Da un dominio finito D con al menos dos elementos para el cual $\forall x \in D\ (x^2=1)$ sea verdadera, y otro dominio finito E para el cual sea falsa.

6. Sea $R(x): x^2<4$. Compara $\forall x\, R(x)$ y $\exists x\, R(x)$ sobre los dominios $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$.

B — Variables libres y ligadas. 7. Identifica las variables libres y ligadas en $\forall x\, P(x, y)$.

8. Identifica las variables libres y ligadas en $\exists y\, [R(x,y) \wedge Q(y,z)]$.

9. ¿Es una proposición cerrada $\forall x\, \exists y\, R(x,y)$? ¿Y $\forall x\, \exists y\, R(x,y,z)$?

10. Convierte el predicado $P(x): x^2=9$ en (a) una proposición mediante sustitución; (b) una proposición existencial; (c) una proposición universal, usando dominio $\mathbb{R}$.

11. En $\forall x\, [P(x,y) \Rightarrow \exists z\, R(x,z)]$, clasifica x, y, z como libres o ligadas.

12. Reescribe $\forall x\, P(x,y)$ cambiando el nombre de la variable ligada sin cambiar el significado. Explica por qué $\forall y\, P(y,y)$ no es, en general, una renominación válida.

C — Universales y contraejemplos. 13. Decide si $\forall n \in \mathbb{Z}\ (n^2 \geq 0)$ es verdadera y explica qué tipo de justificación requiere.

14. Refuta $\forall n \in \mathbb{Z}\ (n^2 > n)$ con un contraejemplo.

15. Refuta la afirmación "la suma de dos enteros impares es impar".

16. Un estudiante verifica que $n^2 + n + 17$ es primo para $n = 0, 1, \ldots, 15$ y concluye que es primo para todo $n \geq 0$. Explica el error y encuentra un contraejemplo.

17. La afirmación es: "para todo entero n, si n es par entonces n^2 es par". ¿Puede un entero impar ser contraejemplo? Justifica.

18. Da un contraejemplo a "para todo real x, si $x^2 > 1$ entonces $x > 1$".

D — Existenciales y testigos. 19. Demuestra exhibiendo un testigo que $\exists n \in \mathbb{Z}\ (n^2 = 49)$.

20. Decide si $\exists n \in \mathbb{Z}\ (2n = 7)$ es verdadera.

21. Exhibe un testigo para $\exists x \in \mathbb{R}\ (0 < x < 1 \wedge x^2 < x)$.

22. Exhibe enteros a, b que prueben $\exists a, b \in \mathbb{Z}\ (a^2 - b^2 = 15)$.

23. Demuestra que $\exists n \in \mathbb{Z}\ (n > 1000)$ exhibiendo un testigo. ¿Qué demuestra este ejercicio sobre el tamaño del testigo?

24. Un estudiante encuentra dos testigos distintos para $\exists x\, P(x)$ y concluye que la afirmación era falsa porque "x no es único". Diagnostica el error.

E — Negación de cuantificadores. 25. Niega $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$ sin dejar una negación delante del cuantificador.

26. Niega $\exists n \in \mathbb{Z}\ (n^2 = 2)$.

27. Niega $\forall n \in \mathbb{Z}\ [E(n) \Rightarrow E(n^2)]$, donde $E(k)$ significa "k es par".

28. Niega $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \wedge x^2 < 1)$.

29. Niega $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (y > x)$.

30. Niega $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (y > x)$.

31. Traduce simbólicamente: "No todos los enteros son positivos".

32. Explica con un ejemplo por qué $\neg \forall x\, P(x)$ no equivale a $\forall x\, \neg P(x)$.

F — Cuantificación restringida. 33. Reescribe $\forall n \in \mathbb{Z}\ P(n)$ usando un dominio mayor D que contiene a $\mathbb{Z}$ y una implicación con pertenencia.

34. Reescribe $\exists n \in \mathbb{Z}\ (n^2 = 9)$ usando un dominio mayor D y una conjunción con pertenencia.

35. Niega $\forall x \in A\ P(x)$.

36. Niega $\exists x \in A\ P(x)$.

37. Un estudiante escribe "todo entero es racional" como $\forall x\, [x \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{Q}]$. Explica por qué esa forma es incorrecta y corrígela suponiendo un dominio numérico mayor.

38. Un estudiante escribe "existe un entero negativo" como $\exists x\, [x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < 0]$. Diagnostica el error y corrige.

G — Alcance y paréntesis. 39. En $\forall x\, [P(x) \Rightarrow (Q(x) \vee R)]$, ¿qué apariciones de x están ligadas?

40. En $(\forall x\, P(x, y)) \vee Q(y)$, ¿qué variables quedan libres?

41. Compara $\forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$ con $(\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$. ¿Por qué no son la misma clase de expresión?

42. Renombra la variable ligada en $\exists x\, [x > y \wedge P(x)]$ sin alterar la variable libre y.

43. Explica por qué sustituir $\forall x\, P(x, y)$ por $\forall y\, P(y, y)$ puede cambiar el significado.

44. Distingue $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)]$ de $(\forall x\, P(x)) \wedge Q(x)$.

H — Orden de cuantificadores. 45. Sobre $\mathbb{R}$, decide la verdad de (a) $\forall x \exists y\ (y > x)$; (b) $\exists y \forall x\ (y > x)$.

46. Sobre $\mathbb{R}$, compara $\forall x \exists y\ (y = x + 1)$ con $\exists y \forall x\ (y = x + 1)$.

47. Sobre $\mathbb{Z}$, decide $\forall n \exists m\ (m = n + 2)$ y su versión con cuantificadores invertidos.

48. Sobre $\mathbb{Z}$, decide (a) $\exists n \forall m\ (n + m = m)$; (b) $\forall m \exists n\ (n + m = m)$.

49. Sobre $\mathbb{R}$, decide $\forall x \exists y\ (xy = 1)$. ¿Qué cambia si el dominio de x es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

50. Sobre $\mathbb{R}$, decide (a) $\exists y \forall x\ (xy = x)$; (b) $\forall x \exists y\ (xy = x)$.

51. Explica por qué $\forall x \forall y\, P(x, y)$ puede reordenarse como $\forall y \forall x\, P(x, y)$, y análogamente para dos existenciales, mientras que el intercambio $\forall x \exists y \leftrightarrow \exists y \forall x$ no es válido en general.

52. En el dominio $D = \{1, 2\}$, sea $R(x, y)$ la relación "$x = y$". Decide $\forall x \exists y\, R(x, y)$ y $\exists y \forall x\, R(x, y)$.

I — Dependencia y elección de testigos. 53. Para $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}\ (y = 2x)$, da una elección de testigo y explica su dependencia.

54. Explica por qué en $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}\ (y > x)$ no puede usarse un único y fijo para todos los x, aunque la afirmación sea verdadera.

55. Interpreta la dependencia en $\forall n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z}\ (m = n^2)$.

56. En $\exists m \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{Z}\ (m + n = n)$, encuentra el testigo y explica por qué debe ser fijo.

57. ¿Implica $\forall x \exists y\, R(x, y)$ que para cada x haya exactamente un y con $R(x, y)$? Justifica.

58. Sea $M(p, q)$ el predicado "q es madre de p". Traduce y compara: (a) "toda persona tiene alguna madre"; (b) "existe una persona que es madre de todas las personas".

J — Existencia única. 59. Decide $\exists! x \in \mathbb{R}\ (x + 3 = 5)$ y justifica existencia y unicidad.

60. Decide $\exists! n \in \mathbb{Z}\ (2n = 6)$.

61. Decide $\exists! x \in \mathbb{R}\ (x^2 = 4)$.

62. Expande $\exists! x\, P(x)$ usando sólo $\exists$, $\forall$, $\wedge$, $\Rightarrow$ e igualdad.

K — Traducción bidireccional. 63. Formaliza: "Todo entero tiene un entero mayor".

64. Formaliza: "Entre un entero n y su sucesor $n + 1$ no existe ningún entero".

65. Formaliza: "Existe un real positivo cuyo cuadrado es menor que él mismo".

66. Formaliza: "No todo número real es positivo".

67. Traduce a lenguaje verbal: $\forall n \in \mathbb{Z}\ [O(n) \Rightarrow O(n^2)]$, donde $O(k)$ significa "k es impar".

68. Traduce a lenguaje verbal: $\exists m \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{Z}\ (m + n = n)$.

L — Diagnóstico y síntesis. 69. Un estudiante niega $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$ escribiendo $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0)$. Localiza el primer error y repara la negación.

70. Un estudiante traduce "para cada estudiante hay un libro que ese estudiante eligió" como $\exists b \forall e\, E(e, b)$. Explica el cambio de significado y corrige.

71. Sobre $\mathbb{R}$, decide la verdad de: (a) $\forall x \exists y\ (x + y = 0)$; (b) $\exists y \forall x\ (x + y = 0)$; (c) $\forall x \forall y\ (x + y = 0)$; (d) $\exists x \exists y\ (x + y = 0)$. Niega además la afirmación (a).

72. Analiza la afirmación: "Para todo real x existe un único real y tal que $2y + x = 0$". (a) Escríbela simbólicamente; (b) decide su verdad; (c) identifica la dependencia de y; (d) escribe su negación sin usar $\exists!$.

M — Problemas tipo prueba. Los siguientes ejercicios están pensados como problemas de evaluación escrita. Exigen desarrollo completo, control del alcance de los cuantificadores y justificación explícita de testigos, contraejemplos o dependencias.

73. Sobre $\mathbb{R}$, analiza las cuatro afirmaciones siguientes. Para cada una: (i) decide si es verdadera o falsa; (ii) si es verdadera, da una regla explícita para elegir el testigo; (iii) si

es falsa, exhibe una contradicción o un contraejemplo; (iv) explica qué cambia al invertir el orden de los cuantificadores.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (xy = 1)$.
(b) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ (xy = 1)$.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (y > x)$.
(d) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (y > x)$.

74. Considera la afirmación

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \Big[x \geq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}\ (y \geq 0 \wedge y^2 = x)\Big].$$

(a) Exprésala en lenguaje natural.

(b) Négala paso a paso hasta obtener una fórmula en la que la negación actúe sólo sobre relaciones atómicas.

(c) Decide la verdad de la afirmación original y de su negación.

(d) Explica por qué cambiar sólo $\forall$ por $\exists$ no produce todavía la negación correcta.

75. Estudia la afirmación

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! y \in \mathbb{R}\ (3y - 2 = x).$$

(a) Expande $\exists!$ usando únicamente $\exists$, $\forall$, conjunción, igualdad e implicación.

(b) Demuestra existencia y unicidad para un x arbitrario.

(c) Escribe una negación equivalente que exprese explícitamente las dos maneras en que puede fallar la unicidad existencial: inexistencia o existencia de dos testigos distintos.

(d) Compara con $\exists! y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (3y - 2 = x)$ y decide su valor de verdad.

76. Sobre $\mathbb{Z}$, compara

$$A: \quad \forall m\ \exists n\ \forall k\ (k \geq n \Rightarrow k > m)$$

y

$$B: \quad \exists n\ \forall m\ \forall k\ (k \geq n \Rightarrow k > m).$$

(a) Decide la verdad de A y construye un testigo n en función de m.

(b) Decide la verdad de B y da un contraejemplo que funcione para cualquier candidato n.

(c) Niega A empujando la negación hasta la relación atómica.

(d) Explica en una frase qué dependencia permite A y prohíbe B.

77. Para un dominio D, considera

$$S(D): \quad \forall x \in D\ \exists y \in D\ (y^2 = x^2 + 1).$$

(a) Decide si $S(\mathbb{R})$ es verdadera y justifica una elección de y para cada x.

(b) Decide si $S(\mathbb{Z})$ es verdadera. Si es falsa, encuentra el contraejemplo más simple que puedas.

(c) Escribe la negación de $S(\mathbb{Z})$ sin dejar una negación delante de un cuantificador.

(d) Explica por qué la misma fórmula sintáctica expresa afirmaciones diferentes al cambiar el dominio.

78. Sean E el conjunto de estudiantes, P el conjunto de problemas y $S(e, p)$ el predicado "el estudiante e resolvió el problema p". Formaliza la frase:

> Todo estudiante resolvió al menos un problema que ningún otro estudiante resolvió.

(a) Escribe una fórmula cuantificada completa.

(b) Niega tu fórmula y lleva la negación hasta los predicados atómicos.

(c) Traduce la negación obtenida nuevamente al castellano.

(d) Explica por qué mover el cuantificador $\exists p$ delante de $\forall e$ cambia el significado.

79. Considera la fórmula abierta

$$F(y, z): \quad \forall x\, [P(x, y) \Rightarrow \exists y\, Q(x, y, z)].$$

(a) Identifica todas las apariciones libres y ligadas de variables.

(b) Renombra la variable ligada del cuantificador existencial para eliminar la reutilización del símbolo y sin cambiar el significado.

(c) Explica por qué renombrar ingenuamente el $\forall x$ como $\forall y$ puede capturar una variable que antes era libre.

(d) Forma la clausura universal de la fórmula corregida.

(e) Niega esa clausura universal hasta obtener una fórmula donde la negación actúe sólo sobre Q.

80. Analiza la afirmación

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! y \in \mathbb{R}\ \Big[y > x \wedge \forall z \in \mathbb{R}\,(z > x \Rightarrow y \leq z)\Big].$$

(a) Traduce cuidadosamente la afirmación al castellano.

(b) Decide si es verdadera o falsa.

(c) Si suponemos que un y satisface la condición para cierto x, construye explícitamente un real z que destruya esa posibilidad.

(d) Explica si el fracaso está en la existencia, en la unicidad o en ambas.

(e) Escribe en lenguaje natural una negación exacta de la afirmación original.

N — Dominios, dependencia y fronteras de la unicidad. 81. Para $P(x) : 0 < x < 2$, clasifica $\forall x \in D\, P(x)$ y $\exists x \in D\, P(x)$ cuando D es $\{1\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ y $\varnothing$. En el último caso se permite expresamente un dominio vacío. Justifica cada valor y compara «no todos» con «ninguno».

82. Mantén fija $\forall x \in D\, \exists y \in D\, (y = x + 1)$. Decide su verdad para $D = \mathbb{Z}$, $D = \{0, 1, 2\}$, $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y $D = \varnothing$ (excepción expresa). Escribe su negación y explica por qué ampliar de $\{0, 1, 2\}$ a los enteros no negativos cambia el resultado.

83. Para $D = \{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0\}$ y $\varnothing$ (permitido aquí), clasifica $\forall x \in D\, (x < 0 \Rightarrow x^2 = 1)$ y $\exists x \in D\, (x < 0 \wedge x^2 = 1)$. ¿Un universal verdadero garantiza un objeto que cumpla el antecedente?

84. Para $D = \{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{-1, 0, 1\}$ y $\varnothing$ (excepción expresa), clasifica $\forall x \in D\, \exists y \in D\, (x + y = 1)$. En cada dominio no vacío, indica un testigo para cada x o un x sin testigo. Niega la fórmula.

85. Construye una tabla V/F con filas a, b, c y columnas p, q, tal que $\forall x \exists y\, R(x, y)$ sea verdadera y $\exists y \forall x\, R(x, y)$ falsa. Escribe las dos negaciones y exhibe los testigos que las verifican o refutan.

86. Construye una tabla con dos filas y tres columnas donde las dos fórmulas del ejercicio 85 sean verdaderas, pero cada fila tenga al menos un testigo que no sirva a la otra. Cambia una sola casilla para hacer falsa únicamente la fórmula con testigo común. Justifica.

87. Sea $D = \{a, b, c\}$ y sea $R(x, y)$ verdadero exactamente cuando $x \neq y$. Compara $\forall x \exists y\, R(x, y)$, $\exists y \forall x\, R(x, y)$ y $\forall x \exists! y\, R(x, y)$. Repite para $D = \{a, b\}$ y $D = \{a\}$.

88. Para dominios de filas X y columnas Y, se permiten aquí dominios vacíos. Determina $\forall x \in X \exists y \in Y\, R(x, y)$ y $\exists y \in Y \forall x \in X\, R(x, y)$ cuando: (a) X vacío e Y no vacío; (b) X no vacío e Y vacío; (c) ambos vacíos. No asignes casillas imaginarias.

89. Sobre los reales, considera $A : \forall x \exists y \forall z\, [z > x \Rightarrow z > y]$. Niega A paso a paso, traduce ambas fórmulas y decide su verdad. ¿Es posible escoger un mismo y para todos los x?

90. Sobre los enteros, considera $B : \exists n \forall m \exists k\, [k > m \wedge k < n]$. Escribe su negación sin negar una fórmula compuesta, traduce ambas y determina sus valores. Identifica de qué puede depender cada elección.

91. Un curso tiene alumnos a, prácticas p y revisores r en dominios no vacíos. $E(a, p)$ significa «a entregó p» y $C(r, a, p)$, «r corrigió la entrega de a en p». Formaliza «para cada alumno hay una práctica que entregó y que todos los revisores corrigieron». Niega exactamente, traduce y explica por qué negar no exige una práctica entregada con una corrección ausente para cada práctica.

92. En $D = \{0, 1\}$, sea $R(x, y, z)$ la igualdad $z = x + y$ (suma usual de enteros). Decide $\forall x \exists y \forall z\, R(x, y, z)$ y $\forall x \forall z \exists y\, R(x, y, z)$. Escribe sus negaciones y explica la diferencia de dependencia aunque ambas puedan ser falsas.

93. En $D = \{0, 1, 2\}$, define $P_a(x) : x < a$ para $a = 0, 1, 2, 3$. Clasifica existencia, «a lo sumo uno» y unicidad existencial, justificando por lista de testigos. Escribe la negación de unicidad sin usar $\exists!$.

94. Con $D = \mathbb{Z}$, para cada entero a estudia $\exists! x \in D\, (2x = a)$. Identifica cuándo falla existencia y cuándo puede fallar «a lo sumo uno». Formula ambas partes y su conjunción sin $\exists!$.

95. Para cada real a, cuenta los testigos de $P_a(x) : x^2 = a$ sobre $\mathbb{R}$. Determina existencia, a lo sumo uno y exactamente uno. Explica qué cambia si el dominio se restringe a los reales no negativos.

96. Se permite aquí un dominio vacío. Para $D = \varnothing$, $D = \{a\}$ y $D = \{a, b\}$ con $a \neq b$, estudia $F : \forall x \in D \exists! y \in D\, (y = x)$ y $G : \exists! y \in D \forall x \in D\, (y = x)$. Separa existencia y unicidad y explica el papel del cuantificador exterior.

Soluciones razonadas

Las soluciones forman parte del capítulo canónico. En los ejercicios de traducción puede haber variantes lingüísticas equivalentes; lo esencial es conservar dominio, cuantificadores, alcance y dependencia.

Soluciones — A — Predicados y dominios. Solución 1. (a) $x+1$ es una expresión: representa un número una vez fijado x. (b) $x+1=5$ es un predicado abierto porque su verdad depende de x. (c) $4+1=5$ es una proposición y es verdadera. (d) "n es par" es un predicado abierto. (e) "6 es par" es una proposición verdadera.

Solución 2. En $\mathbb{Z}$ no existe entero con cuadrado 2, así que es falsa. En $\mathbb{Q}$ también es falsa: $\sqrt{2}$ no es racional. En $\mathbb{R}$ es verdadera, con testigos $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. El ejercicio muestra que el dominio forma parte del significado.

Solución 3. Sobre $\{0,1\}$ es verdadera: hay sólo dos casos y ambos dan igualdad. Sobre $\mathbb{Z}$ también es verdadera, pues $x^2-x=x(x-1)$ y para todo entero x el producto es no negativo: si $x\le 0$, ambos factores son no positivos; si $x\ge 1$, ambos son no negativos. Sobre $\mathbb{R}$ es falsa: $x=1/2$ produce $1/4<1/2$.

Solución 4. La expresión $1/x$ no está definida en $x=0$. Por tanto, si queremos usar Q como predicado numérico debemos restringir el dominio a valores donde tenga sentido, por ejemplo $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. No es correcto declarar simplemente $Q(0)$ falsa: la fórmula ni siquiera está definida allí.

Solución 5. Una elección es $D=\{-1,1\}$: ambos elementos satisfacen $x^2=1$. Para que sea falsa basta incluir un contraejemplo; por ejemplo $E=\{-1,0,1\}$, porque $0^2\neq 1$.

Solución 6. Sobre $\mathbb{Z}$, el universal es falso porque $x=2$ da $4<4$, falso; el existencial es verdadero, por ejemplo con $x=0$. Sobre $\mathbb{R}$, el universal también es falso, por ejemplo con $x=3$, y el existencial es verdadero con $x=0$. Las dos afirmaciones conservan aquí su valor de verdad al cambiar de dominio, aunque sus conjuntos de testigos y contraejemplos cambian.

Soluciones — B — Variables libres y ligadas. Solución 7. El cuantificador $\forall x$ liga a x dentro de $P(x,y)$. La variable y no tiene cuantificador y queda libre. Por ello la fórmula completa sigue siendo abierta respecto de y.

Solución 8. y está ligada por $\exists y$ en todo el alcance entre corchetes. Las variables x y z quedan libres.

Solución 9. La primera es cerrada: todas las variables que aparecen, x e y, están ligadas. La segunda no es cerrada porque z queda libre. Su valor de verdad puede depender del valor o interpretación de z.

Solución 10. (a) Por ejemplo, sustituyendo $x=3$ obtenemos $3^2=9$, verdadera. (b) $\exists x\in\mathbb{R}\ (x^2=9)$, verdadera. (c) $\forall x\in\mathbb{R}\ (x^2=9)$, falsa. Las tres operaciones cierran la variable, pero producen proposiciones diferentes.

Solución 11. x está ligada por el cuantificador universal y su alcance incluye tanto $P(x,y)$ como $R(x,z)$. z está ligada por $\exists z$ dentro del consecuente. y queda libre porque no aparece cuantificada.

Solución 12. Podemos escribir $\forall t\, P(t,y)$: t reemplaza coherentemente a la variable ligada x, mientras y permanece libre. En cambio, $\forall y\, P(y,y)$ hace que el cuantificador ligue también la posición que antes correspondía a la y libre. Se produce captura de variable y el significado puede cambiar.

Soluciones — C — Universales y contraejemplos. Solución 13. Es verdadera. No basta una lista de ejemplos; usamos el hecho general de que el cuadrado de todo real, y por tanto de todo entero, es no negativo. La justificación debe cubrir simultáneamente todos los enteros.

Solución 14. Toma $n = 0$. Entonces $0^2 > 0$ es $0 > 0$, falso. Por tanto el universal queda refutado. También $n = 1$ funciona como contraejemplo.

Solución 15. Basta un par de enteros impares cuya suma sea par. Por ejemplo, 1 y 3 son impares y $1 + 3 = 4$ es par. En realidad la afirmación correcta es la contraria: la suma de dos impares es par.

Solución 16. Comprobar finitos casos no demuestra una afirmación universal sobre todos los enteros no negativos. En $n = 16$ se obtiene $16^2 + 16 + 17 = 289 = 17^2$, que no es primo. Éste es un contraejemplo decisivo.

Solución 17. No. La forma lógica es $\forall n\,[E(n) \Rightarrow E(n^2)]$. Para un entero impar, el antecedente $E(n)$ es falso; por tanto la implicación no falla allí. Un contraejemplo tendría que ser un entero par cuyo cuadrado fuera impar.

Solución 18. Toma $x = -2$. Se cumple $x^2 = 4 > 1$, pero $x = -2$ no es mayor que 1. Por tanto el antecedente es verdadero y el consecuente falso: exactamente la forma necesaria para refutar una implicación universal.

Soluciones — D — Existenciales y testigos. Solución 19. El entero $n = 7$ sirve: $7^2 = 49$. Con un solo testigo válido queda demostrada la existencia. También -7 es testigo, lo que muestra que la afirmación no contiene unicidad.

Solución 20. Sería necesario $n = 7/2$, pero $7/2$ no es entero. Por tanto ningún $n \in \mathbb{Z}$ satisface la ecuación y la afirmación es falsa.

Solución 21. Toma $x = 1/2$. Entonces $0 < 1/2 < 1$ y $(1/2)^2 = 1/4 < 1/2$. Por tanto $x = 1/2$ satisface simultáneamente todas las condiciones.

Solución 22. Elige $a = 4$ y $b = 1$. Entonces $a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15$. El par $(4, 1)$ es un testigo para la existencia conjunta de a y b.

Solución 23. Por ejemplo $n = 1001$ es un testigo. No se necesita encontrar el "mejor" ni el menor testigo salvo que el enunciado lo exija; cualquier elemento del dominio que satisfaga el predicado basta para la existencia.

Solución 24. El cuantificador $\exists$ significa "existe al menos uno", no "existe exactamente uno". Tener dos testigos refuerza la existencia; no la contradice. La unicidad requeriría $\exists! x\ P(x)$.

Soluciones — E — Negación de cuantificadores. Solución 25. La negación es $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0)$. Cambiamos $\forall$ por $\exists$ y negamos $x^2 \geq 0$, cuya negación sobre los reales es $x^2 < 0$.

Solución 26. La negación es $\forall n \in \mathbb{Z}\ (n^2 \neq 2)$. Cambiamos $\exists$ por $\forall$ y negamos la igualdad.

Solución 27. Primero: $\neg\forall n\, A(n) \equiv \exists n\, \neg A(n)$. Luego $\neg(E(n) \Rightarrow E(n^2)) \equiv E(n) \wedge \neg E(n^2)$. La negación completa es $\exists n \in \mathbb{Z}\ [E(n) \wedge \neg E(n^2)]$.

Solución 28. La negación es $\forall x \in \mathbb{R}\ \neg(x > 0 \wedge x^2 < 1)$. Por De Morgan, queda $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \leq 0 \vee x^2 \geq 1)$.

Solución 29. Negamos desde afuera: $\exists x \in \mathbb{R}\ \neg\exists y \in \mathbb{R}\ (y > x)$. Luego cambia $\exists y$ por $\forall y$: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \neg(y > x)$. Por tanto, $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (y \leq x)$.

Solución 30. La negación es $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ \neg(y > x)$, es decir, $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ (y \leq x)$.

Solución 31. "No todos" niega un universal: $\neg\forall n \in \mathbb{Z}\ (n > 0)$. En forma positiva equivalente: $\exists n \in \mathbb{Z}\ (n \leq 0)$. Por ejemplo 0 es un testigo.

Solución 32. Toma dominio $D = \{1, 2\}$ y $P(x) =$ "$x = 1$". Entonces $\neg\forall x\, P(x)$ es verdadera porque no todos los elementos son 1; concretamente 2 falla. Pero $\forall x\, \neg P(x)$ es falsa porque $P(1)$ es verdadera. La primera dice "al menos uno falla"; la segunda, "todos fallan".

Soluciones — F — Cuantificación restringida. Solución 33. La forma conceptual es $\forall n \in D\ [n \in \mathbb{Z} \Rightarrow P(n)]$. Los elementos de D que no son enteros no deben actuar como contraejemplos; por eso aparece una implicación.

Solución 34. La forma es $\exists n \in D\ [n \in \mathbb{Z} \wedge n^2 = 9]$. Un testigo debe cumplir a la vez pertenecer a $\mathbb{Z}$ y satisfacer la ecuación.

Solución 35. La negación es $\exists x \in A\ \neg P(x)$. En palabras: existe al menos un elemento de A que no satisface P.

Solución 36. La negación es $\forall x \in A\ \neg P(x)$. En palabras: ningún elemento de A satisface P.

Solución 37. La conjunción exige que **todo elemento del dominio mayor** sea simultáneamente entero y racional, lo cual es mucho más fuerte. La forma correcta es $\forall x\,[x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}]$: sólo los elementos que son enteros activan la condición.

Solución 38. En un existencial restringido necesitamos que el testigo sea entero **y** negativo. La implicación puede ser verdadera para un objeto no entero sin demostrar lo deseado. La forma correcta es $\exists x\,[x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0]$.

Soluciones — G — Alcance y paréntesis. Solución 39. Las dos apariciones de x, en $P(x)$ y $Q(x)$, están dentro del alcance del cuantificador y por tanto ligadas. R no contiene x.

Solución 40. Dentro de $P(x, y)$, x está ligada por $\forall x$ y y permanece libre. En $Q(y)$, y también es libre. Por tanto la fórmula completa tiene a y como variable libre.

Solución 41. En la primera, todas las apariciones de x están ligadas y la fórmula puede ser cerrada. En la segunda, la x de $Q(x)$ queda fuera del alcance del cuantificador, así que la expresión sigue abierta respecto de x. Cambiar los paréntesis cambia el alcance y, por tanto, la estructura lógica.

Solución 42. Podemos escribir, por ejemplo, $\exists t\,[t > y \wedge P(t)]$. El cuantificador y todas las apariciones ligadas de x se sustituyen coherentemente por t; y permanece libre.

Solución 43. La y original era libre: podía representar un parámetro fijado externamente. Al renombrar x como y, el cuantificador $\forall y$ pasa a ligar ambas posiciones. Esa variable libre queda capturada. La transformación no es una mera renominación, sino un cambio de estructura.

Solución 44. La primera afirma que cada x satisface simultáneamente P y Q. La segunda afirma que todos satisfacen P, pero deja $Q(x)$ como condición abierta sobre una x libre. No son expresiones equivalentes ni tienen el mismo estatus lógico.

Soluciones — H — Orden de cuantificadores. Solución 45. (a) Verdadera: dado x, elige $y = x + 1$. (b) Falsa: si se propone un real fijo y, tomando $x = y + 1$ obtenemos $y > x$ falso. El cambio de orden altera la dependencia permitida.

Solución 46. La primera es verdadera: para cada x, elige $y = x + 1$. La segunda es falsa: un mismo y no puede ser simultáneamente $x + 1$ para todos los reales x; por ejemplo exigiría $y = 1$ cuando $x = 0$ y $y = 2$ cuando $x = 1$.

Solución 47. $\forall n \exists m\ (m = n + 2)$ es verdadera: para cada n, toma $m = n + 2$. $\exists m \forall n\ (m = n + 2)$ es falsa: un entero fijo m no puede valer $n + 2$ para todos los enteros n.

Solución 48. Ambas son verdaderas. En (a), el testigo fijo $n = 0$ funciona para todo m. En (b), para cada m podemos elegir $n = 0$; de hecho la elección no necesita depender de m. Que ambas sean verdaderas no significa que las formas lógicas sean equivalentes en general.

Solución 49. Sobre todo $\mathbb{R}$ es falsa: para $x = 0$ no existe y con $0 \cdot y = 1$. Si restringimos x a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, es verdadera: dado $x \neq 0$, elige $y = 1/x$.

Solución 50. (a) Verdadera con $y = 1$, pues $1 \cdot x = x$ para todo real x. (b) También verdadera; incluso puede usarse el mismo $y = 1$ para cada x. Este ejemplo recuerda que invertir cuantificadores puede cambiar el significado aunque ocasionalmente ambas afirmaciones resulten verdaderas.

Solución 51. Dos universales exigen que P sea verdadera para todos los pares (x, y); el orden en que recorremos los componentes no cambia esa exigencia. Dos existenciales sólo

piden que exista algún par (x, y) y el orden tampoco cambia eso. En cambio, $\forall x \exists y$ permite que y dependa de x, mientras $\exists y \forall x$ exige un único y fijo; por eso no son equivalentes en general.

Solución 52. $\forall x \exists y\, R(x, y)$ es verdadera: para $x = 1$ elige $y = 1$, y para $x = 2$ elige $y = 2$. En cambio, $\exists y \forall x\, R(x, y)$ es falsa: ningún único y es igual simultáneamente a 1 y a 2.

Soluciones — I — Dependencia y elección de testigos. Solución 53. La elección $y = 2x$ funciona. El testigo no es un número fijo: depende del valor de x que haya sido dado. Esa dependencia es permitida porque $\exists y$ aparece después de $\forall x$.

Solución 54. Si fijamos cualquier real y, podemos tomar $x = y + 1$ y entonces $y > x$ falla. La afirmación sigue siendo verdadera porque permite elegir un y nuevo después de conocer cada x, por ejemplo $y = x + 1$.

Solución 55. Para cada entero n podemos elegir el testigo $m = n^2$. En general cambia cuando cambia n. La afirmación no promete un único entero m que sea igual al cuadrado de todos los enteros.

Solución 56. El testigo es $m = 0$. Como $\exists m$ aparece primero, debemos elegir un solo entero antes de considerar los distintos n. Ese mismo $m = 0$ funciona para todos porque $0 + n = n$.

Solución 57. No. El cuantificador existencial sólo garantiza al menos un testigo. Puede haber varios. Por ejemplo, sobre $\mathbb{R}$, si $R(x, y)$ significa $y > x$, para cada x hay infinitos valores de y posibles. La unicidad requeriría una condición adicional.

Solución 58. (a) $\forall p \exists q\, M(p, q)$. El testigo q puede depender de p. (b) $\exists q \forall p\, M(p, q)$. Aquí se exige una sola persona q que satisfaga la relación con todas las personas. Las frases no tienen la misma estructura.

Soluciones — J — Existencia única. Solución 59. Existe: $x = 2$ satisface $2 + 3 = 5$. Es único porque si $x + 3 = 5$, restando 3 en ambos lados se obtiene necesariamente $x = 2$. Por tanto la afirmación es verdadera.

Solución 60. Existe el entero $n = 3$. Si $2n = 6$, dividir por 2 obliga a $n = 3$, así que no hay otro entero posible. La afirmación es verdadera.

Solución 61. Es falsa. Hay existencia, pues $x = 2$ funciona, pero también $x = -2$. Como hay dos testigos distintos, falla la unicidad.

Solución 62. Una expansión estándar es $\exists x\, [P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \Rightarrow y = x)]$. La primera parte afirma existencia; la segunda fuerza que cualquier otro candidato que cumpla P coincida con el testigo x.

Soluciones — K — Traducción bidireccional. Solución 63. $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists m \in \mathbb{Z}\ (m > n)$. El orden es universal-existencial porque el entero mayor puede depender del entero inicial.

Solución 64. Una forma es $\forall n \in \mathbb{Z}\ \neg\exists m \in \mathbb{Z}\ (n < m < n + 1)$. Equivalentemente, $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall m \in \mathbb{Z}\ \neg(n < m < n + 1)$.

Solución 65. $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \wedge x^2 < x)$. También podría escribirse $\exists x \in \mathbb{R}\ (0 < x < 1)$ si ya se ha justificado la equivalencia pertinente para positivos, pero la traducción directa conserva exactamente el enunciado dado.

Solución 66. $\neg\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0)$, equivalente a $\exists x \in \mathbb{R}\ (x \leq 0)$.

Solución 67. "Para todo entero n, si n es impar, entonces n^2 es impar." También puede decirse: "el cuadrado de todo entero impar es impar".

Solución 68. "Existe un entero m tal que, para todo entero n, se cumple $m + n = n$." La estructura exige un mismo m para todos los n; concretamente ese entero es 0.

Soluciones — L — Diagnóstico y síntesis. Solución 69. El primer error es conservar el cuantificador universal. Al negar un universal debe aparecer un existencial. La forma correcta es $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0)$. Luego observamos que esta negación es falsa, coherente con la verdad del enunciado original.

Solución 70. La traducción propuesta dice que existe **un mismo libro** b elegido por todos los estudiantes. La frase original permite que cada estudiante haya elegido un libro distinto. La forma adecuada es $\forall e \exists b\, E(e, b)$.

Solución 71. (a) Verdadera: dado x, toma $y = -x$. (b) Falsa: un único y no puede satisfacer $x + y = 0$ para todos los reales x; por ejemplo, $x = 0$ exige $y = 0$ y $x = 1$ exige $y = -1$. (c) Falsa: basta $x = y = 1$, pues $1 + 1 \neq 0$. (d) Verdadera: por ejemplo $x = 0, y = 0$. La negación de (a) es $\exists x \forall y\ (x + y \neq 0)$, que es falsa porque para cualquier x siempre podemos elegir $y = -x$.

Solución 72. (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! y \in \mathbb{R}\ (2y + x = 0)$. (b) Es verdadera: dado x, la ecuación obliga a $y = -x/2$, que es real. (c) El testigo depende de x mediante la regla $y = -x/2$; no hay un único y global para todos los x. (d) Expandiendo unicidad, el original dice que para todo x existe un y con $2y + x = 0$ y cualquier z que también satisfaga $2z + x = 0$ debe ser igual a y. Su negación puede expresarse conceptualmente como: $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que **o bien** no existe ningún y con $2y + x = 0$, **o bien** existen dos reales distintos y, z que satisfacen ambos la ecuación. Simbólicamente:

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \Big([\forall y \in \mathbb{R}\ (2y + x \neq 0)] \vee [\exists y, z \in \mathbb{R}\ (y \neq z \wedge 2y + x = 0 \wedge 2z + x = 0)] \Big).$$

En este caso la negación es falsa porque para cada x existe exactamente el único valor $-x/2$.

Soluciones — M — Problemas tipo prueba. Solución 73.

(a) Es verdadera. Dado $x \neq 0$, basta elegir $y = 1/x$. Entonces $xy = 1$. El testigo depende de x.
(b) Es falsa. Si existiera un real fijo y tal que $xy = 1$ para todo $x \neq 0$, al tomar $x = 1$ obtendríamos $y = 1$, mientras que con $x = 2$ obtendríamos $y = 1/2$. Contradicción.
(c) Es verdadera. Para cada x podemos tomar $y = x + 1$, y entonces $y > x$.
(d) Es falsa. Si existiera un real y mayor que todo real x, tomando $x = y + 1$ tendríamos $y > y + 1$, contradicción.

En (a) y (c), el existencial está dentro del alcance del universal: el testigo puede variar con la entrada. En (b) y (d), el testigo debe fijarse antes y funcionar para todos los valores universales.

Solución 74.

(a) Dice: "Todo real no negativo posee una raíz cuadrada real no negativa".
(b)

$$\begin{aligned}
&\neg \forall x \in \mathbb{R}\ \Big[x \geq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}\ (y \geq 0 \wedge y^2 = x) \Big] \\
&\equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \neg \Big[x \geq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}\ (y \geq 0 \wedge y^2 = x) \Big] \\
&\equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \Big[x \geq 0 \wedge \neg \exists y \in \mathbb{R}\ (y \geq 0 \wedge y^2 = x) \Big] \\
&\equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \Big[x \geq 0 \wedge \forall y \in \mathbb{R}\ \neg (y \geq 0 \wedge y^2 = x) \Big] \\
&\equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \Big[x \geq 0 \wedge \forall y \in \mathbb{R}\ (y < 0 \vee y^2 \neq x) \Big].
\end{aligned}$$

(c) La afirmación original es verdadera: si $x \geq 0$, existe $y = \sqrt{x} \geq 0$ y $y^2 = x$. Por tanto su negación es falsa.

(d) Cambiar sólo $\forall$ por $\exists$ modifica el cuantificador exterior, pero no produce la negación. Para negar el universal hay que negar también todo su contenido; después se aplican las reglas de negación a la implicación y al existencial interior.

Solución 75.

(a)

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \Big[(3y - 2 = x) \wedge \forall z \in \mathbb{R}\,(3z - 2 = x \Rightarrow z = y)\Big].$$

(b) Fijado x, la ecuación obliga a $y = (x + 2)/3$, que es real. Si z también satisface $3z - 2 = x$, entonces $3z - 2 = 3y - 2$, de donde $z = y$. Hay existencia y unicidad.

(c) La negación expresa que existe algún x para el cual o no hay solución o hay dos soluciones distintas:

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \Big([\forall y \in \mathbb{R}\ (3y - 2 \neq x)] \vee [\exists y, z \in \mathbb{R}\ (y \neq z \wedge 3y - 2 = x \wedge 3z - 2 = x)]\Big).$$

(d) $\exists! y\, \forall x\, (3y - 2 = x)$ es falsa: fijado y, $3y - 2$ es un solo real y no puede coincidir con todos los reales x.

Solución 76.

(a) A es verdadera. Dado m, elige $n = m + 1$. Si $k \geq n$, entonces $k \geq m + 1 > m$.

(b) B es falsa. Para cualquier candidato fijo n, toma $m = n$ y $k = n$. Entonces $k \geq n$ es verdadera, pero $k > m$ se convierte en $n > n$, falsa.

(c)

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv \exists m\ \forall n\ \exists k\ \neg(k \geq n \Rightarrow k > m) \\ &\equiv \exists m\ \forall n\ \exists k\ (k \geq n \wedge k \leq m). \end{aligned}$$

(d) En A, n puede depender de m. En B, n debe elegirse una sola vez y funcionar para todos los m.

Solución 77.

(a) Es verdadera en $\mathbb{R}$: dado x, elige $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

(b) Es falsa en $\mathbb{Z}$. Para $x = 1$ se exigiría $y^2 = 2$, imposible para un entero.

(c)

$$\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ (y^2 \neq x^2 + 1).$$

El valor $x = 1$ es un testigo.

(d) Los cuantificadores recorren objetos distintos según el dominio. El mismo patrón formal puede ser verdadero en $\mathbb{R}$ y falso en $\mathbb{Z}$ porque cambian los testigos permitidos.

Solución 78.

(a)

$$\forall e \in E\ \exists p \in P\ \Big[S(e, p) \wedge \forall e' \in E\ (e' \neq e \Rightarrow \neg S(e', p))\Big].$$

(b)

$$\neg\forall e \in E\ \exists p \in P\ \Big[S(e,p) \wedge \forall e' \in E\ (e' \neq e \Rightarrow \neg S(e',p))\Big]$$
$$\equiv \exists e \in E\ \forall p \in P\ \Big[\neg S(e,p) \vee \exists e' \in E\ (e' \neq e \wedge S(e',p))\Big].$$

(c) "Existe un estudiante tal que, para cada problema, o bien ese estudiante no lo resolvió, o bien algún otro estudiante también lo resolvió." Es decir, existe un estudiante que no posee ningún problema resuelto exclusivamente por él.

(d) Mover $\exists p$ delante de $\forall e$ obliga a escoger un mismo problema para todos los estudiantes. La frase original permite que el problema dependa del estudiante.

Solución 79.

(a) En $\forall x\,[P(x,y) \Rightarrow \exists y\,Q(x,y,z)]$, x está ligada por $\forall$. La y de $P(x,y)$ es libre; la y de $Q(x,y,z)$ está ligada por $\exists$; z es libre.

(b) Una renominación segura es

$$\forall x\,[P(x,y) \Rightarrow \exists t\,Q(x,t,z)].$$

(c) Si se reemplaza ingenuamente $\forall x$ por $\forall y$, la y libre que aparece en $P(x,y)$ quedaría bajo el alcance del nuevo cuantificador. Esa captura cambia el significado.

(d) Una clausura universal es

$$\forall y\ \forall z\ \forall x\ [P(x,y) \Rightarrow \exists t\,Q(x,t,z)].$$

(e)

$$\neg\forall y\forall z\forall x\,[P(x,y) \Rightarrow \exists t\,Q(x,t,z)]$$
$$\equiv \exists y\exists z\exists x\,[P(x,y) \wedge \neg\exists t\,Q(x,t,z)]$$
$$\equiv \exists y\exists z\exists x\,[P(x,y) \wedge \forall t\,\neg Q(x,t,z)].$$

Solución 80.

(a) Afirma que para todo real x existe un único real y que es estrictamente mayor que x y que es menor o igual que cualquier otro real estrictamente mayor que x. Es decir, afirma que todo real tiene un menor real estrictamente mayor que él.

(b) Es falsa.

(c) Fijemos x y supongamos $y > x$. Toma

$$z = \frac{x+y}{2}.$$

Entonces $x < z < y$. Como $z > x$, la condición universal exigiría $y \leq z$, contradicción.

(d) Falla ya la existencia: para ningún x existe un y con la propiedad. Por tanto la unicidad ni siquiera llega a entrar en juego.

(e) Una negación exacta es: "Existe un real x para el cual no existe exactamente un real y que sea el menor real estrictamente mayor que x". De hecho hemos probado algo más fuerte: para todo x no existe ninguno.

Soluciones — N — Dominios, dependencia y fronteras de la unicidad. Solución 81. En $\{1\}$ los valores universal/existencial son V/V, pues 1 satisface ambas desigualdades. En $\{0,1\}$ son F/V: 0 refuta el universal y 1 demuestra existencia. En $\{0,2\}$ son F/F: ninguno satisface las dos desigualdades. En $\varnothing$ son V/F: no hay contraejemplo ni testigo. «No todos» tiene valores F,V,V,F; «ninguno», equivalente a la negación del existencial, tiene F,F,V,V. Así, las dos negaciones no son intercambiables.

Solución 82. En $\mathbb{Z}$ es verdadera: para cualquier x, $y = x + 1$ sigue siendo entero. En $\{0, 1, 2\}$ es falsa: para $x = 2$ haría falta $y = 3$, fuera del dominio. En los enteros no negativos es verdadera porque el sucesor también es no negativo. En el dominio vacío es verdadera por el universal exterior, aunque no existan testigos: no hay un x para el cual se exija elegirlos. La negación es $\exists x \in D\, \forall y \in D\, (y \neq x + 1)$. En el dominio finito $x = 2$ la demuestra; en el ampliado ya no hay un último elemento que obstruya el sucesor.

Solución 83. Todos los elementos de los tres dominios no vacíos son no negativos. Así, cada antecedente es falso y cada implicación verdadera; en el vacío tampoco hay contraejemplo. Los cuatro universales son verdaderos. Los cuatro existenciales son falsos, pues no hay ningún elemento negativo. El universal no garantiza existencia de un objeto que satisfaga el antecedente: dice qué ocurre si lo hay. Confundirlo con el existencial añadiría una exigencia ausente.

Solución 84. En $\{0, 1\}$ es verdadera: $x = 0$ admite $y = 1$, y $x = 1$ admite $y = 0$. En $\{0, 1, 2\}$ es falsa porque $x = 2$ necesitaría $y = -1$. En $\{-1, 0, 1\}$ es falsa porque $x = -1$ necesitaría $y = 2$. En el vacío es verdadera por falta de contraejemplo exterior. La negación es $\exists x \in D$ $\forall y \in D\, (x + y \neq 1)$; los valores 2 y -1 proporcionan los testigos respectivos en los dos casos falsos.

Solución 85. Toma las filas (V, F), (F, V) y (V, F), respectivamente. Todas tienen una V, con testigos p, q, p, pero la columna p falla en b y la columna q falla en a. La primera negación, $\exists x \forall y\, \neg R(x, y)$, es falsa: ninguna fila es totalmente F. La segunda, $\forall y \exists x\, \neg R(x, y)$, es verdadera: para p elegimos b y para q elegimos a. El primer objeto en la última fórmula puede depender de la columna.

Solución 86. Usa filas (V, F, V) y (F, V, V). La tercera columna sirve a ambas; la primera sirve sólo a la primera fila y la segunda sólo a la segunda. Cambia la casilla de la segunda fila en la tercera columna de V a F. Quedan filas (V, F, V) y (F, V, F): ambas conservan testigo, pero la primera columna falla en la segunda fila, la segunda en la primera y la tercera en la segunda. Por ello sólo se pierde el testigo común.

Solución 87. Con tres objetos, cada x tiene dos testigos distintos de él: las tres fórmulas valen V,F,F. La segunda es falsa porque cualquier candidato y falla al tomar $x = y$. Con dos objetos cada x tiene exactamente el otro como testigo: los valores son V,F,V. Con un solo objeto no hay testigo distinto de a; las tres fórmulas son falsas. Existencia dependiente y unicidad dependiente cambian con el dominio, pero un testigo común sigue siendo imposible en los tres dominios no vacíos.

Solución 88. (a) La primera es verdadera por su universal exterior. La segunda también: cualquier y de Y sirve, pues el universal sobre X es verdadero. (b) La primera es falsa: tomando cualquier x de X, el existencial sobre Y falla. La segunda es falsa directamente porque no hay candidato y. (c) La primera es verdadera y la segunda falsa, por sus respectivos cuantificadores exteriores. No se evaluó R en objetos inexistentes; bastaron las definiciones.

Solución 89. Primero $\neg A \equiv \exists x \forall y \exists z\, \neg[z > x \Rightarrow z > y]$, y luego $\exists x \forall y \exists z\, [z > x \wedge z \leq y]$. A dice: para cada x hay un y que es menor que cualquier real mayor que x. Es verdadera con $y = x$. La negación dice: hay un x tal que, para cualquier y, algún z es mayor que x y a la vez no mayor que y; es falsa, pues elegir $y = x$ hace imposible ese z. La elección uniforme es imposible: dado un y fijo, toma $x = y - 1$ y $z = y - 1/2$. Entonces $z > x$, pero $z > y$ es falso.

Solución 90. La negación es $\forall n \exists m \forall k\, [k \leq m \vee k \geq n]$. B pide un entero n fijo tal que, por muy grande que sea m, haya un entero entre m y n estrictamente. Es falsa: una vez propuesto n, toma $m = n$; ningún k satisface $k > n$ y $k < n$. La negación afirma que para cada n hay un m que impide a todos los k estar estrictamente entre ambos; es verdadera con $m = n$. En B, n precede a m y no puede depender de él; k puede depender de ambos. En la negación, m puede depender de n, pero debe bloquear a todos los k.

Solución 91. La fórmula es $\forall a \exists p\, [E(a, p) \wedge \forall r\, C(r, a, p)]$. Su negación es $\exists a \forall p\, [\neg E(a, p) \vee$ $\exists r\, \neg C(r, a, p)]$, por intercambio de cuantificadores y De Morgan. Dice: hay un alumno para el

que cada práctica, o no fue entregada por él, o tiene al menos un revisor que no corrigió su entrega. Si el alumno no entregó cierta práctica, el primer disyunto ya basta; no necesitamos afirmar que existe una entrega sin corregir. El alumno queda fijo para todas las prácticas; cuando se necesita un revisor que falle, éste puede depender del alumno y de la práctica.

Solución 92. La primera es falsa: para un x, y fijos, $x + y$ no puede ser a la vez 0 y 1, de modo que falla alguno de los dos z. Su negación es $\exists x \forall y \exists z\, (z \neq x + y)$; sirve $x = 0$, eligiendo $z = 1$ para $y = 0$ y $z = 0$ para $y = 1$. La segunda también es falsa: para $x = 1, z = 0$ se necesitaría $y = -1$, fuera de D. Su negación es $\exists x \exists z \forall y\, (z \neq x + y)$, verdadera con $x = 1, z = 0$. En la primera, y debe elegirse antes de conocer z; en la segunda puede depender de x y de z. Coincidir en falsedad en esta interpretación no vuelve equivalentes sus requisitos.

Solución 93. Las listas son vacía, 0, $0, 1$ y $0, 1, 2$, respectivamente. Los triples existencia/a lo sumo uno/unicidad son F/V/F, V/V/V, V/F/F y V/F/F. La negación es $[\forall x \in D\ (x \geq a)] \vee [\exists u \in D \exists v \in D\, (u < a \wedge v < a \wedge u \neq v)]$. Para $a = 0$ se cumple el primer disyunto; para $a = 2, 3$, el segundo con $u = 0, v = 1$; para $a = 1$ ambos son falsos. Así se distingue falta de testigos de multiplicidad.

Solución 94. Si a es par, $a = 2b$ para un entero b, y $x = b$ es testigo. Si a es impar, no hay entero x con $2x = a$. En ambos casos hay a lo sumo uno: si $2u = a = 2v$, entonces $2u = 2v$ y $u = v$. Existencia se escribe $\exists x \in \mathbb{Z}\, (2x = a)$; a lo sumo uno, $\forall u \in \mathbb{Z} \forall v \in \mathbb{Z}\, [(2u = a \wedge 2v = a) \Rightarrow u = v]$. La conjunción es verdadera exactamente para los a pares. Cuando falla, falla sólo existencia, nunca la condición de a lo sumo uno.

Solución 95. Si $a < 0$, no hay testigos porque un cuadrado real no es negativo: F/V/F. Si $a = 0$, sólo $x = 0$ sirve: V/V/V. Si $a > 0$, sirven los dos reales distintos $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$, y no otros: V/F/F. En el dominio no negativo, para $a < 0$ sigue sin haber testigos, mientras que para $a \geq 0$ hay exactamente uno, $\sqrt{a}$. Por tanto a lo sumo uno es siempre verdadera en el dominio restringido y unicidad existencial vale exactamente para $a \geq 0$. La restricción eliminó el testigo negativo, no creó uno para valores negativos de a.

Solución 96. En el vacío F es verdadera por el universal exterior: no se exige encontrar testigo para ningún x. G es falsa porque su existencial exterior no tiene candidato, aunque la condición interior universal sería vacuamente verdadera para cualquier candidato si lo hubiera. En $\{a\}$ las dos son verdaderas: $y = a$ es el único testigo. En $\{a, b\}$, F sigue siendo verdadera, porque para cada x hay exactamente un $y = x$ en el dominio. G es falsa por falta de existencia: ningún y es simultáneamente igual a a y a b. En este último caso hay a lo sumo un testigo común (de hecho cero), pero no exactamente uno. Los valores F/G son V/F, V/V y V/F.

Autoevaluación de salida

Antes de continuar a C7, deberías poder responder afirmativamente:

- ¿distingo una expresión de un predicado y de una proposición?
- ¿puedo declarar el dominio relevante?
- ¿identifico variables libres y ligadas?
- ¿leo $\forall$, $\exists$ y $\exists!$ sin perder su alcance?
- ¿sé que un contraejemplo refuta un universal?
- ¿sé que un testigo establece una existencia?
- ¿puedo negar cuantificadores cambiando $\forall \leftrightarrow \exists$ y negando el contenido interno?
- ¿distingo $\forall x \exists y$ de $\exists y \forall x$?
- ¿puedo explicar cuándo un testigo depende de una variable previa?
- ¿puedo traducir afirmaciones de complejidad media en ambos sentidos?

Si alguna respuesta es negativa, vuelve primero a las secciones 6.7, 6.9–6.11 y a los ejercicios de los bloques E, G, H y L. Son los puntos de mayor transferencia del capítulo.

Capítulo 7

Conjuntos y álgebra de conjuntos

Los capítulos anteriores construyeron un lenguaje para formular afirmaciones. Aprendimos a combinar proposiciones, transformar fórmulas equivalentes, trabajar con predicados y controlar cuantificadores. Ahora utilizaremos ese lenguaje para estudiar uno de los objetos más ubicuos de la matemática: los **conjuntos**.

Un conjunto permite agrupar objetos y hablar de ellos como una sola entidad matemática. Pero su importancia no está sólo en servir como recipiente. La relación de pertenencia y las operaciones entre conjuntos convierten el lenguaje lógico de C4–C6 en un lenguaje algebraico nuevo. La conjunción reaparecerá como intersección; la disyunción, como unión; la negación, como complemento; la implicación, como inclusión.

La pregunta rectora será:

> **¿Cómo describimos colecciones matemáticas con precisión y cómo transformamos expresiones de conjuntos mediante leyes que pueden leerse elemento a elemento?**

No construiremos una teoría axiomática de conjuntos. Trabajaremos con el lenguaje de conjuntos que necesita la matemática universitaria elemental, manteniendo clara la frontera entre uso operativo y fundamentos.

7.1. ¿Qué es un conjunto en este libro?

Escribiremos conjuntos con letras como A, B, C y sus elementos con símbolos como a, b, x. La expresión

$x \in A$

se lee «x pertenece a A». Su negación,

$x \notin A$,

significa que x no es elemento de A.

En este capítulo trataremos un conjunto como un objeto matemático determinado por cuáles objetos pertenecen a él. Esta formulación es deliberadamente operativa: no intentaremos definir la palabra *conjunto* en términos de algo todavía más básico ni desarrollaremos axiomas fundacionales completos.

Los elementos pueden ser objetos muy distintos. Un conjunto puede contener números:

$A = \{1, 4, 9\}$.

Puede contener símbolos:

$B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Y también puede contener otros conjuntos:

$C = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

Por eso conviene evitar una intuición puramente física de «caja». La pertenencia es una relación matemática, y la naturaleza de los elementos depende del contexto.

Pertenecer no es estar contenido como subconjunto. Si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $2 \in A$. En cambio, $\{2\} \subseteq A$. Las dos afirmaciones están relacionadas, pero no dicen lo mismo: una habla del número 2 como elemento; la otra, del conjunto unitario $\{2\}$ como subconjunto.

Esta diferencia será una de las disciplinas notacionales centrales del capítulo.

7.2. Describir un conjunto: extensión y comprensión

Un conjunto finito pequeño puede describirse por **extensión**, enumerando sus elementos: $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

El orden no importa y las repeticiones tampoco. Por tanto,

$\{2, 4, 6, 8\} = \{8, 6, 4, 2\} = \{2, 2, 4, 6, 8, 8\}$.

Estas escrituras determinan el mismo conjunto porque contienen exactamente los mismos elementos.

Otra posibilidad es describir el conjunto mediante una **propiedad**:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \text{ y } 2 \leq n \leq 8\}.$$

Aquí reutilizamos C6. La parte $n \in \mathbb{N}$ fija el dominio y la condición posterior selecciona cuáles elementos pertenecen al conjunto.

Comprensión restringida. La notación

$$\{x \in D : P(x)\}$$

significa «los elementos x del dominio D que satisfacen P». En este libro utilizaremos sistemáticamente una base o dominio previamente reconocido. No necesitaremos una regla irrestricta que permita formar «el conjunto de todos los objetos que cumplen cualquier propiedad imaginable».

Una descripción puede ocultar el mismo conjunto. El conjunto

$\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\}$

es simplemente $\{-1, 1\}$.

Reconocer que dos descripciones distintas producen los mismos elementos será el punto de partida de la igualdad extensional.

7.3. Igualdad extensional

Dos conjuntos son iguales cuando tienen exactamente los mismos elementos. Operativamente:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Este principio se llama **extensionalidad**.

No importa cómo se hayan descrito los conjuntos. Por ejemplo,

$$\{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\}.$$

La igualdad no se decide por semejanza visual de las expresiones, sino por coincidencia de pertenencia.

Para demostrar que dos conjuntos son distintos. Basta encontrar un elemento que pertenezca a uno y no al otro. Ese elemento funciona como un testigo de desigualdad.

Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$, el elemento 3 muestra que $A \neq B$ porque $3 \in A$ y $3 \notin B$.

Esta idea es el análogo conjuntista del contraejemplo lógico.

7.4. El conjunto vacío y los conjuntos unitarios

El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

No debemos confundirlo con $\{\varnothing\}$. El primero no tiene elementos; el segundo tiene exactamente uno: el conjunto vacío.

También debemos distinguir:

- a, un objeto;
- $\{a\}$, el conjunto cuyo único elemento es a;
- $\{\{a\}\}$, el conjunto cuyo único elemento es el conjunto $\{a\}$.

La cantidad de llaves importa porque cambia el tipo de objeto del que estamos hablando.

El vacío puede aparecer como elemento. Si

$A = \{\varnothing, 1\}$,

entonces $\varnothing \in A$.

Pero también $\varnothing \subseteq A$, por una razón completamente distinta: el vacío es subconjunto de todo conjunto. Una misma escritura puede participar en relaciones diferentes; debemos mirar el símbolo relacional.

Nota pedagógica — Leer las llaves desde afuera. Para listar los elementos, empieza por las llaves exteriores. El conjunto $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ tiene dos elementos: el vacío y el conjunto cuyo único elemento es el vacío. No tiene tres elementos por contar también lo que está dentro del segundo. La pertenencia no atraviesa automáticamente varios niveles de llaves.

Afirmación sobre E	Valor	Justificación
$\varnothing \in E$	V	Es uno de los dos elementos enumerados
$\{\varnothing\} \in E$	V	Es el otro elemento enumerado
$\{\{\varnothing\}\} \in E$	F	No es ninguno de los dos elementos de E
$\{\{\varnothing\}\} \subseteq E$	V	Su único elemento, $\{\varnothing\}$, pertenece a E

Control resuelto. ¿Son iguales $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ y $\{\{\varnothing\}\}$? No. El primero tiene cero elementos y los otros dos tienen uno. Para distinguir estos últimos, la cantidad de elementos no basta: $\varnothing$ pertenece al segundo y no al tercero, cuyo único elemento es $\{\varnothing\}$. La regla de inclusión pide examinar los elementos del conjunto situado a la izquierda; la regla de pertenencia pregunta si ese conjunto entero aparece como un elemento a la derecha. Por eso en la tabla la misma expresión puede ser un subconjunto sin ser un elemento.

7.5. Subconjuntos e inclusión

Decimos que A es **subconjunto** de B, y escribimos $A \subseteq B$, cuando todo elemento de A pertenece también a B:

$$A \subseteq B \iff \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

La inclusión es, por tanto, una afirmación universal construida a partir de una implicación.

Propiedades inmediatas. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo:

$A \subseteq A$.

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Y el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto:

$\varnothing \subseteq A$.

La última afirmación puede resultar extraña hasta recordar su forma lógica. Para que $\varnothing \subseteq A$ fuese falsa tendría que existir un $x \in \varnothing$ que no perteneciera a A. Pero no existe ningún $x \in \varnothing$.

Subconjunto propio. Cuando $A \subseteq B$ y $A \neq B$, diremos que A es un subconjunto propio de B. Evitaremos depender de convenciones tipográficas variables para $\subset$ y escribiremos las dos condiciones cuando sea importante.

7.6. Igualdad por doble inclusión

La extensionalidad proporciona un criterio extremadamente útil:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Este criterio se llama **doble inclusión**.

Para demostrar $A = B$ podemos proceder así:

1. tomar un elemento arbitrario $x \in A$ y demostrar que $x \in B$;
2. tomar un elemento arbitrario $x \in B$ y demostrar que $x \in A$.

Ejemplo. Sea

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$

y

$B = \{-1, 1\}$.

Si $x \in A$, entonces $x^2 = 1$, de modo que $(x-1)(x+1) = 0$ y por tanto $x = 1$ o $x = -1$: así $x \in B$.

Recíprocamente, si $x \in B$, entonces $x = 1$ o $x = -1$, y en ambos casos $x^2 = 1$. Por tanto $x \in A$.

La conclusión es $A = B$.

El patrón de doble inclusión aparecerá muchas veces en matemática posterior.

7.7. El conjunto potencia

Dado un conjunto A, su **conjunto potencia** es el conjunto de todos los subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Si $A = \{a, b\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Aquí conviene distinguir con extremo cuidado:

- $a \in A$;
- $\{a\} \subseteq A$;
- $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Las dos últimas afirmaciones son equivalentes por definición del conjunto potencia.

Cuántos subconjuntos hay. Si A tiene n elementos, cada elemento puede ser incluido o no incluido en un subconjunto. En el caso finito, esto produce 2^n subconjuntos:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

No desarrollaremos todavía una teoría de cardinalidad; sólo utilizaremos este hecho para conjuntos finitos.

7.8. Unión e intersección

La **unión** de A y B contiene los elementos que pertenecen a por lo menos uno de ellos:

$$x \in A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in A) \vee (x \in B).$$

La **intersección** contiene los elementos que pertenecen a ambos:

$$x \in A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Este paralelismo no es decorativo. Permite transportar equivalencias lógicas de C5 al álgebra de conjuntos.

Ejemplo finito. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
y
$A \cap B = \{3, 4\}$.
No contamos dos veces los elementos comunes porque un conjunto registra pertenencia, no multiplicidad.

7.9. Diferencia y complemento

La **diferencia** $A \setminus B$ contiene los elementos de A que no pertenecen a B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

A diferencia de unión e intersección, la diferencia no es conmutativa en general:
$A \setminus B$ y $B \setminus A$
pueden ser completamente distintos.

Complemento. Para hablar del complemento de A debemos haber fijado un universo U. Entonces

$$A^c = U \setminus A.$$

El mismo conjunto A puede tener complementos diferentes bajo universos distintos.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$, su complemento en $U = \{1, 2, 3\}$ es $\{3\}$; en $V = \{1, 2, 3, 4\}$ es $\{3, 4\}$.

El complemento es la traducción conjuntista de la negación respecto de un dominio fijado.

7.10. Diferencia simétrica

La **diferencia simétrica** de A y B contiene los elementos que pertenecen exactamente a uno de los dos conjuntos:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

También puede escribirse

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

La primera forma destaca las dos regiones exclusivas; la segunda muestra que retiramos de la unión la parte común.

Lectura lógica. Si P significa $x \in A$ y Q significa $x \in B$, entonces
$x \in A \triangle B$
corresponde a «P o Q, pero no ambos». La diferencia simétrica es una versión conjuntista de la disyunción exclusiva.

7.11. Leyes del álgebra de conjuntos

Fijemos un universo U. Las operaciones de unión, intersección y complemento satisfacen leyes que recuerdan exactamente al álgebra proposicional.

Identidad y dominación. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$,
$A \cup U = U$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Idempotencia. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

Complemento. $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \varnothing$, $(A^c)^c = A$.

Conmutatividad y asociatividad. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Distributividad.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Absorción. $A \cup (A \cap B) = A$,
$A \cap (A \cup B) = A$.

De Morgan.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Estas leyes no forman una lista arbitraria. Todas pueden leerse elemento a elemento como equivalencias lógicas.

7.12. De la lógica a los conjuntos

Fijemos un universo U y conjuntos $A, B \subseteq U$. Para cada $x \in U$, escribamos $P(x)$ para la afirmación $x \in A$ y $Q(x)$ para la afirmación $x \in B$.

Las operaciones de conjuntos se leen mediante condiciones de pertenencia:

Condición para un elemento $x \in U$	Pertenencia correspondiente
$P(x)$	$x \in A$
$P(x) \vee Q(x)$	$x \in A \cup B$
$P(x) \wedge Q(x)$	$x \in A \cap B$
$\neg P(x)$	$x \in A^c$

La inclusión y la igualdad requieren que una condición se cumpla para **todos** los elementos del universo:

Condición universal	Relación entre conjuntos
$\forall x \in U\,[P(x) \Rightarrow Q(x)]$	$A \subseteq B$
$\forall x \in U\,[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$	$A = B$

Por ejemplo, la ley lógica de De Morgan

$$\neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\neg P(x)) \wedge (\neg Q(x))$$

muestra, para cada $x \in U$, que $x \in (A \cup B)^c$ si y sólo si $x \in A^c \cap B^c$. Por extensionalidad,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Un elemento no decide una inclusión. Tomemos $U = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$ y $B = \varnothing$. En $x = 2$, la implicación $x \in A \Rightarrow x \in B$ es verdadera porque su antecedente es falso. Sin embargo, $A \nsubseteq B$: el elemento 1 pertenece a A y no a B. Una implicación verdadera en una entrada no demuestra la condición universal.

Control de comprensión. Si sabemos que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ para un solo elemento, ¿podemos concluir que $A = B$? Escriba la condición que sí permite concluirlo.

Solución. No. Con los conjuntos anteriores y $x = 2$, ambas pertenencias son falsas y el bicondicional es verdadero, aunque $A \neq B$. La condición suficiente y necesaria es $\forall x \in U$ $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. Al cumplirse para todo elemento, cada conjunto queda incluido en el otro.

El puente funciona elemento a elemento. No estamos afirmando que un conjunto sea literalmente una proposición. La condición «x pertenece al conjunto resultante» tiene una estructura lógica; cuando pasamos a una relación entre conjuntos, cuantificamos sobre los elementos. Esta distinción explica cómo reutilizar el álgebra de proposiciones sin confundir una comprobación puntual con una afirmación universal.

7.13. Probar identidades de conjuntos

Hay al menos tres métodos útiles.

1. Transformación algebraica. Podemos aplicar leyes ya establecidas, igual que en C5 transformábamos fórmulas lógicas.

2. Pertenencia elemento a elemento. Para probar $X = Y$, tomamos un elemento arbitrario x y mostramos

$x \in X \Leftrightarrow x \in Y$.

La equivalencia puede desarrollarse usando lógica proposicional.

3. Doble inclusión. Podemos demostrar $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq X$ por separado.

¿Y los diagramas de Venn? Un diagrama puede ser excelente para visualizar una identidad o descubrir un contraejemplo en una configuración simple. Pero cuando la tarea exige una prueba general, el argumento debe poder expresarse simbólicamente o elemento a elemento.

Refutar una identidad. Si una supuesta identidad afirma $X = Y$, basta elegir conjuntos concretos y encontrar un elemento que pertenezca a un lado y no al otro.

Nota pedagógica — Del dibujo a una prueba que cubra todos los casos. Un dibujo particular puede ayudar a reconocer una región y a proponer una igualdad. Para demostrarla, hay que justificar la coincidencia para un elemento arbitrario. Si una región aparece vacía en el dibujo, no podemos usar ese hecho sin una hipótesis que lo garantice. Tampoco basta comprobar un punto de cada región dibujada cuando no se ha explicado qué condición define la región.

Control resuelto. Un dibujo en el que A y B no se cortan sugiere $A \triangle B = A \cup B$. ¿Vale siempre? Con $A = B = \{u\}$, el lado izquierdo es vacío y el derecho contiene u: la igualdad general es falsa. La condición exacta es $A \cap B = \varnothing$. Si la intersección es vacía, cada elemento de la unión pertenece exactamente a uno de los conjuntos y está en la diferencia simétrica; la inclusión inversa vale por definición. Recíprocamente, si ambas expresiones son iguales y hubiese un elemento de $A \cap B$, estaría en la unión y no en la diferencia simétrica, contradicción. La prueba permite usar el dibujo inicial bajo su hipótesis precisa.

Para escoger método, lee la forma del objetivo. Una igualdad entre expresiones de pertenencia suele admitir una cadena de equivalencias; una inclusión pide una implicación para un elemento arbitrario; una descripción de todas las soluciones exige necesidad y suficiencia. En una doble inclusión podemos seguir rutas diferentes en cada dirección. En una cadena de equivalencias, cada paso debe ser reversible: una implicación aislada no alcanza para concluir igualdad.

7.14. Producto cartesiano y pares ordenados

Un **par ordenado** (a, b) registra dos componentes en orden. En general,
$(a, b) \neq (b, a)$
cuando $a \neq b$.
El **producto cartesiano** de A y B es

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{u, v\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, u), (1, v), (2, u), (2, v)\}.$$

Mientras

$$B \times A = \{(u, 1), (u, 2), (v, 1), (v, 2)\}.$$

En general no son iguales.

Producto con el vacío. No existe ningún par cuyo primer elemento esté en $\varnothing$. Por eso
$\varnothing \times A = \varnothing$
y, del mismo modo,
$A \times \varnothing = \varnothing$.

Tamaño en el caso finito. Si A tiene m elementos y B tiene n, entonces $A \times B$ tiene mn pares.

El producto cartesiano será el punto de partida de C8, donde estudiaremos relaciones. Aquí nos detenemos antes de esa definición.

7.15. Errores estructurales frecuentes

Error 1: confundir $\in$ con $\subseteq$. Si $A = \{1, 2\}$, entonces $1 \in A$ y $\{1\} \subseteq A$. Intercambiar los símbolos cambia el tipo de afirmación.

Error 2: confundir $\varnothing$ con $\{\varnothing\}$. El primero tiene cero elementos; el segundo, uno.

Error 3: hablar de A^c sin universo. El complemento depende del universo de referencia.

Error 4: suponer que la diferencia es conmutativa. En general $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Error 5: inferir igualdad desde una sola inclusión. $A \subseteq B$ no implica $A = B$. Falta controlar la inclusión inversa.

Error 6: tratar operaciones de conjuntos como aritmética. No existen reglas de «cancelación» automáticas como
$A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.
Por ejemplo, si $C = U$, ambos lados son U para cualesquiera A, B.

Error 7: olvidar el orden del producto cartesiano. $A \times B$ no suele coincidir con $B \times A$.

Error 8: convertir un dibujo en demostración. La visualización ayuda, pero la prueba debe controlar la definición para todos los elementos pertinentes.

7.16. Protocolo de lectura conjuntista

Antes de transformar una expresión de conjuntos, preguntar:

1. **¿Cuál es el universo o dominio?**
2. **¿Qué símbolos representan elementos y cuáles conjuntos?**
3. **¿Aparece pertenencia $\in$ o inclusión $\subseteq$?**
4. **¿Cómo está definido cada conjunto?**
5. **¿Qué operación aparece: unión, intersección, diferencia, complemento o producto?**
6. **¿Qué condición lógica significa pertenecer al resultado?**
7. **Si hay complemento, está fijado el universo?**
8. **¿La igualdad puede traducirse a una equivalencia sobre un elemento arbitrario?**
9. **¿Conviene transformar algebraicamente o usar doble inclusión?**

10. **Si aparece un producto cartesiano, estoy respetando el orden de las coordenadas?**

La meta del capítulo puede resumirse así:

> **El álgebra de conjuntos es la lógica de pertenencia escrita como operaciones entre colecciones.**

Ejercicios

Todos los ejercicios se integran al capítulo con ID editorial único. Salvo las excepciones marcadas como inspiradas por el benchmark UChile, son originales para *Álgebra para matemáticos*.

A. Pertenencia y descripción

1. Sea $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Decide cuáles son verdaderas: $4 \in A$, $5 \in A$, $\{4\} \in A$, $\{4\} \subseteq A$.
2. Escribe por extensión el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : -2 \leq n \leq 2\}$.
3. Describe por comprensión el conjunto $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ usando números naturales.
4. Explica por qué $\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.
5. Determina el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$.
6. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$ y $B = \{-2, 2\}$. Justifica que describen el mismo conjunto.

B. Vacío, unitarios y notación

7. ¿Cuántos elementos tienen $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ y $\{\{\varnothing\}\}$?
8. Decide si $\varnothing \in \{\varnothing, 1\}$ y si $\varnothing \subseteq \{\varnothing, 1\}$.
9. Sea $A = \{\varnothing, \{1\}, 1\}$. Decide si $1 \in A$, $\{1\} \in A$, $\{1\} \subseteq A$ y $\varnothing \in A$.
10. Encuentra un conjunto A tal que $\varnothing \in A$ pero $\{\varnothing\} \notin A$.
11. Encuentra un conjunto A tal que $\{\varnothing\} \subseteq A$ pero $\{\varnothing\} \notin A$.
12. Explica por qué no existe ningún x tal que $x \in \varnothing$. ¿Qué implicación tiene esto para una afirmación de la forma "si $x \in \varnothing$, entonces $P(x)$"?

C. Subconjuntos e igualdad

13. Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Decide $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, $A \in B$ y $2 \subseteq B$.
14. Demuestra que $\varnothing \subseteq A$ para todo conjunto A.
15. Demuestra que la inclusión es transitiva: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
16. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 2, 1\}$. Justifica $A = B$ sin apelar a que "se ven iguales".
17. Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{-1, 0, 1, 2\}$. Prueba $A = B$ por doble inclusión.
18. Da un contraejemplo a la afirmación: "si $A \subseteq B$, entonces $A = B$".
19. Supón $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Explica por qué no es necesario conocer una lista de los elementos para concluir $A = B$.
20. Sean A, B, C conjuntos. Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, ¿se sigue $A \subseteq B \cap C$? Demuéstralo o da contraejemplo.

D. Conjunto potencia

21. Calcula $\mathcal{P}(\{a, b\})$.
22. Lista todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
23. Sea $A = \{1, 2\}$. Decide: $1 \in \mathcal{P}(A)$, $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ y $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
24. Demuestra que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
25. ¿Es siempre cierto que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? Si no, produce un contraejemplo.
26. Un conjunto finito A tiene 32 subconjuntos. ¿Cuántos elementos tiene A? Justifica.

E. Unión e intersección

27. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$. Calcula $A \cup B$ y $A \cap B$.
28. Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 2\}$. Describe $A \cap B$ por extensión.
29. Con los conjuntos del ejercicio anterior, describe $A \cup B$ y decide si coincide con $\mathbb{Z}$.
30. Demuestra $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
31. Prueba $A \cup \varnothing = A$ por extensionalidad.
32. Prueba $A \cap A = A$ por extensionalidad.
33. Si $A \subseteq B$, demuestra $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.
34. ¿Es verdadera la recíproca: si $A \cap B = A$, entonces $A \subseteq B$? Justifica.

F. Diferencia y complemento

35. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$. Calcula $A \setminus B$ y $B \setminus A$.
36. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{1, 3, 5\}$. Calcula A^c.
37. Usa $A = \{1, 2\}$ y dos universos distintos para mostrar que el complemento depende del universo.
38. Demuestra $A \setminus B = A \cap B^c$ respecto de un universo que contenga a A y B.
39. Prueba $(A^c)^c = A$.
40. Prueba la ley de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
41. ¿Es cierto que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$? Demuéstralo.
42. Da un contraejemplo a $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

G. Diferencia simétrica

43. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4\}$. Calcula $A \triangle B$.
44. Demuestra $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
45. Prueba que $A \triangle B = B \triangle A$.
46. Determina todas las condiciones bajo las cuales $A \triangle B = \varnothing$.

H. Leyes y transformaciones

47. Simplifica $A \cap (A \cup B)$.
48. Simplifica $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$.
49. Simplifica $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.
50. Demuestra $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ usando el diccionario lógico.
51. Prueba $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
52. Prueba $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.
53. Transforma $(A \cup B)^c \cup (A \cap B^c)$ hasta una forma sin complementos de uniones.
54. Caracteriza cuándo $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

I. Demostraciones por elementos y doble inclusión

55. Demuestra por doble inclusión $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
56. Demuestra por elementos $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.
57. Demuestra que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ por doble inclusión.
58. Supón $A \cap B \subseteq C$. Demuestra $A \cap C^c \subseteq B^c$.
59. Refuta con un contraejemplo la identidad $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
60. Demuestra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ de dos maneras: por una ley algebraica y por pertenencia.

J. Producto cartesiano

61. Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Escribe $A \times B$.
62. Con los conjuntos del ejercicio anterior, escribe $B \times A$ y explica por qué no es igual a $A \times B$.
63. Demuestra $A \times \varnothing = \varnothing$.
64. Demuestra $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
65. Caracteriza cuándo $A \times B = B \times A$.
66. Si $|A| = 4$ y $|B| = 7$, calcula $|A \times B|$. Explica el principio.

K. Diagnóstico y transferencia

67. Un estudiante escribe: "como $1 \in A$, entonces $1 \subseteq A$". Diagnostica y repara.
68. Un estudiante calcula el complemento de $A = \{1, 2\}$ como "todos los números salvo 1 y 2". Explica qué información falta.
69. Un estudiante demuestra $A = B$ mostrando únicamente $A \subseteq B$. ¿Qué falta? Da un ejemplo que muestre por qué.
70. Explica por qué un diagrama de Venn puede sugerir $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, pero una prueba por pertenencia es conceptualmente más general.
71. Determina si la afirmación $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$ es verdadera. Si es falsa, produce un contraejemplo y explica por qué falla la "cancelación".
72. Síntesis: explica en 8–12 líneas por qué las leyes de conjuntos pueden entenderse como una segunda realización del álgebra lógica de C5. Incluye pertenencia, unión, intersección, complemento, inclusión y extensionalidad.

L. Problemas tipo prueba

Los siguientes problemas están diseñados para evaluación escrita. Se espera una demostración completa, no sólo el resultado final.

73. Demuestra, para conjuntos arbitrarios A y B, que

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B).$$

Deduce además que

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B.$$

74. Caracteriza exactamente cuándo se cumple

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B).$$

Demuestra que la igualdad vale si y sólo si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

75. Usando $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, demuestra que la diferencia simétrica es asociativa:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Tu demostración debe explicar por qué un elemento pertenece a cualquiera de los dos lados exactamente cuando pertenece a un número impar de los conjuntos A, B, C.

76. Sea U un universo fijo y sean $A, B \subseteq U$. Estudia la ecuación de conjuntos

$$X \cap A = B.$$

(a) Determina una condición necesaria y suficiente sobre A y B para que exista al menos una solución $X \subseteq U$.

(b) Bajo esa condición, describe **todas** las soluciones.

(c) Demuestra que tu descripción es completa.

77. Sea U un universo fijo y sean $A, B \subseteq U$. Estudia la ecuación

$$X \cup A = B.$$

(a) Determina una condición necesaria y suficiente para que exista solución.

(b) Caracteriza todas las soluciones mediante inclusiones.

(c) Da una parametrización de todas las soluciones usando un subconjunto arbitrario de A.

78. Sean A, B, C, D conjuntos. Demuestra que

$$A \times B \subseteq C \times D$$

si y sólo si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

- $A = \varnothing$;
- $B = \varnothing$;
- $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.

Tu prueba debe justificar por qué la no vacuidad es indispensable para deducir las dos inclusiones coordenada a coordenada.

79. Supón que

$$A \cup C = B \cup C$$

y

$$A \cap C = B \cap C.$$

Demuestra que $A = B$. Luego muestra, mediante contraejemplos, que ninguna de las dos hipótesis por separado basta para concluir la igualdad.

80. Para $A, B \subseteq U$, demuestra que las siguientes cinco afirmaciones son equivalentes:
81. $A \subseteq B$;
82. $A \cap B = A$;
83. $A \cup B = B$;
84. $A \setminus B = \varnothing$;
85. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Organiza la demostración de manera eficiente, indicando una cadena de implicaciones suficiente para establecer la equivalencia de las cinco condiciones.

M. Comprobación, traducción y construcción de conjuntos

81. Sean $U = \{a, b, c, d\}$ y $E = \{a, b, c\}$. Construye $A, B \subseteq U$ tales que $x \in A \Rightarrow x \in B$ sea verdadera para todo $x \in E$, pero $A \not\subseteq B$. Haz que algún elemento examinado pertenezca realmente a A. Identifica el contraejemplo y la cuantificación que falta.
82. Supón $A, B \subseteq U$ y que se sabe $\forall x \in E\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$, con $E \subseteq U$. Demuestra que esto equivale a $A \cap E \subseteq B$. Determina una condición adicional sobre A y E que garantice $A \subseteq B$ y explica por qué la hipótesis $E \neq \varnothing$ sola no basta.

83. Sean $A, B, E \subseteq U$. Demuestra que $\forall x \in E\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ equivale a $A \triangle B \subseteq U \setminus E$. Construye un caso con E no vacío donde se cumpla esta condición pero $A \neq B$. ¿Qué dato adicional permite concluir igualdad?
84. Para un entero $M \geq 0$, toma $U = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y $E = \{0, 1, \ldots, M\}$. Construye A, $B \subseteq U$ que coincidan en todos los elementos de E pero no sean iguales. Explica por qué incrementar el número finito de comprobaciones no convierte este procedimiento en una prueba general de igualdad.
85. Fija U y $A, B \subseteq U$. Sea $S = \{x \in U : x \in A \Rightarrow x \in B\}$. Describe S mediante operaciones de conjuntos y determina cuándo $S = U$. Explica por qué pertenecer a S no significa necesariamente pertenecer a B.
86. Sean $A, B, C \subseteq U$. Traduce a operaciones de conjuntos $T = \{x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)\}$. Caracteriza $T = U$ y justifica qué inclusión se deduce entre A y C. ¿La inclusión deducida basta por sí sola para tener $T = U$?
87. Sean $A, B \subseteq U \subseteq V$. Define $S_U = \{x \in U : x \notin A \wedge x \notin B\}$ y $S_V = \{x \in V : x \notin A \wedge x \notin B\}$. Describe ambos conjuntos sin usar un complemento ambiguo. Demuestra $S_V = S_U \cup (V \setminus U)$ y determina cuándo son iguales.
88. Fija $A, B \subseteq U$ y define el conjunto de acuerdo $H = \{x \in U : x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$. Exprésalo como unión de dos intersecciones y como complemento de una diferencia simétrica. Describe $U \setminus H$ y explica la condición $H = U$.
89. Para $A, B \subseteq U$, determina todas las soluciones $X \subseteq U$ de $X \setminus A = B$. Da una condición necesaria y suficiente de existencia, una parametrización completa y la condición exacta de unicidad.
90. Sean $A, B \subseteq U$. Resuelve $X \triangle A = B$ entre los subconjuntos de U. Demuestra existencia y unicidad mediante pertenencia, e indica qué decisión sobre $x \in X$ queda impuesta por saber si x pertenece a A y a B.
91. Sean $A, B, C \subseteq U$. Determina las condiciones de existencia y todas las soluciones simultáneas de $X \cap A = B$ y $X \cup A = C$. Explica si quedan elementos de X cuya pertenencia pueda elegirse libremente.
92. Sean $A, D, B, C \subseteq U$. Resuelve simultáneamente $X \cap A = B$ y $X \cap D = C$. Obtén condiciones necesarias y suficientes y una parametrización de todas las soluciones. Explica cómo se comprueba la compatibilidad en $A \cap D$.
93. Decide si $(A \cup B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \cup (B \setminus A)$ para conjuntos arbitrarios. Escoge un método de prueba o construye un contraejemplo, y explica cómo el método controla los elementos que pertenecen a ambos A y B.
94. Demuestra o refuta $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$. Escoge el método y explica qué papel cumple un elemento que esté fuera de C.
95. Describe $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ mediante una condición sobre un subconjunto Y de A y la región $A \setminus B$. Prueba que tu descripción es exacta y deduce cuándo la diferencia de conjuntos potencia está vacía. Escoge un método apropiado para estos elementos, que son conjuntos.
96. Sean A, B, C, D conjuntos arbitrarios. Demuestra o refuta $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup ((A \cap C) \times (B \setminus D))$. Elige un método y verifica si requiere que alguno de los conjuntos sea no vacío.

Soluciones

A. Pertenencia y descripción

1. Son verdaderas $4 \in A$ y $\{4\} \subseteq A$. Son falsas $5 \in A$ y $\{4\} \in A$. El número 4 es un elemento de A; el conjunto $\{4\}$ no aparece como elemento, pero todos sus elementos —sólo 4— pertenecen a A.

2. El conjunto es $\{-2,-1,0,1,2\}$.

3. Una descripción posible es $\{n^2 : n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 5\}$. Otra es $\{m \in \mathbb{N} : m = n^2 \text{ para algún } n \in \{1,2,3,4,5\}\}$.

4. Ambas escrituras contienen exactamente los elementos $1,2,3$. En un conjunto, el orden de enumeración y la repetición no alteran la pertenencia. Por extensionalidad, los conjuntos son iguales.

5. Los enteros cuyos cuadrados son menores que 5 son $-2,-1,0,1,2$, pues sus cuadrados son $4,1,0,1,4$. Por tanto $A = \{-2,-1,0,1,2\}$.

6. Si $x \in A$, entonces $x^2 = 4$, de modo que $(x-2)(x+2) = 0$ y $x = 2$ o $x = -2$; así $x \in B$. Recíprocamente, si $x \in B$, entonces $x = 2$ o $x = -2$, y en ambos casos $x^2 = 4$. Luego $A = B$.

B. Vacío, unitarios y notación

7. $\varnothing$ tiene 0 elementos. $\{\varnothing\}$ tiene 1 elemento, a saber $\varnothing$. $\{\{\varnothing\}\}$ también tiene 1 elemento, pero ese elemento es $\{\varnothing\}$.

8. Ambas son verdaderas, pero por razones distintas. La primera es verdadera porque $\varnothing$ aparece como elemento. La segunda es verdadera porque el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

9. Las cuatro afirmaciones son verdaderas. 1 y $\{1\}$ aparecen como elementos; como $1 \in A$, el conjunto unitario $\{1\}$ es subconjunto de A; y $\varnothing$ también aparece como elemento.

10. Por ejemplo $A = \{\varnothing\}$. Entonces $\varnothing \in A$, mientras $\{\varnothing\}$ no es uno de sus elementos: el único elemento de A es $\varnothing$.

11. Por ejemplo $A = \{\varnothing, 1\}$. Como $\varnothing \in A$, se tiene $\{\varnothing\} \subseteq A$. Pero $\{\varnothing\}$ no es elemento de A; los elementos son $\varnothing$ y 1.

12. Por definición, $\varnothing$ no tiene elementos. Por tanto no hay ningún caso que satisfaga el antecedente $x \in \varnothing$. En una afirmación universal $\forall x\,(x \in \varnothing \Rightarrow P(x))$, el antecedente es falso para todo x, de modo que la implicación resulta verdadera para cada caso. Ésta es la razón lógica de $\varnothing \subseteq A$ para todo A.

C. Subconjuntos e igualdad

13. $A \subseteq B$ es verdadera. $B \subseteq A$ es falsa porque $3 \in B$ y $3 \notin A$. $A \in B$ es falsa: los elementos de B son números, no el conjunto A. La escritura $2 \subseteq B$ no es apropiada en este contexto porque 2 no se está tratando como un conjunto.

14. Por definición, necesitaríamos verificar que todo $x \in \varnothing$ pertenece a A. Pero no existe ningún $x \in \varnothing$. Por tanto no hay contraejemplo a la implicación $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$, y se concluye $\varnothing \subseteq A$.

15. Sea $x \in A$. Como $A \subseteq B$, se sigue $x \in B$. Como $B \subseteq C$, se sigue $x \in C$. Por tanto todo elemento de A pertenece a C, es decir, $A \subseteq C$.

16. Cada elemento de A es uno de $1,2,3$ y pertenece a B, así que $A \subseteq B$. Recíprocamente, cada elemento de B es uno de $1,2,3$ y pertenece a A, así que $B \subseteq A$. Por doble inclusión, $A = B$.

17. Si $x \in A$, entonces x es un entero entre -1 y 2, de modo que necesariamente $x \in \{-1, 0, 1, 2\} = B$. Recíprocamente, cada elemento de B es entero y satisface $-1 \leq x \leq 2$, por lo que pertenece a A. Por doble inclusión, $A = B$.

18. Toma $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$. Se cumple $A \subseteq B$, pero $2 \in B$ y $2 \notin A$, así que $A \neq B$.

19. Las dos inclusiones dicen exactamente que todo elemento de A está en B y todo elemento de B está en A. Por extensionalidad, ambos conjuntos tienen los mismos elementos, independientemente de cómo estén descritos. Por tanto $A = B$.

20. Sí. Sea $x \in A$. De $A \subseteq B$ obtenemos $x \in B$, y de $A \subseteq C$, $x \in C$. Por definición de intersección, $x \in B \cap C$. Luego $A \subseteq B \cap C$.

D. Conjunto potencia

21. Los subconjuntos son $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{a, b\}$. Por tanto $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

22. Hay $2^3 = 8$ subconjuntos: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ y $\{1, 2, 3\}$.

23. $1 \in \mathcal{P}(A)$ es falsa porque los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son subconjuntos de A, y en este contexto 1 no es uno de ellos. Las otras tres son verdaderas: $\{1\} \subseteq A$, $A \subseteq A$ y $\varnothing \subseteq A$.

24. Sea X un conjunto. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ equivale a $X \subseteq A \cap B$. Esto ocurre exactamente cuando $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$. A su vez, eso equivale a $X \in \mathcal{P}(A)$ y $X \in \mathcal{P}(B)$, es decir, $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Por extensionalidad, los conjuntos son iguales.

25. No. Toma $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$. Entonces $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, pero $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A)$ y $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(B)$. Por tanto no pertenece a $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

26. Si $|A| = n$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Como $32 = 2^5$, se sigue $n = 5$. Por tanto A tiene 5 elementos.

E. Unión e intersección

27. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A \cap B = \{3, 4\}$.

28. Un entero pertenece a ambos conjuntos exactamente cuando $0 \leq x \leq 2$. Por tanto $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

29. Todo entero satisface al menos una de las condiciones $x \geq 0$ o $x \leq 2$; de hecho, ambas cubren conjuntamente a todos los enteros. Por tanto $A \cup B = \mathbb{Z}$.

30. Si $x \in A \cap B$, entonces por definición $x \in A$, de modo que $A \cap B \subseteq A$. Si $x \in A$, entonces la disyunción $x \in A$ o $x \in B$ es verdadera, así $x \in A \cup B$. Por tanto $A \subseteq A \cup B$.

31. Para cualquier x, $x \in A \cup \varnothing$ equivale a $(x \in A) \vee (x \in \varnothing)$. La segunda proposición es siempre falsa, así que la condición equivale a $x \in A$. Por extensionalidad, $A \cup \varnothing = A$.

32. Para cualquier x, $x \in A \cap A$ equivale a $(x \in A) \wedge (x \in A)$, que es lógicamente equivalente a $x \in A$. Luego $A \cap A = A$.

33. Para la unión, todo elemento de B pertenece a $A \cup B$, y si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$; en el primer caso $A \subseteq B$ da $x \in B$, y en el segundo ya lo sabemos. Así $A \cup B = B$. Para la intersección, $A \cap B \subseteq A$ siempre, y si $x \in A$, la hipótesis da $x \in B$, por lo que $x \in A \cap B$. Entonces $A \cap B = A$.

34. Sí. Si $x \in A$, entonces como $A = A \cap B$, se tiene $x \in A \cap B$. Por definición de intersección, $x \in B$. Por tanto $A \subseteq B$.

F. Diferencia y complemento

35. $A \setminus B = \{1, 2\}$ y $B \setminus A = \{5\}$. Esto muestra que la diferencia no es conmutativa.

36. Respecto de U, $A^c = U \setminus A = \{2, 4\}$.

37. Con $U = \{1, 2, 3\}$, $A^c = \{3\}$. Con $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $A^c = \{3, 4\}$. El símbolo A^c sólo queda determinado cuando el universo está fijado.

38. Para cualquier x, $x \in A \setminus B$ equivale a $x \in A$ y $x \notin B$. Respecto del universo fijado, $x \notin B$ equivale a $x \in B^c$. Por tanto la condición equivale a $x \in A \cap B^c$. Por extensionalidad, $A \setminus B = A \cap B^c$.

39. Para cualquier $x \in U$, $x \in (A^c)^c$ equivale a $x \notin A^c$, que equivale a no ser cierto que $x \notin A$, es decir, $x \in A$. Por extensionalidad, $(A^c)^c = A$.

40. Para $x \in U$, $x \in (A \cup B)^c$ equivale a $x \notin A \cup B$. Esto equivale a negar $[(x \in A) \vee (x \in B)]$, que por De Morgan es $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$. Eso equivale a $x \in A^c \cap B^c$. Por extensionalidad, los conjuntos son iguales.

41. Sí. Usando diferencia como intersección con complemento y De Morgan: $A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

42. Toma $A = \{1\}$, $B = \{1\}$ y $C = \{1\}$. Entonces $B \setminus C = \varnothing$, así que $A \setminus (B \setminus C) = A = \{1\}$. En cambio $A \setminus B = \varnothing$, y luego $(A \setminus B) \setminus C = \varnothing$. Los lados son distintos.

G. Diferencia simétrica

43. $A \setminus B = \{1, 2\}$ y $B \setminus A = \{4\}$. Por tanto $A \triangle B = \{1, 2, 4\}$.

44. Un elemento pertenece a $A \triangle B$ exactamente cuando pertenece a uno de A, B pero no a ambos. Esto equivale a pertenecer a $A \cup B$ y no pertenecer a $A \cap B$. Por definición, esa condición es pertenecer a $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

45. Por definición, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Al intercambiar A y B obtenemos los mismos dos conjuntos unidos en orden inverso. Como la unión es conmutativa, $A \triangle B = B \triangle A$.

46. $A \triangle B = \varnothing$ exactamente cuando no existe ningún elemento que pertenezca a uno de los conjuntos sin pertenecer al otro. Eso significa $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Por doble inclusión, equivale a $A = B$.

H. Leyes y transformaciones

47. Por la ley de absorción, $A \cap (A \cup B) = A$. Elemento a elemento: si $x \in A$, entonces ciertamente $x \in A \cup B$; exigir ambas condiciones no añade nada a $x \in A$.

48. Por distributividad, $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c) = A \cup \varnothing = A$.

49. Factorizando A mediante distributividad: $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A \cap U = A$.

50. Para un elemento x, la pertenencia al lado izquierdo corresponde a $P \vee (Q \wedge R)$, donde $P : x \in A$, $Q : x \in B$, $R : x \in C$. La distributividad lógica da $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, que corresponde a $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Como la equivalencia vale para todo x, los conjuntos son iguales.

51. Usamos $B \setminus C = B \cap C^c$: $A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c) = (A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \setminus C$.

52. Partimos de $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Esto es $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$. Por De Morgan, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Por tanto $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

53. Por De Morgan, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Entonces la expresión es $(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$. Factorizando B^c: $B^c \cap (A^c \cup A) = B^c \cap U = B^c$.

54. Siempre $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Para la igualdad, supongamos primero $A \subseteq B$. Entonces $A \cup B = B$ y $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, de modo que ambos lados son $\mathcal{P}(B)$. Lo mismo si $B \subseteq A$.

Recíprocamente, supongamos la igualdad y que ni $A \subseteq B$ ni $B \subseteq A$. Entonces existen $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. El conjunto $\{a, b\}$ es subconjunto de $A \cup B$, así que pertenece a $\mathcal{P}(A \cup B)$; pero no es subconjunto de A ni de B, por lo que no pertenece a $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, contradicción. Por tanto debe cumplirse $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

I. Demostraciones por elementos y doble inclusión

55. Primera inclusión: si $x \in A \setminus (B \cup C)$, entonces $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$. Por tanto $x \in A \setminus B$ y $x \in A \setminus C$, así que pertenece a la intersección.

Segunda inclusión: si $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, entonces $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$. Luego $x \notin B \cup C$, de modo que $x \in A \setminus (B \cup C)$.

56. Para cualquier x, $x \in (A \cap B) \setminus C$ equivale a $x \in A$, $x \in B$ y $x \notin C$. La misma condición equivale a $x \in A$ y $x \in B \setminus C$, es decir, $x \in A \cap (B \setminus C)$. Por extensionalidad, hay igualdad.

57. Si $x \in A \triangle B$, pertenece exactamente a uno de A, B; por ello está en $A \cup B$ y no en $A \cap B$, de modo que pertenece al lado derecho. Recíprocamente, si $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, pertenece a por lo menos uno de A, B pero no a ambos; entonces pertenece exactamente a uno, por lo que $x \in A \triangle B$.

58. Sea $x \in A \cap C^c$. Entonces $x \in A$ y $x \notin C$. Si $x \in B$, tendríamos $x \in A \cap B$, y la hipótesis implicaría $x \in C$, contradicción. Por tanto $x \notin B$, es decir, $x \in B^c$. Luego $A \cap C^c \subseteq B^c$.

59. Toma $A = \{1\}$, $B = \varnothing$ y $C = \{1\}$. El lado izquierdo es $\{1\} \cup \varnothing = \{1\}$. El lado derecho es $(\{1\} \cup \varnothing) \setminus \{1\} = \varnothing$. Por tanto la identidad es falsa.

60. Método algebraico: es exactamente la distributividad de $\cap$ respecto de $\cup$.

Método por pertenencia: $x \in A \cap (B \cup C)$ equivale a $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$). Por distributividad lógica, esto equivale a ($x \in A$ y $x \in B$) o ($x \in A$ y $x \in C$), que equivale a $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

J. Producto cartesiano

61. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

62. $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$. Los pares tienen las coordenadas en orden inverso. Por ejemplo $(1, a) \in A \times B$ pero $(1, a) \notin B \times A$.

63. Si existiera $(a, b) \in A \times \varnothing$, entonces $b \in \varnothing$, lo cual es imposible. Por tanto el producto no contiene pares y es el conjunto vacío.

64. Un par (x, y) pertenece a $(A \cup B) \times C$ exactamente cuando $x \in A \cup B$ y $y \in C$, es decir, cuando $(x \in A$ o $x \in B)$ y $y \in C$. Esto equivale a $[(x \in A \land y \in C) \lor (x \in B \land y \in C)]$, que significa $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

65. Si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$, ambos productos son vacíos y son iguales. Supongamos ahora A y B no vacíos y $A \times B = B \times A$. Elige $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$. Para cualquier $a \in A$, $(a, b_0) \in A \times B = B \times A$, luego $a \in B$. Así $A \subseteq B$. Simétricamente $B \subseteq A$, por lo que $A = B$. Recíprocamente, si $A = B$, los productos son iguales. Por tanto la igualdad ocurre exactamente cuando $A = B$ o al menos uno de los conjuntos es vacío.

66. Hay 4 opciones para la primera coordenada y, para cada una, 7 opciones para la segunda. Por tanto $|A \times B| = 4 \cdot 7 = 28$.

K. Diagnóstico y transferencia

67. El error es confundir pertenencia con inclusión. Si 1 es un número, la afirmación correcta es $1 \in A$. Si se quiere hablar de inclusión, puede escribirse $\{1\} \subseteq A$, que sí se sigue de $1 \in A$.

68. Falta especificar el universo. Si el universo es $\mathbb{Z}$, el complemento son los enteros distintos de $1, 2$; si es $\{1, 2, 3\}$, el complemento es $\{3\}$. Sin universo, A^c no queda determinado.

69. Falta demostrar $B \subseteq A$. Por ejemplo $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ satisfacen $A \subseteq B$ pero no son iguales. La igualdad requiere doble inclusión.

70. El diagrama representa regiones y puede hacer visible la coincidencia para una configuración gráfica. La prueba por pertenencia parte de un elemento arbitrario y usa sólo definiciones y lógica: $x \notin A \cup B$ equivale a $x \notin A$ y $x \notin B$. Esa equivalencia establece la identidad sin depender de una figura particular y hace explícita la razón lógica.

71. Es falsa. Toma $C = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$. Entonces $A \cup C = C = B \cup C$, pero $A \neq B$. La unión puede ocultar diferencias entre A y B porque los elementos discrepantes ya están contenidos en C; no existe una ley general de cancelación para $\cup$.

72. Respuesta modelo: Para estudiar una expresión de conjuntos podemos fijar un elemento arbitrario x y traducir cada afirmación de pertenencia a una proposición. La condición $x \in A \cup B$ corresponde a $(x \in A) \lor (x \in B)$; la intersección corresponde a conjunción y el complemento a negación respecto de un universo. La inclusión $A \subseteq B$ expresa que para todo x, $x \in A$ implica $x \in B$. La extensionalidad dice que $A = B$ cuando para todo x son equivalentes las proposiciones $x \in A$ y $x \in B$. Por eso conmutatividad, distributividad, absorción y De Morgan reaparecen en el álgebra de conjuntos: son las mismas formas lógicas aplicadas a predicados de pertenencia. Los conjuntos no son proposiciones, pero su pertenencia está gobernada por la misma estructura lógica.

L. Problemas tipo prueba

73. Sea X un conjunto. Entonces

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\iff X \subseteq A \land X \subseteq B \\ &\iff X \subseteq A \cap B \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Por extensionalidad,

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B).$$

Si $A \subseteq B$ y $X \in \mathcal{P}(A)$, entonces $X \subseteq A \subseteq B$, de modo que $X \in \mathcal{P}(B)$. Así $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Recíprocamente, si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $A \in \mathcal{P}(A)$, por lo que $A \in \mathcal{P}(B)$. Esto significa $A \subseteq B$.

74. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ y $A \cup B = B$. Por tanto

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B).$$

El caso $B \subseteq A$ es simétrico.

Para la recíproca, supongamos

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$$

y que ninguna inclusión vale. Entonces existen

$$a \in A \setminus B, \qquad b \in B \setminus A.$$

Como $\{a, b\} \subseteq A \cup B$, tenemos $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Pero $\{a, b\} \not\subseteq A$ porque $b \notin A$, y $\{a, b\} \not\subseteq B$ porque $a \notin B$. Por tanto $\{a, b\}$ no pertenece a $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, contradicción.

Luego la igualdad vale exactamente cuando $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

75. La condición $x \in A \triangle B$ significa que x pertenece a exactamente uno de A y B.

Por tanto $x \in (A \triangle B) \triangle C$ si y sólo si:

- x pertenece a exactamente uno de A, B y no pertenece a C, o
- x pertenece a C y no pertenece a exactamente uno de A, B.

Eso ocurre exactamente cuando x pertenece a uno o a tres de los conjuntos A, B, C, es decir, a un número impar de ellos.

El mismo criterio describe $x \in A \triangle (B \triangle C)$. Luego, para todo x,

$$x \in (A \triangle B) \triangle C \iff x \in A \triangle (B \triangle C),$$

y por extensionalidad la diferencia simétrica es asociativa.

76. Si $X \cap A = B$, entonces necesariamente $B \subseteq A$.

Recíprocamente, si $B \subseteq A$, existe solución; por ejemplo $X = B$, pues $B \cap A = B$.

Bajo la condición $B \subseteq A$, todas las soluciones son

$$X = B \cup C, \qquad C \subseteq A^c.$$

En efecto,

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) = B.$$

Para demostrar que no falta ninguna, sea X una solución cualquiera. Entonces

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c) = B \cup (X \cap A^c).$$

Tomando $C = X \cap A^c$ obtenemos exactamente la forma descrita.

77. Si $X \cup A = B$, entonces $A \subseteq B$. Esta condición también es suficiente: si $A \subseteq B$, tomar $X = B$ produce una solución.

Supongamos ahora $A \subseteq B$. De $X \cup A = B$ se deduce $X \subseteq B$. Además, todo elemento de $B \setminus A$ debe pertenecer a X, porque no puede venir de A. Por tanto

$$B \setminus A \subseteq X \subseteq B.$$

Estas inclusiones también son suficientes: si se cumplen, entonces $X \cup A \subseteq B$; y si $b \in B$, o $b \in A$, o $b \in B \setminus A \subseteq X$, así que $B \subseteq X \cup A$.

Equivalentemente, todas las soluciones son

$$X = (B \setminus A) \cup C, \qquad C \subseteq A.$$

78. Si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$, entonces $A \times B = \varnothing$, de modo que la inclusión en $C \times D$ es automática.

Supongamos ahora $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ y

$$A \times B \subseteq C \times D.$$

Elige $b_0 \in B$. Para cualquier $a \in A$, $(a, b_0) \in A \times B$, luego $(a, b_0) \in C \times D$. Por tanto $a \in C$, y así $A \subseteq C$.

Elige ahora $a_0 \in A$. Para cualquier $b \in B$, $(a_0, b) \in A \times B \subseteq C \times D$, de donde $b \in D$. Luego $B \subseteq D$.

Recíprocamente, si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$, todo par de $A \times B$ pertenece a $C \times D$.

La no vacuidad es esencial: si $B = \varnothing$, entonces $A \times B = \varnothing$ cualquiera sea A, por lo que la inclusión del producto no permite concluir nada sobre $A \subseteq C$.

79. Sea x arbitrario.

Si $x \in C$, entonces

$$x \in A \iff x \in A \cap C \iff x \in B \cap C \iff x \in B.$$

Si $x \notin C$, la igualdad $A \cup C = B \cup C$ da

$$x \in A \iff x \in A \cup C \iff x \in B \cup C \iff x \in B.$$

Luego $A = B$ por extensionalidad.

Cada hipótesis por separado es insuficiente:

- toma $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ y $C = \{1, 2\}$. Entonces $A \cup C = B \cup C$, pero $A \neq B$;
- toma $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ y $C = \varnothing$. Entonces $A \cap C = B \cap C$, pero $A \neq B$.

80. Basta establecer una cadena cíclica entre las primeras cuatro condiciones y conectar una de ellas con la quinta.

(1) $\Rightarrow$ (2)**.** Si $A \subseteq B$, entonces los elementos comunes a A y B son exactamente los de A, de modo que $A \cap B = A$.

(2) $\Rightarrow$ (3)**.** Si $A \cap B = A$, entonces $A \subseteq B$. Por tanto $A \cup B = B$.

(3) $\Rightarrow$ (4)**.** Si $A \cup B = B$, todo elemento de A pertenece a B, así que $A \setminus B = \varnothing$.

(4) $\Rightarrow$ (1)**.** Si $A \setminus B = \varnothing$ y $x \in A$, entonces $x \notin B$ produciría $x \in A \setminus B$, contradicción. Luego $x \in B$, y por tanto $A \subseteq B$.

Finalmente, por el ejercicio 73,

$$A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B).$$

Así las cinco condiciones son equivalentes.

M. Comprobación, traducción y construcción de conjuntos

81. Toma $A = \{a, d\}$ y $B = \{a\}$. En a las dos pertenencias son verdaderas; en b, c el antecedente es falso. Así todas las comprobaciones en E son verdaderas y no se deben únicamente a antecedentes falsos. Sin embargo $d \in A$ y $d \notin B$, por lo que $A \not\subseteq B$. Falta exigir $\forall x \in U\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$: cuantificar sólo sobre E deja sin revisar d.

82. Si $x \in A \cap E$, entonces está en E y en A, de modo que la condición universal da $x \in B$. A la inversa, si $A \cap E \subseteq B$ y $x \in E$ satisface $x \in A$, pertenece a $A \cap E$ y por ello a B. Una condición adicional suficiente es $A \subseteq E$: todo elemento de A queda entonces examinado y $A \cap E = A$. La no vacuidad de E sola no basta: con $U = \{a, b\}$, $E = \{a\}$, $A = \{b\}$ y $B = \varnothing$, el universal sobre E es verdadero, pero b refuta la inclusión global. Tampoco se afirma que $A \subseteq E$ sea necesaria para cada caso particular: una inclusión podría resultar verdadera por otros datos.

83. El bicondicional sobre E dice que ningún elemento de E pertenece exactamente a uno de A, B. Por tanto ningún elemento de $A \triangle B$ está en E; como ambos conjuntos están en U, se obtiene $A \triangle B \subseteq U \setminus E$. Recíprocamente, esa inclusión impide discrepancias de pertenencia dentro de E, de modo que allí vale el bicondicional. Con $U = \{a, b\}$, $E = \{a\}$, $A = \{a, b\}$ y $B = \{a\}$, hay acuerdo en a y discrepancia en b. Si se conoce además el bicondicional para todos los elementos de $U \setminus E$, queda cubierto todo U y la extensionalidad da $A = B$. También basta saber $A \triangle B \subseteq E$: junto con la inclusión inicial obliga a que no haya discrepancias.

84. Toma $A = U$ y $B = E$. Cada $x \in E$ pertenece a ambos, pero $M + 1 \in A$ y $M + 1 \notin B$. Así la coincidencia en todo el segmento examinado no implica igualdad. Para cualquier nuevo límite finito L, la misma construcción $A = U$, $B = \{0, 1, \ldots, L\}$ deja la discrepancia $L + 1$. Esto demuestra que la regla «acuerdo en un segmento finito implica igualdad» es inválida, no que ninguna igualdad entre conjuntos infinitos pueda probarse: un argumento universal que use sus definiciones sí puede cubrir todos los elementos.

85. Para $x \in U$, la implicación equivale a $x \notin A \vee x \in B$. Por ello $S = A^c \cup B$, con complemento en U. Se tiene $S = U$ exactamente cuando la implicación vale para todo $x \in U$, es decir, cuando $A \subseteq B$. También podemos ver que $U \setminus S = A \setminus B$: la única región que la implicación excluye es la de sus contraejemplos. Si $x \notin A$ y $x \notin B$, la implicación es verdadera y $x \in S$, aunque no esté en B. Por ejemplo, con $U = \{a\}$ y $A = B = \varnothing$, $S = U$.

86. Cada implicación se traduce como en 85. Así $T = (A^c \cup B) \cap (B^c \cup C)$. La igualdad $T = U$ equivale a que ambas implicaciones sean verdaderas para todo elemento, esto es, $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Si $x \in A$, la primera inclusión lo lleva a B y la segunda a C, por lo que $A \subseteq C$. La recíproca es falsa: con $U = \{a\}$, $A = C = \varnothing$ y $B = \{a\}$, se tiene $A \subseteq C$ pero $B \not\subseteq C$; para $x = a$ falla la segunda implicación y $T = \varnothing$.

87. Por las definiciones, $S_U = U \setminus (A \cup B)$ y $S_V = V \setminus (A \cup B)$. Un elemento de S_V que esté en U pertenece a S_U. Si no está en U, pertenece a $V \setminus U$ y automáticamente no está en A ni en B, porque éstos son subconjuntos de U. Recíprocamente, todo elemento de cualquiera de esas dos regiones está en V y fuera de $A \cup B$. Por doble inclusión, $S_V = S_U \cup (V \setminus U)$. Las regiones son disjuntas, de modo que la igualdad $S_V = S_U$ ocurre exactamente cuando $V \setminus U = \varnothing$, es decir, $V = U$. Mantener la propiedad y cambiar el dominio puede cambiar el conjunto definido.

88. Un bicondicional es verdadero cuando ambas pertenencias son verdaderas o ambas falsas. Por ello $H = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$, con complementos relativos a U. Sus elementos son precisamente los que no pertenecen exactamente a uno de A, B, así que $H = U \setminus (A \triangle B)$. En consecuencia $U \setminus H = A \triangle B$: allí se encuentran todos los testigos de desacuerdo. La condición $H = U$ equivale a que no exista tal testigo y, por extensionalidad, a $A = B$. El acuerdo incluye también los elementos que no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos.

89. Si hay solución, $B = X \setminus A$ no contiene elementos de A: es necesario $A \cap B = \varnothing$. Si se cumple, todas las soluciones son $X = B \cup C$, donde $C \subseteq A$. En efecto, $(B \cup C) \setminus A = B$, porque B está fuera de A y C dentro. A la inversa, cualquier solución se descompone como $X = (X \setminus A) \cup (X \cap A) = B \cup (X \cap A)$, y $X \cap A \subseteq A$. La descripción es exhaustiva. Bajo la condición de existencia hay solución única exactamente cuando $A = \varnothing$: entonces sólo cabe $C = \varnothing$ y $X = B$. Si A no es vacío, toma $a \in A$; B y $B \cup \{a\}$ son soluciones distintas, pues $a \notin B$.

90. Si $x \notin A$, su pertenencia a $X \triangle A$ coincide con su pertenencia a X, así que la ecuación obliga a $x \in X \Leftrightarrow x \in B$. Si $x \in A$, pertenecer a $X \triangle A$ equivale a no pertenecer a X, y la ecuación obliga a $x \in X \Leftrightarrow x \notin B$. En ambos casos, x debe pertenecer a X exactamente cuando pertenece a uno de A, B y no al otro. Por tanto la única posibilidad es $X = A \triangle B$. Esta elección está en U y, por las mismas dos comprobaciones, satisface la ecuación para todos los elementos. Existe siempre una solución y es única; la ecuación determina cada decisión de pertenencia.

91. La primera igualdad obliga a $B \subseteq A$; la segunda, a $A \subseteq C$. Son necesarias las condiciones $B \subseteq A \subseteq C$. Bajo ellas toma $X = B \cup (C \setminus A)$. Su intersección con A es B, y su unión con A es C, pues $B \subseteq A$ y $A \subseteq C$. Toda solución coincide con B dentro de A. Fuera de A, la unión impone que contenga exactamente los elementos de $C \setminus A$. Formalmente, $X \setminus A = (X \cup A) \setminus A = C \setminus A$ y $X = (X \cap A) \cup (X \setminus A)$. Luego toda solución es la descrita: es única. No queda una región libre; una igualdad fija la parte interior y la otra fija la exterior.

92. Son necesarias $B \subseteq A$ y $C \subseteq D$. Además, en la región compartida, $(X \cap A) \cap D = (X \cap D) \cap A$, así que se necesita $B \cap D = C \cap A$. Estas tres condiciones son suficientes. Bajo ellas, todas las soluciones son $X = B \cup C \cup T$, con $T \subseteq U \setminus (A \cup D)$. Su intersección con A es $B \cup (C \cap A) = B \cup (B \cap D) = B$; con D es $(B \cap D) \cup C = (C \cap A) \cup C = C$. El término T no afecta ninguna intersección. Para la exhaustividad, toda solución cumple $X \cap (A \cup D) = (X \cap A) \cup (X \cap D) = B \cup C$, de modo que $X = (B \cup C) \cup [X \setminus (A \cup D)]$. La compatibilidad evita que un mismo elemento de la zona compartida deba estar simultáneamente dentro y fuera de X.

93. La identidad es verdadera. Conviene separar los casos de pertenencia a A. Si x está en el lado izquierdo y en A, no puede estar en C, pues se excluiría por $A \cap C$; entonces $x \in A \setminus C$. Si está en el lado izquierdo y fuera de A, la unión obliga a $x \in B$, así que $x \in B \setminus A$. Esto prueba una inclusión. A la inversa, si $x \in A \setminus C$, está en la unión y fuera de $A \cap C$; si $x \in B \setminus A$, también está en la unión y fuera de esa intersección. Por doble inclusión hay igualdad. Los elementos comunes a A y B caen en el primer caso: se conservan exactamente cuando no están en C.

94. Es verdadera. Una cadena de pertenencia permite usar directamente «exactamente uno». Si $x \notin C$, no está en el lado izquierdo ni en $A \cap C$ ni en $B \cap C$, por lo que tampoco está en el derecho. Si $x \in C$, pertenecer a $A \cap C$ equivale a pertenecer a A, y lo mismo para B. Así pertenece exactamente a una de las dos intersecciones si y sólo si pertenece exactamente a uno de A, B, que es la condición del lado izquierdo dentro de C. La equivalencia vale para todo x y la extensionalidad demuestra la igualdad. La división de casos evita suponer tácitamente que todos los elementos del universo están en C.

95. La descripción es $\{Y \in \mathcal{P}(A) : Y \cap (A \setminus B) \neq \varnothing\}$. Si Y está en la diferencia original, es subconjunto de A pero no de B; existe entonces $y \in Y$ con $y \notin B$. Como $y \in A$, se tiene $y \in Y \cap (A \setminus B)$, que no es vacío. Recíprocamente, un elemento de esa intersección está en Y y fuera de B, por lo que $Y \nsubseteq B$; dado que $Y \subseteq A$, está en la diferencia de conjuntos potencia. La diferencia está vacía exactamente cuando $A \subseteq B$. Si hay inclusión, todos los subconjuntos de A lo son de B. Si no, toma $a \in A \setminus B$; el unitario $\{a\}$ pertenece a la diferencia. El método por elementos sigue siendo válido, pero aquí el elemento arbitrario del conjunto potencia es un conjunto Y y el testigo de su no inclusión es un objeto y dentro de él.

96. La igualdad es verdadera. Usamos doble inclusión con un par arbitrario (a, b). Si está en el lado izquierdo, $a \in A$ y $b \in B$, pero no se cumplen conjuntamente $a \in C$ y $b \in D$. Si $a \notin C$, está en $(A \setminus C) \times B$. Si $a \in C$, necesariamente $b \notin D$, y está en $(A \cap C) \times (B \setminus D)$. Recíprocamente, un par del primer producto está en $A \times B$ y fuera de $C \times D$ porque su primera coordenada no está en C; un par del segundo está en $A \times B$ y fuera de $C \times D$ porque su segunda coordenada no está en D. Así se obtienen ambas inclusiones. No se eligió un elemento de un conjunto sin tener ya un par que garantizara su pertenencia: el argumento cubre conjuntos vacíos, y ambos lados carecen de pares cuando A o B está vacío.

Capítulo 8

Relaciones y relaciones de equivalencia

En C7 apareció el producto cartesiano $A \times B$: el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Ese objeto permite ahora dar un paso decisivo. En lugar de estudiar únicamente los elementos de un conjunto, podemos estudiar **qué pares de elementos satisfacen cierta condición**.

La idea de relación está presente en toda la matemática: "ser menor que", "tener la misma longitud", "estar conectado con", "tener el mismo valor absoluto", "pertenecer a la misma clase". Pero una relación matemática no será una intuición vaga de semejanza. Será un objeto perfectamente determinado.

Una relación es un conjunto de pares ordenados.

A partir de esta definición, propiedades como reflexividad, simetría o transitividad se convierten en afirmaciones cuantificadas sobre esos pares. Y un caso especialmente importante —las relaciones de equivalencia— permitirá organizar un conjunto en bloques disjuntos llamados **clases de equivalencia**.

8.1. Del producto cartesiano a una relación

Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria de A en B** es cualquier subconjunto de $A \times B$:

$$R \subseteq A \times B.$$

Si $(a, b) \in R$, podemos escribir también

aRb.

La relación **es** el conjunto R. La frase verbal que la describe es sólo una manera de reconocer cuáles pares pertenecen a ese conjunto.

Ejemplo. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. El conjunto

$$R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$$

es una relación de A en B porque todos sus pares pertenecen a $A \times B$.

En cambio,

$$S = \{(1, a), (4, b)\}$$

no es una relación de A en B, porque $(4, b) \notin A \times B$.

Cuántas relaciones hay. Como una relación es un subconjunto de $A \times B$, el conjunto de todas las relaciones de A en B es $\mathcal{P}(A \times B)$. Si A y B son finitos, con $|A| = m$ y $|B| = n$, entonces hay

$$2^{mn}$$

relaciones posibles de A en B.

8.2. Relaciones sobre un conjunto

Cuando $A = B$, diremos que R es una **relación sobre** A:

$$R \subseteq A \times A.$$

Éste será el contexto natural para propiedades como reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad.

Por ejemplo, sobre $A = \{1, 2, 3\}$ podemos considerar la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

También podemos definir relaciones mediante condiciones. Sobre $\mathbb{R}$:

$$xRy \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq y.$$

Aunque la condición use símbolos conocidos, la relación sigue siendo el conjunto de todos los pares (x, y) que la satisfacen.

8.3. Dominio e imagen de una relación

Si $R \subseteq A \times B$, llamamos **dominio** de R al conjunto de primeras componentes que aparecen en algún par de R:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A : \exists b \in B \ (a, b) \in R\}.$$

La **imagen** de R es el conjunto de segundas componentes que aparecen:

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B : \exists a \in A \ (a, b) \in R\}.$$

Si

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, b)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{a, b, c\},$$

entonces

$$\mathrm{Dom}(R) = \{1, 3\}, \qquad \mathrm{Im}(R) = \{a, b\}.$$

Obsérvese que el dominio de la relación no tiene por qué ser todo A, ni su imagen todo B.

8.4. Representar relaciones finitas

Una relación finita puede representarse de varias maneras.

Lista de pares. La forma más directa es escribir explícitamente R.

Matriz 0–1. Si $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, podemos formar una tabla donde la entrada (i, j) vale 1 si $(a_i, b_j) \in R$ y 0 si no.

Por ejemplo, para

$$R = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$$

con filas $1, 2$ y columnas a, b, c, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagrama dirigido. Cuando R es una relación sobre un conjunto finito, podemos representar cada elemento como un vértice y dibujar una flecha $a \to b$ cuando aRb. Un par (a, a) aparece como un lazo.

Estas representaciones ayudan a inspeccionar propiedades, pero las propiedades se deciden por la definición, no por la apariencia del dibujo.

8.5. La relación inversa

Si $R \subseteq A \times B$, definimos su **relación inversa** por

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Simplemente invertimos el orden de cada par.

Si

$$R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\},$$

entonces

$$R^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}.$$

Se cumplen dos observaciones inmediatas:

$$(R^{-1})^{-1} = R,$$

$$\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R), \qquad \mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R).$$

No debemos confundir todavía esta construcción con una función inversa. Toda relación tiene relación inversa, mientras que una función no siempre tiene función inversa.

8.6. Reflexividad e irreflexividad

Sea R una relación sobre A.

Decimos que R es **reflexiva** si todo elemento está relacionado consigo mismo:

$$\forall a \in A \; aRa.$$

Decimos que es **irreflexiva** si ningún elemento está relacionado consigo mismo:

$$\forall a \in A \; \neg(aRa).$$

La distinción lógica es importante. Una relación puede ser **no reflexiva** sin ser irreflexiva.

Por ejemplo, sobre $A = \{1, 2, 3\}$,

$$R = \{(1,1),(2,2)\}$$

no es reflexiva porque falta $(3,3)$, pero tampoco es irreflexiva porque contiene pares diagonales.

8.7. Simetría, antisimetría y asimetría

Sea R una relación sobre A.

Simetría. R es **simétrica** si

$$aRb \Rightarrow bRa.$$

Cada flecha debe venir acompañada por su flecha inversa.

Antisimetría. R es **antisimétrica** si

$$aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b.$$

La antisimetría **no** dice que nunca pueda ocurrir simultáneamente aRb y bRa; dice que, si ocurre, necesariamente $a = b$.

Por eso la igualdad es a la vez simétrica y antisimétrica.

Asimetría. R es **asimétrica** si

$$aRb \Rightarrow \neg(bRa).$$

La asimetría sí prohíbe completamente los pares inversos, incluso cuando $a = b$. Por tanto, toda relación asimétrica es irreflexiva.

Un error que debe desaparecer. "Antisimétrica" no significa "no simétrica". Una relación puede no ser simétrica y tampoco ser antisimétrica. Las dos propiedades imponen condiciones lógicas distintas sobre todos los pares de elementos.

Propiedades que pueden coexistir. Las palabras «simétrica», «antisimétrica» y «asimétrica» no forman una lista de alternativas excluyentes. Sobre $A = \{1,2\}$, compare estas relaciones:

Relación	Simétrica	Antisimétrica	Asimétrica
$\varnothing$	Sí	Sí	Sí
$\{(1,1),(2,2)\}$	Sí	Sí	No
$\{(1,2)\}$	No	Sí	Sí
$\{(1,2),(2,1)\}$	Sí	No	No

Cada «sí» debe leerse con su cuantificador. En la relación vacía no hay un par que pueda refutar ninguna de las tres condiciones. En la identidad hay pares en ambos sentidos únicamente cuando las componentes coinciden, lo que permite antisimetría; los lazos impiden asimetría. El último ejemplo tiene dos flechas opuestas entre elementos distintos, así que contradice tanto antisimetría como asimetría.

Para comprobarlo. ¿Puede una relación sobre un conjunto no vacío ser reflexiva y asimétrica a la vez?

Solución. No. Si $a \in A$, la reflexividad exige aRa. La asimetría aplicada a ese mismo par exige $\neg(aRa)$. La incompatibilidad utiliza que podemos elegir un elemento. Sobre $A = \varnothing$, ambas condiciones universales se cumplen y la única relación es vacía.

8.8. Transitividad

Una relación R sobre A es **transitiva** si

$$aRb \land bRc \Rightarrow aRc.$$

Para refutar transitividad debemos encontrar una cadena concreta

$$aRb, \qquad bRc$$

para la cual falte aRc.

Por ejemplo, en $A = \{1, 2, 3\}$, la relación

$$R = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

no es transitiva porque $(1, 2)$ y $(2, 3)$ pertenecen a R, pero $(1, 3)$ no.

En cambio, la relación $<$ sobre $\mathbb{R}$ es transitiva: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

8.9. Diagnosticar una relación

Clasificar una relación exige tratar cada propiedad por separado.

Para una relación finita conviene seguir este orden:

1. revisar todos los pares diagonales para reflexividad o irreflexividad;
2. revisar pares inversos para simetría, antisimetría y asimetría;
3. revisar cadenas de longitud dos para transitividad.

Una matriz o un diagrama puede ayudar:

- reflexividad corresponde a unos en toda la diagonal;
- simetría corresponde a simetría respecto de la diagonal principal;
- antisimetría prohíbe unos simultáneos en posiciones (i, j) y (j, i) cuando $i \neq j$.

Pero la transitividad no se decide por una simple condición visual local: debemos comprobar cierres de cadenas.

8.10. Relaciones de equivalencia

Una relación R sobre A es una **relación de equivalencia** si es:

- reflexiva;
- simétrica;
- transitiva.

Las tres propiedades cumplen papeles distintos.

La reflexividad asegura que cada objeto sea equivalente a sí mismo. La simetría elimina una dirección privilegiada. La transitividad garantiza coherencia: si a es equivalente a b y b a c, entonces a debe ser equivalente a c.

Ejemplo: mismo valor absoluto. Sobre $\mathbb{Z}$, definamos

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad |x| = |y|.$$

Es reflexiva porque $|x| = |x|$, simétrica porque la igualdad es simétrica y transitiva porque la igualdad es transitiva. Por tanto, es una equivalencia.

8.11. Clases de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Para $a \in A$, definimos la **clase de equivalencia de** a por

$$[a] = \{x \in A : xRa\}.$$

Como R es reflexiva, siempre

$$a \in [a].$$

Para la relación "tener el mismo valor absoluto" sobre $\mathbb{Z}$:

$$[0] = \{0\},$$

y si $a \neq 0$,

$$[a] = \{a, -a\}.$$

La clase no es un nuevo símbolo para el elemento a. Es un **subconjunto de** A.

8.12. Cuándo dos clases son iguales

En una relación de equivalencia ocurre un fenómeno fundamental:

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad [a] = [b].$$

Por qué. Si aRb y $x \in [a]$, entonces xRa. Como aRb, la transitividad produce xRb, así que $x \in [b]$. Esto prueba $[a] \subseteq [b]$. El argumento recíproco usa simetría y da $[b] \subseteq [a]$.

En sentido contrario, si $[a] = [b]$, como $a \in [a]$, también $a \in [b]$, de donde aRb.

Iguales o disjuntas. Si dos clases comparten un elemento, entonces son iguales. En consecuencia,

$$[a] = [b] \quad \text{o} \quad [a] \cap [b] = \varnothing.$$

No existen dos clases de equivalencia distintas que se superpongan parcialmente.

Leer la prueba por sus obligaciones. La igualdad $[a] = [b]$ exige dos inclusiones. Si sabemos aRb, la primera comienza con un **elemento arbitrario** $x \in [a]$: no basta verificar que el representante a pertenece a ambas clases. La definición entrega xRa y la transitividad permite unir xRa con aRb para obtener xRb. Para la otra inclusión debemos invertir primero aRb mediante simetría: si $x \in [b]$, entonces xRb y bRa permiten concluir xRa.

La dirección $[a] = [b] \Rightarrow aRb$ utiliza otra propiedad: reflexividad asegura $a \in [a]$. Al transportar esa pertenencia a $[b]$, la definición de clase produce la conclusión. Las tres propiedades de equivalencia hacen trabajos distintos.

También podemos justificar por qué compartir un elemento obliga a compartir toda la clase. Si $z \in [a] \cap [b]$, tenemos zRa y zRb. Por simetría, aRz; por transitividad, aRb. La igualdad de clases ya demostrada termina el argumento.

Para reconstruirlo. Oculte las líneas anteriores y escriba qué dato permite pasar de zRa a aRz, y por qué no basta encontrar una intersección no vacía cuando la relación no es una equivalencia.

Solución. El cambio de dirección usa simetría. Sin transitividad, la relación sobre $\{1, 2, 3\}$ con todos los pares diagonales y flechas $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$, pero sin $1 \leftrightarrow 3$, tiene conjuntos asociados $C_1 = \{1, 2\}$ y $C_3 = \{2, 3\}$ que se solapan sin ser iguales. No podemos unir $1R2$ con $2R3$ para concluir $1R3$.

8.13. De una equivalencia a una partición

Una **partición** de un conjunto A es una colección de subconjuntos que cumplen:

1. cada bloque es no vacío;
2. bloques distintos son disjuntos;
3. la unión de todos los bloques es A.

Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia forman una partición de A.

Cada elemento pertenece a su propia clase, de modo que las clases cubren A. Y acabamos de demostrar que dos clases son iguales o disjuntas.

Así, una equivalencia no sólo compara objetos: **clasifica** el conjunto completo.

8.14. De una partición a una equivalencia

El proceso también funciona al revés.

Sea Π una partición de A. Definamos

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ y } b \text{ pertenecen al mismo bloque de } \Pi.$$

Esta relación es reflexiva porque cada elemento pertenece a algún bloque; simétrica porque "estar en el mismo bloque" no depende del orden; y transitiva porque los bloques de una partición son disjuntos: si a y b están en un bloque, y b y c en otro, ambos bloques contienen a b y por tanto deben ser el mismo.

Así obtenemos la correspondencia estructural:

`RELACIÓN DE EQUIVALENCIA` $\leftrightarrow$ `PARTICIÓN`

Ir y volver recupera el mismo objeto. La correspondencia exige más que poder construir una partición a partir de una relación y una relación a partir de una partición. Debemos comprobar que cada viaje de ida y vuelta recupera el punto de partida.

Si comenzamos con una equivalencia R, formamos sus clases y relacionamos después los elementos que estén en el mismo bloque. Los elementos a, b comparten bloque exactamente cuando $[a] = [b]$, y §8.12 identifica esa condición con aRb. Recuperamos, por tanto, el mismo conjunto de pares R.

Si comenzamos con una partición Π, definimos la relación «estar en el mismo bloque». Sea $C \in \Pi$ y elijamos $a \in C$; podemos hacerlo porque un bloque es no vacío. La clase de a es exactamente C: los elementos de C están relacionados con a, y ningún elemento fuera de C puede compartir con a otro bloque, por disjunción. Recuperamos todos los bloques originales.

Caso frontera. ¿Qué partición corresponde a la equivalencia sobre el conjunto vacío?

Solución. La colección vacía de bloques. Su unión es vacía y las condiciones sobre bloques se cumplen. La colección $\{\varnothing\}$ no es una partición bajo nuestra definición porque contiene un bloque vacío. La relación sobre el conjunto vacío también es vacía; no hay representantes ni clases que añadir.

8.15. El conjunto cociente

Si R es una relación de equivalencia sobre A, el **conjunto cociente** es el conjunto de todas las clases de equivalencia:

$$A/R = \{[a] : a \in A\}.$$

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las clases son $\{1, 3\}$ y $\{2, 4\}$, entonces

$$A/R = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

Los elementos de A/R son conjuntos. Ésta es una distinción de tipo importante:

- $1 \in A$;
- $[1] = \{1, 3\} \in A/R$;
- pero $1 \notin A/R$.

Los cocientes algebraicos aparecerán mucho más adelante. Aquí sólo necesitamos la idea de reemplazar objetos por sus clases.

Representante, clase y conjunto de clases. En el ejemplo anterior, 1 es un elemento del conjunto original, $[1] = \{1, 3\}$ es un subconjunto de ese conjunto y A/R es una colección de esos subconjuntos. Por eso son correctas tres escrituras de tipos distintos: $1 \in A$, $[1] \subseteq A$ y $[1] \in A/R$.

Podemos escoger 3 en vez de 1 para nombrar el mismo bloque: $[3] = [1]$. La clase conserva todos sus elementos; cambiar el representante no reemplaza el bloque por el número elegido. Una lista de representantes $\{1, 2\}$ y el cociente $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ tampoco son el mismo conjunto.

Para comprobarlo. En esta partición, decida si $\{1\}$ es una clase y si $\{1, 3\}$ pertenece al cociente. Justifique por qué $1 \in [1]$ y $[1] \in A/R$ no permiten escribir $1 \in A/R$.

Solución. $\{1\}$ no es una clase: la clase que contiene a 1 también contiene a 3. El bloque $\{1, 3\}$ sí pertenece al cociente. La pertenencia no es transitiva: las dos pertenencias encadenadas sólo dicen que 1 está dentro de uno de los elementos de A/R. Los elementos del cociente en este ejemplo son los dos bloques, no los números de sus interiores.

8.16. Umbral de funciones

Una relación general puede relacionar una misma entrada con varias salidas, con una sola o con ninguna.

Por ejemplo,

$$R = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$$

relaciona 1 con dos elementos diferentes.

Otra relación,

$$S = \{(1, a), (2, b), (3, b)\},$$

asigna a cada elemento de $\{1, 2, 3\}$ exactamente una segunda componente.

Esta observación abre la pregunta del próximo capítulo:

¿Qué condiciones debe satisfacer una relación para convertirse en una función?

C8 termina aquí. Las funciones, su composición y sus inversas son el objeto de C9.

Ejercicios

A. Relación como subconjunto y notación

1. **Nivel A.** Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$. Escribe $A \times B$ y decide si $R = \{(1, a), (2, b)\}$ es una relación de A en B.
2. **Nivel A.** Con $A = \{1, 2, 3\}$, describe por extensión la relación R sobre A definida por $xRy \iff x < y$.
3. **Nivel A.** Si $R = \{(1, a), (3, b)\}$, reescribe sus dos pertenencias usando la notación infija xRy.
4. **Nivel B.** Explica por qué la relación vacía $\varnothing$ es una relación de A en B para cualesquiera conjuntos A y B.
5. **Nivel B.** Explica por qué $A \times B$ es siempre una relación de A en B. ¿Qué relación verbal representa si no imponemos ninguna condición adicional?
6. **Nivel C.** Si $|A| = 2$ y $|B| = 3$, ¿cuántas relaciones distintas de A en B existen? Justifica a partir del conjunto potencia.

B. Dominio, imagen y representaciones

7. **Nivel A.** Para $R = \{(1, a), (1, c), (3, c)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{a, b, c\}$, calcula $\mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(R)$.
8. **Nivel B.** Calcula dominio e imagen de la relación vacía $R = \varnothing \subseteq A \times B$.
9. **Nivel B.** Para $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, construye la matriz 0–1 usando ese orden de filas y columnas.
10. **Nivel B.** La matriz de una relación sobre $A = \{1, 2, 3\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Escribe la relación como conjunto de pares.
11. **Nivel B.** Describe mediante una lista de flechas el diagrama dirigido de $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$. Identifica los lazos.
12. **Nivel C.** Sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$, define xRy si y sólo si x e y tienen la misma paridad. Escribe R como conjunto de pares.
13. **Nivel C.** Explica cómo se reconocen $\mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(R)$ directamente en la matriz 0–1 de una relación de A en B.

14. **Nivel C.** Sea $R \subseteq A \times B$ una relación finita cuya matriz tiene exactamente cinco entradas iguales a 1. ¿Cuántos pares tiene R? Justifica.

C. Relación inversa

15. **Nivel A.** Calcula R^{-1} para $R = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$.
16. **Nivel B.** Demuestra directamente a partir de la definición que $(R^{-1})^{-1} = R$.
17. **Nivel B.** Demuestra que $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ y $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.
18. **Nivel C.** Prueba que una relación R sobre A es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

D. Reflexividad e irreflexividad

19. **Nivel A.** Sobre $A = \{1,2,3\}$, decide si $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ es reflexiva.
20. **Nivel A.** Si A es no vacío, clasifica la relación vacía sobre A respecto de reflexividad e irreflexividad.
21. **Nivel B.** Clasifica la relación identidad $I_A = \{(a,a) : a \in A\}$ respecto de reflexividad e irreflexividad cuando A es no vacío.
22. **Nivel B.** Da un ejemplo sobre $A = \{1,2,3\}$ de una relación que no sea reflexiva ni irreflexiva.
23. **Nivel B.** Sobre $\mathbb{R}$, analiza la relación $xRy \iff x \leq y$ respecto de reflexividad e irreflexividad.
24. **Nivel B.** Sobre $\mathbb{R}$, analiza $xRy \iff x < y$ respecto de reflexividad e irreflexividad.

E. Simetría, antisimetría y asimetría

25. **Nivel B.** Analiza la relación de igualdad sobre un conjunto A respecto de simetría y antisimetría.
26. **Nivel B.** Sea A un conjunto con al menos dos elementos. Analiza la relación universal $A \times A$ respecto de simetría y antisimetría.
27. **Nivel B.** Demuestra que $<$ sobre $\mathbb{R}$ es asimétrica.
28. **Nivel B.** Demuestra que $\leq$ sobre $\mathbb{R}$ es antisimétrica pero no simétrica.
29. **Nivel C.** Sobre $\mathbb{Z}$, sea $xRy \iff |x| = |y|$. Decide si R es simétrica y si es antisimétrica.
30. **Nivel C.** Construye una relación sobre $A = \{1,2,3\}$ que sea simultáneamente simétrica y antisimétrica y que no sea vacía.
31. **Nivel C.** Da un ejemplo de una relación sobre $A = \{1,2,3\}$ que no sea simétrica ni antisimétrica.
32. **Nivel C.** Da un ejemplo de una relación antisimétrica que no sea asimétrica y explica qué propiedad del ejemplo impide que sea asimétrica.
33. **Nivel D.** Demuestra que toda relación asimétrica es irreflexiva.
34. **Nivel D.** Demuestra que si una relación es simultáneamente simétrica y antisimétrica, entonces todos sus pares son diagonales: $R \subseteq I_A$.

F. Transitividad

35. **Nivel B.** Decide si $R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ sobre $A = \{1,2,3\}$ es transitiva.
36. **Nivel B.** Decide si $R = \{(1,2),(2,3)\}$ sobre $A = \{1,2,3\}$ es transitiva y, si falla, entrega el contraejemplo exacto.
37. **Nivel B.** Demuestra que la relación identidad I_A es transitiva.
38. **Nivel B.** Demuestra que la relación vacía es transitiva sobre cualquier conjunto A.
39. **Nivel C.** Demuestra que $<$ sobre $\mathbb{R}$ es transitiva.
40. **Nivel C.** Sobre $A = \{1,2,3\}$, considera $R = \{(1,2),(2,1)\}$. ¿Es transitiva? Justifica revisando las cadenas posibles.
41. **Nivel D.** Da dos relaciones transitivas R, S sobre un mismo conjunto cuya unión $R \cup S$ no sea transitiva.

42. **Nivel D.** Demuestra que la intersección de dos relaciones transitivas sobre A es transitiva.

G. Clasificación combinada

43. **Nivel C.** Sea A un conjunto no vacío. Clasifica completamente I_A respecto de las propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, antisimétrica, asimétrica y transitiva.
44. **Nivel C.** Si $|A| \geq 2$, clasifica completamente $A \times A$.
45. **Nivel C.** Clasifica completamente la relación $<$ sobre $\mathbb{R}$.
46. **Nivel C.** Clasifica completamente la relación $\leq$ sobre $\mathbb{R}$.
47. **Nivel D.** Sobre $A = \{1, 2, 3\}$, clasifica $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.
48. **Nivel D.** Sobre $A = \{1, 2, 3\}$, clasifica $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$.
49. **Nivel D.** Sobre $\mathbb{Z}$, clasifica la relación $xRy \iff |x| = |y|$.
50. **Nivel D.** Sobre $\mathbb{Z}$, sea $xRy \iff x - y = 1$. Clasifica la relación respecto de reflexividad, simetría, antisimetría, asimetría y transitividad.

H. Relaciones de equivalencia

51. **Nivel C.** Sobre $\mathbb{Z}$, define $x \sim y$ cuando x e y tienen la misma paridad. Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.
52. **Nivel C.** Sobre $\mathbb{Z}$, define $x \sim y \iff x^2 = y^2$. Demuestra que es una relación de equivalencia.
53. **Nivel D.** Sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, define $x \sim y \iff xy > 0$. Demuestra que es una relación de equivalencia e interpreta sus clases.
54. **Nivel D.** Sobre $\mathbb{R}$, analiza $xRy \iff x \geq y$. ¿Es una relación de equivalencia? Identifica exactamente qué propiedad falla.
55. **Nivel D.** Sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$, decide si $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$ es una relación de equivalencia.
56. **Nivel D.** En el conjunto de palabras finitas sobre un alfabeto fijo, define $u \sim v$ si u y v tienen la misma longitud. Demuestra que es una equivalencia.

I. Clases de equivalencia

57. **Nivel C.** Para la equivalencia de misma paridad sobre $\mathbb{Z}$, describe todas las clases de equivalencia y el cociente.
58. **Nivel C.** Para $x \sim y \iff x^2 = y^2$ sobre $\mathbb{Z}$, calcula $[0]$, $[3]$ y $[-5]$.
59. **Nivel C.** Para la relación del ejercicio 55 sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$, calcula $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$.
60. **Nivel D.** Sea R una equivalencia sobre A. Demuestra que si aRb, entonces $[a] = [b]$.
61. **Nivel D.** Sea R una equivalencia. Demuestra que si $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, entonces $[a] = [b]$.
62. **Nivel D.** Explica por qué, si $b \in [a]$, entonces $[b] = [a]$. Interpreta esta propiedad como independencia del representante.

J. Particiones y cocientes

63. **Nivel C.** Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\Pi = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$. Construye la relación de equivalencia inducida por Π.
64. **Nivel C.** Decide si $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ es una partición de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
65. **Nivel C.** Explica por qué $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ no es una partición de $\{1, 2, 3, 4\}$.
66. **Nivel D.** Para la equivalencia del ejercicio 55, escribe explícitamente el conjunto cociente A/R.
67. **Nivel D.** Si $A/R = \{C_1, C_2, C_3\}$, explica qué tipo de objetos son C_1, C_2, C_3 y por qué un elemento $a \in A$ no tiene por qué pertenecer a A/R.

68. **Nivel E.** Demuestra las dos direcciones de la correspondencia: las clases de una equivalencia forman una partición y una partición induce una equivalencia mediante la pertenencia al mismo bloque.

K. Transferencia y diagnóstico

69. **Nivel E.** Un estudiante afirma: «si una relación no es simétrica, entonces es antisimétrica». Refuta la afirmación construyendo una relación sobre un conjunto finito de cardinalidad mínima y explica por qué fallan tanto la simetría como la antisimetría.
70. **Nivel E.** Un estudiante encuentra $x \in [a] \cap [b]$ para una equivalencia y concluye que $[a]$ y $[b]$ se solapan parcialmente. Localiza el error y reconstruye la conclusión correcta.
71. **Nivel F.** Sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se define una relación de equivalencia. Se sabe que $[1] = \{1, 4\}$, $[2] = \{2, 5, 6\}$ y que 3 no es equivalente a ningún otro elemento. Reconstruye todas las clases, el cociente y la relación como conjunto de pares.
72. **Nivel G.** Escribe una síntesis matemática de 10–14 líneas que explique por qué una relación de equivalencia puede entenderse como un mecanismo de clasificación. Debes conectar: relación como conjunto de pares, las tres propiedades, clases, igualdad/disjunción de clases, partición y conjunto cociente.

L. Construcción de relaciones

73. **Nivel D. Construir y poner a prueba.** Sobre $A = \{1, 2, 3\}$, construya una relación simétrica e irreflexiva con exactamente cuatro pares. Decida si puede ser transitiva. Demuestre después que ninguna relación no vacía, simétrica e irreflexiva, sobre cualquier conjunto, es transitiva.
74. **Nivel D. Un contraejemplo del menor tamaño.** Construya una relación asimétrica que no sea transitiva sobre un conjunto del menor tamaño posible. Dé el triple que refuta transitividad y demuestre la minimalidad.
75. **Nivel E. Añadir lazos sin completar cadenas.** Construya una relación reflexiva y antisimétrica que no sea transitiva, también de tamaño mínimo. Explique por qué los lazos no refutan antisimetría y por qué no bastan dos elementos.
76. **Nivel D. Clasificación exhaustiva de dos propiedades.** Determine todas las relaciones sobre $A = \{u, v, w\}$ que son a la vez simétricas y antisimétricas. ¿Cuántas hay? Entre ellas, ¿cuáles son reflexivas, irreflexivas y transitivas?
77. **Nivel F. Una relación que depende de un parámetro.** Para $t \in \mathbb{R}$, defina sobre $\mathbb{R}$ la relación $xR_t y \iff |x - y| \leq t$. Clasifique reflexividad, irreflexividad, simetría, antisimetría, asimetría y transitividad para todos los valores de t.
78. **Nivel E. Cambiar el conjunto declarado.** Sobre $\mathbb{R}$, defina $xRy \iff |x| \leq |y|$. Clasifique reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad. Repita la clasificación al restringir la relación a $[0, \infty)$ y explique qué cambió.

M. Poner a prueba las hipótesis

79. **Nivel E. Clases que se solapan.** En $A = \{1, 2, 3\}$ tome $R = I_A \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$. Forme $C_a = \{x \in A : xRa\}$ para cada a. ¿Estos conjuntos forman una partición? Señale qué hipótesis del teorema de clases falla y encuentre la menor relación de equivalencia que contiene a R.
80. **Nivel D. La inclusión que no puede invertirse.** En $A = \{1, 2, 3\}$ defina $aRb \iff a \leq b$. Calcule $C_a = \{x \in A : xRa\}$. Aunque R es reflexiva y transitiva, ¿por qué no puede aplicarse el teorema $aRb \Rightarrow C_a = C_b$? Localice la inferencia que falla.

81. **Nivel E. Un elemento sin clase.** Sobre $A = \{1, 2, 3\}$ considere $R = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$. Demuestre que es simétrica y transitiva. Calcule $C_3 = \{x \in A : xR3\}$. ¿Por qué no hay una partición de todo A? Encuentre el subconjunto sobre el que sí es una equivalencia.
82. **Nivel F. Retirar un único lazo.** Sea R una equivalencia sobre A y sea $a \in A$. Forme $S = R \setminus \{(a, a)\}$. Determine qué ocurre con reflexividad y simetría. Demuestre que S es transitiva si y sólo si la clase $[a]_R$ es unitaria.
83. **Nivel E. Restringir una clasificación.** Sea R una equivalencia sobre A y $B \subseteq A$. Defina $S = R \cap (B \times B)$. Pruebe que S es una equivalencia sobre B y que para $b \in B$ se cumple $[b]_S = B \cap [b]_R$. Describa la partición de B, incluyendo $B = \varnothing$.
84. **Nivel E. Unir dos equivalencias.** En $A = \{1, 2, 3\}$ sean R y S las equivalencias de las particiones $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ y $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. ¿Es $R \cup S$ una equivalencia? Construya la menor equivalencia que la contiene y demuestre que dos elementos no bastan para obtener un ejemplo de unión no transitiva de equivalencias.

N. Reconstruir y contar clasificaciones

85. **Nivel F. Datos que no determinan una sola relación.** En $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se sabe que una equivalencia satisface $[1] = \{1, 4\}$, $2R5$ y $3R6$. Determine todas las particiones posibles y el número de pares de cada relación. Justifique que no hay otras posibilidades.
86. **Nivel E. Reparar bloques superpuestos.** En $A = \{a, b, c, d\}$ se propone $\Pi = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$. Explique por qué falla como partición. Construya la menor equivalencia que relacione entre sí a todos los elementos de cada conjunto propuesto. ¿Su partición final coincide con Π?
87. **Nivel F. Contar sin ordenar los bloques.** En $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ construya una equivalencia cuyas clases tengan tamaños $1, 2, 2$. ¿Cuántas equivalencias distintas cumplen esos tamaños? Cuente sin usar una fórmula combinatoria que no haya justificado.
88. **Nivel F. Satisfacer dos clasificaciones a la vez.** Sean R, S equivalencias sobre A. Pruebe que $T = R \cap S$ es una equivalencia y que $[a]_T = [a]_R \cap [a]_S$. Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, aplique el resultado a las particiones $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ y $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.
89. **Nivel D. La clasificación del conjunto vacío.** Determine todas las relaciones y todas las particiones sobre $A = \varnothing$. Explique por qué la única relación es a la vez reflexiva e irreflexiva, y por qué su cociente es $\varnothing$, no $\{\varnothing\}$.
90. **Nivel F. Lo que revela el número de pares.** Una equivalencia sobre un conjunto de cuatro elementos tiene exactamente dos clases y ocho pares. Determine los tamaños de las clases, cuántas relaciones cumplen los datos y si el número de pares identifica una única clasificación.

O. Síntesis de relaciones y clases

91. **Nivel F. Clasificar pares por un dato común.** En $\mathbb{R}^2$, se agrupan los pares que tienen la misma suma de coordenadas. Justifique que cada par queda en exactamente un bloque y que dos bloques distintos son disjuntos. Describa los bloques de $(1, 2)$, $(0, 3)$ y $(0, 0)$, y dé una descripción exhaustiva de todos los bloques.
92. **Nivel F. Identificar un par con su intercambio.** En $\mathbb{R}^2$ se decide que cada par (a, b) comparta bloque con (b, a), y que ninguna otra identificación sea necesaria. Construya los bloques, compruebe que forman una partición y determine cuándo uno de ellos tiene un solo elemento.
93. **Nivel G. Completar datos de clasificación.** En $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ deben compartir bloque 1 con 2, 2 con 3, y 4 con 5. Construya la clasificación que realiza esas identificaciones sin añadir otras innecesarias. Dé sus bloques, el número de pares

relacionados y una prueba de minimalidad por inclusión. Determine cómo cambian ambos resultados si se retira el dato sobre 2 y 3 antes de construirla.

94. **Nivel G. Dos criterios sobre palabras.** Se agrupan las palabras finitas sobre $\{a, b\}$ por tener la misma longitud y el mismo número de letras a. Justifique que el criterio produce bloques disjuntos que cubren todas las palabras y enumere el bloque de *aabb*. ¿Puede obtenerse otra clasificación coherente sustituyendo «y» por «o»? Justifique con pruebas o contraejemplos.
95. **Nivel F. Los nombres elegidos y los bloques.** Para la partición $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$, un estudiante escoge $T = \{1, 3\}$ y afirma que $A/R = T$. Corrija la afirmación. Demuestre que cada $a \in A$ está relacionado con exactamente un elemento de T, y explique qué cambia al escoger $T' = \{2, 4\}$.
96. **Nivel G. Comparar clasificaciones por sus bloques.** Sean R, S equivalencias sobre un conjunto A. Un estudiante dice que R hace todas las identificaciones que exige S porque cada bloque de R está contenido en algún bloque de S. Decida si su conclusión invierte la inclusión. Pruebe el criterio exacto entre inclusión de relaciones e inclusión de clases. Aplíquelo a $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con particiones $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ para R y $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ para S, y cuente los pares de ambas.

Soluciones

A. Relación como subconjunto y notación

1. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$. Como los dos pares de R pertenecen a ese producto, $R \subseteq A \times B$ y por tanto sí es una relación de A en B.

2. Los pares con primera componente menor que la segunda son $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

3. Las pertenencias $(1, a) \in R$ y $(3, b) \in R$ se escriben $1Ra$ y $3Rb$.

4. Por definición una relación de A en B es cualquier subconjunto de $A \times B$. Como $\varnothing \subseteq A \times B$ para cualesquiera conjuntos A y B, la relación vacía siempre es una relación.

5. Se tiene $A \times B \subseteq A \times B$, así que el producto completo es una relación. Representa la relación universal: todo elemento de A está relacionado con todo elemento de B.

6. $|A \times B| = 2 \cdot 3 = 6$. Una relación es un subconjunto de ese conjunto de seis pares, así que hay $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^6 = 64$ relaciones.

B. Dominio, imagen y representaciones

7. Las primeras componentes que aparecen son 1 y 3, de modo que $\mathrm{Dom}(R) = \{1, 3\}$. Las segundas son a y c, de modo que $\mathrm{Im}(R) = \{a, c\}$.

8. No aparece ninguna primera ni segunda componente. Por tanto $\mathrm{Dom}(R) = \varnothing$ e $\mathrm{Im}(R) = \varnothing$.

9. La matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: cada 1 marca exactamente uno de los cuatro pares dados.

10. Los unos están en $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$ y $(3, 1)$. Así $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

11. Las flechas son $1 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 3$ y $3 \to 2$. El único lazo es $1 \to 1$.

12. Los impares 1 y 3 se relacionan entre sí, y los pares 2 y 4 se relacionan entre sí. Por tanto $R = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$.

13. Una fila pertenece al dominio exactamente cuando contiene al menos un 1. Una columna pertenece a la imagen exactamente cuando contiene al menos un 1.

14. Cada entrada 1 corresponde a un único par de la relación y cada par produce un único 1. Por tanto $|R| = 5$.

C. Relación inversa

15. Se invierte cada par: $R^{-1} = \{(a,1),(a,2),(b,3)\}$.

16. $(x,y) \in (R^{-1})^{-1}$ si y sólo si $(y,x) \in R^{-1}$, lo que ocurre si y sólo si $(x,y) \in R$. Por extensionalidad, $(R^{-1})^{-1} = R$.

17. $b \in \mathrm{Dom}(R^{-1})$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $(b,a) \in R^{-1}$; equivalentemente, existe $a \in A$ tal que $(a,b) \in R$, lo que significa que $b \in \mathrm{Im}(R)$. La segunda igualdad se prueba de la misma manera intercambiando componentes.

18. Si R es simétrica y $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \in R$, luego $(a,b) \in R^{-1}$; así $R \subseteq R^{-1}$. El mismo argumento da la inclusión inversa. Recíprocamente, si $R = R^{-1}$ y $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \in R^{-1} = R$, por lo que R es simétrica.

D. Reflexividad e irreflexividad

19. Sí. Contiene $(1,1),(2,2),(3,3)$, todos los pares diagonales de A.

20. Es irreflexiva porque no contiene ningún (a,a). Como A es no vacío, no es reflexiva: falta al menos un par diagonal.

21. I_A es reflexiva porque contiene (a,a) para todo a. No es irreflexiva cuando A es no vacío, precisamente porque contiene todos esos pares.

22. Por ejemplo $R = \{(1,1)\}$. No es reflexiva porque faltan $(2,2),(3,3)$ y no es irreflexiva porque contiene $(1,1)$.

23. Es reflexiva porque $x \leq x$ para todo real x. No es irreflexiva.

24. Es irreflexiva porque nunca ocurre $x < x$. Por ello no es reflexiva sobre un dominio no vacío.

E. Simetría, antisimetría y asimetría

25. La igualdad es simétrica: $a = b \Rightarrow b = a$. También es antisimétrica: si $a = b$ y $b = a$, entonces necesariamente $a = b$. Por tanto posee ambas propiedades.

26. $A \times A$ es simétrica porque contiene todos los pares y sus inversos. Si $|A| \geq 2$, no es antisimétrica: para $a \neq b$ contiene simultáneamente (a,b) y (b,a).

27. Si $a < b$, no puede ocurrir $b < a$. Por tanto $a < b \Rightarrow \neg(b < a)$, exactamente la definición de asimetría.

28. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$, así que es antisimétrica. No es simétrica cuando existen $a < b$: entonces $a \leq b$ pero no $b \leq a$.

29. Es simétrica porque $|x| = |y|$ implica $|y| = |x|$. No es antisimétrica: $1R(-1)$ y $(-1)R1$, pero $1 \neq -1$.

30. Por ejemplo $R = \{(1,1),(2,2)\}$. Todo par es diagonal, así que la relación es simétrica y antisimétrica; además es no vacía.

31. Por ejemplo $R = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$. No es simétrica porque $(2,3) \in R$ pero $(3, 2) \notin R$. Tampoco es antisimétrica porque contiene $(1,2)$ y $(2,1)$ con $1 \neq 2$.

32. La relación $\leq$ sobre $\mathbb{R}$ es antisimétrica, pero no asimétrica porque contiene todos los pares (x,x). La asimetría prohíbe la reflexividad.

33. Si R fuese asimétrica y existiera aRa, la definición aplicada a aRa exigiría $\neg(aRa)$, contradicción. Por tanto ningún a se relaciona consigo mismo: R es irreflexiva.

34. Sea $(a,b) \in R$. Por simetría, $(b,a) \in R$. Por antisimetría, de ambos pares se sigue $a = b$. Así todo par de R tiene componentes iguales y $R \subseteq I_A$.

F. Transitividad

35. Sí. La única cadena no trivial relevante es $(1,2),(2,3)$ y el cierre $(1,3)$ está presente. No hay otras cadenas que exijan pares nuevos.

36. No. $(1,2) \in R$ y $(2,3) \in R$, pero $(1,3) \notin R$. Ese triple $1,2,3$ refuta transitividad.

37. Si aI_Ab y bI_Ac, entonces $a = b$ y $b = c$, por lo que $a = c$ y aI_Ac. Es transitiva.

38. La condición transitiva sólo puede fallar si existen a,b,c con aRb y bRc pero no aRc. En la relación vacía no existen siquiera las dos primeras premisas; por tanto la implicación universal es verdadera vacíamente.

39. Si $a < b$ y $b < c$, la transitividad del orden real da $a < c$. Por tanto $<$ es transitiva.

40. No. Como $(1,2)$ y $(2,1)$ pertenecen a R, transitividad exigiría $(1,1)$, que falta. También la cadena $(2,1),(1,2)$ exigiría $(2,2)$.

41. Tome $A = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,2)\}$ y $S = \{(2,3)\}$. Cada una es transitiva vacíamente porque no contiene cadenas de dos pasos. Pero $R \cup S$ contiene $(1,2)$ y $(2,3)$ sin $(1,3)$, así que no es transitiva.

42. Si (a,b) y (b,c) pertenecen a $R \cap S$, pertenecen tanto a R como a S. Como ambas son transitivas, (a,c) pertenece a R y a S. Por tanto $(a,c) \in R \cap S$.

G. Clasificación combinada

43. I_A es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. No es irreflexiva ni asimétrica cuando A es no vacío. En particular, es una relación de equivalencia.

44. $A \times A$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Si $|A| \geq 2$, no es antisimétrica ni asimétrica ni irreflexiva. Es una relación de equivalencia con una sola clase: A.

45. $<$ es irreflexiva, asimétrica, antisimétrica y transitiva. No es reflexiva ni simétrica. No es una equivalencia.

46. $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. No es irreflexiva, simétrica ni asimétrica. No es una equivalencia.

47. Es reflexiva porque contiene toda la diagonal; simétrica porque $(1,2)$ y $(2,1)$ aparecen juntos; no es antisimétrica porque $1 \neq 2$ y ambos pares están presentes; no es asimétrica; es transitiva, pues el bloque $\{1,2\}$ es completo y 3 sólo se relaciona consigo mismo. Es una equivalencia.

48. Es reflexiva. No es simétrica porque $(1,2)$ está y $(2,1)$ no. Es antisimétrica: no existen pares inversos entre elementos distintos. No es asimétrica porque tiene lazos. Es transitiva: las únicas composiciones con $(1,2)$ usan lazos y no generan pares nuevos. No es equivalencia por falta de simetría.

49. Es reflexiva, simétrica y transitiva porque la igualdad de valores absolutos posee esas tres propiedades. No es antisimétrica: 1 y -1 son distintos pero se relacionan en ambos sentidos. No es asimétrica. Es una equivalencia.

50. No es reflexiva porque $x - x = 0 \neq 1$. No es simétrica: si $x - y = 1$, entonces $y - x = -1$. Es antisimétrica vacíamente, pues nunca pueden ocurrir a la vez $x - y = 1$ y $y - x = 1$. De hecho es asimétrica. No es transitiva: $2R1$ y $1R0$, pero $2R0$ exigiría $2 - 0 = 1$, falso.

H. Relaciones de equivalencia

51. Reflexiva: todo entero tiene la misma paridad que sí mismo. Simétrica: si x e y tienen la misma paridad, entonces y y x también la tienen. Transitiva: si x tiene la misma paridad que y y y tiene la misma paridad que z, entonces x y z tienen la misma paridad. Por tanto, es una equivalencia.

52. Reflexiva porque $x^2 = x^2$; simétrica porque $x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$; transitiva porque $x^2 = y^2$ y $y^2 = z^2$ implican $x^2 = z^2$. Es equivalencia.

53. Reflexiva: si $x \neq 0$, entonces $x \cdot x = x^2 > 0$. Simétrica: $xy > 0$ equivale a $yx > 0$. Transitiva: si $xy > 0$ y $yz > 0$, entonces x, y tienen el mismo signo y y, z también, por lo que x, z tienen el mismo signo y $xz > 0$. Hay dos clases: positivos y negativos.

54. No es equivalencia. Es reflexiva y transitiva, pero no simétrica: por ejemplo $2R1$ porque $2 \geq 1$, mientras $1R2$ es falso.

55. Sí. La diagonal da reflexividad. Los únicos pares no diagonales aparecen en parejas inversas $(1,3),(3,1)$ y $(2,4),(4,2)$, así que es simétrica. Los dos bloques $\{1,3\}$ y $\{2,4\}$ son completos internamente, de modo que cualquier cadena queda dentro del mismo bloque y la relación es transitiva. Es equivalencia.

56. Toda palabra tiene la misma longitud que sí misma; si $|u| = |v|$, entonces $|v| = |u|$; y si $|u| = |v|$ y $|v| = |w|$, entonces $|u| = |w|$. Por tanto es equivalencia.

I. Clases de equivalencia

57. Hay exactamente dos clases: E, el conjunto de enteros pares, y O, el conjunto de enteros impares. Para cualquier par p, $[p] = E$; para cualquier impar q, $[q] = O$. El cociente es $\mathbb{Z}/\sim = \{E, O\}$.

58. $[0] = \{0\}$. Como $x^2 = 9$ equivale a $x = 3$ o $x = -3$, $[3] = \{3, -3\}$. Del mismo modo $[-5] = \{5, -5\}$.

59. $[1] = [3] = \{1,3\}$ y $[2] = [4] = \{2,4\}$.

60. Supongamos que aRb. Si $x \in [a]$, entonces xRa. Con aRb, transitividad da xRb, de modo que $x \in [b]$ y $[a] \subseteq [b]$. Por simetría bRa y el mismo argumento da $[b] \subseteq [a]$. Luego $[a] = [b]$.

61. Tomemos $x \in [a] \cap [b]$. Entonces xRa y xRb. De xRa y simetría obtenemos aRx; con xRb, transitividad da aRb. Por el resultado anterior, $[a] = [b]$.

62. $b \in [a]$ significa bRa. En una equivalencia, elementos relacionados tienen la misma clase, así que $[b] = [a]$. Por ello una clase puede nombrarse mediante cualquiera de sus miembros: el representante cambia, el subconjunto no.

J. Particiones y cocientes

63. Dos elementos se relacionan exactamente cuando pertenecen al mismo bloque. Por tanto, la relación contiene los nueve pares de $\{1, 3, 5\}^2$ y los cuatro pares de $\{2, 4\}^2$: $R = (\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{2, 4\} \times \{2, 4\})$.

64. Sí. Cada bloque es no vacío; los tres bloques son dos a dos disjuntos; y su unión es $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Por tanto forman una partición.

65. No es una partición porque los dos primeros bloques se superponen: ambos contienen 2. Una partición exige que bloques distintos sean disjuntos.

66. Las clases son $\{1, 3\}$ y $\{2, 4\}$, por lo que $A/R = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.

67. Cada C_i es un subconjunto no vacío de A: una clase de equivalencia. Los elementos de A/R son esas clases. Un elemento $a \in A$ no pertenece necesariamente a A/R porque los elementos de A/R son clases de equivalencia, es decir, subconjuntos de A, y no los objetos originales de A.

68. Dirección 1: las clases de una equivalencia son no vacías porque $a \in [a]$, cubren A porque cada a pertenece a su clase, y dos clases son iguales o disjuntas; por tanto forman una partición. Dirección 2: dada una partición, defina $a \sim b$ si están en el mismo bloque. La relación es reflexiva porque cada elemento está en un bloque, simétrica porque compartir bloque es simétrico y transitiva porque si dos bloques comparten el elemento intermedio deben coincidir. Así la relación es una equivalencia.

K. Transferencia y diagnóstico

69. Se necesitan al menos tres elementos. En un conjunto de dos elementos, para que falle la antisimetría deben aparecer ambos pares (a, b) y (b, a) con $a \neq b$; pero entonces, aparte de los lazos, no queda ningún par no diagonal con el que pueda fallar la simetría. En $A = \{1, 2, 3\}$, tome $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$. No es simétrica porque falta $(3, 2)$ y no es antisimétrica porque contiene $(1, 2)$ y $(2, 1)$ con $1 \neq 2$.

70. El error es suponer que clases de equivalencia distintas pueden compartir elementos. Si x pertenece a ambas clases, entonces xRa y xRb; esto implica aRb y por tanto $[a] = [b]$. La conclusión correcta es que las clases coinciden por completo.

71. Las clases son $C_1 = \{1, 4\}$, $C_2 = \{2, 5, 6\}$ y $C_3 = \{3\}$. El cociente es $A/R = \{C_1, C_2, C_3\}$. La relación es la unión $C_1 \times C_1 \cup C_2 \times C_2 \cup C_3 \times C_3$, es decir $\{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4), (2, 2), (2, 5), (2, 6), (5, 2), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 5), (6, 6), (3, 3)\}$.

72. Una relación de equivalencia empieza siendo un conjunto de pares ordenados que registra qué objetos se consideran comparables bajo un mismo criterio. La reflexividad garantiza que cada objeto quede clasificado; la simetría elimina una dirección privilegiada; la transitividad hace coherente la pertenencia a una misma categoría. Para cada elemento a, la clase $[a]$ reúne todos los objetos equivalentes a él. Dos clases no pueden solaparse parcialmente: si comparten un elemento, son iguales; si no, son disjuntas. Por ello las clases cubren el conjunto original sin superponerse y forman una partición. Recíprocamente, cualquier partición induce una equivalencia al declarar relacionados a los elementos del mismo bloque. El conjunto cociente A/R reúne esas clases y reemplaza los objetos originales por las categorías determinadas por la relación. Así, una equivalencia es un mecanismo preciso de clasificación matemática.

L. Construcción de relaciones

73. Podemos tomar $R = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$. Cada par tiene su inverso y no hay lazos. No es transitiva: $1R2$ y $2R1$ exigirían $1R1$. En general, si una relación no vacía contiene aRb, la simetría da bRa y la transitividad daría aRa, prohibido por irreflexividad. Por tanto las tres propiedades juntas fuerzan que la relación sea vacía; el ejemplo construido no puede ser transitivo.

74. Sobre $A = \{1,2,3\}$ sirve $R = \{(1,2),(2,3)\}$. No hay lazos ni pares inversos, por lo que es asimétrica; la cadena $1R2$, $2R3$ no termina en $1R3$. En una relación asimétrica, una cadena aRb, bRc que viole transitividad requiere tres elementos distintos: $a = b$ o $b = c$ produciría un lazo, y $a = c$ produciría pares inversos. Con menos de tres elementos no puede existir ese triple. Tres es el tamaño mínimo.

75. En $A = \{1,2,3\}$ tomamos $R = I_A \cup \{(1,2),(2,3)\}$. Es reflexiva y no contiene pares inversos entre distintos elementos, así que es antisimétrica. Falla transitividad por $1R2$, $2R3$ y la ausencia de $1R3$. Los lazos tienen componentes iguales y no contradicen la conclusión de antisimetría. En un conjunto con a lo sumo dos elementos, un triple aRb, bRc tiene alguna repetición. Si $a = b$ o $b = c$, el par aRc ya es una de las premisas; si $a = c$, la reflexividad lo garantiza. Por tanto una relación reflexiva sobre dos elementos siempre es transitiva: sólo podría fallar mediante tres elementos distintos. El ejemplo de tres alcanza el mínimo.

76. Si aRb, la simetría da bRa y la antisimetría exige $a = b$. Así, $R \subseteq I_A$. Recíprocamente, cualquier subconjunto de I_A tiene ambas propiedades. Las posibilidades son $\varnothing$, los tres conjuntos con un único lazo, los tres conjuntos con dos lazos y I_A: ocho en total. Sólo I_A es reflexiva y sólo $\varnothing$ es irreflexiva. Todas son transitivas: en una cadena de dos pares diagonales las tres componentes coinciden, y el par exigido ya está presente. La clasificación es exhaustiva porque se ha probado la condición necesaria y suficiente $R \subseteq I_A$.

77. Si $t < 0$, ningún par cumple la condición porque $|x - y| \geq 0$. La relación es vacía: no reflexiva sobre $\mathbb{R}$, pero sí irreflexiva, simétrica, antisimétrica, asimétrica y transitiva. Si $t = 0$, la condición equivale a $x = y$: es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva; no es irreflexiva ni asimétrica. Si $t > 0$, es reflexiva y simétrica. El par de puntos distintos $0, t$ cumple la relación en ambos sentidos, lo que refuta antisimetría y asimetría; los lazos refutan irreflexividad. Tampoco es transitiva: $0R_t t$ y $tR_t(2t)$, pero $|0 - 2t| = 2t > t$. Los tres casos cubren todos los parámetros. Para descubrir el contraejemplo, se toman dos pasos de tamaño t: cada paso está permitido, pero su acumulación excede el umbral.

78. Sobre $\mathbb{R}$ es reflexiva y transitiva por las propiedades de $\leq$ en los módulos. No es simétrica: $0R1$, pero no $1R0$. No es antisimétrica: $1R(-1)$ y $(-1)R1$, aunque $1 \neq -1$. En $[0, \infty)$ la condición es simplemente $x \leq y$, así que sigue siendo reflexiva y transitiva, sigue sin ser simétrica y ahora es antisimétrica: las dos desigualdades obligan a igualdad. La fórmula de la relación no cambió; el nuevo conjunto eliminó los elementos distintos con el mismo módulo.

M. Poner a prueba las hipótesis

79. Los conjuntos son $C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{1, 2, 3\}$ y $C_3 = \{2, 3\}$. Se superponen sin ser iguales, de modo que no forman una partición. R es reflexiva y simétrica, pero no transitiva: falta $(1, 3)$ y también su inverso. Cualquier equivalencia que la contenga debe añadir esos dos pares por las cadenas $1R2R3$ y $3R2R1$. Así se obtiene $A \times A$, que es una equivalencia. Es la menor porque los siete pares originales y los dos forzados agotan el producto cartesiano. Fuera de una equivalencia, los conjuntos C_a no heredan el teorema de igualdad o disjunción.

80. Tenemos $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1, 2\}$ y $C_3 = \{1, 2, 3\}$. La relación no es simétrica. Por ejemplo, $1R2$ y $C_1 \subseteq C_2$, pero $2 \in C_2$ no pertenece a C_1. La prueba de la inclusión inversa necesitaría $2R1$, obtenido en una equivalencia por simetría. Aquí esa inferencia no es válida. Reflexividad y transitividad por sí solas no permiten concluir igualdad de los conjuntos.

81. Todos los pares de R tienen ambas componentes en $B = \{1, 2\}$. Invertir un par conserva esa condición, y unir dos pares también: si aRb y bRc, entonces $a, c \in B$, así que aRc. Sin embargo, $C_3 = \varnothing$ y falta $3R3$. La relación no es reflexiva sobre A, y los conjuntos asociados no cubren al elemento 3 ni son todos no vacíos. Sobre B, $R = B \times B$ sí es reflexiva, simétrica y transitiva; tiene un único bloque, B. Cambiar el conjunto declarado cambia qué exige reflexividad.

82. S no es reflexiva porque falta el lazo de a. Sigue siendo simétrica: sólo se retiró un par igual a su inverso. Si existe $b \neq a$ en $[a]_R$, permanecen aSb y bSa, mientras aSa falta; no es transitiva. Si $[a]_R = \{a\}$, no queda en S ningún par con una componente a: un par xRa o aRx obligaría a $x \in [a]_R$, y entonces $x = a$. Por tanto cualquier cadena en S tiene extremos distintos de a. La transitividad de R produce el par de cierre y éste no es el único retirado. Así S es transitiva. Esto demuestra ambas direcciones del criterio. El único cierre que puede perderse es (a, a); buscar una cadena que lo exija revela por qué importa el tamaño de la clase.

83. Cada $b \in B$ tiene bRb y ambas componentes pertenecen a B, de modo que bSb. Si xSy, entonces xRy; por simetría yRx, y como $y, x \in B$, resulta ySx. Si xSy y ySz, la transitividad da xRz; como los extremos están en B, también xSz. Para cualquier x, $x \in [b]_S$ equivale a $x \in B$ y xRb, exactamente la condición $x \in B \cap [b]_R$. La partición de B se obtiene intersectando los bloques de A/R con B y descartando las intersecciones vacías. Las intersecciones no vacías de bloques distintos siguen disjuntas, y su unión es B. Si $B = \varnothing$, $S = \varnothing$ y la partición es la colección vacía; no se conserva un supuesto bloque vacío.

84. La unión contiene todos los lazos, $1 \leftrightarrow 2$ y $2 \leftrightarrow 3$, pero no $1 \leftrightarrow 3$. Es reflexiva y simétrica, pero la cadena $1, 2, 3$ refuta transitividad. La menor equivalencia que la contiene es $A \times A$, pues los dos pares faltantes quedan forzados por transitividad. Sobre un conjunto de dos elementos, sus únicas particiones son los dos bloques unitarios y el bloque total; las equivalencias son identidad y relación universal. Cualquier unión de ellas sigue siendo una de esas dos equivalencias. Con cero o un elemento tampoco puede fallar. El tamaño mínimo es tres.

N. Reconstruir y contar clasificaciones

85. El primer bloque es exactamente $C = \{1, 4\}$ y no puede absorber otros elementos. Los datos obligan a que $D = \{2, 5\}$ y $E = \{3, 6\}$ estén contenidos en bloques. Estos bloques pueden ser distintos, dando $\{C, D, E\}$, o coincidir, dando $\{C, D \cup E\}$. No pueden dividirse los pares prescritos y no hay otros elementos que repartir. Cada bloque de tamaño k aporta k^2 pares. La primera relación tiene $4 + 4 + 4 = 12$ pares y la segunda $4 + 16 = 20$. Los datos determinan dos relaciones, no una: declarar exhaustividad exige considerar tanto la separación como la unión de los dos bloques pendientes.

86. Los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{b, c\}$ comparten b sin ser iguales, así que Π no es partición. Una equivalencia que contenga los pares de cada conjunto debe relacionar a con b y b con c; la transitividad obliga a relacionar a con c, y la simetría obliga a todos los pares inversos. La reflexividad añade los lazos. La relación mínima es $(\{a, b, c\} \times \{a, b, c\}) \cup \{(d, d)\}$. Su partición es $\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$, distinta de la colección inicial. Es mínima porque todo par del bloque de tres está forzado; la relación construida ya satisface las condiciones sin unir d con los demás.

87. Un ejemplo tiene bloques $\{1\}$, $\{2, 3\}$ y $\{4, 5\}$; su relación es la unión de los productos de cada bloque consigo mismo. Hay cinco elecciones del elemento que queda solo. Fijado ese elemento, llamemos u, v, w, z a los otros cuatro. Sus particiones en dos pares son exactamente $\{\{u, v\}, \{w, z\}\}$, $\{\{u, w\}, \{v, z\}\}$ y $\{\{u, z\}, \{v, w\}\}$. Para probar que son todas, el compañero de u debe ser uno de los otros tres y, elegido éste, el par restante queda determinado. No se cuenta el orden de los dos bloques. Resultan $5 \cdot 3 = 15$ particiones, por tanto 15 equivalencias por la correspondencia de §8.14.

88. Para cada $a \in A$, el lazo (a, a) pertenece a ambas relaciones y por tanto a T. Si xTy, el par inverso pertenece a R y a S por sus simetrías, así que yTx. Si xTy y yTz, ambas relaciones contienen las dos premisas; sus transitividades dan (x, z) en ambas, luego xTz. Para $x \in A$, xTa equivale a xRa y xSa, exactamente la pertenencia a la intersección de clases. En el ejemplo, la intersección de las dos clases de cualquier a es $\{a\}$; las cuatro clases de T son unitarias y $T = I_A$. Exigir ambas clasificaciones separa elementos que una sola relación podía agrupar.

89. Como $A \times A = \varnothing$, su único subconjunto es $R = \varnothing$. Las condiciones de reflexividad e irreflexividad son universales sobre un conjunto sin elementos: ninguna tiene un caso que la refute. Lo mismo ocurre con simetría y transitividad, de modo que R es una equivalencia. Una partición sólo puede usar subconjuntos de A, pero el único es vacío y no se admite como bloque. Por ello la única partición es la colección vacía. En $A/R = \{[a] : a \in A\}$ no hay ningún a que produzca una clase, así que el cociente es vacío. Añadir $\varnothing$ como elemento introduciría un bloque que no procede de ningún representante.

90. Dos clases no vacías que cubren cuatro elementos pueden tener tamaños $1, 3$ o $2, 2$, sin contar el orden de los bloques. El número de pares es la suma de los cuadrados de los tamaños: $1^2 + 3^2 = 10$ o $2^2 + 2^2 = 8$. Por tanto los datos fuerzan dos bloques de tamaño dos. Si $A = \{a, b, c, d\}$, sus tres particiones posibles son $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ y $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$. Cada una produce una relación diferente de ocho pares. El conteo identifica tamaños, pero no determina qué elementos comparten clase.

O. Síntesis de relaciones y clases

91. Para cada $s \in \mathbb{R}$ tenemos el bloque $C_s = \{(t, s - t) : t \in \mathbb{R}\}$. Es no vacío porque contiene $(0, s)$. Cada par (a, b) está en C_{a+b}, pues $b = (a + b) - a$. Si un par perteneciera a C_s y C_r, su suma sería a la vez s y r, de modo que $s = r$. Estos bloques cubren y particionan $\mathbb{R}^2$. Los bloques de $(1, 2)$ y $(0, 3)$ son el mismo, $C_3 = \{(t, 3 - t) : t \in \mathbb{R}\}$; el de $(0, 0)$ es $C_0 = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$. La descripción es exhaustiva: todo punto tiene una suma y toda suma real aparece en $(0, s)$. La relación inducida es $(a, b)R(c, d) \iff a + b = c + d$, reflexiva, simétrica y transitiva por las propiedades de la igualdad.

92. El bloque de (a,b) es $C_{a,b} = \{(a,b),(b,a)\}$. Todo par está en su bloque. Si dos bloques comparten un par, ese par coincide con el original o con el intercambio de cada uno; intercambiar una segunda vez devuelve el original. En las cuatro combinaciones se obtiene que ambos bloques contienen exactamente los mismos dos pares, quizá repetidos. Así dos bloques distintos son disjuntos y forman una partición. La relación inducida admite igualdad o intercambio; es reflexiva y simétrica. La transitividad también queda explícita: no intercambiar ninguna vez deja el original; intercambiar sólo una vez deja el intercambio; intercambiar dos veces devuelve el original. La clase es unitaria exactamente cuando $a = b$, pues $(a,b) = (b,a)$ equivale a esa igualdad de componentes. Se conserva el orden dentro de cada par, aunque se lo clasifique junto con su intercambio.

93. Los primeros dos datos fuerzan que $1,2,3$ compartan bloque: el elemento 2 no puede pertenecer a dos bloques distintos. El tercero obliga a agrupar $4,5$. Los bloques $\{1,2,3\}$ y $\{4,5\}$ forman una partición, y su relación es $R = (\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}) \cup (\{4,5\} \times \{4,5\})$. Toda equivalencia que contenga los datos debe contener cada par de esos bloques: simetría permite recorrer en ambos sentidos, transitividad une las cadenas y reflexividad suministra los lazos. Nuestra relación satisface los datos sin unir ambos bloques, por lo que es la menor por inclusión. Tiene $3^2 + 2^2 = 13$ pares. Al retirar el dato sobre 2 y 3, los bloques mínimos son $\{1,2\}$, $\{3\}$ y $\{4,5\}$, con $4 + 1 + 4 = 9$ pares. Retirar un dato antes de completar puede separar un bloque; no equivale a borrar un único par de la equivalencia ya construida.

94. La igualdad de longitud y la igualdad del número de letras a son cada una reflexiva, simétrica y transitiva; exigir ambas conserva esas tres propiedades. En consecuencia, por §§8.13–8.14, sus clases forman una partición. El bloque de *aabb* contiene exactamente las palabras de longitud cuatro con dos letras a: *aabb*, *abab*, *abba*, *baab*, *baba*, *bbaa*. La lista es exhaustiva porque las posiciones de las dos a son $12, 13, 14, 23, 24, 34$ y las otras posiciones llevan b. Al cambiar a disyunción se pierde transitividad. Las palabras $u = a$, $v = b$ y $w = bb$ cumplen uRv por longitud, y vRw por tener cero letras a. Pero u, w tienen longitudes distintas y números de a distintos, así que no están relacionados. No podrían compartir bloques según ese criterio: los dos primeros vínculos obligarían a unir los tres objetos en uno. Buscar un primer vínculo por una condición y un segundo por la otra permite detectar el fallo de la disyunción.

95. El cociente es $A/R = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$; sus elementos son bloques. T es un conjunto de representantes y no es igual al cociente. Si $a \in \{1,2\}$, está relacionado con $1 \in T$ y no con 3; si $a \in \{3,4\}$, ocurre lo inverso. Esto demuestra existencia y unicidad del representante relacionado en T para cada a. Con T' se representan los mismos bloques mediante 2 y 4: $[2] = [1]$ y $[4] = [3]$. Cambia el conjunto de nombres elegidos, pero el conjunto de clases no cambia. La unicidad mencionada depende del conjunto de representantes: no afirma que una clase tenga un único elemento.

96. El estudiante invierte la inclusión: los bloques menores contienen menos comparaciones. El criterio es $R \subseteq S$ si y sólo si $[a]_R \subseteq [a]_S$ para todo $a \in A$. Si $R \subseteq S$ y $x \in [a]_R$, entonces xRa, luego xSa y $x \in [a]_S$. Para el recíproco, supongamos todas las inclusiones de clases y tomemos un par cualquiera $(x,a) \in R$. Esto significa $x \in [a]_R$, por lo que $x \in [a]_S$ y $(x,a) \in S$. Así todo par de R está en S. Si cada bloque de R está contenido en algún bloque de S, ese bloque de S tiene que ser $[a]_S$ para cualquier a del primero, pues contiene a a. En el ejemplo, $R \subseteq S$, pero la inclusión inversa falla: $(1,3) \in S$ y $(1,3) \notin R$. Los conteos son $2^2 + 1^2 + 2^2 = 9$ y $3^2 + 2^2 = 13$. Unir bloques conserva pares antiguos y añade comparaciones; el criterio explica la inclusión sin listar cada par.

Capítulo 9

Funciones, composición e inversas

En C8 estudiamos relaciones como subconjuntos de productos cartesianos. Una relación puede dejar entradas sin salida o relacionar una misma entrada con varias salidas. Una función aparece cuando esas dos libertades desaparecen.

> **Una función asigna a cada elemento de su dominio exactamente un elemento de su codominio.**

La palabra "exactamente" contiene dos exigencias distintas: debe existir una salida y esa salida debe ser única. Desde esa definición construiremos composición, inyectividad, sobreyectividad e inversas.

9.1. De una relación a una función

Sean A y B conjuntos. Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función de A en B** si

$$\forall a \in A \; \exists! b \in B \; ((a,b) \in f).$$

La condición puede separarse en:

- **totalidad**: cada $a \in A$ aparece como primera componente de algún par;
- **unicidad de salida**: si $(a,b_1) \in f$ y $(a,b_2) \in f$, entonces $b_1 = b_2$.

Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$,

$$f = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$$

es una función. En cambio,

$$R = \{(1,a),(1,b),(2,a)\}$$

falla por dos motivos: 1 tiene dos salidas y 3 no tiene ninguna.

Una función sigue siendo una relación; no abandonamos el lenguaje de C8. Estamos seleccionando relaciones con una propiedad adicional.

Totalidad y unicidad: dos comprobaciones independientes. Sobre $A = \{1,2\}$ y $B = \{u,v\}$, cada relación de la tabla está contenida en $A \times B$. Esa pertenencia al producto cartesiano no basta para que sea una función.

Relación	¿Todas las entradas tienen salida?	¿Cada entrada tiene a lo sumo una salida?	¿Es función $A \to B$?
$\varnothing$	No	Sí	No
$\{(1,u),(1,v)\}$	No	No	No
$\{(1,u),(1,v),(2,u)\}$	Sí	No	No
$\{(1,u),(2,u)\}$	Sí	Sí	Sí

Para comprobar totalidad, fijamos una entrada arbitraria y buscamos al menos un par que comience con ella. Para comprobar unicidad, suponemos que hay dos pares con la misma primera componente y comprobamos que sus segundas componentes coinciden. Son obligaciones distintas: no encontrar dos salidas diferentes no demuestra que exista alguna.

La última fila también muestra que dos entradas pueden compartir salida. Esto no contradice la definición de función: la unicidad se exige **para una entrada fija**. La prohibición de colisiones entre entradas distintas aparecerá en §9.7, como una condición adicional.

Añadir pares puede completar entradas ausentes, pero no elimina una colisión ya presente. Quitar pares puede eliminar una colisión, pero no crea una salida para una entrada ausente. Al reparar una relación conviene diagnosticar primero cuál de esas dos tareas hace falta.

Para comprobarlo. Parta de $R = \{(1, u), (1, v)\}$. Una modificación consiste en añadir o retirar un solo par. ¿Cuál es el menor número de modificaciones necesario para convertir R en una función $A \to B$? Describa todas las funciones obtenidas con ese mínimo.

Solución. Hay que retirar al menos uno de los dos pares que comienzan con 1, porque sus salidas son distintas. También hay que añadir un par que comience con 2, porque esa entrada no tiene salida. Una sola modificación no puede realizar ambas tareas; se necesitan al menos dos.

Dos bastan: conservamos una de las salidas de 1 y elegimos una salida para 2. Las cuatro posibilidades son $\{(1, u), (2, u)\}$, $\{(1, u), (2, v)\}$, $\{(1, v), (2, u)\}$ y $\{(1, v), (2, v)\}$. Cada una tiene exactamente un par por entrada. La lista es exhaustiva: en dos modificaciones debemos hacer precisamente una retirada y una adición, con las elecciones indicadas.

Si $A = \varnothing$, no hay entradas cuya salida deba existir o ser única: la relación vacía es función hacia cualquier B. Si $A \neq \varnothing$ y $B = \varnothing$, ninguna entrada puede recibir salida y no existe función $A \to B$.

9.2. Dominio, codominio e imagen

La notación

$$f : A \to B$$

declara dos conjuntos que forman parte de los datos de la función:

- A: **dominio**;
- B: **codominio**.

La **imagen** es

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Siempre

$$\operatorname{Im}(f) \subseteq B,$$

pero no necesariamente hay igualdad.

Esta distinción será decisiva para la sobreyectividad. La regla $f(x) = x^2$ con dominio $\mathbb{R}$ tiene imagen $[0, \infty)$. Si el codominio declarado es $\mathbb{R}$, no es sobreyectiva; si es $[0, \infty)$, sí lo es.

9.3. Notación funcional y evaluación

Si $f : A \to B$ y el único par de f cuya primera componente es a es (a, b), escribimos

$$f(a) = b.$$

Hay que distinguir cuatro objetos:

- la función f;
- una entrada a;
- el valor $f(a)$;
- una fórmula que pueda describir a f.

La fórmula no es la función completa. Por ejemplo, "x^2" no informa por sí sola dominio ni codominio.

Las funciones pueden estar dadas por listas, tablas, diagramas, fórmulas o reglas por casos. La definición estructural es independiente del modo de representación.

9.4. Igualdad de funciones

Para comparar funciones hay que controlar sus datos.

Si $f, g : A \to B$, entonces

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall a \in A\ (f(a) = g(a)).$$

Si cambian dominio o codominio, editorialmente tratamos las funciones como objetos distintos, incluso cuando usan la misma regla simbólica.

Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, y $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$, tienen los mismos valores en cada real, pero distinto codominio y distinto comportamiento respecto de la sobreyectividad.

Comparar los datos antes de comparar valores. En este capítulo una función lleva consigo el dominio y el codominio declarados. Su gráfica registra los pares entrada–salida, pero no permite recuperar por sí sola un codominio que contenga elementos nunca alcanzados. Para comparar dos funciones comprobamos primero esos conjuntos; sólo cuando coinciden basta demostrar igualdad de valores para toda entrada.

Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{u\}$ y $C = \{u, v\}$. Las asignaciones $f : A \to B$ y $g : A \to C$ con $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = u$ tienen la misma gráfica $\{(1, u), (2, u)\}$. Bajo la convención de §9.4 son objetos distintos. Además, f alcanza todo su codominio y g deja v sin alcanzar. La diferencia declarada tiene una consecuencia matemática.

Para comprobarlo. Sea $h : \{1\} \to B$, $h(1) = u$. ¿Coincide con f porque ambas usan la regla «enviar a u»? ¿Y coincide con la restricción $f|_{\{1\}}$?

Solución. No coincide con f: sus dominios son distintos. Sí coincide con la restricción, porque ambas tienen dominio $\{1\}$, codominio B y valor u en la única entrada. Una regla verbal común no reemplaza la comprobación de esos tres datos.

9.5. Imágenes de subconjuntos

Si $S \subseteq A$, definimos la imagen de S por

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\}.$$

Para $S, T \subseteq A$ siempre se cumple

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T).$$

También

$$f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T),$$

pero la inclusión puede ser estricta.

Ejemplo: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $f(x) = x^2$, $S = \{-1\}$ y $T = \{1\}$, entonces $S \cap T = \varnothing$, de modo que $f(S \cap T) = \varnothing$, mientras

$$f(S) \cap f(T) = \{1\}.$$

La colisión $f(-1) = f(1)$ explica la diferencia. Cuando f es inyectiva, la igualdad de intersecciones sí se recupera.

9.6. Preimágenes, restricciones y cambio de codominio

Si $T \subseteq B$, la **preimagen** de T es

$$f^{-1}(T) = \{x \in A : f(x) \in T\}.$$

Esta notación tiene sentido aunque f no posea función inversa.

La preimagen preserva exactamente las operaciones básicas:

$$f^{-1}(T \cup U) = f^{-1}(T) \cup f^{-1}(U),$$

$$f^{-1}(T \cap U) = f^{-1}(T) \cap f^{-1}(U),$$

$$f^{-1}(B \setminus T) = A \setminus f^{-1}(T).$$

Si $S \subseteq A$, la **restricción** $f|_S : S \to B$ usa la misma regla de f, pero sólo admite entradas de S.

También podemos reemplazar el codominio por un conjunto menor que contenga la imagen. Este cambio puede alterar la sobreyectividad, pero no los valores de la función.

9.7. Inyectividad

Una función $f : A \to B$ es **inyectiva** si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Equivalentemente, por contraposición,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Una función inyectiva no presenta colisiones entre entradas distintas.

La inclusión de la sección anterior se fortalece: si f es inyectiva, entonces para todo $S, T \subseteq A$,

$$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T).$$

La inclusión de izquierda a derecha siempre vale. Para la otra, si $y \in f(S) \cap f(T)$, existen $s \in S$ y $t \in T$ con $f(s) = y = f(t)$. La inyectividad fuerza $s = t$, de modo que ese elemento pertenece a $S \cap T$.

9.8. Sobreyectividad

Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \; (f(a) = b).$$

Equivale a

$$\mathrm{Im}(f) = B.$$

La sobreyectividad depende del codominio. No es correcto preguntar simplemente "¿f es sobreyectiva?" sin saber hacia qué conjunto se declara la función.

Para probar sobreyectividad suele tomarse un $b \in B$ arbitrario y construirse una entrada $a \in A$ con $f(a) = b$.

9.9. Biyectividad

Una función es **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva.

Esto significa:

- cada elemento del codominio recibe al menos una preimagen;
- ningún elemento del codominio recibe más de una preimagen.

Por tanto cada $b \in B$ corresponde a exactamente un $a \in A$.

Las biyecciones serán precisamente las funciones que pueden deshacerse mediante una función inversa.

9.10. Composición de funciones

Sean

$$f : A \to B, \qquad g : B \to C.$$

La composición es

$$g \circ f : A \to C,$$

definida por

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

El orden es importante: **primero actúa f, después g.**

Si los conjuntos intermedios no son compatibles, la composición puede no estar definida con los tipos declarados.

La composición no es conmutativa en general. Para funciones numéricas, por ejemplo, si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$,

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2,$$

mientras

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

9.11. Identidad y asociatividad

Para cada conjunto A, la función identidad es

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \qquad \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Si $f : A \to B$,

$$f \circ \mathrm{id}_A = f,$$

$$\mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Además, si las composiciones tienen tipos compatibles,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

La prueba es puntual: para cada a,

$$[h \circ (g \circ f)](a) = h(g(f(a))) = [(h \circ g) \circ f](a).$$

La asociatividad permite escribir $h \circ g \circ f$ sin ambigüedad de paréntesis, aunque el orden de las funciones no pueda permutarse.

9.12. Inyectividad y sobreyectividad bajo composición

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$.

Si ambas son inyectivas y

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2),$$

la inyectividad de g da $f(x_1) = f(x_2)$ y la de f da $x_1 = x_2$. Luego $g \circ f$ es inyectiva.

Si ambas son sobreyectivas, dado $c \in C$, existe $b \in B$ con $g(b) = c$, y existe $a \in A$ con $f(a) = b$. Entonces $(g \circ f)(a) = c$.

Hay dos conclusiones útiles en sentido inverso:

- si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva;
- si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Las otras recíprocas son falsas en general y deben controlarse mediante contraejemplos.

Qué parte del conjunto intermedio visita la composición. Para $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la composición sólo evalúa g en los elementos de $f(A)$. No examina por separado todos los puntos de B. Por eso una colisión de g que ocurra fuera de esa parte puede quedar oculta.

Dato sobre $g \circ f$	Conclusión necesaria	Conclusión que no queda garantizada
Inyectividad	f es inyectiva	g es inyectiva en todo B
Sobreyectividad	g es sobreyectiva	f alcanza todo B

La primera conclusión se obtiene empezando con $f(a_1) = f(a_2)$ y aplicando g; no requiere cancelar g. La segunda comienza con un $c \in C$ arbitrario y usa una entrada a que la composición envía a c: entonces $f(a)$ proporciona la preimagen requerida para g.

Para comprobarlo. Tome $A = \{1, 2\}$, $B = \{u, v, w\}$ y $C = \{0, 1\}$. Defina $f(1) = u$, $f(2) = v$ y $g(u) = 0$, $g(v) = 1$, $g(w) = 0$. Determine qué defectos quedan fuera de la parte visitada.

Solución. La composición envía 1 a 0 y 2 a 1: es biyectiva. f no alcanza w y g identifica u con w, de modo que no es inyectiva. El punto w no se visita al componer, así que no produce una colisión entre las entradas de A. La restricción de g a $\{u, v\}$ sí es biyectiva hacia C.

9.13. Función inversa

Sea $f : A \to B$ una biyección. Para cada $b \in B$ existe exactamente un $a \in A$ con $f(a) = b$. Podemos definir

$$f^{-1} : B \to A$$

por

$$f^{-1}(b) = a \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = b.$$

Entonces

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

y

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,.$$

La inversa no es $1/f$. Tampoco basta "despejar" una expresión: hay que verificar dominios, codominios y unicidad.

9.14. Invertibilidad e inversas laterales

Una función tiene inversa bilateral si y sólo si es biyectiva.

La dirección "biyectiva $\Rightarrow$ invertible" construye f^{-1} usando existencia y unicidad. Para la dirección contraria, si existe $g : B \to A$ con

$$g \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

entonces f es inyectiva y sobreyectiva.

También aparecen inversas laterales:

- $g \circ f = \mathrm{id}_A$: g es inversa izquierda de f y fuerza que f sea inyectiva;
- $f \circ h = \mathrm{id}_B$: h es inversa derecha de f y fuerza que f sea sobreyectiva.

Cuando existe una inversa bilateral, es única.

Construir primero una asignación bien definida. La expresión «envíe b a un a que cumpla $f(a) = b$» necesita dos justificaciones antes de definir una función $B \to A$. Para cada $b \in B$ debe existir una entrada admisible $a \in A$; además, dos entradas que satisfagan la condición deben ser iguales. La sobreyectividad aporta existencia y la inyectividad aporta unicidad.

Una vez construida g, las dos composiciones responden preguntas distintas. Para $a \in A$, el propio a es una preimagen de $f(a)$; por unicidad, $g(f(a)) = a$. Para $b \in B$, la entrada $g(b)$ fue elegida precisamente para cumplir $f(g(b)) = b$. Así se verifican las identidades sobre sus respectivos dominios.

Una identidad lateral no puede sustituir ambas comprobaciones. Tampoco debe usarse la supuesta inversa para probar la unicidad que todavía hace falta para construirla: ese razonamiento sería circular.

Para comprobarlo. Considere $f : \{1, 2\} \to \{u, v\}$, $f(1) = u$, $f(2) = v$. Construya g justificando existencia y unicidad antes de calcular las composiciones.

Solución. Para u existe la preimagen 1 y es única porque 2 va a v; para v existe la preimagen 2 y es única porque 1 va a u. Definimos entonces $g(u) = 1$, $g(v) = 2$. Las evaluaciones dan $g(f(1)) = 1$, $g(f(2)) = 2$, $f(g(u)) = u$ y $f(g(v)) = v$. Son las dos identidades requeridas, no sólo coincidencias de fórmulas.

9.15. Dos significados de f^{-1}

La notación f^{-1} tiene dos usos que deben distinguirse por tipo.

Si f es biyectiva,

$$f^{-1} : B \to A$$

es una **función inversa**.

Para cualquier función $f : A \to B$ y cualquier $T \subseteq B$,

$$f^{-1}(T) = \{x \in A : f(x) \in T\}$$

es una **preimagen**.

Ejemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, no tiene función inversa en esos dominios, pero

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$$

está perfectamente definida como preimagen.

Leer el argumento de la notación inversa. La preimagen recibe un **subconjunto** del codominio y devuelve un subconjunto del dominio. No exige escoger una sola entrada para cada valor: reúne todas las entradas que cumplen la condición. Por eso sigue definida cuando hay colisiones o valores sin alcanzar.

Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, tenemos $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$ y $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$. El primer resultado tiene dos elementos y el segundo ninguno. Ninguno de esos hechos contradice la definición de preimagen; ambos impedirían construir una inversa bilateral de esta función.

Para comprobarlo. Calcule $f^{-1}(\varnothing)$ y $f^{-1}(\{-1, 4\})$. Explique si la primera respuesta depende de que f sea inyectiva.

Solución. Ningún valor puede pertenecer al conjunto vacío, así que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. La segunda condición dice $x^2 = -1$ o $x^2 = 4$; la primera es imposible en $\mathbb{R}$ y la segunda tiene

soluciones $-2, 2$. Por tanto la preimagen es $\{-2, 2\}$. La preimagen del vacío es vacía para cualquier función: se deduce de pertenencia, sin usar inyectividad ni existencia de inversa.

9.16. Cierre — de función a estructura

Ante una función conviene preguntar:

1. ¿cuáles son dominio y codominio?;
2. ¿la relación es total y tiene salida única?;
3. ¿cuál es la imagen?;
4. ¿es inyectiva?;
5. ¿es sobreyectiva?;
6. ¿es biyectiva?;
7. ¿las composiciones están bien tipadas?;
8. ¿interviene una identidad?;
9. ¿f^{-1} significa inversa o preimagen?;
10. ¿qué identidad de composición debe verificarse?

La composición, la identidad y la inversa forman un lenguaje que reaparecerá en toda la serie. Más adelante una pregunta será central:

> **¿Qué ocurre cuando una función, además de asignar elementos, conserva las operaciones de una estructura algebraica?**

Ése será el horizonte de los homomorfismos. Aquí cerramos antes de desarrollarlo.

Ejercicios

Todos los ejercicios son originales para *Álgebra para matemáticos* y se calibran con el corpus rector del capítulo. Los identificadores editoriales se conservan sólo en comentarios internos no renderizados.

A. De relaciones a funciones

1. **Nivel A.** Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Decide si $R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ es una función $A \to B$.
2. **Nivel B.** Con los mismos conjuntos, decide si $R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$ es función y localiza el axioma que falla.
3. **Nivel B.** Con los mismos conjuntos, decide si $R = \{(1, a), (2, b)\}$ define una función $A \to B$.
4. **Nivel C.** Explica por qué la relación vacía $\varnothing \subseteq A \times B$ es función $A \to B$ exactamente cuando $A = \varnothing$.
5. **Nivel C.** Sea $R \subseteq A \times B$ una relación. Reescribe «R es función de A en B» usando cuantificadores, conectivos lógicos, igualdad y pertenencia, sin emplear $\exists!$.
6. **Nivel D.** Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, ¿cuántas funciones $A \to B$ existen? Justifica.

B. Dominio, codominio, imagen y evaluación

7. **Nivel A.** Sea $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ dada por $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = c$. Determina dominio, codominio e imagen.
8. **Nivel B.** Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, calcula $f(0)$, $f(-2)$ y describe $\mathrm{Im}(f)$.
9. **Nivel B.** Una tabla asigna $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 6$. Escribe la función como conjunto de pares.

10. **Nivel C.** Compara $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, y $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$. ¿Tienen los mismos valores? ¿Son el mismo objeto en este capítulo?
11. **Nivel C.** Sea $f : A \to B$. Demuestra que $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$.
12. **Nivel C.** Da un ejemplo de una función cuyo modo natural de definición no sea una sola fórmula algebraica.

C. Imágenes y preimágenes de subconjuntos

13. **Nivel A.** Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ con $f(1) = a, f(2) = a, f(3) = b, f(4) = c$. Calcula $f(\{1, 3, 4\})$.
14. **Nivel B.** Con la misma función, calcula $f^{-1}(\{a, c\})$.
15. **Nivel C.** Demuestra que $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ para $S, T \subseteq A$.
16. **Nivel C.** Demuestra $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$ y da un ejemplo donde la inclusión sea estricta.
17. **Nivel C.** Demuestra $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.
18. **Nivel D.** Demuestra $f^{-1}(B \setminus U) = A \setminus f^{-1}(U)$ para $U \subseteq B$.

D. Igualdad, restricciones y cambio de codominio

19. **Nivel B.** Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Demuestra que $f = g$.
20. **Nivel B.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Describe $f|_{[0,\infty)}$.
21. **Nivel C.** ¿Puede la función anterior recodificarse como $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$? Justifica.
22. **Nivel C.** Explica por qué no es válido declarar $h : \mathbb{R} \to (-\infty, 0]$, $h(x) = x^2$.
23. **Nivel C.** Sea $f : A \to B$ y $S \subseteq A$. Demuestra que $\mathrm{Im}(f|_S) = f(S)$.
24. **Nivel D.** Dos funciones tienen la misma gráfica como conjunto de pares, pero una se declara $A \to B$ y otra $A \to C$ con $B \neq C$. Explica por qué el codominio impide identificarlas en la convención de C9.

E. Inyectividad

25. **Nivel B.** Decide si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, es inyectiva.
26. **Nivel B.** Decide si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, es inyectiva.
27. **Nivel C.** Demuestra que la inclusión $i : S \hookrightarrow A$, $i(s) = s$, es inyectiva.
28. **Nivel C.** Demuestra que si f es inyectiva, entonces $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$.
29. **Nivel D.** Demuestra que si $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ para todos $S, T \subseteq A$, entonces f es inyectiva.
30. **Nivel D.** Sea $f : A \to B$. Demuestra que f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}(f(S)) = S$ para todo $S \subseteq A$.

F. Sobreyectividad

31. **Nivel B.** Decide si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, es sobreyectiva.
32. **Nivel B.** Decide si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, es sobreyectiva.
33. **Nivel C.** Explica por qué $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$, sí es sobreyectiva.
34. **Nivel C.** Sea $f : A \to B$. Demuestra que f es sobreyectiva si y sólo si $f(f^{-1}(T)) = T$ para todo $T \subseteq B$.
35. **Nivel C.** Sea $f : A \to B$ y supón que existe $b_0 \in B$ sin preimagen. ¿Qué conclusión inmediata obtienes?
36. **Nivel D.** Si A y B son finitos con $|A| < |B|$, demuestra que no existe función sobreyectiva $A \to B$.

G. Biyectividad

37. **Nivel B.** Decide si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$, es biyectiva.
38. **Nivel C.** Decide si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, es biyectiva.
39. **Nivel C.** Si A y B son finitos con igual cardinalidad, demuestra que una función inyectiva $f : A \to B$ es sobreyectiva.
40. **Nivel C.** En la situación anterior, demuestra también que una función sobreyectiva es inyectiva.
41. **Nivel D.** Sea $f : A \to B$ biyectiva. Explica por qué para cada $b \in B$ existe exactamente un $a \in A$ con $f(a) = b$.
42. **Nivel D.** Construye una biyección entre $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{a, b, c, d\}$ y justifica sin enumerar todas las propiedades por separado.

H. Composición

43. **Nivel A.** Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x$, calcula $(g \circ f)(3)$.
44. **Nivel B.** Con las mismas funciones, calcula fórmulas para $g \circ f$ y $f \circ g$.
45. **Nivel B.** Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$. ¿Qué condición sencilla garantiza que $g \circ f$ esté definida como composición total sobre A?
46. **Nivel C.** Sean $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ con $1, 2 \mapsto a$ y $3 \mapsto b$, y $g : \{a, b\} \to \{0, 1\}$ con $g(a) = 0, g(b) = 1$. Escribe $g \circ f$.
47. **Nivel C.** Demuestra que si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
48. **Nivel C.** Demuestra que si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
49. **Nivel D.** Demuestra que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
50. **Nivel D.** Demuestra que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

I. Identidad y asociatividad

51. **Nivel A.** Escribe $\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}$ como conjunto de pares.
52. **Nivel B.** Demuestra $f \circ \mathrm{id}_A = f$ para $f : A \to B$.
53. **Nivel B.** Demuestra $\mathrm{id}_B \circ f = f$.
54. **Nivel C.** Demuestra la asociatividad $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
55. **Nivel C.** Da un ejemplo explícito que muestre que la composición no es conmutativa.
56. **Nivel D.** Si $f : A \to B$ y $g : B \to A$ satisfacen $g \circ f = \mathrm{id}_A$, explica por qué f no puede identificar dos entradas distintas.

J. Inversas

57. **Nivel B.** Encuentra la inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$.
58. **Nivel C.** Encuentra la inversa de $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$.
59. **Nivel C.** Explica por qué $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, no tiene función inversa.
60. **Nivel C.** Demuestra que si g y h son dos inversas bilaterales de f, entonces $g = h$.
61. **Nivel D.** Demuestra que si f posee una inversa bilateral, entonces es inyectiva.
62. **Nivel D.** Demuestra que si f posee una inversa bilateral, entonces es sobreyectiva.
63. **Nivel D.** Demuestra que si f es biyectiva, entonces la definición $f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$ produce una función bien definida.
64. **Nivel D.** Concluye que f es invertible si y sólo si es biyectiva.

K. Preimagen frente a inversa

65. **Nivel B.** Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, calcula $f^{-1}(\{4\})$ e interpreta la notación.
66. **Nivel B.** Para la misma función, calcula $f^{-1}([0, 9])$.
67. **Nivel C.** Si f es biyectiva y $T \subseteq B$, relaciona la preimagen $f^{-1}(T)$ con la imagen de T bajo la función inversa.
68. **Nivel D.** Refuta la afirmación «$f^{-1}(x) = 1/f(x)$» con un ejemplo sencillo.

L. Síntesis y transferencia

69. **Nivel D.** Sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Si $g \circ f$ es biyectiva, ¿qué puedes concluir necesariamente sobre f y sobre g?
70. **Nivel D.** Construye un ejemplo finito donde $g \circ f$ sea biyectiva, f no sea sobreyectiva y g no sea inyectiva.
71. **Nivel E.** Sea $f : A \to B$. Demuestra que si existe $g : B \to A$ con $g \circ f = \mathrm{id}_A$, entonces f es inyectiva; y si existe $h : B \to A$ con $f \circ h = \mathrm{id}_B$, entonces f es sobreyectiva.
72. **Nivel E.** Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, demuestra que $g \circ f$ es biyectiva y anticipa una fórmula para su inversa.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E.** Demuestra la equivalencia de las siguientes condiciones para $f : A \to B$:

(I) f es inyectiva;

(II) para todos $S, T \subseteq A$, $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$;

(III) para todo $S \subseteq A$, $f^{-1}(f(S)) = S$.

Organiza la prueba como un ciclo de implicaciones y explicita dónde se usa inyectividad.

74. **Nivel E.** Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $S \subseteq A$ y $U \subseteq C$.

(a) Demuestra $(g \circ f)(S) = g(f(S))$.

(b) Demuestra $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

(c) Explica por qué (b) no requiere que f ni g sean invertibles.

75. **Nivel F.** Supón $f : A \to B$ y $g : B \to C$ y que $g \circ f : A \to C$ es biyectiva.

(a) Demuestra que f es inyectiva.

(b) Demuestra que g es sobreyectiva.

(c) Construye un contraejemplo finito donde f no sea sobreyectiva.

(d) Construye un contraejemplo finito donde g no sea inyectiva.

(e) Formula hipótesis adicionales suficientes para concluir que ambos son biyectivos.

76. **Nivel F.** Refuta mediante ejemplos separados las recíprocas falsas:

(a) «si f es inyectiva, entonces $g \circ f$ es inyectiva»;

(b) «si g es sobreyectiva, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva»;

(c) «si $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva»;

(d) «si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva».

En cada caso explica qué parte de la composición oculta el defecto.

77. **Nivel F.** Demuestra cuidadosamente el teorema:

    Una función $f : A \to B$ posee una inversa bilateral si y sólo si es biyectiva.

En la dirección constructiva debes demostrar que la definición de f^{-1} es una función antes de verificar las composiciones.

78. **Nivel G.** Sean $f : A \to B$, $g : B \to A$ y $h : B \to A$ tales que

$$g \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ h = \mathrm{id}_B .$$

Demuestra, sin suponer previamente biyectividad, que f es biyectiva y que necesariamente $g = h = f^{-1}$.

79. **Nivel G.** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyecciones. Demuestra

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Tu demostración debe controlar los tipos de todas las funciones y verificar ambas composiciones con la identidad.

80. **Nivel G.** Sean conjuntos finitos A, B, C y funciones $f : A \to B$, $g : B \to C$. Se sabe que $|A| = |C| = 4$, $|B| = 6$ y que $g \circ f : A \to C$ es biyectiva.

(a) Determina qué puede afirmarse necesariamente de f y g.

(b) ¿Puede f ser sobreyectiva?

(c) ¿Puede g ser inyectiva?

(d) Describe la estructura mínima que deben tener $f(A) \subseteq B$ y la restricción $g|_{f(A)}$.

(e) Construye un ejemplo concreto con estos cardinales.

N. Construir composiciones con datos prescritos

81. **Nivel E. Completar una función después de otra.** Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{0, 1\}$. Defina $f : A \to B$ por $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = c$, y $h : A \to C$ por $h(1) = h(2) = 0$, $h(3) = h(4) = 1$. Determine todas las funciones $g : B \to C$ tales que $g \circ f = h$.
82. **Nivel F. Elegir las entradas intermedias.** Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{0, 1\}$. Fije $g(a) = 0$, $g(b) = g(c) = 1$ y $h(1) = h(2) = 1$, $h(3) = 0$. Encuentre todas las $f : A \to B$ que cumplen $g \circ f = h$, y cuente cuántas son inyectivas.
83. **Nivel F. Cuándo puede pasarse por una función dada.** Sea $f : A \to B$ con $f(A) = B$ y sea $h : A \to C$. Pruebe que existe $g : B \to C$ con $g \circ f = h$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ implica $h(x) = h(y)$. Demuestre también que, cuando existe, g es única.
84. **Nivel D. El dominio admisible de una composición.** Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$, y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(t) = 1/t$. Encuentre el mayor subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ en el que $g(f(x))$ está definido para toda entrada. Declare las funciones intermedias necesarias y la fórmula de la composición.
85. **Nivel E. Dos composiciones con dominios distintos.** Sean $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt{y}$. Calcule ambas composiciones y sus tipos. ¿Qué identidad se cumple y por qué no basta para afirmar que g es inversa bilateral de f?
86. **Nivel F. Contar factorizaciones de la identidad.** Para $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$, cuente todos los pares de funciones $f : A \to B$, $g : B \to A$ que cumplen $g \circ f = \mathrm{id}_A$. ¿Puede algún g de esos pares ser inyectivo? Justifique el conteo sin duplicaciones.

O. Imágenes, preimágenes y cambios de conjuntos

87. **Nivel D. Restricción y cambio de codominio en una tabla.** Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ con valores a, a, b, c, en ese orden. Para $S = \{2, 3\}$ y $T = \{a, d\}$, calcule $f(S)$ y $f^{-1}(T)$. Restrinja a S y reduzca después el codominio al menor conjunto posible. Determine si la función resultante es biyectiva y qué sucede con las preimágenes.
88. **Nivel E. Separar valores alcanzables e inalcanzables.** Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, calcule las preimágenes de $\varnothing$, $\{-2, 1, 5\}$ y $(1, 5]$. Repita para la restricción a $[0, \infty)$ con codominio $[1, \infty)$, usando en el segundo caso $\{1, 5\}$. Explique cada pérdida de entradas.
89. **Nivel F. Recuperar todas las entradas indistinguibles.** Sea $f : A \to B$ y defina $K(S) = f^{-1}(f(S))$ para $S \subseteq A$. Pruebe $S \subseteq K(S)$ y $K(K(S)) = K(S)$. Caracterice exactamente los subconjuntos que cumplen $K(S) = S$ usando los conjuntos $F_b = \{x \in A : f(x) = b\}$.
90. **Nivel E. Imagen de una preimagen sin sobreyectividad.** Para cualquier $f : A \to B$ y $T \subseteq B$, demuestre $f(f^{-1}(T)) = T \cap \operatorname{Im}(f)$. Aplíquelo a la función constante $f : \{1, 2\} \to \{u, v\}$ de valor u, para todos los subconjuntos de su codominio.
91. **Nivel F. Cuándo dos conjuntos tienen la misma preimagen.** Pruebe que $f^{-1}(T) = f^{-1}(U)$ si y sólo si $T \cap \operatorname{Im}(f) = U \cap \operatorname{Im}(f)$. Deduzca que todas las preimágenes distinguen subconjuntos distintos del codominio exactamente cuando f es sobreyectiva.
92. **Nivel D. Preimágenes después de restringir.** Sea $f : A \to B$ y $S \subseteq A$. Demuestre que $(f|_S)^{-1}(T) = S \cap f^{-1}(T)$ para $T \subseteq B$. Use el resultado para $f(x) = x^2$, $A = B = \mathbb{R}$, $S = (-\infty, 0)$ y $T = \{0, 9\}$.

P. Hipótesis y cancelación en composiciones

93. **Nivel F. El criterio exacto para evitar colisiones al componer.** Pruebe que $g \circ f : A \to C$ es inyectiva si y sólo si $f : A \to B$ es inyectiva y $g|_{f(A)} : f(A) \to C$ es inyectiva. Explique cómo permite construir ejemplos con g no inyectiva en todo B.
94. **Nivel E. Alcanzar el codominio final.** Una función $g : B \to C$ es sobreyectiva. Para cada $c \in C$ escriba $G_c = \{b \in B : g(b) = c\}$. Pruebe que $g \circ f$ es sobreyectiva si y sólo si $f(A)$ corta cada G_c. Dé un ejemplo con dos puntos en cada G_c donde f alcance exactamente uno de cada par.
95. **Nivel F. Cancelar una función a la izquierda.** Sea $f : A \to B$. Demuestre que es inyectiva si y sólo si, para todo conjunto X y todas las funciones $u, v : X \to A$, la igualdad $f \circ u = f \circ v$ implica $u = v$. Para probar necesidad, encuentre un conjunto de prueba pequeño.
96. **Nivel F. Cancelar una función a la derecha.** Pruebe que $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si, para todas $u, v : B \to \{0, 1\}$, la igualdad $u \circ f = v \circ f$ implica $u = v$. Construya explícitamente el contraejemplo cuando falta un valor en la imagen.
97. **Nivel E. Una hipótesis que recupera la inyectividad perdida.** Se sabe que $g \circ f$ es inyectiva y que f es sobreyectiva. Demuestre que g es inyectiva. Señale el paso que se vuelve imposible si se retira la sobreyectividad de f.
98. **Nivel E. Una hipótesis que recupera la cobertura intermedia.** Se sabe que $g \circ f$ es sobreyectiva y que g es inyectiva. Demuestre que f es sobreyectiva. ¿Dónde interviene la inyectividad de g?

Q. Construcción y diagnóstico de inversas

99. **Nivel F. Todas las inversas izquierdas de una inclusión.** Sea $i : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $i(x) = x$. Encuentre y cuente todas las $r : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2\}$ con $r \circ i = \mathrm{id}_{\{1,2\}}$. Determine si alguna cumple también $i \circ r = \mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}}$.

100. **Nivel F. Todas las inversas derechas de una función finita.** Sea $p : \{1, 2, 3, 4\} \to \{u, v\}$ con $p(1) = p(2) = u$, $p(3) = p(4) = v$. Determine todas las $s : \{u, v\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ que cumplen $p \circ s = \mathrm{id}_{\{u,v\}}$. ¿Alguna es inversa bilateral?
101. **Nivel F. La excepción del dominio vacío.** Sea $f : \varnothing \to B$ la función vacía. Determine para qué B existe una inversa izquierda $r : B \to \varnothing$ y para qué B existe una inversa bilateral. Explique por qué «toda función inyectiva tiene inversa izquierda» requiere controlar este caso.
102. **Nivel F. Construir una inversa por casos y controlar los extremos.** Defina $f : \mathbb{R} \to (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ por $f(x) = x-1$ si $x < 0$ y $f(x) = x+1$ si $x \geq 0$. Construya su inversa justificando existencia, unicidad, dominios y ambas composiciones. Explique por qué -1 está excluido del codominio y 1 no.
103. **Nivel F. Una función que se deshace a sí misma.** Determine todas las funciones $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ tales que $f \circ f = \mathrm{id}$ y exactamente una entrada cumple $f(x) = x$. Justifique que no faltan posibilidades y que cada función encontrada es su propia inversa.
104. **Nivel G. Diagnosticar una cancelación indebida.** Sea $f : A \to A$ con $f \circ f = f$. Un estudiante cancela f y concluye $f = \mathrm{id}_A$. Determine cuándo la conclusión es válida: pruebe que una función con esa ecuación es invertible si y sólo si es la identidad. Dé un contraejemplo no invertible sobre tres elementos y pruebe que, en cualquier caso, f actúa como identidad sobre su imagen.

Soluciones razonadas

A. De relaciones a funciones

1. Sí. Cada elemento de A aparece exactamente una vez como primera componente. Por tanto existe una única salida en B para cada entrada.

2. No es función: la entrada 1 tiene dos salidas distintas, a y b. Falla unicidad, aunque sí hay al menos una salida para cada elemento del dominio.

3. No. La entrada 3 no tiene salida. Falla totalidad.

4. Si $A = \varnothing$, la condición universal «para todo $a \in A$ existe una única salida» es vacíamente verdadera. Si $A \neq \varnothing$, cualquier $a \in A$ carece de salida, así que falla totalidad.

5. R es función si y sólo si $\forall a \in A\, \exists b \in B\big((a, b) \in R \wedge \forall c \in B((a, c) \in R \Rightarrow c = b)\big)$. La existencia y la unicidad aparecen por separado.

6. Si $m > 0$, cada una de las m entradas puede elegir independientemente una de las n salidas. Para $n > 0$, la regla del producto da n^m funciones. Si $n = 0$ y $m > 0$, no hay funciones, lo que coincide con $0^m = 0$.

Si $m = 0$, existe exactamente una función: la función vacía, incluso cuando $n = 0$. Para $n > 0$ esto coincide con $n^0 = 1$. El caso en que ambos conjuntos son vacíos se cuenta directamente; no requiere asignar un valor aritmético a 0^0.

B. Dominio, codominio, imagen y evaluación

7. Dominio: $\{1, 2, 3\}$. Codominio: $\{a, b, c, d\}$. Imagen: $\{a, c\}$. En particular, imagen y codominio no coinciden.

8. $f(0) = 1$ y $f(-2) = 5$. Como $x^2 \geq 0$, la imagen es $[1, \infty)$, y todo $y \geq 1$ se obtiene tomando $x = \sqrt{y - 1}$.

9. $f = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$. Esta escritura muestra explícitamente a la función como relación.

10. Tienen el mismo valor para cada entrada real, pero codominios distintos. Bajo la convención estructural del capítulo son funciones distintas. Además, g es sobreyectiva y f no.

11. Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, existe $x \in A$ con $y = f(x)$. Como los valores de una función $A \to B$ pertenecen a B, se tiene $y \in B$. Por inclusión, $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$.

12. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ si $x < 0$. Es una función por casos; estructuralmente sigue asignando una única salida a cada entrada.

C. Imágenes y preimágenes de subconjuntos

13. $f(\{1,3,4\}) = \{a,b,c\}$. La repetición de valores no produce multiplicidades en un conjunto.

14. Las entradas cuyos valores están en $\{a,c\}$ son $1,2,4$. Por tanto $f^{-1}(\{a,c\}) = \{1,2,4\}$.

15. Si $y \in f(S \cup T)$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in S \cup T$; así $x \in S$ o $x \in T$, y $y \in f(S) \cup f(T)$. La recíproca se obtiene invirtiendo el argumento.

16. Si $y = f(x)$ con $x \in S \cap T$, entonces x pertenece a ambos conjuntos, luego $y \in f(S)$ y $y \in f(T)$. Para $f(x) = x^2$, $S = \{-1\}$, $T = \{1\}$, el lado izquierdo es vacío y el derecho es $\{1\}$.

17. $x \in f^{-1}(U \cup V)$ equivale a $f(x) \in U \cup V$, es decir, $f(x) \in U$ o $f(x) \in V$. Esto equivale a $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

18. $x \in f^{-1}(B \setminus U)$ iff $f(x) \in B \setminus U$ iff $f(x) \notin U$ iff $x \notin f^{-1}(U)$. Como x está en el dominio A, esto es $x \in A \setminus f^{-1}(U)$.

D. Igualdad, restricciones y cambio de codominio

19. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Tienen mismo dominio y codominio y coinciden punto a punto; por tanto son la misma función.

20. La restricción es $f|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, con la misma regla $x \mapsto x^2$. Cambia el dominio, no los valores admitidos en las entradas conservadas.

21. Sí, porque para todo $x \geq 0$ se tiene $x^2 \geq 0$. El nuevo codominio contiene toda la imagen. Esta recodificación será además biyectiva.

22. Porque para $x = 1$ se obtiene $h(1) = 1 \notin (-\infty, 0]$. La regla no produce valores en el codominio declarado.

23. Ambos conjuntos consisten exactamente en los valores $f(x)$ obtenidos con $x \in S$. La restricción cambia el dominio a S, por lo que su imagen es la imagen directa de S bajo f.

24. El codominio es parte del tipo de la función. La misma colección de pares puede verse como una asignación hacia distintos codominios permitidos, pero propiedades como sobreyectividad cambian. Por ello se conservan como objetos tipados distintos.

E. Inyectividad

25. Sí. Si $2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$, entonces $2x_1 = 2x_2$ y $x_1 = x_2$.

26. No. $f(1) = 1 = f(-1)$ con $1 \neq -1$. Una sola colisión entre entradas distintas basta.

27. Si $i(s_1) = i(s_2)$, entonces $s_1 = s_2$ porque $i(s) = s$. Por definición, i es inyectiva.

28. La inclusión $\subseteq$ vale siempre. Si $y \in f(S) \cap f(T)$, existen $s \in S, t \in T$ con $f(s) = y = f(t)$. Inyectividad implica $s = t$, así que ese elemento está en $S \cap T$ y $y \in f(S \cap T)$.

29. Supón $f(a) = f(b)$. Toma $S = \{a\}$ y $T = \{b\}$. Si $a \neq b$, entonces $S \cap T = \varnothing$, pero $f(a)$ pertenece a $f(S) \cap f(T)$, contradiciendo la igualdad. Luego $a = b$.

30. Siempre $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Si f es inyectiva y x está en el lado derecho, existe $s \in S$ con $f(x) = f(s)$, luego $x = s \in S$. Recíprocamente, aplica la igualdad a $S = \{a\}$: si $f(x) = f(a)$, entonces $x \in f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$.

F. Sobreyectividad

31. Sí. Dado $y \in \mathbb{R}$, toma $x = \sqrt[3]{y}$. Entonces $f(x) = y$.

32. No. Ningún real se envía a -1, pues $x^2 \geq 0$.

33. Dado $y \geq 0$, toma $x = \sqrt{y}$ (también serviría $-\sqrt{y}$). Entonces $g(x) = y$.

34. Siempre $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$. Si f es sobreyectiva y $y \in T$, existe x con $f(x) = y$, por lo que $x \in f^{-1}(T)$ y y está en la imagen. Recíprocamente, toma $T = B$: la igualdad da $f(A) = B$.

35. f no es sobreyectiva, porque la definición exige una preimagen en A para todo elemento de B.

36. Una función asigna a cada una de las $|A|$ entradas un solo valor, de modo que su imagen tiene a lo sumo $|A|$ elementos. Si $|A| < |B|$, la imagen no puede ser todo B.

G. Biyectividad

37. Es inyectiva porque $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$ implica $x_1 = x_2$. Es sobreyectiva porque dado y, $x = (y - 2)/3$ satisface $f(x) = y$.

38. Es inyectiva en $[0, \infty)$ y sobreyectiva hacia $[0, \infty)$ porque cada $y \geq 0$ tiene preimagen única $\sqrt{y}$.

39. La inyectividad produce $|A|$ valores distintos en B. Como $|A| = |B|$, esos valores agotan B. Así $\mathrm{Im}(f) = B$.

40. La sobreyectividad exige que los $|B| = |A|$ elementos de B aparezcan como valores de las $|A|$ entradas. Si hubiera una colisión, quedarían menos de $|B|$ valores distintos, contradicción.

41. La sobreyectividad da existencia. Si $f(a_1) = b = f(a_2)$, la inyectividad da $a_1 = a_2$. Por tanto existe una única preimagen.

42. Por ejemplo $1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c, 4 \mapsto d$. Cada elemento del codominio aparece exactamente una vez: por ello hay ausencia de colisiones (inyectividad) y cobertura total (sobreyectividad).

H. Composición

43. $f(3) = 4$ y luego $g(4) = 8$. Por tanto $(g \circ f)(3) = 8$.

44. $(g \circ f)(x) = 2(x+1) = 2x+2$, mientras $(f \circ g)(x) = 2x+1$. No coinciden.

45. Basta que $f(A) \subseteq C$. Una condición más fuerte y habitual es $B = C$. Así cada valor producido por f es una entrada permitida para g.

46. $g \circ f = \{(1,0),(2,0),(3,1)\}$. Se sustituye cada salida de f en g.

47. Si $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, la inyectividad de g da $f(x_1) = f(x_2)$ y la de f da $x_1 = x_2$.

48. Dado c en el codominio de g, sobreyectividad de g da b con $g(b) = c$. Sobreyectividad de f da a con $f(a) = b$. Entonces $(g \circ f)(a) = c$.

49. Si $f(x_1) = f(x_2)$, al aplicar g se obtiene $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. La inyectividad de la composición fuerza $x_1 = x_2$.

50. Dado c en el codominio de g, la sobreyectividad de $g \circ f$ da a con $g(f(a)) = c$. Tomando $b = f(a)$, existe una preimagen de c bajo g.

I. Identidad y asociatividad

51. $\mathrm{id} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

52. Para todo $a \in A$, $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$. Luego las funciones coinciden punto a punto.

53. Para todo $a \in A$, $(\mathrm{id}_B \circ f)(a) = \mathrm{id}_B(f(a)) = f(a)$.

54. Para todo a, el lado izquierdo vale $h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$ y el derecho vale $(h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$.

55. En $\mathbb{R}$, toma $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2$. Entonces $(g \circ f)(x) = (x+1)^2$ y $(f \circ g)(x) = x^2+1$, que por ejemplo difieren en $x = 1$.

56. Si $f(x_1) = f(x_2)$, aplicar g produce $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, es decir $x_1 = x_2$. Así f es inyectiva.

J. Inversas

57. Si $y = 2x+5$, entonces $x = (y-5)/2$. Por tanto $f^{-1}(y) = (y-5)/2$. La función es biyectiva y las composiciones dan la identidad.

58. $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. La restricción del dominio elimina la segunda raíz y garantiza unicidad.

59. No es inyectiva ($f(1) = f(-1)$) ni sobreyectiva hacia $\mathbb{R}$ (no alcanza negativos). Por tanto no puede tener inversa bilateral.

60. $g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h$. Se usó asociatividad.

61. Si $g = f^{-1}$ y $f(x_1) = f(x_2)$, aplicar g da $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$.

62. Dado $b \in B$, toma $a = f^{-1}(b)$. Entonces $f(a) = f(f^{-1}(b)) = b$.

63. La sobreyectividad garantiza que para cada b existe al menos un a. La inyectividad garantiza que ese a es único. Por tanto cada entrada b recibe exactamente una salida.

64. Si es invertible, los dos ejercicios anteriores dan inyectividad y sobreyectividad. Si es biyectiva, el ejercicio anterior construye f^{-1}, y por definición se verifican $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

K. Preimagen frente a inversa

65. $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$. Es una preimagen de conjunto, no una función inversa; f no es biyectiva.

66. $f^{-1}([0, 9]) = [-3, 3]$, porque $0 \le x^2 \le 9$ equivale a $|x| \le 3$.

67. Coinciden como conjuntos: $\{a : f(a) \in T\} = \{f^{-1}(b) : b \in T\}$. La notación es compatible, aunque conceptualmente se llega por dos rutas distintas.

68. Para $f(x) = 2x$ en $\mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x/2$, mientras $1/f(x) = 1/(2x)$ cuando $x \neq 0$. Son objetos distintos.

L. Síntesis y transferencia

69. La biyectividad implica que $g \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva. Por los teoremas de composición, f debe ser inyectiva y g debe ser sobreyectiva. No se sigue, en general, que f sea sobreyectiva ni que g sea inyectiva.

70. Toma $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x\}$. Define $f(1) = a$ y $g(a) = g(b) = x$. La composición es la única función $\{1\} \to \{x\}$, por tanto biyectiva. f no alcanza b y g identifica a, b.

71. Primera parte: $f(x_1) = f(x_2)$ implica $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, luego $x_1 = x_2$. Segunda: dado $b \in B$, toma $a = h(b)$; entonces $f(a) = f(h(b)) = b$.

72. La composición de inyectivas es inyectiva y la de sobreyectivas es sobreyectiva, luego es biyectiva. La fórmula correcta es $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, porque para deshacer primero se deshace g y después f.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **(i)⇒(ii).** La inclusión $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$ siempre vale. Si y pertenece al lado derecho, existen $s \in S, t \in T$ con $f(s) = y = f(t)$. Inyectividad da $s = t$, por lo que $s \in S \cap T$ y $y \in f(S \cap T)$.

(ii)⇒(iii). Siempre $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Para la inclusión inversa, sea $x \in f^{-1}(f(S))$. Existe $s \in S$ con $f(x) = f(s)$, así que $f(x) \in f(\{x\}) \cap f(S)$. Por (ii), ese valor está en $f(\{x\} \cap S)$, de modo que $\{x\} \cap S$ no es vacío. Por tanto $x \in S$. Concluimos $f^{-1}(f(S)) = S$.

(iii)⇒(i). Si $f(a) = f(b)$, entonces $b \in f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$, por lo que $b = a$.

Así las tres condiciones son equivalentes.

74. **(a)** $y \in (g \circ f)(S)$ iff existe $s \in S$ con $y = g(f(s))$. Esto equivale a que existe $b \in f(S)$ con $y = g(b)$, es decir $y \in g(f(S))$.

(b) Para $x \in A$:

$$x \in (g \circ f)^{-1}(U) \iff g(f(x)) \in U \iff f(x) \in g^{-1}(U) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Por extensionalidad, los conjuntos son iguales.

(c) Los símbolos $f^{-1}(V)$ y $g^{-1}(U)$ de (b) significan preimágenes de subconjuntos. Toda función posee preimágenes; no se está afirmando que existan funciones inversas.

75. **(a)** Ya que la composición es inyectiva, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ y entonces $x_1 = x_2$.

(b) Dado $c \in C$, la sobreyectividad de la composición da $a \in A$ con $g(f(a)) = c$. Así c tiene preimagen $f(a)$ bajo g.

(c) y (d) Usa $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x\}$, $f(1) = a$, $g(a) = g(b) = x$. La composición es biyectiva, pero f no alcanza b y g no es inyectiva.

(e) Basta añadir cualquiera de las dos hipótesis siguientes, cada una por separado:

- Si f es sobreyectiva, ya sabemos que es inyectiva, por lo que es biyectiva. Para probar que g es inyectiva, supongamos $g(b_1) = g(b_2)$ y elijamos a_1, a_2 con $f(a_i) = b_i$. La inyectividad de $g \circ f$ da $a_1 = a_2$, luego $b_1 = b_2$. Como g ya era sobreyectiva, también es biyectiva.
- Si g es inyectiva, ya sabemos que es sobreyectiva, por lo que es biyectiva. Para cualquier $b \in B$, la sobreyectividad de $g \circ f$ permite elegir a con $g(f(a)) = g(b)$. La inyectividad de g da $f(a) = b$, de modo que f es sobreyectiva; como ya era inyectiva, también es biyectiva.

Así, en cada alternativa se concluye la biyectividad de ambas funciones. Otra condición suficiente es que los tres conjuntos sean finitos y tengan la misma cardinalidad: las propiedades ya demostradas de f y g se completan mediante los ejercicios 39–40.

76.

(a) Toma $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x\}$, $f(1) = a, f(2) = b$ (inyectiva) y $g(a) = g(b) = x$. La composición colapsa ambas entradas.

(b) Toma $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x, y\}$, $f(1) = a$ y $g(a) = x, g(b) = y$ (sobreyectiva). La composición sólo alcanza x porque f nunca llega a b.

(c) Toma $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x\}$, $f(1) = a$ y $g(a) = g(b) = x$. La composición desde un singleton es inyectiva, aunque g no lo sea: la parte conflictiva b nunca es visitada.

(d) Usa el mismo esquema con $C = \{x\}$: la composición es sobreyectiva hacia C, pero f no alcanza b. La composición sólo necesita cubrir el codominio final, no todo el conjunto intermedio.

77. **Invertible ⇒ biyectiva.** Supón que existe $g : B \to A$ con $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Inyectividad: si $f(x_1) = f(x_2)$, aplicar g produce

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Sobreyectividad: dado $b \in B$, toma $a = g(b)$. Entonces

$$f(a) = f(g(b)) = b.$$

Biyectiva ⇒ invertible. Dado $b \in B$, sobreyectividad garantiza al menos un $a \in A$ con $f(a) = b$. Inyectividad garantiza que no puede haber dos. Por ello podemos definir una función $g : B \to A$ enviando cada b a su única preimagen a.

Para $a \in A$, $g(f(a)) = a$ por unicidad de la preimagen de $f(a)$, así $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Para $b \in B$, si $g(b) = a$, la definición da $f(a) = b$, luego $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Así $g = f^{-1}$ y el criterio queda demostrado.

78. De $g \circ f = \mathrm{id}_A$ se deduce que f es inyectiva: si $f(x_1) = f(x_2)$, aplicar g da $x_1 = x_2$.

De $f \circ h = \mathrm{id}_B$ se deduce que f es sobreyectiva: dado $b \in B$, $b = f(h(b))$.

Por tanto f es biyectiva y posee una única inversa bilateral.

Podemos identificar directamente g y h:

$$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h.$$

Sea $k = g = h$. Ya tenemos $k \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ k = \mathrm{id}_B$, así que $k = f^{-1}$. Por tanto $g = h = f^{-1}$.

79. Los tipos son

$$g \circ f : A \to C, \qquad g^{-1} : C \to B, \qquad f^{-1} : B \to A,$$

de modo que $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$ tiene exactamente el tipo que debe tener la inversa de $g \circ f$.

Verificamos:

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= \mathrm{id}_A\,.\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ \mathrm{id}_B \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= \mathrm{id}_C\,.\end{aligned}$$

Por unicidad de la inversa, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. El orden se invierte porque para deshacer la composición primero debe deshacerse la última función aplicada.

80. (a) La composición biyectiva es inyectiva y sobreyectiva. Por tanto f es inyectiva y g es sobreyectiva.

(b) No. Como $|A| = 4 < 6 = |B|$, ninguna función $A \to B$ puede ser sobreyectiva.

(c) No. Una función $B \to C$ con $6 > 4$ no puede ser inyectiva.

(d) Como f es inyectiva, $f(A)$ tiene 4 elementos. La composición identifica A biyectivamente con C. Por ello $g|_{f(A)} : f(A) \to C$ debe ser biyectiva: es sobreyectiva porque $g(f(A)) = C$, e inyectiva porque si dos puntos de $f(A)$ tuvieran la misma imagen, sus preimágenes únicas bajo f producirían una colisión en $g \circ f$.

(e) Toma

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad C = \{w, x, y, z\}.$$

Define $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$. Define

$$g(a) = w,\ g(b) = x,\ g(c) = y,\ g(d) = z,$$

y, por ejemplo, $g(e) = w, g(f) = x$. Entonces $g \circ f$ es la biyección $1 \mapsto w, 2 \mapsto x, 3 \mapsto y, 4 \mapsto z$, mientras f no es sobreyectiva y g no es inyectiva. Esto muestra exactamente cómo los defectos pueden quedar fuera de la parte de B visitada por f.

N. Construir composiciones con datos prescritos

81. Las ecuaciones de composición obligan a $g(a) = 0$, $g(b) = 1$ y $g(c) = 1$. No imponen nada sobre d, porque $d \notin f(A)$. Hay exactamente dos funciones, según $g(d) = 0$ o $g(d) = 1$. Cada una satisface las cuatro ecuaciones. No hay más posibilidades: todo punto visitado tiene valor forzado y el único punto restante admite exactamente dos salidas.

82. Para 1 y 2, la salida de f debe estar en $\{b, c\}$; para 3 debe ser a. Hay cuatro funciones: las dos primeras salidas son (b, b), (b, c), (c, b) o (c, c), y la tercera siempre es a. Exactamente dos son inyectivas, las que usan (b, c) o (c, b). El valor de h determina una preimagen bajo g, no necesariamente una elección única dentro de ella.

83. Si $h = g \circ f$, entradas con el mismo valor de f tienen el mismo valor de h al aplicar g. Recíprocamente, dado $b \in B$, la sobreyectividad de f permite tomar un x con $f(x) = b$ y proponer $g(b) = h(x)$. Otra elección y cumple $f(y) = b = f(x)$, luego $h(y) = h(x)$: la salida propuesta no depende de la elección. Existe así una única salida para cada b, y $g(f(x)) = h(x)$. Cualquier otra función que realice la composición debe tener ese valor en cada b, porque todo b es alcanzado. Si B es vacío, también A es vacío y la asignación vacía verifica el mismo argumento. La señal decisiva es que f pierde la distinción entre ciertas entradas: h debe perder al menos esas mismas distinciones.

84. Se exige $x - 1 \neq 0$, por lo que $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La restricción de f a S, con codominio reducido a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da $\widetilde{f} : S \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\widetilde{f}(x) = x - 1$. Ahora $g \circ \widetilde{f} : S \to \mathbb{R}$ es una composición total y vale $1/(x-1)$. Toda entrada de S cumple la condición; cualquier conjunto mayor incluiría 1, cuya salida intermedia es inadmisible. La fórmula sola no elimina la necesidad de declarar la restricción.

85. $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vale $\sqrt{x^2} = |x|$. $f \circ g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ vale $(\sqrt{y})^2 = y$, así que es $\mathrm{id}_{[0,\infty)}$. La otra composición no es $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$: en $x = -1$ da 1. g elige una raíz no negativa, pero no recupera una entrada negativa original. Es inversa derecha de f, no bilateral. La raíz cuadrada de un cuadrado no es siempre la entrada original.

86. La identidad obliga a que $f(1) \neq f(2)$; de otro modo g tendría que asignar dos valores distintos a la misma entrada. Hay $3 \cdot 2 = 6$ elecciones ordenadas para esas salidas. Fijado f, los valores de g sobre ellas quedan forzados a 1 y 2, y el punto restante de B puede enviarse a cualquiera de los dos: dos elecciones. En total hay 12 pares. Ningún g es inyectivo, pues el tercer punto repite uno de los dos valores ya utilizados. Los pares no se duplican porque sus primeras funciones o su valor libre de g son distintos.

O. Imágenes, preimágenes y cambios de conjuntos

87. $f(S) = \{a, b\}$ y $f^{-1}(T) = \{1, 2\}$: d no es alcanzado. La nueva función es $q : S \to \{a, b\}$, $q(2) = a$, $q(3) = b$, y es biyectiva por sus dos valores distintos que cubren el codominio. Para comparar preimágenes hay que usar un subconjunto de ambos codominios: $q^{-1}(\{a\}) = \{2\}$, mientras $f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$. La restricción eliminó la entrada 1. No debe escribirse una preimagen de $\{a, d\}$ bajo la definición de q para subconjuntos de su codominio, pues d ya no pertenece a éste.

88. La preimagen del vacío es vacía. El valor -2 es imposible; $x^2 + 1 = 1$ da $x = 0$, y $x^2 + 1 = 5$ da $x = \pm 2$. Por tanto la segunda preimagen es $\{-2, 0, 2\}$, donde -2 ahora es una entrada, no el valor imposible del codominio. La condición $1 < x^2 + 1 \leq 5$ equivale a $0 < x^2 \leq 4$, así que la tercera preimagen es $[-2, 0) \cup (0, 2]$. En la restricción, los resultados son $\varnothing$, $\{0, 2\}$ y $(0, 2]$: sólo se conservan entradas no negativas. Quitar un valor inalcanzable del conjunto objetivo no cambia su preimagen; quitar entradas del dominio sí puede hacerlo.

89. Cada $s \in S$ tiene su valor en $f(S)$, luego pertenece a $K(S)$. Además $f(K(S)) = f(S)$: un punto de $K(S)$ tiene por definición el mismo valor que algún punto de S, y la inclusión $S \subseteq K(S)$ da la inclusión opuesta de imágenes. Tomando preimágenes resulta $K(K(S)) = K(S)$. La igualdad $K(S) = S$ significa que, cada vez que S contiene una entrada, contiene todas las entradas con el mismo valor. Equivalentemente, S es unión de conjuntos completos F_b: si hay igualdad, $S = \bigcup_{b \in f(S)} F_b$; si S es una unión de tales conjuntos, todo punto de $K(S)$ comparte valor con uno de S y pertenece al mismo conjunto completo. Incluye $S = \varnothing$, unión vacía. Este criterio no exige inyectividad de f.

90. Si $y = f(x)$ con $x \in f^{-1}(T)$, entonces $y \in T$ y $y \in \mathrm{Im}(f)$. A la inversa, si y está en esa intersección, existe $x \in A$ con $f(x) = y$; como $y \in T$, ese x pertenece a $f^{-1}(T)$. Así se prueban ambas inclusiones. En el ejemplo, para $T = \varnothing$ o $\{v\}$ el resultado es vacío; para $T = \{u\}$ o $\{u, v\}$ es $\{u\}$. La imagen posterior recupera los valores alcanzados de T, no los valores que nunca tuvieron preimagen.

91. Si las preimágenes coinciden, sus imágenes también, y el ejercicio 90 da la igualdad de intersecciones. Si las intersecciones coinciden, para cada $x \in A$ el valor $f(x)$ pertenece a la imagen; por tanto $f(x) \in T$ equivale a $f(x) \in U$, lo que da la igualdad de preimágenes. Si f es sobreyectiva, la imagen es B y el criterio obliga a $T = U$. Si no lo es, existe $b \in B \setminus \mathrm{Im}(f)$; los conjuntos distintos $\varnothing$ y $\{b\}$ tienen ambos preimagen vacía. Así queda demostrada la necesidad y la suficiencia.

92. Pertenecer a la preimagen bajo la restricción significa ser una entrada $x \in S$ cuyo valor $f(x)$ está en T. Es exactamente la pertenencia simultánea a S y a $f^{-1}(T)$. En el ejemplo, la preimagen original es $\{-3, 0, 3\}$; su intersección con $(-\infty, 0)$ es $\{-3\}$. Se elimina 0 por la desigualdad estricta del nuevo dominio y 3 por ser positivo. No cambia la regla de evaluación, sino las entradas admitidas.

P. Hipótesis y cancelación en composiciones

93. Si la composición es inyectiva, de $f(x) = f(y)$ se obtiene igualdad de valores compuestos, luego $x = y$. Para dos puntos $b_1 = f(x)$, $b_2 = f(y)$ de $f(A)$ con $g(b_1) = g(b_2)$, la misma inyectividad da $x = y$ y por tanto $b_1 = b_2$. Esto prueba inyectividad de la restricción. Recíprocamente, una igualdad $g(f(x)) = g(f(y))$ se cancela primero mediante la inyectividad de esa restricción, pues ambos valores intermedios están en $f(A)$; luego la inyectividad de f da $x = y$. Se puede añadir a B un punto fuera de $f(A)$ con la misma salida que uno visitado: se pierde inyectividad global de g, pero no de la composición. El criterio explica el papel de la restricción sin suponer que f sea sobreyectiva.

94. La composición alcanza c si y sólo si existe $a \in A$ con $g(f(a)) = c$, es decir, si existe un punto $f(a) \in f(A) \cap G_c$. Exigirlo para todo c es exactamente sobreyectividad. Tome $A = \{1, 2\}$, $B = \{u, v, w, z\}$, $C = \{0, 1\}$, con $g(u) = g(v) = 0$, $g(w) = g(z) = 1$, $f(1) = u$, $f(2) = w$. La composición cubre C, aunque f no alcance v, z. No hace falta visitar cada punto intermedio, sino al menos uno de cada conjunto que lleva al mismo valor final.

95. Si f es inyectiva, la igualdad compuesta da $f(u(x)) = f(v(x))$ para cada $x \in X$ y entonces $u(x) = v(x)$; los tipos coinciden y las funciones son iguales. Si f no es inyectiva, existen $a \neq a'$ con $f(a) = f(a')$. Tome $X = \{*\}$, $u(*) = a$ y $v(*) = a'$. Las composiciones coinciden, pero $u \neq v$. Por contraposición se demuestra necesidad. El conjunto de una entrada basta para detectar una colisión. Para $A = \varnothing$, la dirección suficiente sigue válida; no existe una colisión que invalide la propiedad.

96. Si f es sobreyectiva, para cada $b \in B$ hay a con $f(a) = b$; la igualdad compuesta da $u(b) = u(f(a)) = v(f(a)) = v(b)$. Si no es sobreyectiva, elija $b_0 \notin f(A)$. Defina $u(b) = 0$ para todo b y $v(b) = 1$ cuando $b = b_0$, $v(b) = 0$ en otro caso. Difieren en b_0, pero las composiciones nunca visitan ese punto y ambas valen 0. No se cancela la función por apariencia simbólica: la sobreyectividad garantiza que las evaluaciones compuestas prueban todos los puntos de B.

97. Sean $b_1, b_2 \in B$ con $g(b_1) = g(b_2)$. Como f es sobreyectiva, existen $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_i) = b_i$. La igualdad es ahora $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, por lo que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Sin sobreyectividad puede haber un b_i sin preimagen y no se puede trasladar la colisión a las entradas de la composición. El ejemplo de la nota de §9.12 muestra esa posibilidad.

98. Tome un $b \in B$ arbitrario. El punto $g(b)$ pertenece a C y por sobreyectividad de la composición existe $a \in A$ con $g(f(a)) = g(b)$. La inyectividad de g permite concluir $f(a) = b$, proporcionando la preimagen requerida. Sin ella, $f(a)$ podría ser un punto distinto con el mismo valor final. Por ejemplo, en el ejercicio 94 la composición es sobreyectiva pero f no lo es, porque g identifica cada par intermedio.

Q. Construcción y diagnóstico de inversas

99. La primera identidad exige $r(1) = 1$ y $r(2) = 2$. Las salidas de 3 y 4 son independientes y pueden ser 1 o 2; hay cuatro funciones, con pares de salidas $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ o $(2, 2)$ para esas entradas. Ninguna satisface la segunda identidad: $i(r(3))$ es 1 o 2, nunca 3. Una inversa izquierda puede ser no única y no convertirse en bilateral. Los puntos fuera de la imagen de i explican la libertad restante.

100. $s(u)$ debe ser 1 o 2 y $s(v)$ debe ser 3 o 4. Resultan cuatro funciones, cuyas salidas ordenadas son $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ y $(2, 4)$. Para cualquier elección, las evaluaciones de $p \circ s$ recuperan u, v. No existe inversa bilateral: como $p(1) = p(2)$, la función $s \circ p$ tiene el mismo valor en 1 y 2 y no puede ser la identidad. Elegir una entrada por valor permite volver al codominio, pero no recuperar todas las entradas originales.

101. f es inyectiva vacíamente para cualquier B. Si $B \neq \varnothing$, no existe función $B \to \varnothing$: una entrada de B no puede recibir salida. Por tanto no hay inversa izquierda ni bilateral. Si $B = \varnothing$, la única función r es vacía y ambas composiciones son la identidad vacía. Así las dos clases de inversa existen exactamente para $B = \varnothing$. El ejemplo basta para refutar la afirmación sin condiciones. No se está demostrando aquí un resultado general de existencia de inversas laterales en conjuntos arbitrarios.

102. La rama negativa produce exactamente $(-\infty, -1)$; la no negativa produce $[1, \infty)$. Para $y < -1$, la única entrada posible es $x = y + 1 < 0$; para $y \geq 1$, es $x = y - 1 \geq 0$. Las imágenes de las ramas son disjuntas, así que no hay una segunda entrada en la otra rama. Definimos g en el codominio declarado por $g(y) = y + 1$ si $y < -1$ y $g(y) = y - 1$ si $y \geq 1$. Para $x < 0$, $g(f(x)) = (x - 1) + 1 = x$; para $x \geq 0$, vale $(x + 1) - 1 = x$. Para $y < -1$, $f(g(y)) = (y + 1) - 1 = y$; para $y \geq 1$, vale $(y - 1) + 1 = y$. -1 exigiría $x = 0$ en la rama negativa, donde esa entrada no está admitida; 1 se obtiene con $x = 0$ en la otra rama. El despeje debe conservar la condición de cada caso.

103. Si $f(x) = f(y)$, aplicar f da $x = y$, así que es inyectiva. Además cada x es imagen de $f(x)$, luego es sobreyectiva. Si a es el único punto fijo, los otros dos b, c deben intercambiarse: $f(b)$ no puede ser b; tampoco a, porque la inyectividad y $f(a) = a$ lo impiden. Por tanto $f(b) = c$ y la identidad impone $f(c) = b$. Hay tres posibilidades, según el punto fijo sea 1, 2 o 3. En cada una el intercambio aplicado dos veces devuelve las entradas, y el punto fijo permanece; ambas identidades de inversa son la misma ecuación $f \circ f = \mathrm{id}$. No se requiere una teoría previa de permutaciones.

104. Si f es invertible, componer a la izquierda con f^{-1} da $(f^{-1} \circ f) \circ f = f^{-1} \circ f$, es decir $f = \mathrm{id}_A$. A la inversa, la identidad es invertible y satisface la ecuación. Sin invertibilidad no se puede hacer esa cancelación. En $A = \{1, 2, 3\}$, defina $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$. Evaluar por segunda vez no cambia ningún valor, pero hay una colisión y f no es la identidad. Finalmente, si $y \in f(A)$, existe x con $y = f(x)$ y entonces $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. La restricción, con codominio reducido a $f(A)$, es $\mathrm{id}_{f(A)}$. La ecuación controla los valores ya alcanzados; no obliga a que cada entrada sea uno de ellos.

Capítulo 10

Cómo se demuestra

Hasta aquí hemos demostrado muchas cosas sin detenernos a construir una teoría de la demostración. Al transformar proposiciones, comparar conjuntos, estudiar relaciones o verificar inyectividad, ya hemos usado argumentos directos, contraejemplos, doble inclusión y razonamientos por hipótesis.

C10 organiza esas prácticas.

> **Demostrar no significa convencer por acumulación de ejemplos; significa mostrar que la conclusión es forzada por las hipótesis mediante pasos válidos.**

Este capítulo no ofrece una receta universal. Ofrece un repertorio de arquitecturas, criterios para elegir entre ellas y herramientas para detectar cuándo una prueba está incompleta.

10.1. Qué es una demostración

Una comprobación y una demostración no son lo mismo.

Si calculamos

$$1 + 3 = 4, \qquad 3 + 5 = 8, \qquad 5 + 7 = 12,$$

hemos reunido evidencia compatible con la afirmación "la suma de dos impares es par". No hemos probado la afirmación para todos los enteros impares.

Una demostración debe explicar por qué **todo caso cubierto por las hipótesis** satisface la conclusión.

Conviene distinguir:

- **ejemplo:** muestra un caso;
- **contraejemplo:** destruye una afirmación universal;
- **cálculo:** obtiene un valor;
- **evidencia:** sugiere una conjetura;
- **demostración:** establece una conclusión en todos los casos permitidos.

La prueba comienza por leer con precisión qué se afirma.

10.2. Anatomía de un teorema

Consideremos:

> Para todo entero n, si n es par, entonces n^2 es par.

La estructura es

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ (P(n) \Rightarrow Q(n)).$$

Aquí:

- universo: $\mathbb{Z}$;

- variable: n;
- hipótesis: n es par;
- conclusión: n^2 es par.

Una prueba no debe comenzar con manipulaciones azarosas. Debe explotar esa estructura: tomar un entero arbitrario, suponer que es par y llegar a que su cuadrado es par.

Las palabras “para todo”, “existe”, “si... entonces” y “si y sólo si” determinan qué debemos construir.

Del enunciado a las obligaciones de prueba. Antes de escoger un método, escribe qué dato puedes usar y qué debes producir. En una inclusión debes justificar la pertenencia de un elemento arbitrario; en una existencia debes construir un objeto admisible; en una unicidad debes comparar dos candidatos que satisfacen la propiedad. Esta traducción evita empezar con la conclusión como si fuera una hipótesis.

Considera la afirmación: «Si $A \cap B = \varnothing$, todo subconjunto de A es disjunto de B». Su forma precisa es

$$\forall A \, \forall B \, \big[A \cap B = \varnothing \Rightarrow \forall X \, (X \subseteq A \Rightarrow X \cap B = \varnothing)\big].$$

La prueba debe fijar A, B bajo la hipótesis y después un $X \subseteq A$ arbitrario. Si hubiera $x \in X \cap B$, tendríamos $x \in A \cap B$, contradicción. Así $X \cap B = \varnothing$. No hace falta elegir un elemento de X para iniciar la prueba: podría ser vacío.

Control. Un borrador empieza «Sea $x \in X$, que existe porque $X \subseteq A$». ¿Qué falla y cómo se repara?

Solución. La inclusión no garantiza no vacuidad; $X = \varnothing$ es un contraejemplo a esa inferencia. Se puede iniciar «Supongamos que existe $x \in X \cap B$» y obtener la contradicción anterior. Esa suposición es provisional y precisamente se descarta al final. Si la traducción de $X \subseteq A$ resulta dudosa, vuelve a C6, cuantificación universal, y C7, inclusión y conjunto vacío. Después reconstruye la prueba sin consultar el párrafo anterior.

10.3. Prueba directa de una implicación

Para demostrar

$$P \Rightarrow Q,$$

la estrategia directa consiste en suponer P y deducir Q.

Ejemplo. Si n es par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Entonces

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

y $2k^2$ es entero. Por tanto n^2 es par.

La estructura es:

```
HIPÓTESIS
   ↓
DEFINICIÓN UTILIZABLE
   ↓
TRANSFORMACIÓN
   ↓
FORMA DE LA CONCLUSIÓN
```

El paso central de una prueba directa suele ser encontrar la representación adecuada de la hipótesis.

10.4. Variables arbitrarias y universales

Para demostrar

$$\forall x \in A\ P(x),$$

no elegimos un ejemplo particular. Tomamos

"Sea $x \in A$ arbitrario".

La palabra **arbitrario** significa que durante la prueba no podemos usar ninguna propiedad de x que no provenga de $x \in A$ o de las hipótesis.

Si al final demostramos $P(x)$ sin especializar x, entonces el argumento vale para todo elemento de A.

Este control se vuelve crucial con varias variables: cada una debe tener dominio, y sus dependencias deben mantenerse explícitas.

Un objeto arbitrario no es un ejemplo cómodo. Para probar «todo $x \in D$ tiene la propiedad P», el objeto que fijamos sólo puede usar las condiciones que definen D. Elegir $x = 0$ añade una condición que el enunciado no permite. En cambio, al probar «existe $x \in D$ con P» debemos escoger un testigo concreto o construirlo a partir de los datos.

La diferencia se vuelve visible en «para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ con $x + a = 1$». Fijamos a arbitrario y elegimos $x = 1 - a$. El testigo depende de a; sustituirlo por un único número antes de fijar a cambia el orden de los cuantificadores.

Control. Compara $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R}\ (x + a = 1)$ con $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall a \in \mathbb{R}\ (x + a = 1)$.

Solución. La primera es verdadera: $x = 1 - a$ sirve para cada a. La segunda es falsa: el mismo x debería satisfacer $x + 0 = 1$ y $x + 1 = 1$, lo que exigiría a la vez $x = 1$ y $x = 0$. Dos valores bastan para refutar esta universal; no sustituyen la prueba de la primera. Para recuperar este punto, vuelve a C6, orden de cuantificadores, y escribe qué elecciones pueden depender de cuáles.

10.5. Demostraciones de existencia

Para demostrar

$$\exists x \in A\ P(x),$$

basta encontrar un **testigo** $a \in A$ y verificar $P(a)$.

Ejemplo: existe un real x tal que $x^2 = 9$. El testigo $x = 3$ basta.

Una prueba de existencia tiene dos obligaciones:

1. el objeto propuesto debe pertenecer al dominio exigido;
2. debe satisfacer la propiedad.

En otras situaciones la existencia puede deducirse sin una fórmula explícita, pero en este capítulo privilegiaremos construcciones elementales y controlables.

10.6. Demostraciones de unicidad

Existencia no implica unicidad.

Para demostrar

$$\exists! x \in A\ P(x),$$

separamos:

1. **existencia:** mostrar que al menos un objeto cumple P;
2. **unicidad:** si x e y cumplen P, demostrar $x = y$.

Ejemplo: para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + a = 0$.
Existencia: $x = -a$ funciona.
Unicidad: si $x + a = 0$ y $y + a = 0$, entonces

$$x = x + a - a = 0 - a = y + a - a = y.$$

10.7. Bicondicionales y equivalencias

Para demostrar

$$P \iff Q,$$

hay dos tareas:

$$P \Rightarrow Q$$

y

$$Q \Rightarrow P.$$

Una prueba de una sola dirección está incompleta.
Cuando hay tres condiciones P, Q, R, a veces es eficiente demostrar un ciclo:

$$P \Rightarrow Q, \qquad Q \Rightarrow R, \qquad R \Rightarrow P.$$

Entonces las tres son equivalentes.
También hay que distinguir:

- P es **suficiente** para Q: $P \Rightarrow Q$;
- P es **necesaria** para Q: $Q \Rightarrow P$.

10.8. Prueba por contraposición

La implicación

$$P \Rightarrow Q$$

es lógicamente equivalente a

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

A veces la segunda forma es mucho más útil.
Ejemplo: si n^2 es par, entonces n es par. La contrapositiva dice:

> si n es impar, entonces n^2 es impar.

Si $n = 2k + 1$, entonces

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

que es impar. Por contraposición, n^2 par implica n par.
La contraposición no cambia la afirmación; cambia el camino.

10.9. Prueba por contradicción

Para demostrar P por contradicción:

1. suponemos $\neg P$;
2. junto con los datos disponibles derivamos una imposibilidad;
3. concluimos que $\neg P$ no puede sostenerse.

Para demostrar una implicación $P \Rightarrow Q$, podemos suponer simultáneamente

$$P \wedge \neg Q$$

y derivar contradicción.

La contradicción debe ser real: por ejemplo $R \wedge \neg R$, una igualdad imposible o la violación explícita de una hipótesis.

No basta terminar con "esto parece absurdo".

10.10. Prueba por casos

A veces el universo se divide naturalmente.

Para todo real x, la definición de valor absoluto separa dos posibilidades: $|x| = x$ cuando $x \geq 0$ y $|x| = -x$ cuando $x < 0$.

Una prueba que usa valor absoluto puede necesitar separar esos dos casos.

Los casos deben ser:

- **exhaustivos:** cubren todas las posibilidades;
- **compatibles con las hipótesis**;
- **cerrados:** cada caso llega a la conclusión.

Una división "$x > 0$ o $x < 0$" no es exhaustiva si $x = 0$ es posible.

10.11. Pruebas de conjuntos: doble inclusión

Para demostrar

$$A = B,$$

la estrategia estándar es probar

$$A \subseteq B$$

y

$$B \subseteq A.$$

Cada inclusión se reduce a pertenencia.

Ejemplo:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Para la primera inclusión tomamos x en el lado izquierdo. Entonces $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in C$. Por casos, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. Así pertenece al lado derecho.

La inclusión contraria se prueba recorriendo el razonamiento en la dirección adecuada, no simplemente diciendo "análogamente" si el paso requiere una idea distinta.

10.12. Pruebas con funciones

Las definiciones de C9 son plantillas de objetivos.

Para demostrar que f es inyectiva:

1. tomar x_1, x_2 del dominio;
2. suponer $f(x_1) = f(x_2)$;
3. demostrar $x_1 = x_2$.

Para demostrar sobreyectividad:

1. tomar y arbitrario en el codominio;
2. construir x en el dominio;
3. verificar $f(x) = y$.

La prueba debe respetar el **tipo** de cada objeto. Una "preimagen" candidata fuera del dominio no prueba sobreyectividad.

10.13. Cómo se refuta: contraejemplos

La negación de

$$\forall x \in A\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

es

$$\exists x \in A\ (P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

Por eso un solo contraejemplo basta: debe satisfacer la hipótesis y violar la conclusión.

Para refutar

> "si $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva",

no sirve elegir funciones cuya composición no sea inyectiva. Debemos construir un caso donde el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Un contraejemplo es una pequeña demostración de falsedad.

10.14. Lemas y arquitectura de una prueba larga

Una prueba larga puede contener un obstáculo recurrente. Conviene aislarlo.

Un **lema** es una proposición auxiliar que se demuestra porque simplifica el argumento principal.

Esquema:

```
OBJETIVO PRINCIPAL
   ↓
OBSTÁCULO INTERMEDIO
   ↓
LEMA
   ↓
PRUEBA DEL LEMA
   ↓
RETORNO AL OBJETIVO
```

El lema no debe ser más difícil que el teorema sin aportar estructura. Su utilidad está en separar dependencias.

Aislar un lema que realmente resuelve un obstáculo. Un lema ayuda cuando su conclusión es exactamente el dato que falta en la prueba principal. Veamos una afirmación con dos objetivos: para A, B disjuntos y $X, Y \subseteq A \cup B$, si

$$X \cap A = Y \cap A, \qquad X \cap B = Y \cap B,$$

entonces $X = Y$.

Sin lema, fijamos $x \in X$. Como $X \subseteq A \cup B$, pertenece a A o a B. En el primer caso la igualdad de las intersecciones con A da $x \in Y$; en el segundo usamos la igualdad con B. Obtenemos $X \subseteq Y$ y repetimos el argumento empezando con $y \in Y$ para obtener $Y \subseteq X$.

El mecanismo repetido se puede aislar: **si** $Z \subseteq A \cup B$**, entonces** $Z = (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$. En efecto, cada elemento de Z está en una de las dos intersecciones; recíprocamente, cualquiera de esas intersecciones está contenida en Z. Ahora la prueba principal queda

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y.$$

La versión corta depende de una prueba completa del lema; omitirla sólo desplazaría la dificultad.

Control. ¿Dónde se usó $A \cap B = \varnothing$? ¿Puede retirarse esa hipótesis?

Solución. No se usó: la unión cubre los elementos aunque puedan pertenecer a ambas partes. La afirmación sigue siendo cierta sin disjunción, conservando $X, Y \subseteq A \cup B$. Esta revisión distingue una hipótesis innecesaria de una necesaria. Si falta el fundamento del lema, vuelve a C7, distributividad y doble inclusión, y demuéstralo con pertenencias antes de usar identidades.

10.15. Elegir estrategia y reparar pruebas

No existe un algoritmo universal, pero sí preguntas útiles:

1. ¿qué forma lógica tiene el objetivo?;
2. ¿qué dicen exactamente las definiciones?;
3. ¿puedo trabajar directamente desde las hipótesis?;
4. ¿la contraposición vuelve concreta la conclusión?;
5. ¿suponer la negación produce información fuerte?;
6. ¿hay casos naturales?;
7. ¿necesito construir un testigo?;
8. ¿debo demostrar unicidad?;
9. ¿una igualdad exige dos inclusiones?;
10. ¿un lema separaría el paso difícil?

Errores frecuentes:

- asumir la conclusión;
- usar el recíproco de un resultado;
- cambiar un cuantificador;
- elegir un ejemplo en lugar de un objeto arbitrario;
- omitir una dirección;
- dividir en casos no exhaustivos;
- introducir un objeto que no se sabe que existe;
- ocultar el paso principal con “obvio”.

Cinco niveles para leer una demostración. Cuando una prueba ya está escrita, conviene no verla como una secuencia plana de líneas. Podemos distinguir cinco niveles:

1. **Estrategia:** la elección global del camino. Por ejemplo, prueba directa, contraposición, contradicción, casos o doble inclusión.
2. **Arquitectura:** la organización del argumento en subobjetivos, direcciones, casos, lemas y dependencias.
3. **Mecanismo:** la idea matemática o lógica que produce el avance decisivo. Puede ser usar una definición para obtener una representación útil, aplicar inyectividad a una igualdad, explotar una contradicción o introducir un testigo adecuado.
4. **Técnica:** las operaciones locales con las que ejecutamos el mecanismo: manipular una igualdad, factorizar, sustituir, perseguir pertenencias, componer funciones o simplificar una expresión.
5. **Cierre:** el momento en que verificamos que lo obtenido coincide exactamente con la conclusión exigida y que todas las direcciones, casos u obligaciones abiertas han sido atendidas.

Estos niveles no son sinónimos. Dos pruebas pueden usar la misma técnica algebraica y estrategias distintas; o compartir estrategia pero organizar de manera diferente su arquitectura.

Al leer una demostración ajena, una buena práctica es intentar identificar los cinco niveles y después ocultar el texto para reconstruir el argumento. Si sólo podemos repetir las líneas pero no explicar por qué se eligió el camino ni cuál es el mecanismo decisivo, todavía no comprendemos completamente la prueba.

Del ensayo a la demostración final. Explorar permite probar casos, escribir una cuenta incompleta o buscar una identidad. Después hay que separar lo observado del mecanismo que vale para todos los objetos. Para estudiar si $x, y \geq 0$ y $x^2 = y^2$ obligan a $x = y$, ensayar $x = 2, y = 2$ sólo confirma un caso. El mecanismo es

$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

En los reales, un producto nulo tiene algún factor nulo. Si $x - y = 0$, terminamos. Si $x + y = 0$, la no negatividad obliga a $x = y = 0$: si uno fuera positivo, la suma sería positiva. También en ese caso $x = y$.

La prueba final empieza con dos reales arbitrarios bajo las hipótesis, no con los números del ensayo. Conserva el caso $x + y = 0$ porque dividir directamente por $x + y$ lo perdería. Una buena explicación puede mencionar cómo se encontró la factorización, pero la justificación debe funcionar sin esa historia.

Control. Retira $x, y \geq 0$. ¿Falla la cuenta o falla la conclusión?

Solución. La factorización sigue siendo válida. La conclusión $x = y$ falla para $x = 1$, $y = -1$. Lo que sí se deduce para reales cualesquiera es $x = y$ o $x = -y$, según el factor que se anule. Para reconstruir el mecanismo, vuelve a C3, factorización y transformaciones condicionadas; después explica por qué no se puede cancelar $x + y$ sin comprobarlo.

10.16. Escribir y cerrar una demostración

Una prueba final debe poder leerse sin reconstruir la intención del autor.

Debe quedar claro:

- qué se supone;
- qué objetos se introducen;
- de qué conjuntos provienen;
- qué resultado justifica cada paso sustantivo;
- cuándo se alcanza la conclusión.

El proceso de descubrimiento puede ser desordenado. La exposición final no tiene por qué imitarlo.

Revisar la prueba desde la conclusión. Una revisión útil pregunta: ¿qué conclusión exacta se alcanzó?, ¿se probaron todas las direcciones?, ¿cada elección existe?, ¿los casos cubren el universo?, ¿algún paso exige una hipótesis no declarada? No basta con que cada cuenta parezca correcta: una prueba puede demostrar algo más débil que lo pedido.

En «$A \cap B = A$ si y sólo si $A \subseteq B$», probar que la igualdad implica la inclusión deja pendiente la vuelta. Para esa vuelta, si $x \in A$, la hipótesis $A \subseteq B$ da $x \in B$, luego $x \in A \cap B$; así $A \subseteq A \cap B$. La otra inclusión $A \cap B \subseteq A$ viene de la definición. Esas dos inclusiones cierran la igualdad y, con la dirección inicial, el bicondicional.

Control. Un texto sobre una función $f : A \to B$ termina «todo $b \in f(A)$ tiene preimagen; por tanto f es sobreyectiva». ¿Qué conclusión justifica realmente?

Solución. Justifica que $f : A \to f(A)$, con el codominio restringido a su imagen, es sobreyectiva. Para el codominio declarado B falta $f(A) = B$. Por ejemplo, $f : \{0\} \to \{0, 1\}$ dada por $f(0) = 0$ cumple la frase inicial y no es sobreyectiva sobre B. Recupera en C9 la diferencia entre imagen y codominio; luego revisa que cada «arbitrario» de la prueba recorra el conjunto exigido por la conclusión.

Cerramos con una nueva pregunta:

> **¿Cómo demostrar una afirmación $P(n)$ para todos los naturales cuando cada caso está conectado estructuralmente con el siguiente?**

Esa pregunta abrirá C11 y la inducción matemática.

Ejercicios

Los ejercicios son originales para *Álgebra para matemáticos* y se calibran con el corpus rector del capítulo. Los identificadores editoriales permanecen en comentarios internos no renderizados.

A. Anatomía y forma lógica

1. **Nivel A.** En «para todo real x, si $x > 2$, entonces $x^2 > 4$», identifica universo, cuantificador, hipótesis y conclusión.
2. **Nivel A.** Explica por qué comprobar la igualdad $1 + 3 = 4$, $3 + 5 = 8$ y $5 + 7 = 12$ no demuestra que la suma de dos impares cualesquiera sea par.
3. **Nivel B.** Reescribe «todo elemento de $A \cap B$ pertenece a A» en notación cuantificada.
4. **Nivel B.** En «existe un real x tal que $x^2 = 2$», ¿qué debe proporcionar una prueba constructiva?
5. **Nivel B.** ¿Qué dos tareas contiene una afirmación de la forma «existe un único x tal que $P(x)$»?
6. **Nivel C.** Explica por qué demostrar sólo $P \Rightarrow Q$ no basta para establecer $P \Leftrightarrow Q$.

B. Prueba directa y universales

7. **Nivel B.** Demuestra directamente que la suma de dos enteros pares es par.
8. **Nivel B.** Demuestra que el producto de un entero par por cualquier entero es par.
9. **Nivel B.** Demuestra que si $x > 3$, entonces $2x + 1 > 7$.
10. **Nivel C.** Demuestra que para todo A, B, C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
11. **Nivel C.** Demuestra que $A \cap B \subseteq A \cup B$.
12. **Nivel C.** Demuestra que si $f : A \to B$ es inyectiva y $S \subseteq A$, entonces la restricción $f|_S : S \to B$ es inyectiva.

13. **Nivel C.** Demuestra que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
14. **Nivel D.** Demuestra que si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

C. Existencia y unicidad

15. **Nivel B.** Demuestra que para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + a = 0$.
16. **Nivel C.** Demuestra que ese x es único.
17. **Nivel B.** Demuestra que para todo real $a \neq 0$ existe un único real x tal que $ax = 1$.
18. **Nivel C.** Sea $f : A \to B$ biyectiva. Demuestra que para cada $b \in B$ existe un único $a \in A$ con $f(a) = b$.
19. **Nivel C.** Da un ejemplo donde exista un objeto con cierta propiedad pero no sea único.
20. **Nivel D.** Decide si es verdadera la afirmación: «para todo conjunto A existe un único subconjunto $X \subseteq A$ tal que $X \cup A = A$ y $X \cap A = X$». Si es falsa, refútala y explica exactamente qué falla.

D. Bicondicionales

21. **Nivel B.** Demuestra: un entero n es par si y sólo si $n + 2$ es par.
22. **Nivel C.** Demuestra $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.
23. **Nivel C.** Demuestra $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.
24. **Nivel C.** Demuestra que $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(f) = B$.
25. **Nivel D.** Demuestra que para un real x, $x^2 = 0$ si y sólo si $x = 0$.
26. **Nivel D.** Organiza un ciclo de implicaciones para demostrar la equivalencia entre: (i) $A = B$; (ii) $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$; (iii) $A \triangle B = \varnothing$.

E. Contraposición

27. **Nivel B.** Demuestra por contraposición: si n^2 es par, entonces n es par.
28. **Nivel C.** Demuestra por contraposición: si ab es impar, entonces a y b son impares.
29. **Nivel C.** Demuestra por contraposición: si $x + y$ es irracional, entonces al menos uno de x, y es irracional.
30. **Nivel C.** Demuestra: si $A \not\subseteq B$, entonces existe x tal que $x \in A$ y $x \notin B$.
31. **Nivel D.** Demuestra por contraposición: si $f : A \to B$ no es inyectiva, entonces existe un subconjunto $S \subseteq A$ tal que $f^{-1}(f(S)) \neq S$.
32. **Nivel D.** Compara brevemente una prueba directa y una prueba por contraposición del enunciado «si n^2 es par, entonces n es par».

F. Contradicción

33. **Nivel B.** Demuestra por contradicción que no existe un real x tal que $x > 0$ y $x < 0$ simultáneamente.
34. **Nivel C.** Demuestra por contradicción que una función constante $f : A \to B$ con A que contiene dos elementos distintos no es inyectiva.
35. **Nivel C.** Demuestra que no existe un conjunto A tal que $A \in \varnothing$.
36. **Nivel C.** Demuestra que si $A \subsetneq B$, entonces no puede ocurrir simultáneamente $B \subseteq A$.
37. **Nivel D.** Sea $f : A \to B$ biyectiva. Demuestra por contradicción que su inversa es única.
38. **Nivel D.** Explica por qué una prueba por contradicción de $P \Rightarrow Q$ puede comenzar suponiendo P y $\neg Q$.

G. Casos

39. **Nivel B.** Demuestra por casos que $|x| \geq 0$ para todo real x.
40. **Nivel C.** Demuestra que para todo entero n, $n(n+1)$ es par.
41. **Nivel C.** Demuestra que para todo real x, $x^2 = |x|^2$.
42. **Nivel C.** Demuestra que si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$, y usa esa disyunción para justificar una prueba por casos.
43. **Nivel D.** Demuestra que $\max\{x, y\} \geq (x+y)/2$ para todos los reales x, y mediante dos casos.
44. **Nivel D.** Detecta el error en una prueba que divide «$x > 0$ o $x < 0$» para demostrar una afirmación sobre todo real x.

H. Pruebas de conjuntos

45. **Nivel B.** Demuestra $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
46. **Nivel B.** Demuestra la inclusión contraria y concluye la distributividad.
47. **Nivel C.** Demuestra $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
48. **Nivel C.** Demuestra $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
49. **Nivel D.** Refuta $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ con un contraejemplo.
50. **Nivel D.** Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A \triangle B = \varnothing$.

I. Pruebas con funciones

51. **Nivel B.** Demuestra que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$, es inyectiva.
52. **Nivel B.** Demuestra que la misma función es sobreyectiva.
53. **Nivel C.** Demuestra que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
54. **Nivel C.** Demuestra que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
55. **Nivel D.** Demuestra que si f tiene inversa izquierda, entonces es inyectiva.
56. **Nivel D.** Demuestra que si f tiene inversa derecha, entonces es sobreyectiva.

J. Contraejemplos y refutación

57. **Nivel B.** Refuta «si $a + b$ es par, entonces a y b son pares».
58. **Nivel B.** Refuta «si $A \cap B = \varnothing$, entonces $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$».
59. **Nivel C.** Refuta «si f es sobreyectiva, entonces es inyectiva».
60. **Nivel C.** Refuta «si $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva».
61. **Nivel D.** Explica por qué un ejemplo que viola la hipótesis de una implicación no puede refutarla.
62. **Nivel D.** Refuta «para todos A, B, C, de $A \cup C = B \cup C$ se sigue $A = B$».

K. Diagnóstico y reparación

63. **Nivel C.** Diagnostica: «Supongamos que n^2 es par. Como n es par, $n = 2k$, luego n^2 es par».
64. **Nivel C.** Diagnostica: «Para demostrar que todo real tiene cuadrado no negativo, tomo $x = 2$. Como $2^2 \geq 0$, listo».
65. **Nivel D.** Diagnostica: «Como para cada x existe algún y con $P(x, y)$, existe un mismo y que sirve para todos los x».
66. **Nivel D.** Diagnostica una prueba de $P \Leftrightarrow Q$ que sólo demuestra $P \Rightarrow Q$.

L. Síntesis

67. **Nivel D.** Sin método indicado, demuestra que si $A \subseteq B$, entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$.
68. **Nivel D.** Sin método indicado, demuestra que si n es impar, entonces $n^2 + 2n$ es impar.

69. **Nivel D.** Sin método indicado, demuestra que si $x^2 < 1$, entonces $-1 < x < 1$.
70. **Nivel E.** Demuestra que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.
71. **Nivel E.** Demuestra que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \setminus B = \varnothing$.
72. **Nivel E.** Decide y demuestra o refuta: «si $A \times C = B \times C$ y $C \neq \varnothing$, entonces $A = B$».

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E.** Demuestra el teorema «si n^2 es par, entonces n es par» de dos maneras:

(a) por contraposición;

(b) por contradicción, suponiendo que n es impar.
Compara las dos pruebas y explica cuál hace más visible la estructura lógica.

74. **Nivel F.** Demuestra que para una función $f : A \to B$ son equivalentes:

(I) f es inyectiva;

(II) para todo $S \subseteq A$, $f^{-1}(f(S)) = S$;

(III) para todos $S, T \subseteq A$, $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$.

Usa al menos una dirección por contraposición.

75. **Nivel F.** Demuestra por doble inclusión la identidad
$$A \setminus (B \triangle C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C)).$$
Explica al final qué condición lógica sobre pertenencia expresa la identidad.
76. **Nivel F.** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Supón que $g \circ f$ es biyectiva.

(a) Demuestra que f es inyectiva y g es sobreyectiva.

(b) Prueba que si además f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

(c) Concluye que, bajo esa hipótesis adicional, ambas funciones son biyectivas.

77. **Nivel F.** La afirmación > «Si $A \cup C = B \cup C$, entonces $A = B$» es falsa.

(a) Construye un contraejemplo donde A, B, C sean todos no vacíos y distintos entre sí.

(b) Formula una hipótesis adicional natural que, junto con $A \cup C = B \cup C$, sí permita concluir $A = B$.

(c) Demuestra tu versión corregida.

78. **Nivel G.** Demuestra el siguiente resultado usando un lema explícito:

Si $f : A \to B$ es inyectiva y $g : B \to C$ es tal que $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces la restricción $g|_{f(A)} : f(A) \to C$ es biyectiva si y sólo si $g \circ f$ es inyectiva.

Formula y demuestra primero un lema adecuado sobre la biyección $f : A \to f(A)$.

79. **Nivel G.** La siguiente «prueba» intenta demostrar que toda función sobreyectiva es inyectiva:

Sea $f : A \to B$ sobreyectiva. Si $f(x_1) = f(x_2)$, como todo elemento de B tiene preimagen, la preimagen de $f(x_1)$ existe. Por tanto esa preimagen debe ser $x_1 = x_2$.

(a) Localiza exactamente el error.

(b) Construye un contraejemplo mínimo.

(c) Reescribe una afirmación verdadera cercana y demuéstrala.

80. **Nivel G.** Sin indicación de método, demuestra:

Si A, B, C son conjuntos y

$$> A \cap C \subseteq B \cap C > \qquad \text{y} \qquad > A \setminus C \subseteq B \setminus C, >$$

entonces $A \subseteq B$.

Después explica por qué una prueba por casos es la estrategia natural y por qué una contradicción sería menos económica.

N. Construir pruebas con ayuda decreciente

81. Sean A, B conjuntos. Completa una prueba de que $A \cap B = \varnothing$ si y sólo si $A \subseteq A \setminus B$. En la ida, fija $x \in A$ y justifica $x \notin B$. En la vuelta, explica por qué un supuesto $x \in A \cap B$ llevaría a contradicción. Cierra ambas direcciones y comprueba $A = \varnothing$.

82. Para $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y \geq 0$, demuestra que $x + y = 0$ si y sólo si $x = y = 0$. Escribe primero las dos obligaciones. En la dirección difícil puedes empezar «si $x > 0$, entonces…». Explica dónde interviene cada hipótesis de signo.

83. Sea $C \neq \varnothing$. Demuestra $A \times C \subseteq B \times C$ si y sólo si $A \subseteq B$. Separa las direcciones, pero completa tú los detalles. Identifica la elección que necesita no vacuidad y da un contraejemplo si se retira esa hipótesis.

84. Sea $f : A \to B$ y define $F : A \to A \times B$ por $F(a) = (a, f(a))$. Demuestra que es una función inyectiva. Decide exactamente cuándo es sobreyectiva: trata primero $A = \varnothing$ y después $A \neq \varnothing$. No se proporciona un esquema de prueba.

85. Demuestra que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un único $x \in \mathbb{R}$ que satisface $ax + b = x$. Determina antes si la hipótesis indicada es suficiente. Si no lo es, sustituye el enunciado por una clasificación completa según a, b y demuestra esa clasificación.

86. Para A, B disjuntos, demuestra que todo $X \subseteq A \cup B$ admite una única representación $X = U \cup V$ con $U \subseteq A$ y $V \subseteq B$. Incluye existencia, unicidad y los casos vacíos. Después de escribir la prueba, señala qué paso no sobrevive si A, B se solapan.

O. Hipótesis tácitas y reparación de enunciados

87. Diagnostica: «Si $x^2 > y^2$, entonces $x > y$, pues de $(x - y)(x + y) > 0$ se cancela el factor $x + y$». Da un contraejemplo real y una hipótesis adicional de signo que haga verdadera la conclusión. Prueba el enunciado reparado e indica qué paso necesitaba esa hipótesis.

88. Un borrador concluye de $f \circ h = g \circ h$ que $f = g$, «eligiendo para cada $b \in B$ algún $a \in A$ con $h(a) = b$». Aquí $h : A \to B$ y $f, g : B \to C$. Identifica la hipótesis tácita. Construye un contraejemplo con todos los conjuntos no vacíos y prueba la conclusión al añadir dicha hipótesis.

89. Para una relación $R \subseteq A \times A$, un texto dice: «Si R es simétrica y transitiva, es reflexiva: como aRb, también bRa y entonces aRa». Localiza el dato no justificado. Da un contraejemplo con $A \neq \varnothing$. Demuestra que la reparación $\forall a \in A\, \exists b \in A\ (aRb)$ basta y que, bajo simetría y transitividad, es también necesaria para reflexividad.

90. Diagnostica: «Si $A \times B = A \times C$, fijamos $a \in A$ y concluimos $B = C$». Refuta sin usar $B = C$. Repara mediante una hipótesis sobre A y demuestra ambas inclusiones. Después

decide si la afirmación universal "para todos B, C, esa igualdad de productos implica $B = C$" caracteriza esa hipótesis sobre A.

91. Se afirma: «Para cualquier $S \subseteq \mathbb{R}$, si $t \notin S$ entonces $t \notin \{s^2 : s \in S\}$; basta observar que t no es una entrada». Refuta y escribe una condición exacta de pertenencia a la imagen de cuadrados. Úsala para decidir, justificadamente, si 1 y 4 pertenecen a la imagen de $S = \{-2, 0\}$.

92. Un argumento de unicidad dice: «$X \subseteq A$ y $X \cup B = A \cup B$; al quitar B, queda $X = A$». Da un contraejemplo. Clasifica todos los $X \subseteq A$ que cumplen la igualdad y demuestra que la solución es única si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

P. Diseñar lemas útiles

93. Quieres demostrar que si $A \cup B = C \cup D$ y las dos uniones son disjuntas, entonces $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$ son disjuntos dos a dos y su unión es el conjunto común. Diseña un lema sobre cruzar dos descomposiciones disjuntas, pruébalo y aplícalo. Explica por qué el lema no debe exigir que las cuatro piezas sean no vacías.

94. Sea $f : A \to B$ y $X, Y \subseteq A$. Para probar $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, propone un lema sobre testigos de pertenencia a una imagen y úsalo en ambas inclusiones. Después decide si el mismo esquema prueba $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ y localiza exactamente el obstáculo.

95. Demuestra que para reales a, b, c con $a < b$ hay al menos un número t tal que $a < t < b$ y $t \neq c$. Diseña primero un lema que construya dos candidatos distintos dentro del intervalo. No invoques densidad ni infinitud como resultados sin demostrar.

96. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$, y define $H : A \times C \to B \times D$ mediante $H(a, c) = (f(a), g(c))$. Con $A, C \neq \varnothing$, prueba que H es inyectiva si y sólo si f, g lo son. Formula un lema que permita recuperar una coordenada fijando la otra. Explica qué se pierde si se admite un factor vacío y da un ejemplo concreto.

97. Para $r, s \in \mathbb{R}$, prueba $\max\{r, s\} + \min\{r, s\} = r + s$ y usa ese resultado para demostrar que $\max\{r, s\} = (r + s + |r - s|)/2$. Diseña un único lema por casos que sirva a ambos objetivos. Explica cómo incluye $r = s$.

98. Dados conjuntos A, B, C, D, demuestra

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$$

Diseña y prueba un lema de pertenencia de pares que reduzca la igualdad a condiciones sobre coordenadas. Usa el lema en los dos sentidos y revisa todos los casos en que algún conjunto es vacío.

Q. Síntesis y elección autónoma del método

99. Sea $A \subseteq U$. Caracteriza todos los $X \subseteq U$ que satisfacen simultáneamente $A \cup X = U$ y $A \cap X = \varnothing$, y demuestra existencia y unicidad. Al terminar, explica por qué la clasificación pide dos condiciones, y qué familias de candidatos deja cada una por separado.

100. Para $a, b \in \mathbb{R}$, decide exactamente cuándo la ecuación $|x - a| = b$ tiene cero, una o dos soluciones reales. Demuestra la clasificación completa y, sólo al final, justifica tu método y explica por qué los casos extremos no deben omitirse.

101. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Demuestra que, si además g es inyectiva, entonces $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Refuta la conclusión si se retira la hipótesis adicional. Explica después por qué aplicar g a dos objetos fue útil y por qué no bastaba con suponer la conclusión.

102. Sea $R \subseteq A \times A$ reflexiva y transitiva. Para cada $a \in A$, define $R(a) = \{x \in A : aRx\}$. Demuestra que aRb si y sólo si $R(b) \subseteq R(a)$. Deduce que, si además R es antisimétrica, la función $a \mapsto R(a)$ de A a $\mathcal{P}(A)$ es inyectiva. Explica después qué hipótesis sostiene cada dirección y muestra un fallo sin reflexividad.

103. Sea U un conjunto y define $T : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $T(X) = U \setminus X$. Demuestra que T es biyectiva y caracteriza sus puntos fijos, es decir, los X con $T(X) = X$. Distingue $U = \varnothing$ de $U \neq \varnothing$. Después explica cómo una misma identidad organiza existencia, unicidad y el análisis de puntos fijos.

104. Una conclusión afirma: «Si para cada subconjunto no vacío $S \subseteq A$ la restricción $f|_S$ es inyectiva, entonces $f : A \to B$ es inyectiva». Prueba la afirmación, determina si basta comprobar los subconjuntos de exactamente dos elementos y demuestra la equivalencia correspondiente, incluyendo A vacío o unitario. Refuta la versión que sólo comprueba subconjuntos unitarios. Explica al final cuál es la información mínima que revela una colisión.

Soluciones razonadas

A. Anatomía y forma lógica

1. Universo: $\mathbb{R}$. Cuantificador: universal. Hipótesis: $x > 2$. Conclusión: $x^2 > 4$. La forma es $\forall x \in \mathbb{R}\,(x > 2 \Rightarrow x^2 > 4)$.

2. Los cálculos sólo verifican tres casos. La afirmación es universal y exige cubrir todo par de enteros impares. La evidencia puede sugerir la conjetura, pero no fuerza los casos no comprobados.

3. $\forall x\,(x \in A \cap B \Rightarrow x \in A)$. Si se fija un universo U, puede escribirse $\forall x \in U\,(x \in A \cap B \Rightarrow x \in A)$.

4. Debe proporcionar un testigo real concreto y verificar que su cuadrado es 2. Por ejemplo, puede tomarse como testigo el real no negativo cuyo cuadrado es 2, si su existencia ya ha sido establecida.

5. Existencia: encontrar o garantizar al menos un x con $P(x)$. Unicidad: demostrar que cualesquiera dos objetos que satisfagan P deben coincidir.

6. El bicondicional exige simultáneamente $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. La primera dirección sólo establece suficiencia de P para Q, no necesidad.

B. Prueba directa y universales

7. Sean $a = 2m$ y $b = 2n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$. Como $m + n \in \mathbb{Z}$, la suma es par.

8. Sea $a = 2m$ par y $b \in \mathbb{Z}$. Entonces $ab = 2(mb)$. Como $mb \in \mathbb{Z}$, el producto es par.

9. De $x > 3$ se sigue $2x > 6$ al multiplicar por $2 > 0$. Sumando 1 obtenemos $2x + 1 > 7$.

10. Sea $x \in A$ arbitrario. Como $A \subseteq B$, $x \in B$. Como $B \subseteq C$, $x \in C$. Por arbitrariedad, $A \subseteq C$.

11. Sea $x \in A \cap B$. Entonces $x \in A$ y $x \in B$; en particular $x \in A$ o $x \in B$, luego $x \in A \cup B$.

12. Sean $x_1, x_2 \in S$ y supón $f|_S(x_1) = f|_S(x_2)$. Esto significa $f(x_1) = f(x_2)$. Como f es inyectiva, $x_1 = x_2$.

13. Supón $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Inyectividad de g da $f(x_1) = f(x_2)$; inyectividad de f da $x_1 = x_2$.

14. Sea $X \in \mathcal{P}(A)$. Entonces $X \subseteq A$. Como $A \subseteq B$, por transitividad $X \subseteq B$, así $X \in \mathcal{P}(B)$.

C. Existencia y unicidad

15. Elige $x = -a$. Entonces $x + a = -a + a = 0$. El testigo pertenece a $\mathbb{R}$.

16. Si $x + a = 0$ y $y + a = 0$, restamos a en ambas igualdades: $x = -a$ y $y = -a$, luego $x = y$.

17. Existencia: $x = 1/a$. Unicidad: si $ax = 1$ y $ay = 1$, entonces $ax = ay$; como $a \neq 0$, dividir por a da $x = y$.

18. Sobreyectividad da al menos una preimagen. Si $f(a_1) = b = f(a_2)$, inyectividad da $a_1 = a_2$.

19. En $\mathbb{R}$, la ecuación $x^2 = 1$ tiene soluciones $x = 1$ y $x = -1$. Hay existencia pero no unicidad.

20. Las dos condiciones las satisface cualquier $X \subseteq A$, por lo que la afirmación de unicidad es falsa salvo casos especiales. Por ejemplo, si $A = \{1\}$, funcionan $X = \varnothing$ y $X = A$. El ejercicio revela que antes de demostrar conviene verificar si el enunciado es cierto.

D. Bicondicionales

21. Si $n = 2k$, entonces $n + 2 = 2(k + 1)$, par. Recíprocamente, si $n + 2 = 2m$, entonces $n = 2(m - 1)$, par.

22. Si $A \subseteq B$, todo elemento de A pertenece a ambos, así $A \subseteq A \cap B$; la inclusión contraria siempre vale. Recíprocamente, si $A \cap B = A$ y $x \in A$, entonces $x \in A \cap B$, luego $x \in B$.

23. Si $A \subseteq B$, todo elemento de $A \cup B$ está en B, y $B \subseteq A \cup B$, luego igualdad. Recíprocamente, si $A \cup B = B$ y $x \in A$, entonces $x \in A \cup B = B$.

24. Si es sobreyectiva, todo $b \in B$ es $f(a)$ para algún a, luego $B \subseteq \mathrm{Im}(f)$; la otra inclusión siempre vale. Si la imagen es B, cada b está en la imagen, que es justamente sobreyectividad.

25. Si $x = 0$, entonces $x^2 = 0$. Si $x^2 = 0$ y $x \neq 0$, dividir por x daría $x = 0$, contradicción. Equivalentemente, en $\mathbb{R}$ un producto es cero sólo si algún factor es cero.

26. (i)⇒(ii) es inmediato. (ii)⇒(iii): no puede existir elemento exclusivo de uno de los conjuntos. (iii)⇒(i): si la diferencia simétrica es vacía, ningún elemento pertenece a uno sin pertenecer al otro, luego las pertenencias coinciden y $A = B$.

E. Contraposición

27. La contrapositiva es: si n es impar, entonces n^2 es impar. Si $n = 2k + 1$, entonces $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, impar. Por equivalencia lógica, el enunciado original es verdadero.

28. La contrapositiva de «ab impar ⇒ ambos impares» es «si al menos uno es par, entonces ab es par». Si $a = 2k$, entonces $ab = 2(kb)$; análogamente si b es par.

29. La contrapositiva dice: si x e y son racionales, entonces $x + y$ es racional. Escribe $x = a/b$, $y = c/d$ con enteros y denominadores no nulos; entonces $x + y = (ad + bc)/(bd)$ es racional.

30. Esto es exactamente la negación de $A \subseteq B$, pues $A \subseteq B$ significa $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Negarla produce $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$.

31. El método pedido es contraposición. La contrapositiva dice: si para todo $S \subseteq A$ se cumple $f^{-1}(f(S)) = S$, entonces f es inyectiva.

Supongamos esa igualdad universal y sean $a, b \in A$ con $f(a) = f(b)$. Para $S = \{a\}$ tenemos $b \in f^{-1}(f(S)) = S$, así que $b = a$. Esto prueba inyectividad y, por contraposición, el enunciado original.

También puede construirse directamente el subconjunto que lo verifica cuando f no es inyectiva: si $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$, toma $S = \{a\}$. Entonces $b \notin S$ pero $b \in f^{-1}(f(S))$, por lo que los conjuntos difieren. Esta última ruta prueba el mismo enunciado, pero no sustituye la prueba por el método solicitado.

32. La prueba directa requiere extraer paridad de n a partir de la de n^2, lo que suele necesitar un resultado adicional. La contrapositiva convierte la hipótesis en la representación explícita $n = 2k + 1$, desde la que el cuadrado se calcula inmediatamente. Por eso es estratégicamente más natural.

F. Contradicción

33. Supón que existe tal x. Entonces $0 < x$ y $x < 0$. Por transitividad del orden, $0 < 0$, imposible. Por tanto no existe.

34. Supón que es inyectiva. Toma $a_1 \neq a_2$ en A. Como es constante, $f(a_1) = f(a_2)$; inyectividad implicaría $a_1 = a_2$, contradicción.

35. Supón que existe A con $A \in \varnothing$. Pero por definición el conjunto vacío no tiene elementos. Contradicción.

36. Si también $B \subseteq A$, las dos inclusiones darían $A = B$ por extensionalidad/doble inclusión, contradiciendo que A es subconjunto propio de B.

37. Supón que g y h son inversas de f y $g \neq h$. Pero algebraicamente $g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h$, contradicción.

38. La negación de una implicación es $P \wedge \neg Q$. Para demostrar que la implicación es verdadera por contradicción, se supone precisamente su falsedad y se deriva una imposibilidad.

G. Casos

39. Si $x \geq 0$, $|x| = x \geq 0$. Si $x < 0$, $|x| = -x > 0$. Los casos son exhaustivos.

40. Todo entero es par o impar. Si n es par, el producto tiene factor par. Si n es impar, $n + 1$ es par, así el producto vuelve a tener factor par.

41. Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y la igualdad es inmediata. Si $x < 0$, $|x| = -x$ y $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

42. Es la definición de unión. Caso 1: $x \in A$; caso 2: $x \in B$. Toda conclusión que pueda derivarse en ambos casos queda establecida para un $x \in A \cup B$.

43. Si $x \geq y$, entonces $\max\{x, y\} = x$ y $x - (x + y)/2 = (x - y)/2 \geq 0$. Si $y \geq x$, análogamente $y - (x + y)/2 = (y - x)/2 \geq 0$.

44. Los casos no son exhaustivos: falta $x = 0$. La reparación es usar $x \geq 0$ / $x < 0$, o separar tres casos $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$.

H. Pruebas de conjuntos

45. Sea x en el lado izquierdo. Entonces $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in C$. Si $x \in B$, $x \in A \cap B$; si $x \in C$, $x \in A \cap C$. Luego pertenece al lado derecho.

46. Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Entonces está en $A \cap B$ o en $A \cap C$. En ambos casos $x \in A$ y además $x \in B \cup C$. Por tanto $x \in A \cap (B \cup C)$.

47. Para x: $x \in A \setminus (B \cup C)$ iff $x \in A$ y $x \notin B \cup C$ iff $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$ iff $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

48. X está en el lado izquierdo iff $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$ iff todo elemento de X está en $A \cap B$ iff $X \subseteq A \cap B$ iff $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

49. Toma $A = \{1\}$, $B = \{1\}$, $C = \varnothing$. Entonces $B \cap C = \varnothing$, así el lado izquierdo es $\{1\}$. El derecho es $(\varnothing) \cap \{1\} = \varnothing$.

50. Si $A = B$, no hay elementos exclusivos y la diferencia simétrica es vacía. Si $A \triangle B = \varnothing$ y $x \in A$, no puede ocurrir $x \notin B$, pues estaría en $A \setminus B$; así $A \subseteq B$. Simétricamente $B \subseteq A$.

I. Pruebas con funciones

51. Supón $3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$. Entonces $3x_1 = 3x_2$ y $x_1 = x_2$.

52. Sea $y \in \mathbb{R}$ arbitrario. Toma $x = (y + 1)/3$. Entonces $f(x) = 3(y + 1)/3 - 1 = y$.

53. Si $f(x_1) = f(x_2)$, al aplicar g se obtiene $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. La inyectividad de la composición fuerza $x_1 = x_2$.

54. Sea c arbitrario en el codominio de g. Existe a con $g(f(a)) = c$. Tomando $b = f(a)$, se tiene $g(b) = c$.

55. Si $g \circ f = \mathrm{id}$ y $f(x_1) = f(x_2)$, aplicar g da $x_1 = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = x_2$.

56. Si $f \circ h = \mathrm{id}_B$, para cualquier $b \in B$, toma $a = h(b)$. Entonces $f(a) = f(h(b)) = b$.

J. Contraejemplos y refutación

57. $a = b = 1$ es contraejemplo: $a + b = 2$ es par, pero ninguno de los dos es par.

58. Toma $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$. La intersección es vacía y ambos conjuntos son no vacíos.

59. Toma $f : \{1, 2\} \to \{a\}$ con $f(1) = f(2) = a$. Es sobreyectiva hacia $\{a\}$ pero no inyectiva.

60. Toma $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x\}$, $f(1) = a$ y $g(a) = g(b) = x$. La composición desde un singleton es inyectiva, pero g no.

61. Para refutar $P \Rightarrow Q$ se necesita P verdadera y Q falsa. Si P ya es falsa, la implicación no falla en ese caso.

62. Toma $C = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Entonces ambas uniones son C, pero $A \neq B$.

K. Diagnóstico y reparación

63. La prueba asume exactamente lo que debe demostrar: que n es par. Es circular. Puede repararse usando contraposición: si n es impar, entonces n^2 es impar.

64. Se eligió un ejemplo particular en lugar de un real arbitrario. Hay que tomar $x \in \mathbb{R}$ arbitrario y usar una propiedad válida para todo real, por ejemplo que el producto de dos números del mismo signo es no negativo.

65. Se cambió ilegítimamente $\forall x\,\exists y$ por $\exists y\,\forall x$. El testigo y puede depender de x. La prueba debe conservar esa dependencia.

66. Falta la dirección $Q \Rightarrow P$. La prueba sólo establece que P es suficiente para Q, no que sea necesaria.

L. Síntesis

67. Prueba directa por elemento arbitrario. Sea $x \in A \cap C$. Entonces $x \in A$ y $x \in C$. Como $A \subseteq B$, $x \in B$, luego $x \in B \cap C$.

68. Directa: $n = 2k + 1$. Entonces $n^2 + 2n = (2k + 1)^2 + 2(2k + 1) = 4k^2 + 8k + 3 = 2(2k^2 + 4k + 1) + 1$, impar.

69. Puede hacerse por contraposición/casos. Si $x \leq -1$ o $x \geq 1$, entonces $|x| \geq 1$ y por tanto $x^2 \geq 1$. La contraposición da el resultado.

70. Para inyectividad, usa igualdad de valores y aplica sucesivamente inyectividad de g y f. Para sobreyectividad, dado $c \in C$, elige b con $g(b) = c$ y luego a con $f(a) = b$. Entonces $g(f(a)) = c$.

71. Si $A \subseteq B$, no existe elemento de A fuera de B, así la diferencia es vacía. Si $A \setminus B = \varnothing$ y $x \in A$, no puede ser $x \notin B$, pues estaría en la diferencia. Luego $x \in B$.

72. Verdadero. Elige $c \in C$. Si $a \in A$, entonces $(a, c) \in A \times C = B \times C$, de modo que $a \in B$. Así $A \subseteq B$. Simétricamente $B \subseteq A$.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Contraposición. La contrapositiva es: si n es impar, n^2 es impar. Escribe $n = 2k + 1$. Entonces

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

impar. Por equivalencia lógica, el teorema queda demostrado.

Contradicción. Supón n^2 par y, buscando contradicción, supón además que n es impar. El mismo cálculo muestra que n^2 sería impar, contradiciendo la hipótesis de que es par.

Las dos usan el mismo núcleo algebraico. La contraposición muestra con mayor claridad que se está probando una implicación equivalente; la contradicción añade una hipótesis incompatible y cierra por imposibilidad.

74. (i)⇒(ii): siempre $S \subseteq f^{-1}(f(S))$. Si x está en el lado derecho, existe $s \in S$ con $f(x) = f(s)$; inyectividad da $x = s \in S$.

(ii)⇒(i): si $f(a) = f(b)$, entonces $b \in f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$, luego $a = b$.

(i)⇒(iii): la inclusión de izquierda a derecha siempre vale. Si $y \in f(S) \cap f(T)$, existen $s \in S, t \in T$ con $f(s) = f(t) = y$; inyectividad da $s = t \in S \cap T$.

Para (iii)⇒(i) por contraposición, supón que f no es inyectiva. Existen $a \neq b$ con $f(a) = f(b)$. Toma $S = \{a\}$ y $T = \{b\}$. Entonces $S \cap T = \varnothing$, así $f(S \cap T) = \varnothing$, pero $f(a) \in f(S) \cap f(T)$. Por tanto (iii) falla.

75. Sea x en el lado izquierdo. Entonces $x \in A$ y $x \notin B \triangle C$. No estar en la diferencia simétrica significa que x pertenece a ambos B, C o a ninguno. En el primer caso $x \in A \cap B \cap C$; en el segundo $x \in A \setminus (B \cup C)$. Así obtenemos la primera inclusión.

Recíprocamente, si x está en el lado derecho, entonces $x \in A$ y o bien pertenece simultáneamente a B, C, o bien no pertenece a ninguno. En cualquiera de los dos casos $x \notin B \triangle C$, así $x \in A \setminus (B \triangle C)$.

La identidad expresa «dentro de A, B y C tienen el mismo valor de pertenencia».

76.

(a) Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ y la inyectividad de la composición da $x_1 = x_2$. Para g, dado $c \in C$, la sobreyectividad de la composición da $a \in A$ con $g(f(a)) = c$, así c tiene preimagen bajo g.

(b) Supón $g(b_1) = g(b_2)$. Como f es sobreyectiva, existen a_1, a_2 con $f(a_i) = b_i$. Entonces

$$(g \circ f)(a_1) = g(b_1) = g(b_2) = (g \circ f)(a_2).$$

La composición es inyectiva, así $a_1 = a_2$, y por tanto $b_1 = b_2$.

(c) Ya sabíamos que f era inyectiva y ahora suponemos sobreyectividad; por tanto f es biyectiva. g era sobreyectiva y (b) da inyectividad; luego g es biyectiva.

77.

(a) Toma $C = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Son no vacíos y distintos, pero $A \cup C = C = B \cup C$.

(b) Una hipótesis suficiente es también exigir

$$A \cap C = B \cap C.$$

(c) Sea $x \in A$. Si $x \in C$, entonces $x \in A \cap C = B \cap C$, así $x \in B$. Si $x \notin C$, como $x \in A \cup C = B \cup C$ y no pertenece a C, debe pertenecer a B. Así $A \subseteq B$. Intercambiando A, B obtenemos $B \subseteq A$, luego $A = B$.

La prueba usa casos según pertenencia a C.

78. Lema. Si $f : A \to B$ es inyectiva, entonces la función recodificada

$$\tilde{f} : A \to f(A), \qquad \tilde{f}(a) = f(a)$$

es biyectiva.

Prueba: es inyectiva porque f lo es; es sobreyectiva por definición de $f(A)$.

Ahora, como $g \circ f$ es sobreyectiva, $g|_{f(A)}$ es sobreyectiva: dado $c \in C$, existe a con $g(f(a)) = c$, y $f(a) \in f(A)$.

Queda comparar inyectividad. Tenemos

$$g \circ f = (g|_{f(A)}) \circ \tilde{f}.$$

Como $\tilde{f}$ es biyectiva, en particular sobreyectiva e inyectiva.

Si $g|_{f(A)}$ es inyectiva, la composición con $\tilde{f}$ es inyectiva, así $g \circ f$ lo es.

Recíprocamente, supón $g \circ f$ inyectiva y sean $b_1, b_2 \in f(A)$ con $g(b_1) = g(b_2)$. Por sobreyectividad de $\tilde{f}$, existen a_i con $\tilde{f}(a_i) = b_i$. Entonces $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, así $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. La restricción es inyectiva.

Como ya era sobreyectiva, es biyectiva exactamente cuando la composición es inyectiva.

79.

(a) Sobreyectividad garantiza **existencia** de al menos una preimagen para cada elemento de B, no **unicidad**. La frase "esa preimagen debe ser $x_1 = x_2$" introduce ilegítimamente la propiedad que define inyectividad.

(b) Sea $f : \{1, 2\} \to \{a\}$ con $f(1) = f(2) = a$. Es sobreyectiva y no inyectiva. El dominio necesita al menos dos elementos distintos para que falle inyectividad; con dos basta este ejemplo. El codominio no puede ser vacío para una función con ese dominio, y un solo elemento basta. Por tanto las cardinalidades dos y uno son mínimas.

(c) Una afirmación verdadera cercana es: «si f es biyectiva, entonces cada $b \in B$ tiene una única preimagen». Sobreyectividad da existencia. Si $f(x_1) = b = f(x_2)$, inyectividad da $x_1 = x_2$.

80. Sea $x \in A$ arbitrario. Debemos mostrar $x \in B$.

Dividimos según la pertenencia a C.

Caso 1: $x \in C$**.** Como $x \in A$ y $x \in C$, tenemos $x \in A \cap C$. Por hipótesis, $x \in B \cap C$, luego $x \in B$.

Caso 2: $x \notin C$**.** Entonces $x \in A \setminus C$. Por hipótesis, $x \in B \setminus C$, luego $x \in B$.

Los casos $x \in C$ y $x \notin C$ son exhaustivos. Por arbitrariedad, $A \subseteq B$.

La prueba por casos es natural porque las dos hipótesis están diseñadas precisamente para las dos regiones determinadas por C. Una contradicción obligaría a suponer $x \notin B$ y luego volver a separar esos mismos casos, añadiendo una capa lógica innecesaria.

N. Construir pruebas con ayuda decreciente

81. Supongamos $A \cap B = \varnothing$ y fijemos $x \in A$. Si $x \in B$, entonces $x \in A \cap B$, imposible. Por tanto $x \notin B$ y $x \in A \setminus B$. Como x era arbitrario, $A \subseteq A \setminus B$.

Recíprocamente, supongamos esa inclusión. Si existiera $x \in A \cap B$, la pertenencia a A y la inclusión darían $x \in A \setminus B$, es decir, $x \notin B$, contradiciendo $x \in B$. No existe tal elemento y la intersección es vacía. Si $A = \varnothing$, ambas condiciones son verdaderas; no se eligió un elemento cuya existencia hubiera que garantizar.

82. Las obligaciones son deducir ambos ceros de la suma nula y comprobar la suma cuando ambos números son cero. Si $x + y = 0$ y $x > 0$, de $y \geq 0$ resulta $x + y \geq x > 0$, contradicción. Así $x \leq 0$; junto con $x \geq 0$ da $x = 0$. Sustituyendo en la suma, $y = 0$. La vuelta es $0 + 0 = 0$.

La condición $y \geq 0$ se usó para comparar la suma con x y $x \geq 0$ para convertir $x \leq 0$ en igualdad. Sin ambas condiciones, $1 + (-1) = 0$ no permite concluir que los sumandos sean cero.

83. Si $A \subseteq B$ y $(a, c) \in A \times C$, entonces $a \in B$ y $c \in C$, de modo que $(a, c) \in B \times C$. Esto prueba la inclusión de productos sin necesitar $C \neq \varnothing$.

Para la vuelta, fijamos $c_0 \in C$, que existe por la hipótesis. Dado $a \in A$ arbitrario, $(a, c_0) \in A \times C \subseteq B \times C$, luego $a \in B$. Así $A \subseteq B$. Si A es vacío, el argumento universal sigue siendo válido. Sin no vacuidad, toma $A = \{0\}$ y $B = C = \varnothing$: ambos productos son vacíos, pero $A \nsubseteq B$.

84. Para cada $a \in A$ hay un único $f(a) \in B$, por lo que el par pertenece al codominio y está determinado de manera única. Si $F(a_1) = F(a_2)$, la igualdad de las primeras coordenadas da $a_1 = a_2$; así F es inyectiva.

Si $A = \varnothing$, también $A \times B = \varnothing$ y F es sobreyectiva. Si $A \neq \varnothing$, fijemos $a_0 \in A$; la existencia de f garantiza $f(a_0) \in B$. Si F es sobreyectiva, para cada $b \in B$ el par (a_0, b) es $F(a)$ para algún a. Las coordenadas obligan a $a = a_0$ y $b = f(a_0)$; por tanto $B = \{f(a_0)\}$. Recíprocamente, si B tiene un solo elemento, todo $(a, b) \in A \times B$ satisface $b = f(a)$, y es $F(a)$. La condición exacta es $A = \varnothing$ o B unitario.

85. La hipótesis no basta: $a = 1, b = 1$ da $x + 1 = x$, imposible. Reorganizar la igualdad equivale a $(a - 1)x = -b$.

Si $a \neq 1$, existe $x = -b/(a - 1)$ y la sustitución verifica la ecuación. Si u, v son soluciones, $(a - 1)u = (a - 1)v$ y la no nulidad de $a - 1$ permite cancelar para obtener $u = v$. Si $a = 1$, $b = 0$, todo real es solución; como 0 y 1 son distintos, no hay unicidad. Si $a = 1, b \neq 0$, la ecuación exigiría $b = 0$ y no hay soluciones. Estos casos son exhaustivos y no requieren $a \neq 0$: también $a = 0$ pertenece al primer caso y da la única solución $x = b$.

86. Definimos $U = X \cap A$ y $V = X \cap B$. Tienen las inclusiones exigidas. Si $x \in X$, la inclusión $X \subseteq A \cup B$ lo sitúa en al menos una de las partes y por tanto en $U \cup V$; si $x \in U \cup V$, está en X. Así $X = U \cup V$.

Para unicidad, sea otra representación $X = U' \cup V'$ con las mismas inclusiones. Si $x \in U'$, entonces $x \in X \cap A$. Si $x \in X \cap A$, pertenece a U' o a V'; la segunda posibilidad lo situaría en $A \cap B$, imposible. Luego $U' = X \cap A$. Por el mismo argumento explicitado con las partes intercambiadas, si $x \in V'$ está en $X \cap B$, y si $x \in X \cap B$ no puede estar en $U' \subseteq A$, de modo que $V' = X \cap B$. Ambas partes están determinadas.

Si alguna parte es vacía, su subconjunto correspondiente también lo es; si X es vacío, ambos son vacíos. Si $A = B = X = \{0\}$, las representaciones $(U, V) = (\{0\}, \varnothing)$ y $(\varnothing, \{0\})$ son distintas. Falla la exclusión de la segunda posibilidad, que usaba disjunción.

O. Hipótesis tácitas y reparación de enunciados

87. Con $x = -2, y = 1$ tenemos $x^2 > y^2$ y $x < y$. Cancelar un factor de signo desconocido en una desigualdad puede invertir su sentido. Una reparación es añadir $x + y > 0$. Entonces dividir $(x - y)(x + y) > 0$ por ese número positivo da $x - y > 0$ y $x > y$. La factorización no necesitaba la hipótesis; la división con preservación del orden sí. No se afirma que sea la única reparación posible.

88. La elección requiere que h sea sobreyectiva. Sin ello, toma $A = \{0\}$, $B = C = \{0, 1\}$, $h(0) = 0$, $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = 0, g(1) = 1$. Las composiciones coinciden en A, pero $f(1) \neq g(1)$.

Si h es sobreyectiva, para $b \in B$ arbitrario existe $a \in A$ con $h(a) = b$. Por igualdad de las composiciones, $f(b) = f(h(a)) = g(h(a)) = g(b)$. Las funciones tienen el mismo dominio y codominio y coinciden en cada entrada, luego son iguales. La reparación justifica cada elección; no presupone una función que seleccione simultáneamente todas las preimágenes.

89. Se usó aRb sin garantizar que para ese a exista algún b. En $A = \{0\}$, la relación vacía es simétrica y transitiva, pues sus implicaciones no tienen antecedentes verdaderos, pero no es reflexiva.

Con la condición adicional, fija $a \in A$ arbitrario y escoge el b que ella garantiza. De aRb, simetría da bRa y transitividad da aRa. Así R es reflexiva. Recíprocamente, si es reflexiva, para cada a se puede tomar $b = a$. Si A es vacío, todas estas condiciones son universales vacías y la equivalencia también vale.

90. Si $A = \varnothing$, $B = \varnothing$ y $C = \{0\}$, los productos son vacíos pero $B \neq C$. Se repara con $A \neq \varnothing$. Fija $a_0 \in A$. Para $b \in B$, el par (a_0, b) está en $A \times C$, por lo que $b \in C$ y $B \subseteq C$. Para $c \in C$, la igualdad inversa de productos da $(a_0, c) \in A \times B$, luego $c \in B$ y $C \subseteq B$. Así $B = C$.

La propiedad universal caracteriza no vacuidad: acabamos de probar su suficiencia y, si A es vacío, los B, C del contraejemplo refutan la propiedad. Una igualdad particular con $B = C$ no permitiría concluir no vacuidad de A; la cuantificación sobre todos B, C es esencial.

91. Con $S = \{-1\}$ y $t = 1$, $t \notin S$ pero $t = (-1)^2$ está en la imagen. Entrada y salida son papeles distintos. La condición exacta es

$$t \in \{s^2 : s \in S\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s \in S\ (s^2 = t).$$

Si hay tal s, su cuadrado coloca t en la imagen; si t está en la imagen, su definición proporciona ese s. Para $S = \{-2, 0\}$ los únicos cuadrados posibles son 4 y 0, de modo que 4 sí pertenece (testigo -2) y 1 no pertenece (ninguna de las dos entradas produce 1). La reparación cambia la conclusión a la negación de la existencia de una preimagen, no a la ausencia de la salida en el dominio.

92. Para $A = B = \{0\}$, tanto $X = \varnothing$ como $X = A$ cumplen la igualdad. Los conjuntos buscados son exactamente

$$A \setminus B \subseteq X \subseteq A.$$

Si se cumple la igualdad y $a \in A \setminus B$, entonces $a \in X \cup B$ pero $a \notin B$, luego $a \in X$. Recíprocamente, si esas inclusiones valen, $X \cup B \subseteq A \cup B$. Para la inclusión inversa, un elemento de B ya está en $X \cup B$ y un elemento de A que no está en B pertenece a $A \setminus B \subseteq X$. Así las uniones son iguales.

Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \setminus B = A$ y las inclusiones obligan a $X = A$. Si la intersección no es vacía, $A \setminus B$ y A son dos soluciones distintas. La operación «quitar B» sólo determina la parte fuera de B, que es el dato que el borrador confundía con el conjunto entero.

P. Diseñar lemas útiles

93. Un lema útil es: si $U = U_1 \cup U_2 = V_1 \cup V_2$, con $U_1 \cap U_2 = V_1 \cap V_2 = \varnothing$, las piezas $U_i \cap V_j$ para $i, j \in \{1, 2\}$ cubren U y son disjuntas dos a dos.

Prueba: dado $x \in U$, pertenece a algún U_i y a algún V_j, de modo que está en una de las piezas. Recíprocamente, todas están contenidas en U. Si dos piezas tienen índices distintos, difieren en el índice i o en el j. Un elemento común estaría respectivamente en $U_1 \cap U_2$ o en $V_1 \cap V_2$, ambas vacías. Esto prueba cada posible intersección entre piezas diferentes.

Aplicamos con $U = A \cup B$, $(U_1, U_2) = (A, B)$ y $(V_1, V_2) = (C, D)$. El lema produce las dos conclusiones pedidas. No afirma que estas piezas sean una partición con bloques no vacíos: por ejemplo, si $A = C$ y $B = D$ son disjuntos, las piezas $A \cap D$ y $B \cap C$ son vacías. Exigirlas no vacías excluiría ejemplos válidos.

94. Lema: para $T \subseteq A$, $b \in f(T)$ si y sólo si existe $t \in T$ con $f(t) = b$. Es la definición de imagen: la ida extrae un testigo y la vuelta lo verifica.

Si $b \in f(X \cup Y)$, el lema da $t \in X \cup Y$ con $f(t) = b$. Según pertenezca a X o a Y, el mismo lema da $b \in f(X)$ o $b \in f(Y)$. Para la vuelta, si $b \in f(X) \cup f(Y)$, procede de alguna entrada de X o de Y; esa entrada está en $X \cup Y$ y coloca b en su imagen.

Para la intersección, una entrada de $X \cap Y$ sí demuestra $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. Pero en la vuelta se obtienen $x \in X$ y $y \in Y$ con $f(x) = b = f(y)$; pueden ser entradas diferentes, y ninguna pertenecer a $X \cap Y$. Ejemplo: $A = \{0, 1\}$, $B = \{0\}$, función constante, $X = \{0\}$, $Y = \{1\}$. La imagen de la intersección es vacía y la intersección de imágenes es $\{0\}$. Si se añade inyectividad, $x = y$ elimina exactamente ese obstáculo.

95. Lema: si $a < b$, los números $u = (2a + b)/3$ y $v = (a + 2b)/3$ satisfacen $a < u < v < b$. En efecto,

$$u - a = v - u = b - v = (b - a)/3 > 0.$$

Cada diferencia positiva justifica una de las desigualdades, y en particular $u \neq v$.

Si $u \neq c$, elige $t = u$. Si $u = c$, elige $t = v$, que es distinto de u y por tanto de c. En ambos casos $a < t < b$. Los casos son exhaustivos. El lema aporta dos candidatos admisibles; no presupone que uno de ellos sea el número prohibido ni que ambos lo eviten. La construcción prueba la existencia usando sólo operaciones reales y orden.

96. Lema: si $C \neq \varnothing$ y H es inyectiva, entonces f es inyectiva. Fija $c_0 \in C$. Si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $H(a_1, c_0) = H(a_2, c_0)$; inyectividad de H da $(a_1, c_0) = (a_2, c_0)$, luego $a_1 = a_2$.

Con $A \neq \varnothing$, se recupera también g: fija $a_0 \in A$; si $g(c_1) = g(c_2)$, los valores $H(a_0, c_1)$ y $H(a_0, c_2)$ coinciden, por lo que $c_1 = c_2$. Así la inyectividad de H implica la de ambas funciones. Para la vuelta, de $H(a_1, c_1) = H(a_2, c_2)$ se deducen $f(a_1) = f(a_2)$ y $g(c_1) = g(c_2)$; sus inyectividades dan ambas igualdades de coordenadas.

Si $C = \varnothing$, no hay c_0 y $A \times C$ es vacío, por lo que H es inyectiva aunque f no lo sea. Por ejemplo, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0\}$, f constante, $C = \varnothing$, $D = \{0\}$ y g vacía. Intercambiar los factores muestra el otro posible fallo.

97. Lema: si $r \geq s$, el máximo es r, el mínimo es s y $|r - s| = r - s$; si $r < s$, el máximo es s, el mínimo es r y $|r - s| = s - r$. Las primeras afirmaciones se siguen de la comparación y las últimas de la definición de valor absoluto. Los casos son exhaustivos y el primero incluye $r = s$.

En el primer caso, máximo más mínimo es $r + s$, y $(r + s + |r - s|)/2 = (r + s + r - s)/2 = r$, el máximo. En el segundo, la suma es $s + r = r + s$, y la fórmula da $(r + s + s - r)/2 = s$, también el máximo. Se probaron los dos objetivos en cada caso. Si $r = s$, el valor absoluto es cero y la fórmula devuelve r; no se divide por $r - s$.

98. Lema: para un par (x, y), pertenecer a $E \times F$ equivale a $x \in E$ e $y \in F$. La ida y la vuelta son las dos partes de la definición del producto cartesiano.

Si z pertenece a la intersección de la izquierda, al pertenecer a $A \times C$ es un par (x, y). El lema para ambos productos da $x \in A$, $y \in C$, $x \in B$, $y \in D$. Así $x \in A \cap B$ y $y \in C \cap D$, y otra aplicación da pertenencia a la derecha. Recíprocamente, un elemento de la derecha es un par (x, y) con ambas condiciones de intersección, que implican pertenencia a los dos productos y luego a su intersección.

Si A o B es vacío, el producto correspondiente de la izquierda y $A \cap B$ de la derecha son vacíos. Si C o D es vacío, sucede lo mismo con el producto correspondiente y $C \cap D$. En todos esos casos ambos miembros son vacíos; la prueba general no necesitó elegir pares existentes.

Q. Síntesis y elección autónoma del método

99. El único candidato es $X = U \setminus A$. Tiene unión U con A: cada elemento de U está en A o fuera de A. Su intersección con A es vacía por definición, y es subconjunto de U, así que existe.

Sea ahora $X \subseteq U$ que cumple ambas condiciones. Si $x \in X$, no puede estar en A por disjunción, luego $x \in U \setminus A$. Si $x \in U \setminus A$, la unión $U = A \cup X$ obliga a $x \in X$. Las dos inclusiones dan $X = U \setminus A$ y unicidad.

Por separado, la unión sólo obliga a $U \setminus A \subseteq X \subseteq U$; la disjunción sólo obliga a $X \subseteq U \setminus A$. Ambas juntas fijan los dos extremos iguales. Se eligió doble inclusión para identificar el objeto, y las mismas inclusiones cierran la unicidad. Si $A = \varnothing$, el candidato es U; si $A = U$, es vacío.

100. Si $b < 0$, no hay soluciones porque un valor absoluto es no negativo. Si $b = 0$, la igualdad equivale a $x - a = 0$, así que existe la única solución $x = a$.

Si $b > 0$, cualquier solución cumple $x - a \geq 0$ o $x - a < 0$. En el primer caso, la definición da $x - a = b$ y $x = a + b$. En el segundo, $-(x - a) = b$ y $x = a - b$. Ambos candidatos satisfacen la ecuación: sus diferencias con a son b y $-b$, cuyos valores absolutos son b. Además, son distintos porque su diferencia es $2b > 0$. No hay otros candidatos por exhaustividad de los casos.

La clasificación tiene cero, una y dos soluciones según el signo de b. Se escogieron casos para usar la definición del valor absoluto y después separar existencia de exhaustividad. Omitir $b = 0$ contaría dos veces el mismo candidato; omitir $b < 0$ produciría falsos testigos.

101. Para $b \in B$ arbitrario, aplicamos la identidad dada a $g(b) \in A$:

$$g(f(g(b))) = g(b).$$

Ambas entradas de g son elementos de B. Como g es inyectiva, se deduce $f(g(b)) = b$. Por arbitrariedad y por los dominios declarados, $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Sin inyectividad, toma $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $f(0) = 0$ y $g(0) = g(1) = 0$. La composición $g \circ f$ es la identidad de A, pero $f(g(1)) = 0 \neq 1$. Aplicar g convirtió la igualdad deseada en una igualdad conocida; su inyectividad permitió regresar. Ese regreso necesita una propiedad demostrada o dada, no la igualdad que se quiere probar. Si B es vacío, la conclusión es universal vacía y sigue siendo válida.

102. Si aRb y $x \in R(b)$, entonces bRx; por transitividad, aRx y $x \in R(a)$. Así $R(b) \subseteq R(a)$. Para la vuelta, reflexividad da bRb, es decir, $b \in R(b)$. La inclusión lo coloca en $R(a)$ y por tanto aRb.

El valor $R(a)$ es un subconjunto de A, así que la función indicada está bien definida. Si $R(a) = R(b)$, las dos inclusiones y la equivalencia probada dan aRb y bRa. Antisimetría implica $a = b$ y por ello la función es inyectiva. En $A = \varnothing$ esta prueba de inyectividad no requiere elegir elementos.

La ida usó transitividad; la vuelta usó reflexividad; el cierre de inyectividad usó antisimetría. Sin reflexividad, en $A = \{0\}$ con $R = \varnothing$, $R(0) \subseteq R(0)$ es verdadera pero $0R0$ es falsa. El método se eligió al traducir la pertenencia a $R(a)$ en una afirmación de la relación.

103. Primero T tiene valores en $\mathcal{P}(U)$. Para $X \subseteq U$, todo $u \in U$ pertenece a $U \setminus (U \setminus X)$ exactamente cuando no está en $U \setminus X$, lo cual, dentro de U, equivale a $u \in X$. Así $T(T(X)) = X$.

Si $T(X) = T(Y)$, aplicar T y usar la identidad da $X = Y$, luego es inyectiva. Para $Y \subseteq U$ arbitrario, la entrada $X = T(Y)$ satisface $T(X) = Y$, luego es sobreyectiva. También demuestra que esa entrada es única por inyectividad.

Si $U = \varnothing$, su único subconjunto es vacío y es punto fijo. Si $U \neq \varnothing$, fija $u \in U$. La igualdad $X = U \setminus X$ exigiría $u \in X$ si y sólo si $u \notin X$. Si pertenece, la igualdad lo excluye; si no pertenece, lo incluye. Ambos casos contradicen la igualdad, así que no hay puntos fijos. La identidad doble organiza la biyectividad, pero no implica que cada subconjunto sea fijo: ser devuelto tras dos aplicaciones difiere de quedar igual tras una.

104. Si $A \neq \varnothing$, la primera hipótesis incluye $S = A$, cuya restricción es f, por lo que f es inyectiva. Si $A = \varnothing$, lo es por la definición, pues no hay dos entradas que den una colisión.

La condición sobre pares de elementos también basta. Dados $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = f(a_2)$, si ya son iguales no hay nada que probar. Si fueran distintos, $S = \{a_1, a_2\}$ tendría dos elementos y la inyectividad de $f|_S$ obligaría a $a_1 = a_2$, contradicción. Luego toda igualdad de valores proviene de la misma entrada. Recíprocamente, si f es inyectiva, cualquier restricción lo es: dos entradas en su dominio son entradas de f y su igualdad de valores da igualdad de entradas. Esto incluye todas las restricciones a dos elementos.

Si A es vacío o unitario, no hay subconjuntos de dos elementos, la condición es vacía y f es inyectiva. En cambio, las restricciones unitarias siempre son inyectivas: en un dominio con una sola entrada, dos entradas cualesquiera ya coinciden. La función constante $f : \{0, 1\} \to \{0\}$ las cumple y no es inyectiva. Una colisión necesita dos entradas distintas; ésa es la información mínima que prueba la condición sobre pares.

Capítulo 11

Inducción, buen orden y recursión

C10 enseñó a leer una afirmación, elegir una estrategia y construir una prueba. Sin embargo, existe una situación que merece una herramienta propia. Queremos demostrar no una proposición aislada, sino una familia

$$P(0), P(1), P(2), \dots$$

o, más generalmente,

$$P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), \dots$$

para todos los índices de una cola de los naturales.

Comprobar cien, mil o un millón de casos sigue dejando infinitos casos sin tratar. La inducción matemática resuelve el problema usando la estructura sucesiva de $\mathbb{N}$.

> **La inducción no sustituye una prueba por una metáfora de dominós. Convierte una familia infinita de objetivos en un caso inicial y una implicación uniforme.**

Este capítulo conecta esa idea con el principio del buen orden y con las definiciones recursivas.

En este capítulo usamos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Los rangos que empiezan en 1 o en otro índice se declaran expresamente; incluir 0 en el conjunto de índices no obliga a incluirlo en cada teorema.

11.1. El problema de demostrar infinitos casos

Supongamos que una propiedad $P(n)$ está formulada para cada natural n. Verificar

$$P(1), P(2), \dots, P(1000)$$

puede aportar evidencia, pero no prueba

$$\forall n \geq 1 \; P(n).$$

La dificultad es estructural: ningún número finito de verificaciones aisladas cubre una familia infinita.

Los naturales, sin embargo, están organizados por un sucesor. Si podemos demostrar un primer caso y mostrar que cada caso verdadero obliga al siguiente, la familia completa queda enlazada.

11.2. Principio de inducción matemática

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $P(n)$ una proposición definida para todos los enteros $n \geq n_0$.

El principio de inducción afirma que, si:

1. $P(n_0)$ es verdadera;
2. para todo $k \geq n_0$, la implicación

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

es verdadera,

entonces

$$P(n)$$

es verdadera para todo $n \geq n_0$.

La primera parte es el **caso base**. La segunda es el **paso inductivo**.

El principio no dice que $P(k)$ sea verdadera porque la supongamos. Dice que, dentro de una prueba condicional, podemos asumir $P(k)$ y demostrar que esa suposición fuerza $P(k+1)$.

11.3. Caso base e hipótesis inductiva

Una prueba inductiva debe declarar con precisión su rango.

Si queremos probar $P(n)$ para todo $n \geq 3$, el caso base natural es $P(3)$, no $P(1)$.

Para el paso inductivo:

Sea $k \geq 3$ arbitrario y supongamos que $P(k)$ es verdadera.

Esa suposición recibe el nombre de **hipótesis inductiva**.

Su alcance es local: se usa para demostrar $P(k+1)$. No autoriza a afirmar que todos los casos sean verdaderos antes de completar la prueba.

Escribir la hipótesis y la meta antes de calcular. La expresión «por hipótesis inductiva» debe referirse a una afirmación escrita, con su índice y su rango. Sea, por ejemplo, $a_3 = 4$ y $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ para $n \geq 3$. Queremos probar $P(n) : a_n = (n-1)^2$ para $n \geq 3$.

Papel	Afirmación disponible o pendiente
Base	$a_3 = 4 = (3-1)^2$
Índice del paso	$k \geq 3$, arbitrario
Hipótesis utilizable	$a_k = (k-1)^2$
Meta	$a_{k+1} = k^2$
Regla de construcción	$a_{k+1} = a_k + 2k - 1$

La cadena es $a_{k+1} = a_k + 2k - 1 = (k-1)^2 + 2k - 1 = k^2$. La primera igualdad usa la definición recursiva; la segunda, la hipótesis; la tercera, álgebra. Ninguna usa la meta como dato. El paso y la base cubren exactamente la cola desde 3.

Control. Un borrador sustituye $a_{k+1} = k^2$ al comenzar el paso y termina con la misma igualdad. ¿Qué debe cambiar?

Solución. Se ha asumido la meta. Hay que comenzar con la regla que define a_{k+1} y sustituir sólo la expresión de a_k que permite la hipótesis. Si confundes dato y objetivo, vuelve a C10, anatomía de una implicación y variables arbitrarias; después reconstruye la tabla para un índice inicial distinto.

11.4. Anatomía del paso inductivo

El paso inductivo es una prueba ordinaria de implicación:

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

Por eso las técnicas de C10 siguen vigentes.

En una identidad, suele ser útil escribir la expresión correspondiente a $k+1$ y separar la parte conocida para k. En una desigualdad, hay que comprobar que las operaciones preservan el sentido correcto.

Un indicio de problema es escribir "por hipótesis inductiva" sin que la hipótesis aparezca realmente en el razonamiento.

También puede ocurrir que $P(k+1)$ se demuestre sin usar $P(k)$. Eso no invalida la prueba, pero indica que la inducción quizá no era necesaria.

Fortalecer la afirmación para sostener el paso. Una propiedad verdadera puede aportar poca información para el argumento elegido. Considera $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = (a_n+1)/(a_n+2)$. El objetivo $a_n \leq 1$ por sí solo no garantiza que la regla preserve esa cota: una entrada $a = -3$ cumple $a \leq 1$, pero produce 2. Además, la entrada $a = -2$ hace nulo el denominador.

Probamos la afirmación más informativa $Q(n) : 0 \leq a_n \leq 1$. La base es $a_0 = 0$. Si $0 \leq a_k \leq 1$, el denominador $a_k + 2$ es positivo, el numerador también y

$$0 < \frac{a_k + 1}{a_k + 2} < 1,$$

porque $a_k + 1 < a_k + 2$. Así el nuevo término existe y pertenece al mismo intervalo. Por inducción, $Q(n)$ y por tanto el objetivo original valen para todos los índices.

Fortalecer no consiste en añadir la conclusión que falta como una suposición gratuita: la nueva información debe verificarse en la base y preservarse en el paso.

Control. ¿Los números -3 y -2 refutan el resultado sobre la sucesión que empieza en 0?

Solución. No pertenecen a la órbita construida. Refutan la suficiencia de la sola condición $a \leq 1$ para justificar el paso propuesto. La prueba fortalecida excluye esas entradas antes de dividir. Para revisar signos y transformaciones condicionadas, vuelve a C3; para separar contraejemplo a un resultado y fallo de un argumento, vuelve a C10.

11.5. Cambiar el índice inicial

No toda inducción comienza en 0 o 1.

Podemos demostrar propiedades para:

$$n \geq 2, \qquad n \geq 5, \qquad n \geq n_0.$$

La cadena que genera la inducción comienza exactamente donde se verifica el caso base.

Si el paso inductivo sólo es válido para $k \geq 4$, un caso base en $n = 1$ no basta para cubrir $n = 2, 3, 4$.

Este detalle será esencial al diagnosticar pruebas defectuosas.

Si un problema fija un inicio entero negativo, se puede usar $m = n - n_0 \geq 0$ y $Q(m) = P(m + n_0)$. La base se convierte en $Q(0)$ y el paso conserva el incremento de uno. Esta reindexación extiende la misma herramienta a cualquier cola de los enteros sin aplicar buen orden directamente a un conjunto que incluya índices negativos.

11.6. Identidades algebraicas por inducción

Consideremos

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

El caso base $n = 1$ es inmediato.

Para el paso, suponemos

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

La expresión final es precisamente la fórmula con $n = k + 1$.

Aquí la inducción enseña una técnica de transformación. C12 estudiará después las sumas finitas de manera sistemática.

11.7. Desigualdades por inducción

Las desigualdades requieren atención adicional.

Por ejemplo,

$$2^n \geq n + 1$$

para todo $n \geq 0$.

Base: $2^0 = 1 \geq 1$.

Hipótesis:

$$2^k \geq k + 1.$$

Entonces

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(k+1) = k + 2 + k \geq k + 2.$$

El paso usa que los factores multiplicadores son no negativos y que $k \geq 0$.

La inducción no permite multiplicar o dividir desigualdades sin controlar signos.

11.8. Más de un caso base

Supongamos una sucesión definida por

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Una propiedad de a_{n+2} puede depender simultáneamente de los dos términos anteriores. Entonces una prueba puede necesitar dos casos base.

El número de casos base no es una convención estética. Debe ser suficiente para poner en marcha la regla que conecta los índices.

Recurrencias de orden dos ofrecen el laboratorio natural para esta situación.

Las bases se leen en las dependencias. Supón que una prueba permite inferir $P(n+3)$ a partir de $P(n)$ y $P(n+1)$, para $n \geq 0$. Sus primeras dependencias son:

Meta	Datos necesarios
$P(3)$	$P(0), P(1)$
$P(4)$	$P(1), P(2)$
$P(5)$	$P(2), P(3)$
$P(6)$	$P(3), P(4)$

Aunque no aparezca $P(n+2)$ en la regla, hacen falta $P(0), P(1), P(2)$ para cubrir todos los índices con este mecanismo. Con esas bases, una hipótesis fuerte hasta $k \geq 2$ da los datos $P(k-2)$ y $P(k-1)$ y produce $P(k+1)$. Los índices utilizados están dentro del rango y son anteriores a la meta.

Control. ¿Bastan $P(0)$ y $P(1)$ junto con esa regla?

Solución. No. La propiedad «$n \neq 2$» cumple esas dos bases y la regla: toda conclusión de la regla tiene índice al menos 3 y es verdadera. Sin embargo, falla $P(2)$. Este modelo demuestra que la base ausente no es una formalidad. Para recuperar la lógica del argumento, vuelve a C4, implicaciones con antecedente falso, y C10, contraejemplos; luego escribe las primeras dependencias de una regla nueva antes de escoger bases.

11.9. Inducción fuerte

En la inducción fuerte, al demostrar $P(k+1)$ se puede suponer

$$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(k).$$

La hipótesis es más amplia, pero la conclusión es la misma: $P(n)$ vale para todo $n \geq n_0$.

La inducción fuerte es especialmente natural cuando el nuevo caso se reduce a **algún** caso anterior, pero no sabemos de antemano que sea exactamente k.

"Fuerte" no significa que demuestre resultados que la inducción ordinaria no pueda demostrar. Significa que el argumento puede usar más información inductiva de forma directa.

11.10. Ordinaria y fuerte: comparación

La inducción ordinaria usa el caso inmediatamente anterior. La fuerte permite utilizar todos los anteriores.

Conceptualmente son equivalentes sobre $\mathbb{N}$. Una forma puede simular a la otra.

Sin embargo, la elección importa para la claridad. Si un objeto de tamaño $k+1$ se descompone en partes de tamaños arbitrariamente menores, la inducción fuerte suele reflejar mejor la estructura real del argumento.

La estrategia debe seguir al problema, no al hábito.

Simular una hipótesis fuerte mediante una afirmación acumulada. Supón que tenemos $P(n_0)$ y un paso que, para cada $k \geq n_0$, deduce $P(k+1)$ de todos los casos $P(j)$ con $n_0 \leq j \leq k$. Definimos

$$Q(n): \quad \forall j\ (n_0 \leq j \leq n \Rightarrow P(j)), \qquad n \geq n_0.$$

Podemos probar Q por inducción ordinaria. La base $Q(n_0)$ equivale a $P(n_0)$. En el paso, $Q(k)$ proporciona todas las afirmaciones exigidas por el paso fuerte, de donde obtenemos $P(k+1)$. Para verificar $Q(k+1)$, fija j con $n_0 \leq j \leq k+1$: si $j \leq k$, usamos $Q(k)$; si $j = k+1$, usamos la afirmación recién demostrada. Así la información anterior se conserva y se agrega el nuevo caso.

Una vez probados todos los $Q(n)$, fijamos $n \geq n_0$ y tomamos $j = n$ para concluir $P(n)$. La hipótesis ordinaria es una sola proposición, pero su contenido es acumulativo. No se ha supuesto la conclusión para todos los índices.

Control. ¿Podemos reemplazar $Q(n)$ por «$P(n_0)$ y $P(n)$» en cualquier prueba fuerte?

Solución. No: esa pareja no informa sobre los índices estrictamente intermedios. Por ejemplo, en un paso que necesite $P(k-1)$ con $k \geq n_0+2$, los datos $P(n_0), P(k)$ no garantizan esa afirmación. Hace falta acumular las dependencias efectivamente utilizadas. Si cuesta reconocer el alcance de Q, vuelve a C6, cuantificación acotada, y escribe qué valores de j autoriza usar en cada paso.

11.11. Principio del buen orden

El **principio del buen orden** afirma:

> Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

Este principio permite construir pruebas de otra forma.

Si queremos demostrar que todos los naturales de cierto rango satisfacen $P(n)$, podemos suponer lo contrario. Entonces el conjunto de contraejemplos es no vacío y posee un mínimo m.

La minimalidad de m suele implicar que todos los índices anteriores relevantes sí satisfacen la propiedad. Esa información permite construir una contradicción.

11.12. Pruebas por menor contraejemplo

El esquema es:

```
SUPONER QUE HAY CONTRAEJEMPLOS
        ↓
FORMAR EL CONJUNTO C DE CONTRAEJEMPLOS
        ↓
TOMAR m = min C
        ↓
USAR QUE LOS ÍNDICES MENORES NO ESTÁN EN C
        ↓
CONTRADICCIÓN
```

Este método es, en muchos problemas, la traducción natural de una inducción fuerte.

La elección del menor contraejemplo sólo es legítima después de justificar que el conjunto de contraejemplos es no vacío y está contenido en $\mathbb{N}$.

11.13. Inducción y buen orden

Inducción y buen orden expresan dos caras de la misma estructura.

Para ver cómo el buen orden conduce a la inducción, supongamos que se verifican el caso base y el paso inductivo, pero que existe algún contraejemplo. El conjunto de contraejemplos tiene un mínimo m.

Como el caso base es verdadero, $m > n_0$. Entonces $m-1 \geq n_0$. Por minimalidad, $P(m-1)$ es verdadera. El paso inductivo obliga a $P(m)$, contradicción.

Para la dirección inversa, supongamos válido el principio de inducción y sea $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacío. Supongamos, buscando contradicción, que S no tiene mínimo. Probamos por inducción

$$Q(n): \quad S \cap \{0, 1, \ldots, n\} = \varnothing.$$

La base vale: si $0 \in S$, sería su mínimo, contradiciendo la suposición. Si $Q(k)$ vale y $k+1 \in S$, ningún elemento de S sería menor que $k+1$, de modo que éste sería mínimo. Por tanto $k+1 \notin S$ y vale $Q(k+1)$.

La inducción da $Q(n)$ para todo natural n. Pero, como S no es vacío, existe $s \in S$; entonces $Q(s)$ lo excluye de S, contradicción. Así S tiene mínimo. Ambas direcciones de la equivalencia quedan justificadas; el ejercicio 102 ofrece otra prueba de esta dirección usando segmentos finitos.

11.14. Definiciones recursivas

Una definición recursiva da:

1. uno o más valores iniciales;
2. una regla para producir nuevos valores desde valores anteriores.

Por ejemplo,

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = 3a_n + 1.$$

Esto no es todavía una fórmula cerrada para a_n. Es un procedimiento que determina los términos sucesivamente:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 22, \ldots$$

La recursión define; una fórmula cerrada, si existe, es un teorema adicional que debe demostrarse.

Definir, conjeturar y demostrar son tres tareas. Para una regla $a_{n+1} = F(a_n)$, dar $a_0 \in D$ y una función total $F : D \to D$ asegura que cada etapa tiene una única salida admisible. La construcción recursiva determina la sucesión; si dos sucesiones cumplen los mismos datos, la inducción demuestra su igualdad: coinciden en 0 y la igualdad de entradas produce igualdad de salidas en cada paso. Cuando una regla contiene divisiones, hay que justificar que nunca se llega a una entrada prohibida.

Calcular algunos términos puede sugerir una fórmula, pero esa fórmula exige base y paso. Para $a_0 = 2$ y $a_{n+1} = a_n/(1+a_n)$, los términos $2, 2/3, 2/5$ sugieren $a_n = 2/(2n+1)$. La base coincide. Si la fórmula vale en k, su valor es positivo y

$$a_{k+1} = \frac{2/(2k+1)}{1 + 2/(2k+1)} = \frac{2}{2k+3}.$$

El denominador original es positivo y el resultado es la fórmula en $k+1$. La prueba justifica al mismo tiempo la existencia de todos los términos y la descripción propuesta.

Control. ¿La regla $b_0 = 1$, $b_{n+1} = 1/(b_n - 1)$ define una sucesión real para todos los índices?

Solución. No: ya b_1 exigiría dividir por cero. Una notación recursiva no garantiza por sí misma que el procedimiento pueda ejecutarse. Recupera en C9 los requisitos de una función y en C3 las restricciones de la división. Después distingue qué se demostró sobre la órbita y qué sólo se observó en una lista finita.

11.15. Probar propiedades de objetos recursivos

La inducción es la herramienta natural para estudiar objetos definidos recursivamente.

Si

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1,$$

podemos conjeturar

$$a_n = 2^{n+1} - 1.$$

Base:

$$a_0 = 1 = 2^1 - 1.$$

Paso: si $a_k = 2^{k+1} - 1$, entonces

$$a_{k+1} = 2(2^{k+1} - 1) + 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Así la fórmula queda demostrada para todo $n \geq 0$.

Recursión construye; inducción verifica.

11.16. Elegir entre inducción, buen orden y recursión

Antes de empezar, conviene preguntar:

1. ¿la afirmación está indexada por naturales?;
2. ¿cuál es el primer índice?;
3. ¿qué debe ser exactamente $P(n)$?;
4. ¿el caso $k+1$ depende naturalmente de k?;
5. ¿depende de varios casos anteriores?;
6. ¿sería más limpio suponer un menor contraejemplo?;
7. ¿el objeto está definido recursivamente?;
8. ¿cuántos casos base hacen falta?;
9. ¿la hipótesis inductiva se usa realmente?;
10. ¿el paso cubre todos los índices posteriores?

C11 termina en el punto donde comienza una nueva necesidad: manipular sistemáticamente sumas y productos finitos. Ése será el trabajo de C12.

Ejercicios

Los ejercicios son originales para *Álgebra para matemáticos* y se calibran con el corpus rector del capítulo. Los identificadores editoriales permanecen en comentarios internos no renderizados.

A. Reconocer estructura inductiva

1. **Nivel A.** Para la afirmación $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$, identifica una elección natural de $P(n)$ y el índice inicial.
2. **Nivel A.** En «$2^n \geq n + 1$ para todo $n \geq 0$», ¿cuál debe ser el caso base?
3. **Nivel B.** Explica por qué comprobar $P(1), \ldots, P(100)$ no demuestra $\forall n \geq 1\, P(n)$.
4. **Nivel B.** Si una afirmación se quiere demostrar sólo para $n \geq 5$, ¿es obligatorio comprobar $P(1)$?
5. **Nivel B.** ¿Qué debe demostrar exactamente el paso inductivo de una inducción ordinaria iniciada en n_0?
6. **Nivel C.** Una prueba verifica $P(1)$ y demuestra $P(k) \Rightarrow P(k+2)$. ¿Qué índices quedan cubiertos automáticamente?

B. Caso base y paso inductivo

7. **Nivel A.** Verifica el caso base de $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para $n = 1$.
8. **Nivel B.** Suponiendo $1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$, calcula la suma hasta el siguiente impar y obtén la fórmula para $k + 1$.
9. **Nivel B.** En una prueba inductiva, ¿por qué es legítimo suponer $P(k)$ durante el paso?
10. **Nivel B.** Diagnostica: «Supongamos que $P(k+1)$ es verdadera. Entonces… por tanto $P(k+1)$».
11. **Nivel C.** Demuestra por inducción que $3^n \geq 1 + 2n$ para todo $n \geq 0$.
12. **Nivel C.** Demuestra por inducción que $5^n - 1$ es múltiplo de 4 para todo $n \geq 0$.
13. **Nivel C.** Una prueba del paso $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ no usa $P(k)$. ¿Es necesariamente incorrecta?
14. **Nivel D.** Explica por qué un caso base correcto no compensa un paso inductivo que sólo se ha demostrado para algunos valores de k.

C. Identidades elementales

15. **Nivel B.** Demuestra por inducción $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para $n \geq 1$.
16. **Nivel B.** Demuestra por inducción $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$.
17. **Nivel C.** Demuestra $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ por inducción.
18. **Nivel C.** Demuestra $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (n+1)(n+2)/2$ partiendo de la hipótesis inductiva para n.
19. **Nivel C.** Demuestra por inducción $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) + (n+2) = (n+2)(n+3)/2$ si ya conoces la fórmula hasta n.
20. **Nivel C.** Demuestra por inducción que $1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$ para $n \geq 1$.
21. **Nivel D.** Demuestra por inducción $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.
22. **Nivel D.** Demuestra por inducción $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n(4n^2-1)/3$.

D. Desigualdades

23. **Nivel B.** Demuestra $2^n \geq n + 1$ para $n \geq 0$.
24. **Nivel C.** Demuestra $3^n \geq n^2$ para todo $n \geq 1$; separa explícitamente los casos iniciales que necesita el paso.
25. **Nivel C.** Demuestra $n! \geq 2^{n-1}$ para $n \geq 1$.
26. **Nivel C.** Demuestra $1 + n \leq 2^n$ para $n \geq 0$.
27. **Nivel D.** Demuestra $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \geq 4$.
28. **Nivel D.** Explica por qué al multiplicar una desigualdad inductiva por una cantidad cuyo signo no se conoce hay que detenerse.

E. Índice inicial y reindexación

29. **Nivel B.** Demuestra por inducción que $2^n > n$ para todo $n \geq 1$.
30. **Nivel C.** Demuestra $n^2 \geq 2n + 3$ para todo $n \geq 3$.
31. **Nivel C.** Una prueba pretende establecer $2^n \geq n^2$ para $n \geq 4$ pero usa caso base $n = 1$. ¿Qué debe corregirse?
32. **Nivel C.** Reindexa una afirmación $P(n)$ válida para $n \geq 5$ mediante $m = n - 5$.
33. **Nivel D.** Demuestra que $2^n \geq n^2$ para $n = 4$ y para todo $n \geq 4$ usando el paso del ejercicio 27.
34. **Nivel D.** Explica por qué el teorema «si base en n_0 y paso para $k \geq n_0 + 2$» deja un hueco.

F. Varios casos base y recurrencias

35. **Nivel B.** Sea $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Calcula a_2, a_3, a_4.
36. **Nivel C.** Explica por qué una propiedad de la sucesión anterior suele requerir dos casos base.
37. **Nivel C.** Para $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, demuestra que $a_n = 2^n + 1$.
38. **Nivel C.** Sea $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$. Demuestra que $b_n \geq 0$ para todo n.
39. **Nivel D.** En una recurrencia de orden dos, ¿basta suponer sólo $P(k + 1)$ para demostrar $P(k + 2)$?
40. **Nivel D.** Da un ejemplo de una propiedad cuyo paso pueda usar dos casos consecutivos.

G. Inducción fuerte

41. **Nivel C.** Formula el paso inductivo fuerte para una propiedad $P(n)$ iniciada en $n = 2$.
42. **Nivel C.** Explica por qué la inducción fuerte no produce una conclusión más fuerte que la ordinaria.
43. **Nivel C.** Demuestra por inducción fuerte que todo entero $n \geq 2$ puede escribirse como suma de términos iguales a 2 o 3.
44. **Nivel D.** Demuestra que todo entero $n \geq 8$ puede escribirse como $3a + 5b$ con a, $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
45. **Nivel D.** ¿Por qué el ejercicio anterior necesita tres casos base si el paso reduce n en 3?
46. **Nivel D.** Demuestra por inducción fuerte que una sucesión definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ satisface $a_n \leq 2^n$ para $n \geq 1$.
47. **Nivel E.** Supón que todos los objetos de tamaño 1 poseen P, que cada objeto de tamaño $n \geq 2$ puede descomponerse en dos objetos de tamaños positivos menores que n, y que P se preserva al combinar dos objetos que la poseen. Demuestra mediante inducción fuerte que todos los objetos de tamaño positivo poseen P.
48. **Nivel E.** Convierte conceptualmente una prueba por inducción fuerte en una prueba ordinaria definiendo $Q(n) = P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n)$.

H. Buen orden

49. **Nivel B.** Enuncia el principio del buen orden para $\mathbb{N}$.
50. **Nivel C.** ¿Qué debe comprobarse antes de escribir «sea m el menor contraejemplo»?
51. **Nivel C.** Usa menor contraejemplo para demostrar que $2^n \geq n + 1$ para todo $n \geq 0$.
52. **Nivel D.** Usa buen orden para demostrar que todo $n \geq 8$ puede escribirse como $3a + 5b$.
53. **Nivel D.** Explica por qué el método del menor contraejemplo se parece a la inducción fuerte.

54. **Nivel E.** Demuestra, usando buen orden, que si $S \subseteq \mathbb{N}$ es no vacío y cerrado bajo «si $n \in S$, entonces $n+1 \in S$», y contiene 0, entonces $S = \mathbb{N}$.

I. Comparación de principios

55. **Nivel C.** Resume cómo el buen orden demuestra el principio de inducción.
56. **Nivel D.** ¿Qué información proporciona un menor contraejemplo m que se corresponde con la hipótesis fuerte?
57. **Nivel D.** Explica cuándo preferirías buen orden en lugar de escribir una inducción fuerte explícita.
58. **Nivel E.** Explica por qué la equivalencia entre inducción y buen orden no significa que todas las pruebas tengan la misma claridad en ambos formatos.

J. Definiciones recursivas

59. **Nivel A.** Para $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$, calcula a_1, a_2, a_3.
60. **Nivel B.** Explica la diferencia entre una definición recursiva y una fórmula cerrada.
61. **Nivel B.** Define recursivamente la sucesión constante $a_n = 5$.
62. **Nivel C.** Define recursivamente $a_n = 2n + 1$.
63. **Nivel C.** Una recurrencia $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ sin valores iniciales, ¿determina una única sucesión?
64. **Nivel D.** Si $a_0 = c$ y $a_{n+1} = F(a_n)$, explica por qué la regla determina sucesivamente a lo sumo una secuencia de valores.

K. Propiedades de objetos recursivos

65. **Nivel B.** Para $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, demuestra $a_n = 2^{n+1} - 1$.
66. **Nivel C.** Para $b_0 = 2$, $b_{n+1} = b_n + 3$, demuestra $b_n = 2 + 3n$.
67. **Nivel C.** Para $c_0 = 1$, $c_{n+1} = c_n + 2n + 1$, demuestra $c_n = n^2 + 1$.
68. **Nivel C.** Si $a_0 > 0$ y $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$, demuestra $a_n > 0$ para todo n.
69. **Nivel D.** Para $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 2$, demuestra que $a_n = 2^{n+1} - 2$.
70. **Nivel D.** Sea $a_0 = 1$ y $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$. Demuestra que $a_n = 1/(n + 1)$.

L. Diagnóstico y síntesis

71. **Nivel D.** Diagnostica: una prueba establece el caso base $P(1)$ y luego demuestra $P(k-1) \Rightarrow P(k+1)$ para $k \geq 2$.
72. **Nivel D.** Una prueba de $P(n)$ usa inducción fuerte aunque $P(k+1)$ sólo depende de $P(k)$. ¿Es inválida?

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E.** Demuestra por inducción
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
para todo $n \geq 1$. Presenta el paso inductivo como una cadena algebraica completa y explica dónde se usa exactamente la hipótesis inductiva.
74. **Nivel F.** Sea $a_1 = 1$ y
$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 + a_n}.$$
Demuestra que $0 < a_n \leq 1$ para todo $n \geq 1$. Explica por qué conviene fortalecer el objetivo «$a_n \leq 1$» añadiendo positividad.

75. **Nivel F.** Sea
$$a_0 = 2, \qquad a_1 = 3, \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$
Demuestra que $a_n = 2^n + 1$ para todo $n \geq 0$ y explica por qué se necesitan dos casos base.
76. **Nivel F.** Demuestra por inducción fuerte que todo entero $n \geq 8$ puede escribirse como
$$n = 3a + 5b$$
con a, b enteros no negativos. Justifica el número de casos base y evita usar teoría de congruencias.
77. **Nivel G.** Demuestra el resultado del ejercicio anterior mediante el principio del buen orden y un menor contraejemplo. Después compara línea por línea qué papel desempeña la minimalidad frente a la hipótesis inductiva fuerte.
78. **Nivel G.** Demuestra que el principio de buen orden implica el principio de inducción ordinaria para afirmaciones $P(n)$ con $n \geq n_0$. La prueba debe definir explícitamente el conjunto de contraejemplos y justificar cada paso.
79. **Nivel G.** Sea
$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1.$$
(a) calcula los primeros cinco términos y formula una conjetura cerrada;

(b) demuéstrala por inducción;

(c) deduce un invariante cualitativo de la sucesión;

(d) explica la frase «recursión construye; inducción verifica» en este ejemplo.

80. **Nivel G.** Se propone la siguiente prueba de «$2^n > n^2$ para todo $n \geq 1$»:

Base: $n = 1$, pues $2 > 1$.
Supongamos $2^k > k^2$. Entonces $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$, y termina la inducción.

(a) localiza todos los errores;

(b) determina un enunciado verdadero cercano;

(c) reconstruye una prueba inductiva completa.

N. Elegir el índice inicial y justificar el rango

81. **Nivel C.** Determina el menor entero $n_0 \geq 0$ tal que $2^n \geq 3n$ para todo $n \geq n_0$ y prueba ese rango por inducción. Explica por qué el caso verdadero $n = 0$ no permite iniciar automáticamente una prueba de la misma desigualdad para todos los naturales.
82. **Nivel C.** Interpreta la suma $4 + 5 + \cdots + n$ como vacía cuando $n = 3$. Demuestra $4 + 5 + \cdots + n = n(n+1)/2 - 6$ para $n \geq 3$ y reescribe la prueba mediante $m = n - 3 \geq 0$. Indica qué suma y qué igualdad corresponden a la nueva base.
83. **Nivel D.** Una sucesión empieza en el índice 5: $a_5 = 7$ y $a_{n+1} = 2a_n - 3$ para $n \geq 5$. Demuestra $a_n = 4 \cdot 2^{n-5} + 3$ en su rango completo. Escribe por separado $P(k)$, $P(k+1)$ y la regla disponible. Decide si estos datos determinan $a_0, \ldots, a_4$.
84. **Nivel D.** Con el producto vacío igual a 1, demuestra
$$\prod_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j} = \frac{1}{n} \qquad (n \geq 1).$$

Da una prueba inductiva y otra por cancelación de factores. Justifica el índice inicial, cada denominador y la relación entre ambas pruebas.

85. **Nivel D.** Determina el menor índice $n_0 \geq 0$ para el cual $n(n-1) \geq 3n+4$ vale en todos los enteros $n \geq n_0$. Prueba la cola por inducción y reindexa desde 0. Comprueba que no elegiste el índice sólo porque el paso funcionaba allí.
86. **Nivel E.** Para $t \in \mathbb{R}$, define $x_0 = t$ y $x_{n+1} = -x_n$. Demuestra $x_n = (-1)^n t$ y clasifica los valores de t para los que existe una cola de índices en la cual $x_n \geq 0$ siempre. Si tal cola existe, determina su menor índice inicial. Justifica por qué comprobar un término no negativo no basta.

O. Dependencias y casos sin cubrir

87. **Nivel C.** Una prueba verifica $P(0)$ y $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \geq 1$. ¿Prueba todos los casos $n \geq 0$? Construye una propiedad concreta que cumpla exactamente esos datos y falle en un índice. Indica una base adicional suficiente y prueba que repara la cobertura.
88. **Nivel D.** Se conocen $P(0), P(2)$ y $P(k) \Rightarrow P(k+3)$ para $k \geq 0$. Describe sin usar congruencias qué índices quedan cubiertos y cuáles no. Construye un modelo en que todos los índices no cubiertos fallen. Repara la prueba con una sola base y justifica la cobertura de todos los naturales.
89. **Nivel D.** Se dan $u_0 = u_1 = 1$ y $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$ para $n \geq 0$. Un texto asegura que esto determina una sucesión positiva. Detecta el valor inicial ausente, exhibe una elección que refute positividad y demuestra que añadir un valor positivo en ese índice sí determina una sucesión positiva completa.
90. **Nivel E.** Una regla de prueba dice $P(n) \wedge P(n+2) \Rightarrow P(n+3)$ para $n \geq 0$. Se verifican sólo $P(0)$ y $P(1)$. Explica por qué ni siquiera el primer uso de la regla está autorizado. Determina las bases necesarias entre los índices $0, 1, 2$ para cubrir todo el rango usando exclusivamente esa regla, y demuestra que bastan.
91. **Nivel E.** Se intenta probar que cualquier conjunto finito no vacío de objetos tiene un único color común. La base de un objeto es verdadera. Para $n+1$ objetos se toman dos grupos de n, uno omitiendo el primero y otro el último; se afirma que comparten un objeto que iguala los colores. Localiza el índice donde falla el paso, construye el contraejemplo y explica por qué un paso correcto desde $n \geq 2$ no rescata la prueba.
92. **Nivel E.** Un texto define $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 1/(2 - x_n)$ y afirma que los denominadores son no nulos «porque están escritos en la definición». Repara el argumento demostrando la existencia de todos los términos y su valor exacto. Contrasta con la misma regla y valor inicial $y_0 = 2$. ¿Toda regla parcial es necesariamente inválida en cualquier órbita?

P. Fortalecer la afirmación antes de probar

93. **Nivel D.** Sea $0 \leq a_0 \leq 1$ y $a_{n+1} = a_n^2/2$. Queremos probar $a_n \leq 1$. Explica por qué la sola hipótesis $a_k \leq 1$ no basta para el paso. Elige una afirmación fortalecida, demuestra que se preserva y deduce además una cota para todos los términos de índice positivo.
94. **Nivel E.** Define $u_0 = 0, v_0 = 1$ y $u_{n+1} = u_n + 2v_n$, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. Para probar una fórmula de u_n, fortalece el trabajo a dos identidades para $u_n + v_n$ y $v_n - u_n$. Demuéstralas simultáneamente y deduce fórmulas cerradas de ambas sucesiones.
95. **Nivel E.** Sean $a_0 = 1, a_1 = 2$ y $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Demuestra $a_n \geq 1$ fortaleciendo la prueba con una afirmación sobre las diferencias consecutivas. Explica por qué dos cotas inferiores aisladas no permiten restar en la recurrencia y deduce la fórmula exacta.

96. **Nivel E.** Define $S_0 = \varnothing$ y $S_{n+1} = S_n \cup \{n\}$. Queremos probar $n \notin S_n$ para todo $n \geq 0$. Explica por qué conocer sólo $k \notin S_k$ no excluye $k+1$ de S_k. Fortalece la afirmación a una descripción exacta de S_n y cierra el objetivo.
97. **Nivel F.** Sea $f : A \to A$ con $f \circ f = f$. Define $f^0 = \mathrm{id}_A$ y $f^{n+1} = f \circ f^n$. Demuestra que $f^{n+1} = f^n$ para $n \geq 1$ mediante la afirmación más precisa $f^n = f$. Determina exactamente cuándo la igualdad se extiende también al índice 0 y trata $A = \varnothing$.
98. **Nivel F.** Sean $x_1, x_2, \ldots$ reales en $[0,1]$, y define $t_0 = 1, t_{n+1} = t_n x_{n+1}$. Demuestra simultáneamente $0 \leq t_n \leq 1$ y $t_n \leq x_j$ para cada $1 \leq j \leq n$. Deduce que $t_{n+1} \leq t_n$. Explica qué información se necesita para preservar las cotas y da un fallo si se admiten factores negativos.

Q. Comparar métodos en problemas nuevos

99. **Nivel E.** Demuestra $n^3 - n \geq 0$ para enteros $n \geq 1$ de tres formas: directamente, por inducción ordinaria y por menor contraejemplo. En cada una declara los datos de orden usados. Después compara cuál introduce menos información adicional.
100. **Nivel F.** Construye expresiones a partir del símbolo x y de la regla: si E, F son expresiones, también lo es $(E+F)$. Define $L(x) = 1, I(x) = 0$, $L((E+F)) = L(E) + L(F)$ e $I((E+F)) = 1 + I(E) + I(F)$. Demuestra $L(E) = I(E) + 1$ para toda expresión, por inducción fuerte sobre $I(E)$ y por menor contraejemplo. Indica la base que necesita el argumento y por qué cada subexpresión tiene índice menor.
101. **Nivel F.** Sea $b_0, b_1, \ldots, b_r$ una lista de enteros no negativos estrictamente decreciente. Demuestra $b_j \leq b_0 - j$ por inducción y deduce $r \leq b_0$. Después demuestra mediante buen orden que no existe una sucesión infinita estrictamente decreciente de enteros no negativos. Explica la diferencia entre una cota numérica y una contradicción obtenida de un mínimo.
102. **Nivel G.** Usando sólo inducción ordinaria, demuestra que todo subconjunto no vacío S de los enteros no negativos tiene mínimo. No invoques buen orden al escogerlo. Puedes estudiar $S \cap \{0, 1, \ldots, n\}$, pero debes justificar el paso y por qué un mínimo de una parte acotada acaba siendo mínimo de todo S.
103. **Nivel G.** Sea $F : D \to D$ y $S \subseteq D$. Demuestra que las dos condiciones son equivalentes: (i) $F(S) \subseteq S$; (ii) para toda entrada inicial $x_0 \in S$, la órbita $x_{n+1} = F(x_n)$ permanece en S para todos los índices. Trata $S = \varnothing$. Refuta la versión que sólo exige que una órbita particular permanezca en S y explica dónde se necesita la cuantificación sobre las entradas iniciales.
104. **Nivel G.** Define $h(0) = 0$. Para un índice positivo par $m = 2r$, define $h(m) = h(r)$; para uno impar $m = 2r + 1$, define $h(m) = 1 - h(r)$. Justifica que cada referencia es a un índice menor y que la regla determina un único valor en todos los enteros no negativos. Calcula $h(0), \ldots, h(7)$ y prueba $h(m) \in \{0, 1\}$. Presenta la prueba por inducción fuerte y explica cómo convertirla en ordinaria sin suponer sólo $h(k) \in \{0, 1\}$.

Soluciones razonadas

A. Reconocer estructura inductiva

1. Toma $P(n)$ como la igualdad $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. El índice inicial natural es $n = 1$.

2. El caso base es $n = 0$: se verifica $2^0 = 1 \geq 1$.

3. Porque quedan infinitos índices sin verificar. Una afirmación universal no se sigue de un número finito de casos, salvo que haya una razón estructural adicional.

4. No. La cadena inductiva puede comenzar en 5. El caso base apropiado es $P(5)$, siempre que el paso inductivo sea válido para todo $k \geq 5$.

5. Debe demostrar que para todo $k \geq n_0$, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también lo es.

6. Partiendo sólo de $P(1)$, quedan cubiertos $1, 3, 5, \ldots$. Para cubrir también los pares haría falta, por ejemplo, un segundo caso base $P(2)$.

B. Caso base y paso inductivo

7. El lado izquierdo es 1 y el derecho $1^2 = 1$. Por tanto el caso base vale.

8. Se añade $2(k+1) - 1 = 2k + 1$: $k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$. Éste es el paso inductivo.

9. Porque el paso inductivo es una prueba de la implicación $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Para demostrar una implicación se supone temporalmente su antecedente.

10. Es circular: se ha asumido directamente la conclusión del paso. La hipótesis permitida es $P(k)$, no $P(k+1)$.

11. Base: $1 \geq 1$. Supón $3^k \geq 1 + 2k$. Entonces $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3 + 6k$. Como $3 + 6k \geq 3 + 2k = 1 + 2(k+1)$ para $k \geq 0$, queda el paso.

12. Base: $5^0 - 1 = 0$. Supón $5^k - 1 = 4m$. Entonces $5^{k+1} - 1 = 5(5^k - 1) + 4 = 20m + 4 = 4(5m + 1)$.

13. No. Si $P(k+1)$ se demuestra sin la hipótesis, el paso sigue siendo válido. Pero suele indicar que existe una prueba directa de todos los casos y que la inducción quizá es innecesaria.

14. La inducción necesita la implicación para todos los k del rango. Si hay un hueco, la cadena puede detenerse allí y los índices posteriores no quedan justificados.

C. Identidades elementales

15. Base $n = 1$: $1 = 1$. Supón la fórmula para k. Entonces al añadir $2k + 1$ se obtiene $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

16. Base: $2 = 1 \cdot 2$. Supón $2 + \cdots + 2k = k(k+1)$. Añadiendo $2(k+1)$: $k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$.

17. Base $1 = 1$. Supón la fórmula para k. Entonces $k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$.

18. Es exactamente el paso: sustituye $1 + \cdots + n$ por $n(n+1)/2$ y factoriza $n + 1$.

19. Desde $n(n+1)/2$ se añaden $n+1$ y $n+2$. El resultado es $[n(n+1) + 2(n+1) + 2(n+2)]/2 = (n^2 + 5n + 6)/2 = (n+2)(n+3)/2$.

20. Base $n = 1$: suma vacía $0 = 0$. Supón la fórmula para k. Para $k+1$ se añade k: $k(k-1)/2 + k = k(k+1)/2$.

21. Base: $2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/3$. Supón la fórmula para k. Añade $(k+1)(k+2)$ y factoriza $(k+1)(k+2)$: $k(k+1)(k+2)/3 + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)(k+3)/3$.

22. Base $n = 1$: $1 = 1$. Supón la fórmula para k. Añade $(2k+1)^2$ y lleva a denominador 3: $[k(4k^2 - 1) + 3(4k^2 + 4k + 1)]/3 = (k+1)(4(k+1)^2 - 1)/3$.

D. Desigualdades

23. Base: $1 \geq 1$. Si $2^k \geq k+1$, entonces $2^{k+1} \geq 2k+2 \geq k+2$ porque $k \geq 0$.

24. Verificamos primero $n=1$ y $n=2$: $3 \geq 1$ y $9 \geq 4$. Ahora sea $k \geq 2$ y supón $3^k \geq k^2$. Entonces $3^{k+1} \geq 3k^2$. Basta $3k^2 \geq (k+1)^2$, equivalente a $2k^2 - 2k - 1 \geq 0$, que vale para $k \geq 2$. Así el paso cubre todos los índices desde 2 en adelante.

25. Base: $1 = 1$. Supón $k! \geq 2^{k-1}$. Entonces $(k+1)! = (k+1)k! \geq 2k! \geq 2^k$, pues $k+1 \geq 2$.

26. Es la misma desigualdad que $2^n \geq n+1$. Base 0. Paso: $2^{k+1} \geq 2(k+1) \geq k+2$.

27. Base: $16 = 16$. Supón $k^2 \leq 2^k$ con $k \geq 4$. Entonces $2^{k+1} \geq 2k^2$. Como $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 \geq 0$ para $k \geq 3$, se obtiene $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$.

28. Porque multiplicar por un número negativo invierte el sentido de la desigualdad. Una prueba válida debe establecer el signo del factor antes de usar la operación.

E. Índice inicial y reindexación

29. Base: $2 > 1$. Supón $2^k > k$. Entonces $2^{k+1} > 2k \geq k+1$ para $k \geq 1$.

30. Base: $9 \geq 9$. Supón $k^2 \geq 2k+3$. Entonces $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq 4k+4$. Como $4k+4 \geq 2k+5 = 2(k+1)+3$ para $k \geq 1$, queda el paso.

31. Debe verificar la base $n=4$ y un paso uniforme para $k \geq 4$. Aunque $n=1$ también satisface la desigualdad, $n=3$ la refuta: $8 < 9$. Por ello no puede construirse una cadena válida de todos los casos desde 1. El caso verdadero aislado no reemplaza la base del rango pedido.

32. Define $Q(m) = P(m+5)$ para $m \geq 0$. Probar $Q(m)$ para todo $m \geq 0$ equivale a probar $P(n)$ para todo $n \geq 5$.

33. Base $n=4$: $16 = 16$. El paso ya mostró que $k^2 \leq 2^k$ implica $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$ para $k \geq 4$. Por inducción, vale para todo $n \geq 4$.

34. No hay mecanismo que produzca $P(n_0+1)$ ni $P(n_0+2)$ desde la base. Para iniciar el paso en $k \geq n_0+2$ deben verificarse por separado los casos necesarios hasta alcanzar ese índice.

F. Varios casos base y recurrencias

35. $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$.

36. Porque el término a_{n+2} depende de dos términos anteriores. Para iniciar el mecanismo hay que conocer la propiedad al menos en los dos valores iniciales.

37. Base: $a_0 = 2 = 1+1$ y $a_1 = 3 = 2+1$. Supón las fórmulas para k y $k+1$. Entonces $a_{k+2} = 3(2^{k+1}+1) - 2(2^k+1) = 2^{k+2}+1$.

38. Base: $b_0, b_1 \geq 0$. Si $b_k, b_{k+1} \geq 0$, entonces $b_{k+2} = b_{k+1} + 2b_k \geq 0$.

39. No necesariamente. Si la fórmula para el nuevo término usa también el término k, puede ser necesario disponer de $P(k)$ y $P(k+1)$.

40. Para Fibonacci, la positividad usa que si $a_k > 0$ y $a_{k+1} > 0$, entonces $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k > 0$. Dos casos consecutivos alimentan el siguiente.

G. Inducción fuerte

41. Fijado $k \geq 2$, se supone que $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ son verdaderas y, usando todas las necesarias, se demuestra $P(k+1)$.

42. Ambas concluyen exactamente que $P(n)$ vale para todos los índices del rango. Lo que cambia es la información permitida dentro del paso inductivo.

43. Base: $2 = 2$, $3 = 3$. Para $n \geq 4$, suponiendo representables todos los enteros entre 2 y $n-1$, escribimos $n = 2 + (n-2)$; como $n - 2 \geq 2$ cuando $n \geq 4$, el término $n-2$ es representable.

44. Base: $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$. Para $n \geq 11$, $n - 3 \geq 8$; por hipótesis fuerte $n - 3 = 3a + 5b$, luego $n = 3(a+1) + 5b$.

45. Porque las cadenas de índices se separan según el residuo al restar repetidamente 3. Los casos $8, 9, 10$ inician las tres cadenas que luego cubre el paso.

46. Base $n = 1$: $2 = 2$. Para $n = 2$, $a_2 = 3 \leq 4$. Si todos los casos hasta k cumplen la cota, entonces $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \leq 2^k + 2^{k-1} < 2^{k+1}$.

47. Base: todos los objetos de tamaño 1 poseen P por la hipótesis explícita. Supón que todos los objetos de tamaños entre 1 y k poseen P. Un objeto de tamaño $k+1 \geq 2$ se descompone, por hipótesis, en dos objetos de tamaños positivos $r, s < k+1$. La hipótesis fuerte se aplica a ambos, y la preservación al combinarlos da P para el objeto original. Así todos los objetos de tamaño positivo poseen P. Sin la hipótesis base, el enunciado no sería válido: la propiedad siempre falsa se preserva condicionalmente al combinar dos objetos que la poseen, porque ese antecedente nunca ocurre, pero no se cumple en ningún objeto de tamaño 1.

48. Base: $Q(n_0)$ es $P(n_0)$. Si $Q(k)$ vale, entonces están disponibles todos los casos $P(n_0)$, $\ldots, P(k)$; el paso fuerte produce $P(k+1)$, y junto con $Q(k)$ obtenemos $Q(k+1)$. De $Q(n)$ se sigue $P(n)$.

H. Buen orden

49. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ posee un elemento mínimo.

50. Hay que suponer que existen contraejemplos y definir su conjunto como un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Sólo entonces el buen orden garantiza un mínimo.

51. Supón que hay fallos y sea m el menor. Como $n = 0$ cumple, $m \geq 1$. Por minimalidad, $2^{m-1} \geq m$. Entonces $2^m = 2 \cdot 2^{m-1} \geq 2m \geq m + 1$, contradicción.

52. Supón contraejemplos y sea $m \geq 8$ el menor. Los casos $8, 9, 10$ son representables, así $m \geq 11$. Entonces $m - 3 \geq 8$ y, por minimalidad, $m - 3 = 3a + 5b$. Luego $m = 3(a+1) + 5b$, contradicción.

53. La minimalidad del contraejemplo garantiza que todos los índices menores relevantes sí satisfacen la propiedad, exactamente la información que una hipótesis inductiva fuerte permite usar.

54. Si $\mathbb{N} \setminus S$ fuera no vacío, tendría mínimo m. Como $0 \in S$, $m > 0$, así $m - 1 \in S$ por minimalidad. El cierre da $m \in S$, contradicción.

I. Comparación de principios

55. Si base y paso valen pero existe un contraejemplo, toma el menor m. No es el caso base, así $m-1$ está en el rango y no es contraejemplo. Por tanto $P(m-1)$ vale y el paso da $P(m)$, contradicción.

56. Que todos los índices del rango estrictamente menores que m satisfacen la propiedad.

57. Cuando la negación del resultado produce naturalmente un objeto mínimo y el argumento reduce ese objeto a uno menor. El lenguaje de minimalidad puede reflejar mejor la estructura.

58. La equivalencia es lógica: ambos principios permiten establecer los mismos tipos de afirmaciones sobre $\mathbb{N}$. Pero la forma de un problema puede encajar mejor con una cadena sucesiva o con una reducción al menor contraejemplo.

J. Definiciones recursivas

59. $a_1 = 7$, $a_2 = 22$, $a_3 = 67$.

60. La definición recursiva produce cada término a partir de anteriores. Una fórmula cerrada expresa a_n directamente en función de n y, si se propone, debe demostrarse.

61. Puede definirse por $a_0 = 5$ y $a_{n+1} = a_n$.

62. Toma $a_0 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + 2$.

63. No. Se necesitan al menos dos valores iniciales para fijar una sucesión concreta; distintas elecciones producen sucesiones distintas.

64. Una vez fijado a_0, la regla determina un único $a_1 = F(a_0)$; éste determina un único a_2, etc. La unicidad se propaga sucesivamente.

K. Propiedades de objetos recursivos

65. Base $n = 0$: $1 = 2 - 1$. Si $a_k = 2^{k+1} - 1$, entonces $a_{k+1} = 2^{k+2} - 1$.

66. Base $2 = 2$. Si $b_k = 2 + 3k$, entonces $b_{k+1} = 2 + 3k + 3 = 2 + 3(k+1)$.

67. Base $1 = 0^2 + 1$. Si $c_k = k^2 + 1$, entonces $c_{k+1} = k^2 + 1 + 2k + 1 = (k+1)^2 + 1$.

68. Base positiva por hipótesis. Si $a_k > 0$, entonces $1/a_k > 0$, así $a_{k+1} = a_k + 1/a_k > 0$.

69. Base: $0 = 2 - 2$. Si $a_k = 2^{k+1} - 2$, entonces $a_{k+1} = 2^{k+2} - 4 + 2 = 2^{k+2} - 2$.

70. Base: $1 = 1/(0+1)$. Si $a_k = 1/(k+1)$, entonces $a_{k+1} = [1/(k+1)]/[1 + 1/(k+1)] = 1/(k+2)$.

L. Diagnóstico y síntesis

71. Al escribir $j = k - 1$, el paso disponible es $P(j) \Rightarrow P(j+2)$ para $j \geq 1$. Desde $P(1)$ sólo cubre $1, 3, 5, \ldots$. Para producir $P(2)$ mediante la escritura original haría falta $k = 1$, fuera del rango autorizado, además de $P(0)$; no hay un paso disponible hacia ese índice. Añadir $P(2)$ inicia la cadena $2, 4, 6, \ldots$ y, con la cadena impar, cubre todos los índices desde 1. El modelo «n es impar» cumple la base y todos los pasos dados, pero falla en los pares, de modo que los datos originales no bastan.

72. No. La hipótesis fuerte incluye $P(k)$, así que el argumento puede ser válido. Simplemente es más información de la necesaria y la inducción ordinaria sería más económica.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Sea

$$P(n): \quad \sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Base. Para $n = 1$, el lado izquierdo es 2 y el derecho $1 \cdot 2 \cdot 3/3 = 2$.

Paso. Sea $k \geq 1$ y supón

$$1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

La primera igualdad del paso es exactamente donde se sustituye la suma anterior usando la hipótesis inductiva. La expresión final es la fórmula para $k+1$. Por inducción, el resultado vale para todo $n \geq 1$.

74. Probamos simultáneamente

$$P(n): \quad 0 < a_n \leq 1.$$

Base. $a_1 = 1$, luego $0 < a_1 \leq 1$.

Paso. Supón $0 < a_k \leq 1$. Como $a_k > 0$, el denominador $1 + a_k$ es positivo, y por tanto

$$a_{k+1} = \frac{2a_k}{1 + a_k} > 0.$$

Para la cota superior, como el denominador es positivo,

$$\frac{2a_k}{1 + a_k} \leq 1 \iff 2a_k \leq 1 + a_k \iff a_k \leq 1,$$

que es la hipótesis.

Así $0 < a_{k+1} \leq 1$.

La positividad no es decoración: permite controlar el signo del denominador y justificar la equivalencia usada en la desigualdad. Probar sólo $a_n \leq 1$ dejaría ese punto sin apoyo.

75. Sea $P(n) : a_n = 2^n + 1$.

Bases.

$$a_0 = 2 = 2^0 + 1, \qquad a_1 = 3 = 2^1 + 1.$$

Paso. Supón

$$a_k = 2^k + 1, \qquad a_{k+1} = 2^{k+1} + 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 3a_{k+1} - 2a_k \\ &= 3(2^{k+1} + 1) - 2(2^k + 1) \\ &= 6 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^k - 2 \\ &= 4 \cdot 2^k + 1 \\ &= 2^{k+2} + 1. \end{aligned}$$

Se requieren dos casos base porque la regla que produce a_{k+2} utiliza simultáneamente los dos términos anteriores. Un único caso no pone en marcha la recurrencia.

76. Verificamos tres bases:

$$8 = 3 + 5, \qquad 9 = 3 + 3 + 3, \qquad 10 = 5 + 5.$$

Supón ahora que todo entero m con $8 \leq m \leq k$ es representable, donde $k \geq 10$. Queremos representar $k + 1$.

Como

$$k + 1 - 3 = k - 2 \geq 8,$$

la hipótesis fuerte se aplica a $k - 2$. Existen $a, b \geq 0$ con

$$k - 2 = 3a + 5b.$$

Entonces

$$k + 1 = 3(a + 1) + 5b.$$

Los tres casos base son naturales porque el paso incrementa en 3: desde $8, 9, 10$ se generan sucesivamente todos los índices posteriores sin necesidad de hablar de residuos módulo 3.

77. Supón que existe al menos un entero $n \geq 8$ que no puede escribirse como $3a + 5b$. Sea

$$C = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 8 \text{ y } n \text{ no es representable}\}.$$

Por hipótesis C es no vacío. Por buen orden, sea $m = \min C$.

Los enteros $8, 9, 10$ son representables, así $m \geq 11$. Entonces $m - 3 \geq 8$ y $m - 3 < m$. Por minimalidad de m, el entero $m - 3$ no está en C; por tanto

$$m - 3 = 3a + 5b$$

para algunos $a, b \geq 0$. Luego

$$m = 3(a + 1) + 5b,$$

contradicción con $m \in C$.

Comparación: en inducción fuerte suponemos explícitamente que todos los enteros previos del rango son representables. En buen orden, esa misma información se obtiene de la minimalidad de m: ningún entero menor que el primer contraejemplo puede ser contraejemplo.

78. Supón que se cumplen:

1. $P(n_0)$;
2. para todo $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Queremos probar $P(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Supón lo contrario. Entonces el conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ y } \neg P(n)\}$$

es no vacío. Por buen orden, posee un mínimo m.

Como $P(n_0)$ es verdadera, $m \neq n_0$, luego $m > n_0$. Por tanto $m - 1 \geq n_0$.

Por minimalidad de m, $m - 1 \notin C$, de modo que $P(m - 1)$ es verdadera. Aplicando el paso inductivo con $k = m - 1$, obtenemos $P(m)$, contradicción con $m \in C$.

Así C debe ser vacío y $P(n)$ vale para todo $n \geq n_0$.

79. Los primeros términos son

$$1, 3, 7, 15, 31.$$

La conjetura es

$$a_n = 2^{n+1} - 1.$$

Base:

$$a_0 = 1 = 2^1 - 1.$$

Paso: si $a_k = 2^{k+1} - 1$, entonces

$$a_{k+1} = 2(2^{k+1} - 1) + 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Por inducción, la fórmula vale para todo $n \geq 0$.

Como 2^{n+1} es par para todo $n \geq 0$, a_n es siempre impar. También es positivo y estrictamente creciente.

La recurrencia especifica cómo generar cada término a partir del anterior: construye la sucesión. La inducción demuestra que todos los términos generados satisfacen una descripción global que la recurrencia no muestra de forma inmediata.

80. (a) Hay dos problemas.

Primero, el enunciado original es falso: para $n = 2$ se tiene $2^2 = 2^2$, no desigualdad estricta; para $n = 3$, $8 < 9$.

Segundo, el paso usa

$$2k^2 > (k+1)^2,$$

que no vale para todos los $k \geq 1$. Es equivalente a

$$k^2 - 2k - 1 > 0,$$

que sólo vale desde cierto índice.

(b) Un enunciado verdadero y natural es

$$2^n \geq n^2 \qquad \text{para todo } n \geq 4.$$

(c) Base.

$$2^4 = 16 = 4^2.$$

Paso. Sea $k \geq 4$ y supón $2^k \geq k^2$. Entonces

$$2^{k+1} \geq 2k^2.$$

Basta probar

$$2k^2 \geq (k+1)^2.$$

La diferencia es

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1.$$

Para $k \geq 4$,

$$k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 \geq 9 - 2 = 7 > 0.$$

Así

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2.$$

Por inducción, $2^n \geq n^2$ para todo $n \geq 4$.

La lección es que el rango de validez del paso y el caso base deben estar coordinados; un caso base aislado no atraviesa huecos donde el paso falla.

N. Elegir el índice inicial y justificar el rango

81. Los casos $1, 2, 3$ fallan: $2 < 3$, $4 < 6$, $8 < 9$. En 4, $16 \geq 12$. Sea $k \geq 4$ y supongamos $2^k \geq 3k$. Entonces $2^{k+1} \geq 6k \geq 3k + 3 = 3(k + 1)$, pues $3k \geq 3$. Por inducción, la desigualdad vale en la cola desde 4. Toda cola iniciada antes incluiría el caso falso 3, así que $n_0 = 4$ es mínimo. Aunque $2^0 \geq 0$, la implicación del paso en $k = 0$ sería verdadera en su antecedente y falsa en su conclusión. Una base aislada no reemplaza el paso uniforme.

82. En $n = 3$ la suma es 0 y $3 \cdot 4/2 - 6 = 0$. Si la fórmula vale para $k \geq 3$, al agregar $k + 1$ obtenemos $k(k + 1)/2 - 6 + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2 - 6$, que es la meta en $k + 1$.

Con $m = n - 3$, sea $Q(m) : 4 + \cdots + (m + 3) = (m + 3)(m + 4)/2 - 6$. En $m = 0$ la suma vuelve a ser vacía y el lado derecho es 0. El paso agrega $m + 4$ y lleva el lado derecho a $(m + 4)(m + 5)/2 - 6$. La correspondencia entre índices $m \geq 0$ y $n \geq 3$ es biyectiva por $n = m + 3$; no se altera el contenido ni se introduce un término 3 en la suma.

83. La base es $a_5 = 7 = 4 \cdot 2^0 + 3$. Fijado $k \geq 5$, la hipótesis $P(k)$ es $a_k = 4 \cdot 2^{k-5} + 3$; la meta $P(k + 1)$ es $a_{k+1} = 4 \cdot 2^{k-4} + 3$. La regla da

$$a_{k+1} = 2a_k - 3 = 2(4 \cdot 2^{k-5} + 3) - 3 = 4 \cdot 2^{k-4} + 3.$$

Así la fórmula vale para todos los índices $n \geq 5$. Los datos no definen términos anteriores: la regla sólo se impone para $n \geq 5$. Si se desea extender la sucesión hacia atrás, se necesita una nueva condición; no se puede aplicar una regla fuera de su rango declarado.

84. En $n = 1$, el producto es vacío y vale $1 = 1/1$. Si la fórmula vale para $k \geq 1$, el producto para $k + 1$ es el anterior multiplicado por $k/(k + 1)$, y por tanto vale $(1/k)\, k/(k + 1) = 1/(k + 1)$. Todos los denominadores son enteros positivos.

Para $n \geq 2$, escribir los factores da $(1/2)(2/3) \cdots ((n - 1)/n)$. Los números $2, \ldots, n - 1$ aparecen en numerador y denominador y son no nulos; se cancelan dejando $1/n$. El caso $n = 1$ ya se verificó aparte. La prueba inductiva realiza una cancelación al añadir cada factor, mientras la directa las organiza todas juntas. El índice 0 no es admisible para el lado derecho $1/n$.

85. La diferencia entre los miembros es $d(n) = n^2 - 4n - 4$. Para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ sus valores son $-4, -7, -8, -7, -4$, y $d(5) = 1$. Por tanto la base válida es 5. Si $d(k) \geq 0$ con $k \geq 5$, entonces $d(k+1) = d(k) + 2k - 3 \geq 0 + 7 > 0$. Esto prueba todos los índices posteriores. Como 4 falla, ninguna cola iniciada antes sirve. El paso preserva no negatividad desde $k \geq 2$, pero eso no da una base verdadera en 2.

La versión reindexada es $Q(m) : (m + 5)(m + 4) \geq 3(m + 5) + 4$ para $m \geq 0$. Su base corresponde a $n = 5$ y el incremento de la diferencia es $2m + 7 > 0$.

86. Base: $x_0 = t = (-1)^0 t$. Si la fórmula vale en k, entonces $x_{k+1} = -(-1)^k t = (-1)^{k+1} t$. Por inducción vale en todos los índices.

Si $t = 0$, todos los términos son cero y la menor cola comienza en 0. Si $t > 0$, cada índice impar produce $-t < 0$; cualquier cola contiene un impar, por ejemplo su primer índice si es impar o el siguiente si es par. Si $t < 0$, cada índice par produce $t < 0$, y cualquier cola contiene un par por el mismo razonamiento. Así sólo $t = 0$ admite esa cola. Un término no negativo puede ser seguido por uno negativo: el paso no preserva el signo salvo que el término sea cero.

O. Dependencias y casos sin cubrir

87. No. Toma $P(n) : n \neq 1$. La base $P(0)$ es verdadera. Para $k \geq 1$, la conclusión $k + 1 \neq 1$ siempre es verdadera, por lo que cada implicación exigida vale, incluso cuando su antecedente $P(1)$ es falso. Sin embargo, $P(1)$ falla.

Añadir $P(1)$ como dato para una propiedad general repara la cobertura: esa base y el paso para $k \geq 1$ prueban por inducción todos los casos desde 1; con $P(0)$ se cubre el rango completo. El contraejemplo no puede cumplir la base adicional, lo cual muestra que era información ausente.

88. Quedan cubiertas las cadenas $0, 3, 6, \ldots$ y $2, 5, 8, \ldots$; falta $1, 4, 7, \ldots$. Todo natural pertenece a una de esas tres cadenas: restar 3 mientras el resultado siga siendo al menos 3 termina en $0, 1$ o 2, pues los naturales disminuyen en cada resta.

Un modelo es declarar $P(n)$ verdadera exactamente en las dos cadenas cubiertas. Ambas bases son verdaderas y sumar 3 mantiene esas cadenas; si el antecedente falla, la implicación sigue siendo verdadera. Añadir $P(1)$ inicia la tercera cadena. Repetir el paso en cada una, o usar inducción fuerte con las tres bases y reducir una meta $n \geq 3$ a $n - 3$, prueba todos los casos. No se usó teoría de congruencias.

89. Falta u_2. Los términos $u_3, u_4, u_5, \ldots$ se pueden producir sucesivamente una vez conocido ese valor, pero la regla nunca lo define. Elegir $u_2 = -1$ ya refuta positividad y aun así permite construir una sucesión que satisface la regla.

Si añadimos $u_2 = c > 0$, cada término nuevo queda determinado de manera única por términos anteriores. Las bases u_0, u_1, u_2 son positivas. Para $m \geq 3$, la hipótesis fuerte proporciona positividad de u_{m-2} y u_{m-3}, y la regla $u_m = u_{m-2} + u_{m-3}$ da positividad de u_m. Así todos los términos son positivos. Construcción y prueba requieren conocer el tercer valor, aunque la regla no use el término inmediatamente anterior.

90. Para obtener $P(3)$ con $n = 0$ se necesitan $P(0)$ y $P(2)$; la segunda no está disponible. Además, ninguna conclusión de la regla tiene índice menor que 3, así que ninguno de los casos $0, 1, 2$ puede obtenerse de ella. Deben establecerse los tres por separado si no se usa otro mecanismo.

Con las tres bases, para una meta $m \geq 3$ la hipótesis fuerte hasta $m - 1$ da $P(m - 3)$ y $P(m - 1)$. Aplicar la regla con $n = m - 3$ produce $P(m)$. Ambos índices están en el rango. Para mostrar que $P(2)$ no estaba implícita, el modelo $P(n) : n \neq 2$ cumple las dos bases y toda regla, cuya conclusión es siempre verdadera, pero falla precisamente en 2.

91. Cuando $n = 1$, los dos grupos son los dos objetos por separado y su intersección es vacía. No hay un objeto común que permita comparar sus colores. Un conjunto de dos objetos, uno rojo y otro azul, cumple la base de los grupos unitarios y refuta la conclusión para la pareja.

Para $n \geq 2$, los grupos descritos comparten $n - 1 \geq 1$ objetos. Si realmente ambos grupos fueran de color uniforme, uno común sí obligaría a que sus colores coincidan y cubrirían juntos el conjunto entero. Esto hace válida esa implicación condicional desde $n = 2$, pero no establece la base de dos objetos, que es falsa. La base de un objeto y un paso desde 2 dejan sin justificar precisamente el enlace $1 \to 2$.

92. La escritura no garantiza un denominador no nulo. Para x, probamos por inducción que los términos se pueden construir y $x_n = 1$. La base vale. Si $x_k = 1$ existe, $2 - x_k = 1 \neq 0$, así que el siguiente término existe y es 1. Esto justifica cada etapa y todos los valores.

Para $y_0 = 2$, el primer paso divide por cero y no hay sucesión real completa con esos datos. La regla es parcial como función de una entrada real cualquiera, pero la órbita iniciada en 1 permanece en el conjunto seguro $\{1\}$. Una regla parcial puede definir una órbita válida si se demuestra que ésta nunca llega a las entradas prohibidas; no basta declararlo ni rechazarla sin analizar la órbita.

P. Fortalecer la afirmación antes de probar

93. La entrada $a_k = -3$ cumple $a_k \leq 1$ pero produce $9/2 > 1$; por tanto esa sola condición no justifica el paso. No es un contraejemplo a la órbita dada, que empieza en el intervalo indicado.

Fortalecemos a $0 \leq a_n \leq 1$. La base está dada. Si $0 \leq a_k \leq 1$, entonces $0 \leq a_k^2 \leq 1$, por lo que $0 \leq a_{k+1} \leq 1/2 \leq 1$. La inducción prueba el intervalo y el objetivo inicial. Además, cada término positivo es resultado de algún paso, de modo que $0 \leq a_n \leq 1/2$ para $n \geq 1$. Esta cota no se impone a a_0, que puede ser 1.

94. Probamos $u_n + v_n = 3^n$ y $v_n - u_n = (-1)^n$. En 0, ambas sumas indicadas valen 1. Si las identidades valen en k, entonces

$$u_{k+1} + v_{k+1} = 3(u_k + v_k) = 3^{k+1},$$
$$v_{k+1} - u_{k+1} = u_k - v_k = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Así se preservan conjuntamente. Sumar las identidades da $2v_n = 3^n + (-1)^n$, y restarlas da $2u_n = 3^n - (-1)^n$. Por tanto

$$u_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}, \qquad v_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}.$$

La fórmula de u_k sola no proporciona directamente v_k, que aparece en su regla; las dos identidades suministran exactamente la información acoplada necesaria.

95. De $a_n, a_{n+1} \geq 1$ no se deduce $2a_{n+1} - a_n \geq 1$: los valores $a_n = 10, a_{n+1} = 1$ refutan esa inferencia. En la sucesión dada, probamos $a_{n+1} - a_n = 1$. La base es $2 - 1 = 1$. Si la diferencia vale en k, entonces

$$a_{k+2} - a_{k+1} = (2a_{k+1} - a_k) - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k = 1.$$

Todas las diferencias son 1. Ahora la base $a_0 = 1$ y el paso $a_{k+1} = a_k + 1$ prueban por inducción $a_n = n + 1$, que da la cota para $n \geq 0$. La información sobre diferencias controla la resta; las cotas inferiores por separado no lo hacen.

96. Un conjunto puede excluir k e incluir $k + 1$, por ejemplo $\{k + 1\}$. Por tanto la sola ausencia de k no controla todas las entradas previas del paso. Probamos

$$S_n = \{j \in \mathbb{Z} : 0 \leq j < n\}.$$

La base es el conjunto vacío, porque no hay entero j con $0 \leq j < 0$. Si vale en k, entonces $S_{k+1} = \{j : 0 \leq j < k\} \cup \{k\}$. Un entero está en esta unión exactamente cuando $0 \leq j < k + 1$: si está por debajo de k, pertenece a la primera parte; si no, la condición entera lo obliga a ser k. Así obtenemos la fórmula en $k + 1$. Como $n < n$ es falso, $n \notin S_n$. La descripción exacta controla todas las entradas, no sólo una ausencia.

97. Las composiciones están tipadas porque f lleva A en A. Para $n = 1$, $f^1 = f \circ \mathrm{id}_A = f$. Si $f^k = f$ con $k \geq 1$, entonces $f^{k+1} = f \circ f^k = f \circ f = f$. Por inducción, cada iteración positiva es f; en particular $f^{n+1} = f^n$ desde 1.

En 0, la igualdad pide $f^1 = f^0$, es decir, $f = \mathrm{id}_A$, condición necesaria y suficiente. Si A es vacío, sólo hay una función $A \to A$, que es la identidad, así todas las igualdades valen también en 0. La precisión del fortalecimiento permite leer cada iteración; no autoriza cambiar su rango.

98. En 0, $t_0 = 1$ pertenece al intervalo y no hay índices j que comprobar. Supongamos las dos partes en k. Como $t_k \geq 0$ y $0 \leq x_{k+1} \leq 1$, se tiene $0 \leq t_{k+1} = t_k x_{k+1} \leq t_k \leq 1$. Para $j \leq k$, esta cadena y $t_k \leq x_j$ dan $t_{k+1} \leq x_j$. Para el nuevo índice, $t_k \leq 1$ y $x_{k+1} \geq 0$ dan $t_{k+1} \leq x_{k+1}$. Así se preservan todos los datos y se prueba también la monotonía.

El signo de t_k justifica comparar el producto con t_k; el del factor justifica multiplicar la cota $t_k \leq 1$. Si $x_1 = x_2 = -1$, entonces $t_1 = -1, t_2 = 1$, por lo que falla $t_2 \leq t_1$ y también $t_2 \leq x_1$.

Q. Comparar métodos en problemas nuevos

99. Directamente, $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ y los tres factores son no negativos para $n \geq 1$.

Por inducción, la base en 1 vale 0. Si $k^3 - k \geq 0$, entonces $(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 - k) + 3k^2 + 3k \geq 0$, porque $k \geq 1$. Esto cierra la cola.

Por menor contraejemplo, supongamos no vacío $C = \{n \geq 1 : n^3 - n < 0\}$. Es un subconjunto de los naturales, así posee mínimo m. La base excluye $m = 1$; por tanto $m \geq 2$ y $m - 1 \geq 1$. Minimalidad da $(m-1)^3 - (m-1) \geq 0$. Agregar $3(m-1)^2 + 3(m-1) \geq 0$ produce $m^3 - m \geq 0$, contradicción. La prueba directa sólo requiere factorizar y controlar signos; las otras añaden un mecanismo de índices que aquí resulta válido pero innecesario.

100. Una expresión con $I = 0$ no puede ser compuesta, porque una compuesta tiene $I = 1 + I(E) + I(F) \geq 1$. Por tanto es x y cumple $L = 1 = I + 1$.

Para la inducción fuerte, considera una expresión compuesta $G = (E + F)$ con $I(G) = m \geq 1$. Sus subexpresiones tienen índices no negativos estrictamente menores que m, porque $I(G) = 1 + I(E) + I(F)$. La hipótesis da $L(E) = I(E) + 1$ y $L(F) = I(F) + 1$. Entonces $L(G) = I(E) + I(F) + 2 = I(G) + 1$. La base y el paso prueban la afirmación para todas las expresiones.

Para menor contraejemplo, si existen expresiones que fallan, los valores de I de esas expresiones forman un subconjunto no vacío de naturales. Toma su mínimo m y una expresión fallida de ese tamaño. No es x por la base. Es compuesta y ambas subexpresiones cumplen la fórmula por sus índices menores. La misma cuenta la demuestra para la expresión fallida, contradicción. La base debe cubrir todos los objetos del primer tamaño; no basta declarar una propiedad sólo para tamaños compuestos.

101. En $j = 0$ hay igualdad. Si $j < r$, como los términos son enteros y $b_{j+1} < b_j$, se tiene $b_{j+1} \leq b_j - 1$. Bajo la hipótesis $b_j \leq b_0 - j$, obtenemos $b_{j+1} \leq b_0 - (j+1)$. Así vale la cota hasta r. Como $b_r \geq 0$, resulta $0 \leq b_0 - r$ y $r \leq b_0$.

Si existiera una sucesión infinita de ese tipo, el conjunto de sus valores sería no vacío y estaría contenido en los naturales no negativos. Su mínimo se alcanza en algún término b_m. Pero el término siguiente existe y satisface $b_{m+1} < b_m$, contradiciendo minimalidad. El primer argumento cuantifica cuántas disminuciones admite un valor inicial; el segundo descarta infinitud sin calcular su longitud. La no negatividad es esencial: $0, -1, -2, \ldots$ es infinita y estrictamente decreciente en los enteros.

102. Probamos por inducción que $S_n = S \cap \{0, \ldots, n\}$ es vacío o tiene mínimo. Para $n = 0$ sólo puede ser vacío o $\{0\}$. Supongamos la afirmación en k. Si S_k tiene mínimo m, éste sigue siendo mínimo al agregar eventualmente $k+1$, pues $m \leq k < k+1$. Si S_k es vacío, S_{k+1} es vacío cuando $k+1 \notin S$ y es $\{k+1\}$ cuando $k+1 \in S$. Los casos cubren el paso.

Como S no es vacío, toma algún $s \in S$, sin afirmar que sea mínimo. La parte S_s contiene s, luego tiene mínimo m por la afirmación probada. Para cualquier $t \in S$, si $t \leq s$, pertenece a S_s y satisface $m \leq t$; si $t > s$, se tiene $m \leq s < t$. Así m es mínimo de todo S. La existencia de s viene de no vacuidad y la del mínimo finito de inducción; no se usó el principio que se quería demostrar.

103. Si $F(S) \subseteq S$ y fijamos $x_0 \in S$, la base está dada. Si $x_k \in S$, entonces $x_{k+1} = F(x_k) \in F(S) \subseteq S$. La inducción prueba toda la órbita; existe en todos los índices porque F es total y lleva D en D.

Recíprocamente, fija $s \in S$ arbitrario y aplica (ii) a la órbita que empieza en $x_0 = s$. Su término de índice 1 es $F(s)$ y pertenece a S. Así toda imagen de un elemento de S está en S. Si S es vacío, la imagen es vacía y (ii) no tiene entradas iniciales que comprobar: ambas condiciones valen.

Una órbita particular no basta. Toma $D = \{0, 1, 2\}$, $S = \{0, 1\}$ y $F(0) = 0, F(1) = 2$, $F(2) = 2$. La órbita desde 0 permanece en S, pero $F(1) = 2 \notin S$. En la vuelta se necesita poder iniciar la órbita en cada $s \in S$, no sólo en uno favorable.

104. Cada entero positivo es par o impar y esas posibilidades son excluyentes. En el caso par, $r \geq 1$ y $r < 2r = m$. En el impar, $r \geq 0$ y $r < 2r+1 = m$. Cada representación determina un único r, por cancelación en $2r = 2s$ o $2r + 1 = 2s + 1$. Así, al construir los valores en orden creciente, la regla usa un valor anterior único y aplica una operación determinada. Ningún índice queda sin cubrir ni recibe reglas contradictorias.

Los primeros valores son $0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1$. Para la prueba fuerte, la base $h(0) = 0$ está en $\{0, 1\}$. Si todos los valores anteriores a $m \geq 1$ están en ese conjunto, el índice $r < m$ de su regla también. En el caso par se conserva $h(r)$; en el impar, $1 - h(r)$ intercambia 0 y 1. Por tanto $h(m)$ está en el conjunto y el resultado vale en todos los índices.

Para inducción ordinaria usamos $Q(k) : h(j) \in \{0, 1\}$ para todo $0 \leq j \leq k$. Su base vale. Desde $Q(k)$ se obtiene la información sobre el índice reducido de $k + 1$, que es a lo sumo k, y se prueba el nuevo valor; junto con los anteriores esto da $Q(k + 1)$. Conocer sólo $h(k)$ no proporcionaría en general el valor $h(r)$ que necesita la regla.

Capítulo 12

Sumas, productos e identidades finitas

C11 enseñó a demostrar afirmaciones indexadas por los naturales. En muchos de esos argumentos aparecieron expresiones como

$$1 + 2 + \cdots + n,$$

pero hasta ahora las tratamos principalmente como ejemplos para la inducción. En este capítulo cambia el centro de gravedad. Una suma finita deja de ser sólo una lista larga de términos y pasa a ser un objeto algebraico que podemos leer, transformar, reindexar y comparar con otras representaciones.

La misma idea se extenderá a productos finitos y a sumas dobles. El objetivo no es memorizar símbolos. Es adquirir una disciplina de manipulación que permita saber exactamente qué términos se están sumando, cuántas veces aparece cada uno y por qué una transformación conserva el valor de la expresión.

Una expresión indexada no se manipula por apariencia. Se transforma controlando simultáneamente índices, rangos y términos.

12.1. De una lista de términos a una suma indexada

Consideremos una lista finita

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

La notación sigma la escribe de manera compacta como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

En esta expresión intervienen cuatro piezas distintas:

- el símbolo $\sum$, que indica una suma;
- el **índice** k;
- el **rango** $1 \leq k \leq n$;
- el **sumando** a_k.

La notación no es meramente tipográfica. Indica una regla de generación: sustituimos sucesivamente $k = 1, 2, \ldots, n$ en el sumando y agregamos los resultados.

Por ejemplo,

$$\sum_{k=2}^{5} (3k - 1)$$

significa

$$(3 \cdot 2 - 1) + (3 \cdot 3 - 1) + (3 \cdot 4 - 1) + (3 \cdot 5 - 1),$$

es decir,

$$5 + 8 + 11 + 14.$$

El índice no tiene por qué comenzar en 1. También podemos escribir

$$\sum_{j=0}^{4} 2^j = 1 + 2 + 4 + 8 + 16.$$

Cuando el límite inferior supera al superior, adoptaremos la convención de que la suma es vacía y vale 0. Esta convención permite formular identidades sin separar innecesariamente casos extremos.

12.2. Expandir y comprimir sumas

Leer notación sigma exige poder ir en ambas direcciones.

De sigma a forma expandida. Para

$$\sum_{k=1}^{5} (2k - 1),$$

sustituimos $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9.$$

Un error frecuente consiste en mirar sólo la fórmula $2k - 1$ y olvidar los extremos. Otra fuente de errores aparece cuando el índice comienza en un valor distinto de 1.

Por ejemplo,

$$\sum_{r=3}^{6} r^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2,$$

no $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$.

De forma expandida a sigma. Supongamos ahora que tenemos

$$4 + 7 + 10 + 13 + 16.$$

Los términos forman una progresión aritmética con término general $3k + 1$ si dejamos correr k desde 1 hasta 5:

$$4 + 7 + 10 + 13 + 16 = \sum_{k=1}^{5} (3k + 1).$$

La representación no es única. La misma suma también puede escribirse como

$$\sum_{j=0}^{4} (3j + 4).$$

Ambas expresiones generan exactamente la misma lista de términos. Esta no unicidad anticipa una idea central: cambiar el índice no cambia necesariamente la suma.

12.3. El índice mudo

En

$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

la letra k cumple un papel local. Podemos reemplazarla por otra letra, siempre que el reemplazo sea consistente:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Decimos que k y j son **índices mudos** o variables ligadas.

La situación es análoga a la de una variable ligada por un cuantificador. En

$$\forall k \in \{1, \dots, n\},$$

renombrar k como j no cambia la afirmación si el cambio se hace en todas las apariciones ligadas.

Hay que distinguir el índice de los parámetros libres. En

$$\sum_{k=1}^{n} (k + m),$$

k está ligado por la sumatoria, mientras que m y n actúan como parámetros. Por eso podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{n} (j + m),$$

pero no podemos reemplazar arbitrariamente m o n sin cambiar la expresión.

También debemos evitar colisiones de variables. Si una expresión externa ya utiliza j con otro significado, renombrar el índice interno como j puede volver ambigua la notación. La elección de letras es libre, pero debe preservar la estructura lógica.

Nota pedagógica — Renombrar sin absorber un parámetro. En $S(m) = \sum_{k=1}^{3}(k+m)$, el índice k varía dentro de la suma y el parámetro m permanece fijado. El renombrado correcto es $S(m) = \sum_{r=1}^{3}(r+m)$. Si escribimos en cambio $\sum_{m=1}^{3}(m+m)$, las dos apariciones del sumando quedan ligadas al índice: desapareció el parámetro externo y cambió el problema. Es la misma captura de variable que estudiamos en C6.

Control resuelto. Fija $m = 5$. La suma original vale $6 + 7 + 8 = 21$; el renombrado con r conserva esos tres términos. La expresión con captura vale $2 + 4 + 6 = 12$ y ya no depende de ese $m = 5$. Una letra nueva debe sustituir sólo las apariciones ligadas al índice; los límites y parámetros mantienen su significado. En una suma doble, un índice exterior puede actuar como parámetro de la suma interior, aunque esté ligado en la expresión completa.

12.4. Linealidad de las sumas finitas

Las sumas finitas distribuyen sobre la adición término a término. Si $m \leq n$, entonces

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

La razón aparece al expandir ambos lados:

$$(a_m + b_m) + \cdots + (a_n + b_n)$$

puede reagruparse como

$$(a_m + \cdots + a_n) + (b_m + \cdots + b_n).$$

Del mismo modo, si c no depende del índice k,

$$\sum_{k=m}^{n} ca_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Estas dos propiedades forman la **linealidad** de la sumatoria. Juntas implican, por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = 3 \sum_{k=1}^{n} k - 2 \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Pero aquí aparece una restricción importante. No podemos extraer un factor que dependa de k. En general,

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k \neq k \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

porque en el lado derecho el símbolo k ya no está ligado por la suma y ni siquiera tiene un valor único.

La linealidad es poderosa precisamente porque separa una expresión compleja en sumas más simples sin cambiar el rango.

12.5. Separar y recombinar rangos

Una suma finita puede dividirse en bloques. Si $m \leq r < n$, entonces

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{n} a_k.$$

El punto de corte debe respetar los extremos: el término a_r aparece en el primer bloque y a_{r+1} en el segundo, de modo que ningún término se repite ni se pierde.

Un caso especialmente útil es separar el primer término:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

También podemos separar el último:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

Estas formas aparecen continuamente en inducción, reindexación y telescopaje.

La operación inversa consiste en recombinar sumas contiguas. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=5}^{9} a_k = \sum_{k=1}^{9} a_k.$$

Pero no podemos combinar sin más

$$\sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=6}^{9} a_k,$$

porque falta el término correspondiente a $k = 5$.

12.6. Cambio de índice por traslación

Renombrar un índice no es lo mismo que reindexar. En un cambio de índice real, cambiamos la variable que parametriza la lista de términos.

Partamos de

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

y hagamos la sustitución

$$j = k + s.$$

Entonces

$$k = j - s.$$

Cuando $k = m$, tenemos $j = m + s$; cuando $k = n$, tenemos $j = n + s$. Por tanto,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+s}^{n+s} a_{j-s}.$$

La reindexación exige transformar simultáneamente:

1. el índice;
2. el límite inferior;
3. el límite superior;
4. el sumando.

Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$$

puede reescribirse con $j = k + 1$. Entonces j corre de 1 a n y

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2.$$

Una forma rápida de auditar una reindexación es expandir los primeros y últimos términos antes y después del cambio. Si las listas no coinciden, la reindexación es incorrecta.

Nota pedagógica — La reindexación conserva términos, no sólo extremos. Para reindexar una suma finita necesitamos una correspondencia uno a uno entre los rangos: cada índice antiguo debe tener un índice nuevo distinto y todos los índices nuevos deben proceder de uno antiguo. Bajo esa correspondencia se transforma también el sumando. Una traslación cumple este criterio; una reflexión invierte el recorrido y permite sumar los mismos términos en el orden opuesto.

Control resuelto. En $\sum_{k=-2}^{2} a_{3k+1}$, toma $j = k + 2$. Los valores antiguos $-2, -1, 0, 1, 2$ corresponden exactamente a $j = 0, 1, 2, 3, 4$, y $3k + 1 = 3j - 5$. Así la nueva suma es $\sum_{j=0}^{4} a_{3j-5}$. Ambas generan $a_{-5}, a_{-2}, a_1, a_4, a_7$.

Si usamos directamente $r = 3k + 1$, el nuevo rango es $J = \{-5, -2, 1, 4, 7\}$: podemos escribir $\sum_{r\in J} a_r$, que significa sumar una vez por cada elemento del conjunto finito J. No podemos sustituirlo por todos los enteros entre -5 y 7: añadiríamos índices ausentes. Coincidir en los extremos no basta para conservar la lista. Cuando un cambio deja huecos, hay que describirlos en el rango o utilizar otro índice que recorra una lista consecutiva.

12.7. Sumas aritméticas finitas

La fórmula clásica

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

puede demostrarse sin inducción mediante apareamiento.

Sea

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n.$$

Escribimos la misma suma en orden inverso:

$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

Al sumar término a término,

$$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1).$$

Hay n sumandos, de modo que

$$2S = n(n+1),$$

y por tanto

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La misma idea se extiende a una progresión aritmética

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d).$$

Hay n términos. El primero es a y el último $a+(n-1)d$. Emparejando extremos obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) = \frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big).$$

Esta derivación ilustra una idea que será recurrente: una identidad finita puede tener una prueba estructural más informativa que una verificación por inducción.

12.8. Sumas geométricas finitas

Para esta suma tomamos $n \geq 0$ entero y $r \in \mathbb{R}$. En expresiones polinómicas con exponentes no negativos, el término de exponente cero se interpreta como 1, también al evaluar la base en cero.

Sea

$$S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n.$$

Si $r \neq 1$, multiplicamos por r:

$$rS = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}.$$

Restamos:

$$S - rS = 1 - r^{n+1}.$$

Así,

$$(1 - r)S = 1 - r^{n+1},$$

y por tanto

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Equivalentemente,

$$1 + r + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

cuando $r \neq 1$.

El caso $r = 1$ debe separarse porque el denominador anterior se anula. Entonces

$$1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1.$$

Más generalmente, para enteros $m \leq n$ y $r \notin \{0, 1\}$,

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \sum_{j=0}^{n-m} r^j = r^m \frac{1 - r^{n-m+1}}{1 - r}.$$

Aquí combinamos reindexación, extracción de un factor constante respecto del nuevo índice y la fórmula geométrica básica. Si $r = 1$, la suma vale $n - m + 1$. Si $r = 0$ y $m \geq 0$, vale 1 cuando $m = 0$ y 0 cuando $m > 0$, con la convención polinómica indicada. Si $m < 0$ y $r = 0$, la suma no está definida porque contiene una potencia de exponente negativo de cero. Una condición como $r \neq 1$ no basta por sí sola para autorizar exponentes negativos.

12.9. Telescopaje aditivo

Una suma telescópica contiene términos que se cancelan en cadena.

Para enteros $m \leq n$, y con todos los términos definidos, consideremos

$$\sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1}).$$

Al expandir,

$$(b_m - b_{m+1}) + (b_{m+1} - b_{m+2}) + \cdots + (b_n - b_{n+1}).$$

Todos los términos interiores aparecen una vez con signo positivo y una vez con signo negativo. Quedan sólo los extremos:

$$\sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}.$$

El telescopaje es una propiedad de la representación. Una suma puede no parecer telescópica en su forma original y volverse telescópica después de una transformación algebraica adecuada.

También existe la orientación opuesta:

$$\sum_{k=m}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_m.$$

El signo final depende del orden de la diferencia. Por eso conviene expandir algunos términos y no confiar únicamente en una fórmula memorizada.

12.10. Descomposición para producir telescopaje

La suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

no muestra cancelaciones de inmediato. Pero la identidad local

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

revela la estructura.

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Al expandir,

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

por lo que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

El procedimiento tiene dos etapas conceptualmente distintas:

1. descubrir o verificar una identidad local para el sumando;
2. usar esa identidad para crear una cancelación global.

No necesitamos desarrollar una teoría general de fracciones parciales para aprovechar este mecanismo. Basta reconocer descomposiciones simples que produzcan diferencias consecutivas.

12.11. Productos finitos

La notación

$$\prod_{k=m}^{n} a_k$$

representa el producto

$$a_m a_{m+1} \cdots a_n.$$

Por ejemplo,

$$\prod_{k=1}^{4} (k+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

Adoptaremos la convención de que un producto vacío vale 1. Esta elección es el análogo multiplicativo de la suma vacía igual a 0.

Los productos finitos permiten separar rangos:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{r} a_k \right) \left(\prod_{k=r+1}^{n} a_k \right),$$

si $m \leq r < n$.

También permiten extraer una constante, pero la forma cambia respecto de las sumas. Si c no depende de k y hay $n - m + 1$ factores, entonces

$$\prod_{k=m}^{n} (c a_k) = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

No es correcto escribir simplemente

$$\prod_{k=m}^{n} (c a_k) = c \prod_{k=m}^{n} a_k$$

salvo en casos especiales.

Esta diferencia muestra por qué no debemos transportar mecánicamente propiedades aditivas al contexto multiplicativo.

12.12. Productos telescópicos

El telescopaje también aparece en productos. Para $n \geq 2$ entero, consideremos

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1}.$$

Al expandir,

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1}.$$

Los factores interiores se cancelan y queda

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} = n.$$

Otro ejemplo útil es

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1.$$

Aquí la cancelación es multiplicativa: un factor aparece en un numerador y en el denominador del factor siguiente.

La misma precaución que en las sumas telescópicas sigue siendo válida: hay que controlar los factores extremos. La mayor parte de los errores en estos productos no ocurre en la cancelación interior, sino en decidir correctamente qué queda al principio y al final.

Nota pedagógica — Antes de cancelar, comprobar dónde existe el producto. Para $\prod_{k=m}^{n} b_{k+1}/b_k$, con $m \le n$, cada denominador $b_m, \dots, b_n$ debe ser distinto de cero. Bajo esa condición se cancelan los factores interiores y queda b_{n+1}/b_m. El numerador final puede ser cero: eso produce un producto definido igual a cero. Un cero interior que aparezca como denominador, en cambio, impide formar el producto original.

Control resuelto. Para $n \ge 0$, considera $P_n(t) = \prod_{k=0}^{n}(t+k+1)/(t+k)$. Está definido exactamente cuando $t \notin \{0, -1, \dots, -n\}$. Allí vale $(t+n+1)/t$. Con $t = -n-1$ todos los denominadores son no nulos, pero el último numerador es cero: el resultado es 0. Con $n = 2, t = -1$, el factor correspondiente a $k = 1$ tiene denominador cero. La fórmula abreviada daría -2, pero no representa el producto original en ese valor excluido. Simplificar conserva valores dentro del dominio; no borra las exclusiones anteriores.

Un producto vacío vale 1 y no evalúa ningún factor. Las fórmulas abreviadas obtenidas para rangos no vacíos deben comprobarse por separado antes de extenderlas a un rango vacío.

12.13. Sumas dobles finitas

Una suma doble

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

puede interpretarse como una suma sobre todos los pares

$$(i,j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

La suma interior recorre j mientras i permanece fijo. Luego la suma exterior cambia i.

Como el dominio es un rectángulo finito, podemos recorrer los mismos pares en el orden contrario:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

No hay aquí una cuestión de convergencia: se trata simplemente de una colección finita de términos que puede enumerarse en distinto orden.

Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (i+j)$$

suma los seis valores correspondientes a los pares

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3).$$

Invertir el orden produce exactamente el mismo conjunto de seis sumandos.

12.14. Dominios triangulares y cambio de orden

Las sumas dobles se vuelven más delicadas cuando un límite depende del otro índice. Consideremos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}.$$

El dominio es

$$D=\{(i,j): 1\le j\le i\le n\}.$$

Para invertir el orden, fijamos ahora j. Si j está fijo, la condición $j\le i\le n$ dice que i recorre desde j hasta n. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}.$$

El procedimiento correcto no consiste en "intercambiar i y j" dentro de los límites. Consiste en describir primero el mismo conjunto de pares y después encontrar otra forma de recorrerlo.

Esta idea permite también contar multiplicidades. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_j$$

puede reorganizarse observando que, para un j fijo, el término x_j aparece cuando

$$i=j,j+1,\dots,n.$$

Aparece, por tanto, $n-j+1$ veces. Así,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_j=\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)x_j.$$

Nota pedagógica — Una tabla del dominio, dos recorridos. Para $n=3$, el dominio $1\le j\le i\le 3$ se representa así; cada marca indica un par incluido:

$i\backslash j$	1	2	3
1	Incluido	—	—
2	Incluido	Incluido	—
3	Incluido	Incluido	Incluido

Por filas, los pares son $(1,1)$; después $(2,1),(2,2)$; después $(3,1),(3,2),(3,3)$. Por columnas, son $(1,1),(2,1),(3,1)$; después $(2,2),(3,2)$; después $(3,3)$. Cambia el orden, pero cada par sigue apareciendo exactamente una vez.

Control resuelto. Si el sumando es x_j, el recorrido por filas da $x_1+(x_1+x_2)+(x_1+x_2+x_3)=3x_1+2x_2+x_3$. Las columnas muestran esas multiplicidades directamente: tres marcas para $j=1$, dos para $j=2$ y una para $j=3$. Para invertir un dominio nuevo, escribe

sus desigualdades y resuélvelas para el índice que pasará a ser interior. La tabla pequeña ayuda a detectar extremos omitidos; la justificación general proviene de recorrer el mismo conjunto finito de pares.

12.15. Identidades finitas y elección del método

A esta altura disponemos de varias técnicas. Frente a una identidad finita conviene preguntar qué estructura domina el problema.

Álgebra directa. Es apropiada cuando ambos lados pueden transformarse mediante distributividad, factorización o fórmulas ya establecidas.

Reindexación. Es apropiada cuando dos sumas contienen esencialmente los mismos términos, pero numerados de manera diferente.

Telescopaje. Es apropiado cuando una expresión puede escribirse como diferencias o cocientes consecutivos que cancelan términos interiores.

Inducción. Es apropiada cuando la identidad tiene una estructura recursiva natural o cuando queremos verificar una fórmula para todos los tamaños n sin disponer de una transformación directa más esclarecedora.

Consideremos nuevamente

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C11 mostró cómo probarla por inducción. En este capítulo vimos una prueba por apareamiento. Ambas son correctas, pero dicen cosas distintas. La inducción muestra que la fórmula se propaga de n a $n+1$; el apareamiento explica por qué el promedio del primer y último término determina la suma.

Elegir el método no es un detalle estilístico. Una buena prueba revela la estructura que hace verdadera a la identidad.

Diagnóstico de errores. Cinco fallos aparecen con especial frecuencia:

1. desplazar el índice sin desplazar los límites;
2. perder un término extremo al separar rangos;
3. extraer como constante una expresión que depende del índice;
4. declarar telescopaje sin exhibir la cancelación;
5. invertir una suma doble sin describir correctamente el dominio.

Una práctica sólida consiste en expandir algunos términos antes y después de cualquier transformación dudosa.

12.16. Protocolo de lectura de expresiones indexadas

Ante una suma o producto finito, conviene seguir una secuencia de control.

```
1. IDENTIFICAR EL ÍNDICE.
2. IDENTIFICAR SU RANGO.
3. DISTINGUIR ÍNDICES LIGADOS DE PARÁMETROS LIBRES.
4. EXPANDIR ALGUNOS TÉRMINOS SI LA ESTRUCTURA NO ES TRANSPARENTE.
5. PREGUNTAR SI HAY LINEALIDAD O SEPARACIÓN DE RANGOS.
6. COMPROBAR SI UNA REINDEXACIÓN SIMPLIFICA LA EXPRESIÓN.
7. BUSCAR CANCELACIONES TELESCÓPICAS.
8. SI HAY DOS ÍNDICES, DESCRIBIR EL DOMINIO DE PARES.
```

```
9. COMPARAR MÉTODOS POSIBLES.
10. USAR INDUCCIÓN SÓLO SI REFLEJA BIEN LA ESTRUCTURA DEL PROBLEMA.
```

El capítulo comenzó con listas explícitas de términos y terminó con una pequeña teoría de expresiones indexadas. Ya podemos reconocer cuándo dos sumas describen la misma colección de términos, controlar cambios de índice, producir cancelaciones y reorganizar dominios finitos.

El siguiente capítulo estudiará una familia de coeficientes que aparece naturalmente cuando expandimos potencias de sumas. Allí la notación de sumas y productos dejará de ser una herramienta auxiliar para convertirse en parte del lenguaje del teorema del binomio.

Ejercicios

Los ejercicios son originales para *Álgebra para matemáticos* y se calibran con el corpus rector del capítulo. Los identificadores editoriales permanecen en comentarios internos no renderizados.

A. Leer y expandir notación

1. **Nivel A.** En la expresión $\sum_{k=3}^{8}(2k+1)$, identifica el índice, el límite inferior, el límite superior, el sumando y el número de términos.
2. **Nivel A.** Expande completamente $\sum_{k=2}^{6}(3k-2)$ y calcula su valor.
3. **Nivel A.** Expande $\sum_{j=0}^{5}(-1)^j(j+1)$ sin simplificar primero el patrón de signos.
4. **Nivel B.** Para enteros $m \le n$, explica por qué $\sum_{k=m}^{n} a_k$ contiene exactamente $n-m+1$ sumandos. Comprueba tu respuesta con $m=-2$ y $n=3$.
5. **Nivel B.** En $\sum_{k=1}^{n}(k+m)^2$, determina cuáles símbolos representan variables ligadas y cuáles actúan como parámetros libres. Explica qué cambia y qué no cambia si se reemplaza k por r.
6. **Nivel B.** Un estudiante escribe $\sum_{k=3}^{6} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$. Localiza el error, escribe la expansión correcta y formula una regla práctica para evitar este tipo de fallo.

B. Comprimir y renombrar índices

7. **Nivel A.** Escribe $5+8+11+14+17+20$ usando una sola sumatoria cuyo índice comience en 1.
8. **Nivel A.** Escribe $4^2+5^2+\cdots+10^2$ en notación sigma de dos maneras distintas.
9. **Nivel B.** Da dos representaciones sigma distintas de $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ y explica por qué describen la misma lista de términos.
10. **Nivel B.** Renombra el índice de $\sum_{k=1}^{n}(k^2+m)$ usando la letra j. Después explica por qué el mismo procedimiento no autoriza a reemplazar también el parámetro m por j.
11. **Nivel B.** Escribe $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d)$ como una sumatoria comenzando en $k=0$ y luego como otra comenzando en $j=1$.
12. **Nivel C.** Demuestra, expandiendo ambos miembros, que

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = \sum_{j=1}^{n+1}(a+(j-1)d).$$

Explica por qué ésta es más que una simple sustitución de una letra por otra.

C. Linealidad

13. **Nivel B.** Usa linealidad para reescribir $\sum_{k=1}^{n}(5k-3)$ en términos de $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} 1$. Luego simplifica hasta obtener una fórmula cerrada.
14. **Nivel B.** Simplifica
$$2\sum_{k=1}^{n}(k+1) - \sum_{k=1}^{n}(k-2)$$
como una sola sumatoria y luego como una expresión cerrada en n.
15. **Nivel C.** Decide cuáles extracciones son válidas y justifica cada respuesta:
$$\sum_{k=1}^{n} m a_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k a_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} (n+1) a_k,$$
considerando m y n parámetros independientes de k.
16. **Nivel C.** Demuestra la identidad
$$\sum_{k=m}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} b_k$$
partiendo únicamente de la expansión de las sumas y de las leyes asociativa y conmutativa de la adición.
17. **Nivel C.** Reduce
$$3\sum_{k=0}^{n} a_k - 2\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k)$$
a la forma más simple posible.
18. **Nivel C.** Refuta, mediante un contraejemplo concreto, la afirmación
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$
Explica qué términos adicionales aparecen en el producto del lado derecho.

D. Separar y unir rangos

19. **Nivel B.** Separa $\sum_{k=1}^{12} a_k$ en dos sumas cortando después de $k = 5$.
20. **Nivel B.** Aísla los dos primeros y los dos últimos términos de $\sum_{k=1}^{n} a_k$ para $n \geq 4$.
21. **Nivel B.** Recombina
$$\sum_{k=-3}^{2} a_k + \sum_{k=3}^{9} a_k$$
en una sola sumatoria.
22. **Nivel C.** Explica por qué
$$\sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=6}^{9} a_k$$
no puede reemplazarse por $\sum_{k=1}^{9} a_k$. ¿Qué término falta? ¿Qué ocurre, en cambio, si la segunda suma comienza en $k = 4$?
23. **Nivel C.** Demuestra que, para $m \leq n$,
$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}.$$
Después despeja $\sum_{k=m}^{n} a_k$ y explica la utilidad de esta forma en un paso inductivo.

24. **Nivel C.** Si $m \le r < s < n$, demuestra
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k.$$
Justifica explícitamente que no se pierde ni se repite ningún índice.

E. Cambios de índice

25. **Nivel B.** Reindexa $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3$ usando $j = k+1$.
26. **Nivel B.** Reindexa $\sum_{k=4}^{n+3} a_{k-3}$ de manera que el nuevo índice comience en 1.
27. **Nivel C.** Demuestra que
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}$$
mediante la sustitución $j = n+1-k$. Controla ambos extremos del rango.
28. **Nivel C.** Reindexa una de las sumas para simplificar
$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
¿Qué revela la reindexación?
29. **Nivel C.** Prueba la fórmula general de traslación
$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{j=m+s}^{n+s} f(j-s)$$
para un entero fijo s, explicando qué ocurre con índice, límites y sumando.
30. **Nivel C.** Para enteros $m \le n$ y una base real $r \neq 0$, transforma $\sum_{k=m}^{n} r^k$ en una suma cuyo índice vaya de 0 a $n-m$. Usa después esa forma para extraer el factor r^m.
31. **Nivel C.** Un estudiante afirma
$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+2} = \sum_{j=1}^{n} a_j$$
porque «$j = k+2$ es sólo un cambio de índice». Identifica el error y escribe la reindexación correcta.
32. **Nivel C.** Reescribe $\sum_{k=1}^{n} a_{k+2}$ como una sumatoria cuyo sumando sea simplemente a_j. Verifica la respuesta expandiendo el primer y el último término.
33. **Nivel D.** Reindexa
$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)x^{2k}$$
con $j = k+1$. Escribe cuidadosamente el nuevo rango y el nuevo exponente de x.
34. **Nivel D.** Demuestra que
$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \sum_{j=1}^{n+1}(2j-1)$$
mediante una reindexación formal y luego confirma la igualdad expandiendo tres términos al comienzo y el término final.

F. Sumas aritméticas y geométricas

35. **Nivel B.** Deriva nuevamente, mediante apareamiento de extremos, la fórmula
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Indica dónde se usa que hay exactamente n términos.
36. **Nivel B.** Calcula $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ usando linealidad y la fórmula para $1 + 2 + \cdots + n$.
37. **Nivel C.** Demuestra que
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$
usando la fórmula de una progresión aritmética, no inducción.
38. **Nivel C.** Deriva
$$\sum_{k=0}^{n-1}(a + kd) = \frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big)$$
por apareamiento del primer y último término, del segundo y penúltimo, etc. Explica por qué la derivación funciona tanto para n par como para n impar.
39. **Nivel B.** Calcula $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ mediante la fórmula de suma geométrica finita.
40. **Nivel C.** Para una base real $r \notin \{0, 1\}$ y enteros $m \le n$, deriva una fórmula cerrada para
$$\sum_{k=m}^{n} r^k.$$
Tu derivación debe comenzar reindexando para que el nuevo índice parta en 0.
41. **Nivel C.** Explica por qué la fórmula $(1 - r^{n+1})/(1 - r)$ no puede usarse directamente cuando $r = 1$. Calcula la suma en ese caso y compara el resultado con la expresión original $1 + r + \cdots + r^n$.
42. **Nivel D.** Demuestra algebraicamente
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$
Después verifica la misma identidad por inducción y compara qué estructura hace visible cada prueba.

G. Telescopaje

43. **Nivel B.** Calcula
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
usando $1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$. Expande suficientes términos para mostrar la cancelación.
44. **Nivel C.** Demuestra
$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
y usa esta identidad para evaluar $\sum_{k=1}^{n} 1/[k(k+2)]$.
45. **Nivel C.** Evalúa
$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2)$$
por telescopaje. Luego explica por qué el resultado puede anticiparse antes de hacer ninguna expansión algebraica.

46. **Nivel C.** Usa
$$2k+1=(k+1)^2-k^2$$
para obtener una prueba telescópica de
$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=n^2.$$
Compárala con la prueba del ejercicio 37.

47. **Nivel C.** Calcula
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
con una descomposición telescópica y expresa el resultado como una sola fracción.

48. **Nivel D.** Verifica la identidad
$$\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}$$
y úsala para evaluar
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}.$$

49. **Nivel D.** Descubre una descomposición de la forma
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=C\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$
y determina C. Después evalúa la suma desde $k=1$ hasta n.

50. **Nivel D.** La identidad
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$
puede verificarse por inducción. Da también una prueba telescópica y argumenta cuál de las dos explica mejor la forma cerrada del resultado.

H. Productos finitos

51. **Nivel A.** Expande $\prod_{k=2}^{5}(k+1)$ y calcula su valor.

52. **Nivel B.** Demuestra que, para una constante c,
$$\prod_{k=1}^{n}c=c^n.$$
¿Qué valor adopta el producto si $n=0$ bajo la convención de producto vacío?

53. **Nivel B.** Para $m\le r<n$, demuestra por expansión
$$\prod_{k=m}^{n}a_k=\left(\prod_{k=m}^{r}a_k\right)\left(\prod_{k=r+1}^{n}a_k\right).$$

54. **Nivel C.** Reindexa $\prod_{k=0}^{n-1}(k+2)$ usando $j=k+2$. Comprueba que el número de factores no cambia.

55. **Nivel C.** Evalúa
$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}$$
mostrando explícitamente la cancelación de factores interiores.

56. **Nivel C.** Calcula
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k+2}$$
y verifica el resultado para $n=1,2,3$ antes de dar la fórmula general.

I. Sumas dobles

57. **Nivel B.** Expande completamente
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}.$$
¿Cuántos términos aparecen?

58. **Nivel B.** Calcula directamente
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j).$$
Luego invierte el orden de suma y comprueba que obtienes el mismo valor.

59. **Nivel C.** Justifica, describiendo el dominio de pares, que
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$
No uses como justificación sólo «porque las sumas conmutan».

60. **Nivel C.** Demuestra
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_i + b_j) = n\sum_{i=1}^{m} a_i + m\sum_{j=1}^{n} b_j.$$
Explica el origen de los factores n y m.

61. **Nivel C.** Simplifica
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i$$
sin expandir todos los términos. Interpreta el resultado como un conteo de multiplicidad.

62. **Nivel D.** Demuestra que
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij = \left(\sum_{i=1}^{m} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right),$$
y obtén una fórmula cerrada en m y n.

J. Dominios triangulares

63. **Nivel B.** Enumera todos los pares (i,j) que aparecen en
$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}.$$
Dibuja, si te ayuda, el dominio como puntos de una cuadrícula.

64. **Nivel C.** Demuestra que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$
describiendo primero el dominio común $\{(i,j) : 1 \le j \le i \le n\}$.

65. **Nivel C.** Evalúa
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$$
de dos maneras: contando directamente cuántos valores de j corresponden a cada i y cambiando el orden de suma.

66. **Nivel D.** Demuestra la identidad de multiplicidades
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_j = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1)x_j.$$
Interpreta el coeficiente $n-j+1$ como el número de veces que aparece x_j en la suma original.

K. Diagnóstico y comparación de métodos

67. **Nivel C.** Diagnostica el error en
$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = k\sum_{k=1}^{n} a_k.$$
Propón una versión correcta de la regla de extracción de constantes.
68. **Nivel C.** Un estudiante transforma
$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2$$
en $\sum_{j=0}^{n-1} j^2$ usando $j = k+1$. Señala todos los componentes que quedaron sin transformar y escribe la versión correcta.
69. **Nivel D.** Explica por qué es incorrecto escribir
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$
Describe el dominio de cada lado y escribe el cambio de orden correcto.
70. **Nivel D.** Para cada problema, elige el método que consideres estructuralmente más adecuado —álgebra directa, reindexación, telescopaje o inducción— y justifica la elección antes de resolverlo:

a. $\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$;
b. $\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^3-k^3\big)$;
c. comparar $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ con $\sum_{j=1}^{n} a_j$;
d. verificar una fórmula cerrada ya conjeturada para una familia definida recursivamente.

71. **Nivel D.** Compara la prueba por inducción y la prueba por apareamiento de
$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
No basta con decir que ambas son correctas: explica qué rasgo estructural revela cada una y cuál usarías para descubrir la fórmula desde cero.
72. **Nivel D.** Una solución pretende evaluar $\sum_{k=1}^{n} 1/[k(k+1)]$ escribiendo «se cancelan casi todos los términos» sin mostrar ninguna descomposición. Explica por qué eso no constituye una prueba completa y reconstruye el argumento mínimo que vuelve visible el telescopaje.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E. Reindexación en varias etapas.** Sea $n \geq 1$. Partiendo de
$$S = \sum_{k=2}^{n+1}(2k-3)a_{k-1},$$
realiza primero la sustitución $j = k-1$ y luego invierte el orden mediante $r = n+1-j$. Obtén dos representaciones nuevas de S. En cada etapa debes registrar explícitamente

índice antiguo, índice nuevo, límites transformados y sumando transformado. Finalmente verifica las tres expresiones expandiendo sus dos primeros y sus dos últimos términos.

74. **Nivel E. Dos pruebas de una identidad larga.** Demuestra sin inducción que
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$
Busca primero una expresión $F(k)$ tal que $F(k) - F(k-1) = k(k+1)$ y usa telescopaje. Después verifica la misma identidad por inducción. Compara ambas pruebas e identifica cuál explica de manera más directa el factor $n(n+1)(n+2)$.

75. **Nivel F. Telescopaje no evidente.** Para $n \geq 1$, evalúa
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$
No uses una fórmula memorizada. Debes descubrir y demostrar una identidad local que convierta cada sumando en una diferencia de dos términos consecutivos de una familia adecuada, exhibir la cancelación y reducir el resultado a una sola fracción racional en n.

76. **Nivel F. Producto telescópico no trivial.** Para $n \geq 2$, demuestra que
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{n+2}{3n}.$$
No canceles «mentalmente»: separa el producto en dos factores telescópicos, muestra cuáles factores sobreviven en cada uno y controla los casos $n = 2$ y $n = 3$ como auditoría de extremos.

77. **Nivel F. Suma rectangular reorganizada de dos maneras.** Sean $x_1, \ldots, x_m$ y $y_1, \ldots, y_n$. Calcula
$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - y_j)$$
de dos maneras distintas: primero sumando respecto de j y luego respecto de i, y después invirtiendo el orden desde el comienzo. Demuestra que ambos caminos conducen a
$$S = n \sum_{i=1}^{m} x_i - m \sum_{j=1}^{n} y_j.$$
Explica el resultado como un conteo de multiplicidades sobre el rectángulo de índices.

78. **Nivel F. Dominio triangular y simplificación posterior.** Sea (b_j) una familia y define
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (b_j - b_{j+1}).$$
Resuelve el problema de dos maneras. En la primera, telescopa primero la suma interior y luego suma sobre i. En la segunda, cambia primero el orden de suma usando el dominio $1 \leq j \leq i \leq n$ y simplifica después la suma resultante. Demuestra que ambos métodos producen exactamente la misma expresión final.

79. **Nivel G. Elegir el método.** Demuestra, para $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1) = (n+1)^3 - 1.$$
Antes de empezar, compara al menos tres estrategias posibles entre álgebra directa, reindexación, telescopaje e inducción. Elige una como prueba principal y justifica por qué revela mejor la estructura de la identidad. Después bosqueja cómo funcionaría una segunda estrategia y señala qué información queda más oculta en ella.

80. **Nivel G. Reconstrucción de una solución defectuosa.** Se quiere demostrar
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$
Un estudiante escribe:
«Como $1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$,
$$> \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} >= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} >= 0. >$$
Si cambiamos el límite superior de la segunda suma a $n+1$, queda $1 - 1/(n+1)$, así que el resultado es correcto.»

Identifica **todos** los errores lógicos y de indexación de esta argumentación. Después reconstruye una prueba correcta de principio a fin. Tu solución debe distinguir entre renombrar un índice y reindexar una suma, justificar los nuevos límites y hacer visibles los términos extremos que sobreviven.

N. Rangos, dominios y cancelación con restricciones

81. Sea $n \geq 0$ un entero y supón definidos todos los términos utilizados. Reindexa $\sum_{k=-n}^{n} a_{2k+1}$ con un índice que comience en cero. Registra correspondencia, extremos, sumando y número de términos; comprueba $n = 0$.
82. Para enteros $m \leq n$, reescribe $\sum_{k=m}^{n}(k-m)a_k$ invirtiendo el orden mediante $j = m + n - k$. Justifica todos los cambios y comprueba el caso $m = n$.
83. Para $n \geq 0$, escribe $\sum_{k=0}^{n} a_{3k+2}$ usando directamente como índice el subíndice de a. Describe el conjunto finito de índices. Refuta su sustitución por $\sum_{j=2}^{3n+2} a_j$ cuando $n \geq 1$.
84. Para $n \geq 0$, demuestra $\sum_{k=-n}^{n} k a_k = \sum_{j=1}^{n} j(a_j - a_{-j})$. Explica por qué la simetría del rango no basta para concluir que la suma vale cero e indica una condición suficiente para que sí valga cero.
85. Para $n \geq 1$, cambia el orden de $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{i+2} a_{ij}$. Describe el dominio por desigualdades y comprueba las columnas extremas. Puedes usar máx y mín para indicar el mayor y el menor de dos extremos.
86. Para $n \geq 1$, invierte $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-i} a_{ij}$ y cuenta los pares del dominio. Explica qué ocurre con la última fila y con $n = 1$.
87. Sea $n \geq 1$. Cambia el orden de $\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{\min(i,n)} a_{ij}$ y calcula el número total de pares. Compara el dominio con el triángulo de §12.14.
88. Para $n \geq 1$, invierte el orden de $\sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}]$. Describe qué pares se excluyen y prueba que el cambio no duplica términos. Cuenta los pares y trata $n = 1$.
89. Para $n \geq 1$, evalúa $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)/[(k+1)^2(k+2)^2]$. Descubre y prueba una diferencia de dos términos consecutivos que produzca telescopaje; no basta anunciar cancelaciones.
90. Para $n \geq 1$, calcula $\sum_{k=1}^{n} 4(k+1)/[k^2(k+2)^2]$. Produce el telescopaje y explica por qué sobreviven dos extremos de cada signo. Comprueba el caso corto $n = 1$.
91. Sea $n \geq 1$. Evalúa $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ construyendo una familia polinómica cuya diferencia consecutiva sea el sumando. Explica cómo escoges la familia y demuestra la identidad local.
92. Para $n \geq 0$, evalúa $\prod_{k=0}^{n}(1 - 1/(k+2)^2)$ sin multiplicar todos los factores. Descubre una factorización que produzca dos productos telescópicos y verifica $n = 0$.
93. Para $n \geq 1$ y $t \in \mathbb{R}$, determina el dominio y los ceros de $P_n(t) = \prod_{k=1}^{n}(k-t)/(k+t)$. ¿Cuándo es legítimo afirmar $P_n(t)P_n(-t) = 1$? Trata también $t = 0$.

94. Para $n \geq 1$, estudia $Q_n(t) = \prod_{k=0}^{n}(t+k+2)/(t+k)$. Determina dominio, fórmula cerrada y ceros. Identifica los dos extremos que sobreviven en cada parte y decide qué ocurre con $n = 2, t = -1$.
95. Para $n \geq 0$, estudia $R_n(t) = \prod_{k=1}^{n}(1 - t/k)$ sobre los reales: dominio, ceros y valores en $t = 0, -1$. Distingue el caso $n = 0$ de los casos con factores.
96. Sea $n \geq 1$. Compara $A_n = \prod_{k=1}^{n}(k^2-1)/(k^2-k)$ con $B_n = \prod_{k=2}^{n}(k^2-1)/(k^2-k)$. Decide cuáles están definidos y evalúa los que lo estén. Diagnostica la propuesta «cancelar $k-1$ en cada factor prueba $A_n = n+1$».

Soluciones razonadas

A. Leer y expandir notación

1. En

$$\sum_{k=3}^{8}(2k+1),$$

el índice es k, el límite inferior es 3, el límite superior es 8 y el sumando es $2k+1$. Los valores del índice son $3, 4, 5, 6, 7, 8$, por lo que hay

$$8 - 3 + 1 = 6$$

sumandos.

2. Sustituimos $k = 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\sum_{k=2}^{6}(3k-2) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50.$$

3. Sustituyendo sucesivamente $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ obtenemos

$$(+1)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (+1)\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + (+1)\cdot 5 + (-1)\cdot 6,$$

es decir,

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6.$$

La expansión muestra primero el patrón de signos; sólo después, si se desea, puede simplificarse a -3.

4. Los índices enteros desde m hasta n, ambos incluidos, son

$$m, m+1, \ldots, n.$$

Si restamos m a todos, obtenemos $0, 1, \ldots, n-m$, lista que contiene $n-m+1$ enteros. Por eso la suma tiene exactamente $n-m+1$ sumandos.

Para $m = -2$ y $n = 3$ aparecen

$$a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + a_3,$$

seis términos, y en efecto

$$3 - (-2) + 1 = 6.$$

5. En

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m)^2,$$

k es una variable ligada por la sumatoria. Los símbolos m y n son parámetros libres respecto de esa sumatoria.

Podemos renombrar consistentemente el índice:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m)^2 = \sum_{r=1}^{n}(r+m)^2.$$

No cambia ni la lista de valores recorridos ni el valor de la suma. Sólo cambia el nombre local del índice.

6. El límite inferior es 3, de modo que el primer término es 3^2, no 1^2. La expansión correcta es

$$\sum_{k=3}^{6} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86.$$

Regla práctica: antes de expandir, escribir explícitamente la lista de valores que recorre el índice. El sumando se evalúa sólo en esos valores.

B. Comprimir y renombrar índices

7. La diferencia entre términos consecutivos es 3. Si el índice comienza en 1, el término general $3k+2$ produce 5 cuando $k=1$. Por tanto,

$$5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = \sum_{k=1}^{6}(3k+2).$$

8. Una forma directa es

$$\sum_{k=4}^{10} k^2.$$

Otra, trasladando el índice para comenzar en 0, es

$$\sum_{j=0}^{6}(j+4)^2.$$

Ambas generan $4^2, 5^2, \ldots, 10^2$.

9. Dos representaciones son

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

y

$$\sum_{j=0}^{n-1}(2j+1).$$

La primera produce $1, 3, \ldots, 2n-1$. En la segunda, $j=0$ produce 1 y $j=n-1$ produce $2n-1$. Las dos recorren la misma lista de n números impares.

10. El renombre correcto es

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+m)=\sum_{j=1}^{n}(j^2+m).$$

Aquí sólo hemos cambiado el nombre de la variable ligada. El parámetro m no está ligado por la sumatoria y conserva su significado externo. Reemplazar también m por j daría

$$\sum_{j=1}^{n}(j^2+j),$$

que es otra expresión: el parámetro habría sido sustituido por una cantidad que varía con el índice.

11. Comenzando en 0:

$$a+(a+d)+\cdots+(a+(n-1)d)=\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd).$$

Comenzando en 1:

$$a+(a+d)+\cdots+(a+(n-1)d)=\sum_{j=1}^{n}(a+(j-1)d).$$

12. El lado izquierdo se expande como

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd).$$

El lado derecho se expande como

$$(a+0d)+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd),$$

que es la misma lista.

Formalmente, la sustitución es $j=k+1$, de modo que $k=j-1$. Al pasar de $k=0$ a $k=n$, el nuevo índice pasa de $j=1$ a $j=n+1$, y el sumando $a+kd$ se convierte en $a+(j-1)d$. No es un mero cambio de letra: cambian también los límites y la fórmula del sumando.

C. Linealidad

13. Por linealidad,

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)=5\sum_{k=1}^{n}k-3\sum_{k=1}^{n}1.$$

Usando

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n}1=n,$$

obtenemos

$$5\frac{n(n+1)}{2}-3n=\frac{5n^2-n}{2}=\frac{n(5n-1)}{2}.$$

14. Como ambas sumas tienen el mismo rango,

$$2\sum_{k=1}^{n}(k+1)-\sum_{k=1}^{n}(k-2)=\sum_{k=1}^{n}\big(2(k+1)-(k-2)\big).$$

Dentro de la suma,

$$2(k+1)-(k-2)=k+4.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+4)=\frac{n(n+1)}{2}+4n=\frac{n(n+9)}{2}.$$

15. Como m no depende de k,

$$\sum_{k=1}^{n}ma_k=m\sum_{k=1}^{n}a_k$$

es válido.

En cambio,

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

no permite extraer k, porque k cambia de término en término.

Finalmente, $n+1$ es constante respecto de k, así que

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1)a_k=(n+1)\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

La condición decisiva no es que el símbolo sea una letra, sino que su valor sea independiente del índice de sumación.

16. Expandimos el lado izquierdo:

$$(a_m-b_m)+(a_{m+1}-b_{m+1})+\cdots+(a_n-b_n).$$

Interpretando cada resta como suma del opuesto y usando asociatividad y conmutatividad, agrupamos los términos a y los términos $-b$:

$$(a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n)-(b_m+b_{m+1}+\cdots+b_n).$$

Esto es precisamente

$$\sum_{k=m}^{n}a_k-\sum_{k=m}^{n}b_k.$$

17. Sea

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Entonces

$$3A - 2A + \sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k) = A + (B - A) = B.$$

Por tanto, la expresión se reduce a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} b_k}.$$

18. Tomemos $n = 2$ y

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{2} a_k b_k = 1 + 1 = 2,$$

mientras que

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Al expandir el producto del lado derecho aparecen

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2.$$

La suma original contiene sólo los términos diagonales $a_1 b_1$ y $a_2 b_2$; el producto añade los términos cruzados $a_1 b_2$ y $a_2 b_1$.

D. Separar y unir rangos

19. Cortando después de $k = 5$:

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=6}^{12} a_k.$$

20. Para $n \geq 4$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_{n-1} + a_n.$$

Si $n = 4$, la suma central es vacía y vale 0, de acuerdo con la convención adoptada.

21. Los rangos son contiguos: el primero termina en 2 y el segundo comienza en 3. Por tanto,

$$\sum_{k=-3}^{2} a_k + \sum_{k=3}^{9} a_k = \sum_{k=-3}^{9} a_k.$$

22. En

$$\sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=6}^{9} a_k$$

falta a_5. Por eso no podemos sustituirla por $\sum_{k=1}^{9} a_k$ como identidad para una familia arbitraria. La diferencia entre la suma completa y la propuesta es exactamente a_5: coinciden si $a_5 = 0$, pero no en general.

Si la segunda suma comenzara en $k = 4$, entonces a_4 aparecería dos veces:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=4}^{9} a_k = \sum_{k=1}^{9} a_k + a_4.$$

Así, para recombinar directamente, los rangos deben ser contiguos y no superponerse.

23. La suma hasta $n+1$ contiene exactamente los términos de la suma hasta n más el término final a_{n+1}:

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = a_m + \cdots + a_n + a_{n+1} = \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Despejando,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n+1} a_k - a_{n+1}.$$

En inducción, la primera forma permite pasar de una expresión conocida hasta n a la correspondiente hasta $n+1$ aislando exactamente el nuevo término.

24. Los tres rangos son

$$[m, r], \qquad [r+1, s], \qquad [s+1, n].$$

Son disjuntos y su unión es todo el conjunto de índices $m, m+1, \ldots, n$. Por tanto,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k.$$

El primer bloque termina en r y el siguiente comienza en $r+1$; análogamente, el segundo termina en s y el tercero comienza en $s+1$. No hay huecos ni superposiciones.

E. Cambios de índice

25. Sea $j = k + 1$. Entonces $k = j - 1$. Cuando $k = 0$, $j = 1$; cuando $k = n - 1$, $j = n$. Además,

$$(k+1)^3 = j^3.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3.$$

26. Queremos que el nuevo índice comience en 1. Tomamos

$$j = k - 3.$$

Entonces $k = j + 3$. Para $k = 4$ tenemos $j = 1$, y para $k = n + 3$ tenemos $j = n$. El sumando se convierte en

$$a_{k-3} = a_j.$$

Así,

$$\sum_{k=4}^{n+3} a_{k-3} = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

27. Tomamos

$$j = n + 1 - k.$$

Entonces

$$k = n + 1 - j.$$

Cuando $k = 1$, $j = n$; cuando $k = n$, $j = 1$. Por tanto, al aumentar k, j recorre los valores en orden inverso. Como la suma es finita, podemos escribirlos de nuevo en orden ascendente:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}.$$

La segunda suma expande como

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1,$$

que contiene exactamente los mismos términos que la primera.

28. En la primera suma tomamos $j = k + 1$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

La reindexación revela que las dos sumas son la misma colección de términos escrita con índices distintos.

29. Sea

$$j = k + s,$$

con s fijo. Entonces $k = j - s$. Los extremos se transforman así:

$$k = m \Rightarrow j = m + s, \qquad k = n \Rightarrow j = n + s.$$

El sumando $f(k)$ se convierte en $f(j - s)$. Por tanto,

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{j=m+s}^{n+s} f(j - s).$$

La igualdad es correcta porque la aplicación $k \mapsto j = k + s$ establece una correspondencia uno a uno entre los dos rangos y conserva el valor de cada término bajo la sustitución indicada.

30. La hipótesis $r \neq 0$ garantiza que todas las potencias de exponente entero están definidas. Tomamos

$$j = k - m,$$

es decir, $k = j + m$. Si $k = m$, entonces $j = 0$; si $k = n$, entonces $j = n - m$. Luego

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \sum_{j=0}^{n-m} r^{j+m}.$$

Como r^m no depende de j,

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \sum_{j=0}^{n-m} r^j.$$

31. Si $j = k + 2$, no basta cambiar el nombre del índice. Cuando $k = 1$, $j = 3$; cuando $k = n$, $j = n + 2$. Además, $a_{k+2} = a_j$. La reindexación correcta es

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} a_j.$$

La expresión $\sum_{j=1}^{n} a_j$ contiene otra lista de términos: comienza en a_1 y termina en a_n.

32. Con $j = k + 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} a_j.$$

La expresión original comienza con a_3 y termina con a_{n+2}. La nueva suma también comienza con a_3 y termina con a_{n+2}, así que los extremos confirman la reindexación.

33. Sea $j = k + 1$, por lo que $k = j - 1$. El rango $k = 0, \ldots, n$ se transforma en $j = 1, \ldots, n + 1$. Además,

$$2k + 1 = 2(j - 1) + 1 = 2j - 1$$

y

$$x^{2k} = x^{2(j-1)} = x^{2j-2}.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k + 1)x^{2k} = \sum_{j=1}^{n+1}(2j - 1)x^{2j-2}.$$

34. Tomamos $j = k + 1$. Entonces $k = j - 1$, el rango $0 \leq k \leq n$ se convierte en $1 \leq j \leq n + 1$ y

$$2k + 1 = 2j - 1.$$

Así,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k + 1) = \sum_{j=1}^{n+1}(2j - 1).$$

La primera suma comienza

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1),$$

y la segunda también:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n + 1) - 1).$$

Como $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$, coinciden también en el término final.

F. Sumas aritméticas y geométricas

35. Sea

$$S = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Escribimos la misma suma en orden inverso:

$$S = n + (n - 1) + \cdots + 1.$$

Sumando término a término,

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1).$$

Hay exactamente n columnas, porque la suma original tiene los índices $1, 2, \ldots, n$. Por eso

$$2S = n(n + 1)$$

y

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

36. Tenemos

$$2 + 4 + \cdots + 2n = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k.$$

Por tanto,

$$2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

37. La sucesión $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ es una progresión aritmética de n términos, con primer término 1 y último término $2n-1$. La fórmula de una progresión aritmética da

$$S = \frac{n}{2}\big(1 + (2n-1)\big) = \frac{n}{2}(2n) = n^2.$$

38. Sea

$$S = a + (a+d) + \cdots + (a + (n-1)d).$$

En orden inverso,

$$S = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d) + \cdots + a.$$

Al sumar columna a columna, cada par vale

$$2a + (n-1)d.$$

Hay n columnas, de modo que

$$2S = n\big(2a + (n-1)d\big),$$

y por tanto

$$S = \frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big).$$

El argumento no requiere separar paridad. Si n es impar, la columna central empareja el término medio de una copia con el mismo término medio de la copia invertida; su suma sigue siendo $2a + (n-1)d$.

39. Es una suma geométrica con razón 3:

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

40. La hipótesis $r \neq 0$ autoriza los exponentes enteros y $r \neq 1$ permitirá dividir por $1 - r$. Primero reindexamos con $j = k - m$:

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \sum_{j=0}^{n-m} r^j.$$

Para $r \neq 1$,

$$\sum_{j=0}^{n-m} r^j = \frac{1 - r^{n-m+1}}{1 - r}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r}}.$$

41. Si $r = 1$, la fórmula

$$\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

produce $0/0$, así que no está definida y no puede usarse directamente.
La suma original sí está perfectamente definida:

$$1 + 1 + \cdots + 1,$$

con $n + 1$ términos. Por tanto vale

$$n + 1.$$

42. Prueba algebraica. Sea

$$S = 1 + 2 + \cdots + 2^n.$$

Entonces

$$2S = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n+1}.$$

Restando la primera ecuación de la segunda,

$$2S - S = 2^{n+1} - 1,$$

de donde

$$S = 2^{n+1} - 1.$$

Prueba inductiva. Para $n = 0$,

$$1 = 2^1 - 1.$$

Supongamos

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1.$$

La prueba algebraica hace visible la cancelación producida al multiplicar toda la suma por la razón 2. La inducción muestra cómo la fórmula se propaga al añadir un nuevo término, pero no explica tan directamente por qué aparece la resta de 1.

G. Telescopaje

43. Usamos

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Los términos interiores se cancelan por pares.

44. Primero,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+2)} = \frac{1}{k(k+2)}.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right).$$

Para $n \geq 2$, al expandir quedan sin cancelar los dos primeros términos positivos y los dos últimos negativos:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Para $n = 1$, la suma original tiene un solo término, $1/3$. La misma expresión de borde sigue siendo válida: $1/2$ y $-1/(n+1) = -1/2$ se cancelan entre sí y queda $\frac{1}{2}(1 - 1/3) = 1/3$. No se presupone que existan cuatro términos distintos en este caso corto.

Así,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}.$$

45. Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (k^2 - (k-1)^2) &= (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \cdots + (n^2 - (n-1)^2) \\ &= n^2.\end{aligned}$$

Antes de expandir ya puede anticiparse el resultado porque el sumando tiene la forma $F(k) - F(k-1)$ con $F(k) = k^2$; una suma de diferencias consecutivas deja sólo $F(n) - F(0)$.

46. Como

$$2k+1 = (k+1)^2 - k^2,$$

tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)^2 - k^2)\\ &= (1^2-0^2) + (2^2-1^2) + \cdots + (n^2-(n-1)^2)\\ &= n^2.\end{aligned}$$

En el ejercicio 37 la fórmula surgía de ver los impares como una progresión aritmética y promediar extremos. Aquí aparece otra estructura: cada impar es una diferencia de cuadrados consecutivos. La prueba telescópica explica directamente la aparición de n^2.

47. Usamos

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} = \boxed{\frac{n+1}{n+2}}.$$

48. La identidad se verifica porque

$$\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4} = \frac{3}{(3k+1)(3k+4)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{(3k+1)(3k+4)} &= \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \cdots\\ &\qquad + \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{3n+4}\\ &= \boxed{\frac{3(n+1)}{3n+4}}.\end{aligned}$$

49. Calculamos la diferencia propuesta:

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Así,

$$C = \frac{1}{2}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
$$= \boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}.$$

50. Prueba telescópica. Por la identidad local

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Verificación inductiva. Para $n = 1$,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que la fórmula vale para n:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n+1}{n+2}.$$

La inducción verifica la propagación de la fórmula. El telescopaje explica mejor su forma: el resultado está determinado por los dos extremos que sobreviven a la cancelación.

H. Productos finitos

51.

$$\prod_{k=2}^{5}(k+1) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360.$$

52. El producto contiene n factores, todos iguales a c:

$$\prod_{k=1}^{n} c = \underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ factores}} = c^n.$$

Si $n = 0$, no aparece ningún factor. Bajo la convención adoptada, el producto vacío vale

$$1.$$

53. Por expansión,

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m a_{m+1} \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n.$$

Separando el bloque en el punto r,

$$(a_m \cdots a_r)(a_{r+1} \cdots a_n) = \left(\prod_{k=m}^{r} a_k \right) \left(\prod_{k=r+1}^{n} a_k \right).$$

Los rangos son contiguos y no se superponen, de modo que cada factor aparece exactamente una vez.

54. Tomamos $j = k + 2$. Entonces $k = 0$ corresponde a $j = 2$ y $k = n - 1$ a $j = n + 1$. Además, $k + 2 = j$. Por tanto,

$$\prod_{k=0}^{n-1} (k+2) = \prod_{j=2}^{n+1} j.$$

El primer rango contiene n valores, pues $(n-1) - 0 + 1 = n$. El segundo también contiene

$$(n+1) - 2 + 1 = n$$

valores.

55. Expandimos:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1}.$$

Cada factor interior $2, 3, \ldots, n-1$ aparece una vez en un numerador y una vez en un denominador. Sobreviven n en el numerador final y 1 en el denominador inicial:

$$\boxed{n}.$$

56. Para $n = 1$:

$$\frac{2}{3}.$$

Para $n = 2$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Para $n = 3$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

En general,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n+1}{n+2}.$$

Los factores interiores se cancelan y queda

$$\boxed{\frac{2}{n+2}}.$$

Los tres casos calculados coinciden con esta fórmula.

I. Sumas dobles

57. La suma es

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}).$$

Aparecen $2 \cdot 3 = 6$ términos.

58. Sumando primero respecto de j:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j) &= (2+3+4)+(3+4+5)\\ &= 9+12\\ &= 21.\end{aligned}$$

Invirtiendo el orden:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}(i+j) &= (2+3)+(3+4)+(4+5)\\ &= 5+7+9\\ &= 21.\end{aligned}$$

Se han recorrido los mismos seis pares (i, j).

59. El lado izquierdo suma a_{ij} sobre el conjunto

$$D = \{(i,j) : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}.$$

El lado derecho usa exactamente el mismo conjunto D; sólo recorre primero los valores de i para cada j, en lugar de recorrer primero los valores de j para cada i.

Como D es finito y cada par aparece exactamente una vez en ambos recorridos,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

La justificación es la igualdad del dominio de pares, no una conmutación formal de símbolos de suma.

60. Para un i fijo,

$$\sum_{j=1}^{n}(a_i + b_j) = na_i + \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Ahora sumamos respecto de i:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_i + b_j) &= \sum_{i=1}^{m}\left(na_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\right) \\ &= n\sum_{i=1}^{m} a_i + m\sum_{j=1}^{n} b_j.\end{aligned}$$

El factor n aparece porque cada a_i se repite una vez por cada uno de los n valores de j. El factor m aparece porque cada b_j se repite una vez por cada uno de los m valores de i.

61. Para cada i fijo, el sumando a_i no depende de j, así que

$$\sum_{j=1}^{n} a_i = na_i.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} na_i = \boxed{n\sum_{i=1}^{m} a_i}.$$

La interpretación es multiplicativa: cada a_i aparece exactamente n veces en el rectángulo de índices.

62. Para i fijo,

$$\sum_{j=1}^{n} ij = i\sum_{j=1}^{n} j.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij &= \sum_{i=1}^{m} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right).\end{aligned}$$

Usando la fórmula de la suma de los primeros enteros positivos,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij = \frac{m(m+1)n(n+1)}{4}}.$$

J. Dominios triangulares

63. Los pares son

$$(1,1),$$

$$(2,1),(2,2),$$

$$(3,1),(3,2),(3,3),$$

$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4).$$

El dominio contiene $1+2+3+4=10$ pares y forma un triángulo bajo la condición $1 \leq j \leq i \leq 4$.

64. La suma original recorre

$$D = \{(i,j) : 1 \leq j \leq i \leq n\}.$$

Si fijamos ahora j, la condición del dominio dice que i debe satisfacer

$$j \leq i \leq n.$$

Además j puede tomar los valores $1, \ldots, n$. Por tanto, el mismo conjunto D puede recorrerse como

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}.$$

Así,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}}.$$

65. Primero, para un i fijo hay exactamente i valores de j. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cambiando el orden,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} 1.$$

Para un j fijo hay $n-j+1$ valores de i, de modo que

$$\sum_{j=1}^{n} (n-j+1).$$

Esta lista es $n + (n-1) + \cdots + 1$, que también vale

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

66. El dominio es $1 \le j \le i \le n$. Fijado j, el índice i puede tomar los valores

$$j, j+1, \dots, n.$$

Hay

$$n - j + 1$$

posibilidades. Como el sumando es x_j, independiente de i,

$$\sum_{i=j}^{n} x_j = (n - j + 1)x_j.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_j = \sum_{j=1}^{n}(n - j + 1)x_j}.$$

El coeficiente cuenta literalmente la multiplicidad con que x_j aparece en la suma triangular original.

K. Diagnóstico y comparación de métodos

67. El símbolo k no es constante: es el índice ligado que toma sucesivamente los valores $1, 2, \dots, n$. Por eso no puede salir de la suma como un único factor.

La regla correcta es: si c no depende de k, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

68. Si $j = k+1$, deben transformarse simultáneamente el índice, los límites y el sumando. El estudiante transformó correctamente el sumando: $(k+1)^2 = j^2$. El error está en dejar los límites 0 y $n-1$ sin transformar; el nuevo índice comienza en 1 y termina en n.

La transformación correcta es

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2.$$

En efecto, $k = 0$ corresponde a $j = 1$ y $k = n-1$ a $j = n$.

69. El lado izquierdo recorre

$$D_1 = \{(i, j) : 1 \le j \le i \le n\},$$

es decir, los pares situados en uno de los dos triángulos del cuadrado de índices.

El lado derecho propuesto recorre

$$D_2 = \{(i, j) : 1 \le i \le j \le n\},$$

el triángulo opuesto. En general $D_1 \neq D_2$.

Para recorrer el mismo dominio D_1 fijando primero j, debemos usar

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}}.$$

70. a. La estructura dominante es la linealidad y el álgebra directa:

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2n(n+1) - n = \boxed{n(2n+1)}.$$

b. El método natural es telescopaje, porque el sumando ya es una diferencia consecutiva:

$$\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^3 - k^3\big) = (2^3 - 1^3) + \cdots + ((n+1)^3 - n^3).$$

Se cancelan los cubos interiores y queda

$$\boxed{(n+1)^3 - 1}.$$

c. El método natural es reindexación. Con $j = k+1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Las dos expresiones son exactamente la misma suma.

d. Para una fórmula cerrada conjeturada de una familia definida recursivamente, la inducción suele reflejar mejor la estructura: se comprueba el caso o los casos iniciales y se usa la regla recursiva para pasar del índice k al siguiente. Sin una recurrencia y una fórmula concretas no hay aquí una identidad numérica adicional que calcular; el punto es identificar correctamente el método y el esquema de prueba.

71. La inducción parte de un caso inicial y demuestra que, si

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

entonces al añadir $k+1$ se obtiene

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Revela una estructura **recursiva**: la fórmula correcta para k fuerza la fórmula correcta para $k+1$.

El apareamiento, en cambio, escribe la suma en los dos órdenes y observa que cada columna suma $n+1$. Revela una estructura **simétrica**: el promedio del primer y último término es $(n+1)/2$ y hay n términos.

Para descubrir la fórmula desde cero elegiría el apareamiento, porque explica directamente por qué aparecen los factores n y $n+1$ y por qué se divide por 2. La inducción es excelente para verificar una fórmula ya conjeturada, pero no muestra con la misma claridad de dónde proviene.

72. Decir «se cancelan casi todos» no basta porque todavía no se ha mostrado qué expresión contiene términos opuestos consecutivos. Primero hay que producir la forma telescópica:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n}{n+1}.$$

La descomposición local y la exhibición de los extremos sobrevivientes son las dos piezas mínimas que hacen completa la prueba.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Partimos de

$$S = \sum_{k=2}^{n+1} (2k-3)a_{k-1}.$$

Primera reindexación. Tomamos

$$j = k - 1, \qquad k = j + 1.$$

Los extremos cambian como

$$k = 2 \Rightarrow j = 1, \qquad k = n + 1 \Rightarrow j = n.$$

El sumando se transforma en

$$(2(j+1) - 3)a_j = (2j - 1)a_j.$$

Así,

$$\boxed{S = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)a_j}.$$

Segunda reindexación. Ahora tomamos

$$r = n + 1 - j, \qquad j = n + 1 - r.$$

Cuando $j = 1$, $r = n$; cuando $j = n$, $r = 1$. El nuevo parámetro recorre el rango en orden inverso. Reordenándolo de 1 a n, el sumando queda

$$(2(n+1-r) - 1)a_{n+1-r} = (2n + 1 - 2r)a_{n+1-r}.$$

Por tanto,

$$\boxed{S = \sum_{r=1}^{n} (2n+1-2r)a_{n+1-r}}.$$

Para $n \geq 2$, la expresión original comienza y termina como

$$a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-3)a_{n-1} + (2n-1)a_n.$$

La primera reindexación produce exactamente la misma secuencia. La segunda la escribe en orden inverso:

$$(2n-1)a_n + (2n-3)a_{n-1} + \cdots + 3a_2 + a_1.$$

Las dos primeras y las dos últimas contribuciones coinciden, salvo por el orden. Para $n = 1$ sólo existe un término, $S = a_1$, y las tres representaciones también coinciden.

74. Buscamos $F(k)$ con

$$F(k) - F(k-1) = k(k+1).$$

Una elección natural es

$$F(k) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} F(k) - F(k-1) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \\ &= \frac{k(k+1)}{3}((k+2) - (k-1)) \\ &= k(k+1). \end{aligned}$$

Por telescopaje,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} (F(k) - F(k-1)) \\ &= F(n) - F(0) \\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}. \end{aligned}$$

Verificación inductiva. Para $n = 1$,

$$1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}.$$

Supongamos

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Al añadir el término $(n+1)(n+2)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

La inducción confirma la fórmula. El telescopaje explica más directamente el producto de tres enteros consecutivos: éste aparece ya en la función $F(k)$ cuya diferencia finita es $k(k+1)$.

75. Buscamos una diferencia de términos consecutivos. Observamos que

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)}.$$

Sumando desde $k = 1$ hasta n,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).\end{aligned}$$

Llevando a una sola fracción,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} &= \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} \\ &= \boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}.\end{aligned}$$

76. Separamos el producto:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+2}{k+1}\right).$$

El primer factor es

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

El segundo es

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{3}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{n+2}{3n}}.$$

Auditoría de extremos. Para $n = 2$,

$$\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

y la fórmula da $4/6 = 2/3$.
Para $n = 3$,

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{9},$$

y la fórmula da $5/9$.

77. Primer recorrido: sumar respecto de j. Para i fijo,

$$\sum_{j=1}^{n}(x_i - y_j) = nx_i - \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Luego

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{m}\left(nx_i - \sum_{j=1}^{n} y_j\right) \\ &= n\sum_{i=1}^{m} x_i - m\sum_{j=1}^{n} y_j. \end{aligned}$$

Segundo recorrido: invertir primero el orden. Como el dominio es el rectángulo

$$\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\},$$

podemos escribir

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_j).$$

Para j fijo,

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i - my_j.$$

Así,

$$S = n\sum_{i=1}^{m} x_i - m\sum_{j=1}^{n} y_j.$$

La interpretación de multiplicidades es inmediata: cada x_i aparece una vez por cada uno de los n valores de j, mientras que cada y_j aparece con signo negativo una vez por cada uno de los m valores de i.

78. Tenemos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(b_j - b_{j+1}).$$

Método 1: telescopar primero. Para cada i,

$$\sum_{j=1}^{i}(b_j - b_{j+1}) = b_1 - b_{i+1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}(b_1 - b_{i+1}) \\ &= nb_1 - \sum_{i=1}^{n} b_{i+1} \\ &= \boxed{nb_1 - \sum_{r=2}^{n+1} b_r}. \end{aligned}$$

Método 2: cambiar primero el orden. El dominio es $1 \le j \le i \le n$, de modo que

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}(b_j - b_{j+1}).$$

Para j fijo hay $n - j + 1$ valores de i, así que

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}(n - j + 1)(b_j - b_{j+1}).$$

Separamos las dos sumas y reindexamos la segunda con $r = j + 1$:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}(n - j + 1)b_j - \sum_{r=2}^{n+1}(n - r + 2)b_r.$$

El coeficiente de b_1 es n. Para $2 \le r \le n$, la diferencia de coeficientes es

$$(n - r + 1) - (n - r + 2) = -1,$$

y b_{n+1} aparece sólo en la segunda suma con coeficiente -1. Por tanto,

$$S_n = nb_1 - b_2 - \cdots - b_{n+1} = \boxed{nb_1 - \sum_{r=2}^{n+1} b_r}.$$

Los dos procedimientos recorren la misma suma finita, pero revelan estructuras distintas: el primero explota cancelación local; el segundo, multiplicidades del dominio triangular.

79. Hay varias estrategias posibles.

1. **Telescopaje:** observar que el sumando puede ser una diferencia de cubos consecutivos.
2. **Inducción:** verificar la fórmula para $n = 1$ y demostrar el paso $n \to n + 1$.
3. **Álgebra directa:** separar $3\sum k^2 + 3\sum k + \sum 1$, pero esto exige además una fórmula cerrada para $\sum k^2$, que no es necesaria si se reconoce la estructura local.

La estrategia más informativa es el telescopaje, porque

$$(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1) &= \sum_{k=1}^{n}\big((k + 1)^3 - k^3\big) \\ &= (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + ((n + 1)^3 - n^3) \\ &= \boxed{(n + 1)^3 - 1}. \end{aligned}$$

La forma cerrada deja de parecer accidental: sólo sobreviven el cubo final y el cubo inicial.

Como segunda estrategia, la inducción comienza con

$$7 = 2^3 - 1.$$

Si la fórmula vale para n, al añadir el término correspondiente a $n+1$ se añade

$$3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = (n+2)^3 - (n+1)^3,$$

y se obtiene $(n+2)^3 - 1$. La inducción confirma la fórmula, pero oculta parcialmente la cadena completa de cancelaciones que el telescopaje exhibe de una sola vez.

80. La identidad local

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

es correcta. El error comienza al tratar la segunda sumatoria.

Partimos legítimamente de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

A partir de aquí hay que distinguir dos operaciones.

1. Renombrar el índice. Si sólo cambiamos la letra k por j, la segunda suma se convierte en

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1},$$

no en $\sum_{j=1}^{n} 1/j$. El sumando debe conservar la misma dependencia funcional del índice.

2. Reindexar para que el sumando sea $1/j$. Si tomamos

$$j = k + 1,$$

entonces $k = j - 1$. Los límites también cambian:

$$k = 1 \Rightarrow j = 2, \qquad k = n \Rightarrow j = n + 1.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}.$$

El estudiante cambió el sumando como si hubiera reindexado, pero dejó los límites como si sólo hubiera renombrado. Esas dos operaciones no pueden mezclarse.

Además, cambiar después únicamente el límite superior de una suma no es una transformación inocua: añade un término nuevo. Los límites correctos 2 y $n+1$ deben derivarse de la sustitución $j = k + 1$, no elegirse para forzar el resultado.

La prueba correcta es entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\\ &= \boxed{\frac{n}{n+1}}.\end{aligned}$$

Los términos interiores se cancelan porque las dos listas coinciden desde $1/2$ hasta $1/n$. Los extremos que no tienen pareja son exactamente 1 y $-1/(n+1)$.

N. Rangos, dominios y cancelación con restricciones

81. Toma $j = k+n$, de modo que $k = j-n$. Los extremos $k = -n, n$ pasan a $j = 0$, $2n$, y $a_{2k+1} = a_{2j-2n+1}$. Por tanto $\sum_{k=-n}^{n} a_{2k+1} = \sum_{j=0}^{2n} a_{2j-2n+1}$. La traslación es uno a uno y cubre exactamente $2n+1$ índices; sus términos extremos son a_{1-2n} y a_{1+2n}. Para $n = 0$ ambas sumas contienen sólo a_1.

82. La sustitución tiene inversa $k = m+n-j$. Lleva $k = m$ a $j = n$ y $k = n$ a $j = m$, recorriendo el intervalo entero en sentido contrario. El sumando se convierte en $(n-j)a_{m+n-j}$. Como la suma es finita, puede escribirse en orden ascendente: $\sum_{k=m}^{n}(k-m)a_k = \sum_{j=m}^{n}(n-j)a_{m+n-j}$. El coeficiente cero del primer término original corresponde al último término del nuevo recorrido; no se pierde. Si $m = n$, cada suma tiene un solo sumando, $0a_m = 0$.

83. El conjunto es $J_n = \{3k+2 : 0 \le k \le n\} = \{2, 5, 8, \ldots, 3n+2\}$, y la suma es $\sum_{j\in J_n} a_j$. La correspondencia $k \mapsto 3k+2$ es uno a uno, con inversa $(j-2)/3$ para los j de ese conjunto. Contiene $n+1$ términos. La suma sobre todos los enteros del intervalo añade términos; por ejemplo, fija $a_3 = 1$ y todos los demás $a_j = 0$. Para cualquier $n \ge 1$, la suma original vale 0 y la suma propuesta vale 1. Para $n = 0$, $J_0 = \{2\}$ y no hay huecos.

84. Separa los índices negativos, cero y positivos. El término $k = 0$ vale cero. En la parte negativa usa $j = -k$: $\sum_{k=-n}^{-1} ka_k = -\sum_{j=1}^{n} ja_{-j}$. La parte positiva es $\sum_{j=1}^{n} ja_j$, y la linealidad da la identidad. La simetría empareja índices, pero los valores de la familia pueden ser distintos: con $n = 1$, $a_1 = 1$ y $a_{-1} = 0$, el resultado es 1. Si $a_j = a_{-j}$ para todos los $j = 1$, $\ldots, n$, cada diferencia se anula y la suma vale cero. Para $n = 0$, ambas expresiones valen cero por el término nulo y la suma vacía, respectivamente.

85. El dominio es $1 \le i \le n$, $i \le j \le i+2$. El índice j recorre $1, \ldots, n+2$. Fijado j, las dos últimas desigualdades equivalen a $j-2 \le i \le j$; combinadas con $1 \le i \le n$ dan $\max(1, j-2) \le i \le \min(n, j)$. Así la suma es $\sum_{j=1}^{n+2} \sum_{i=\max(1,j-2)}^{\min(n,j)} a_{ij}$. En la primera columna sólo está $(1,1)$ y en la última sólo $(n, n+2)$. Cada fila original tiene tres pares y el nuevo recorrido conserva exactamente esos $3n$ pares; no intercambia los subíndices del sumando.

86. Las condiciones son $i \ge 1$, $j \ge 1$ e $i+j \le n$. Hay valores de j desde 1 hasta $n-1$; fijado j, i recorre $1, \ldots, n-j$. Por tanto la suma es $\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} a_{ij}$. La fila $i = n$ tiene rango interior vacío y aporta cero. El número de pares es $\sum_{i=1}^{n}(n-i) = n(n-1)/2$. Para $n = 1$ el dominio entero es vacío: en el recorrido original la única fila es vacía y en el nuevo la suma exterior también lo es. Ningún término a_{11} aparece.

87. El dominio cumple $1 \le i \le 2n$, $1 \le j \le n$ y $j \le i$. Fijado $j \in \{1, \dots, n\}$, i recorre $j, \dots, 2n$. La suma queda $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{2n} a_{ij}$. Cada columna tiene $2n - j + 1$ pares, por lo que el total es $n(2n+1) - n(n+1)/2 = n(3n+1)/2$. Por filas, los primeros n tamaños son $1, 2, \dots, n$ y los siguientes n son todos n, lo que da el mismo total. Hay una zona triangular y una rectangular; extender el límite exterior a $2n$ no extiende el límite de j más allá de n.

88. El dominio es el cuadrado $1 \le i, j \le n$ sin la diagonal $i = j$. Para cada j, los índices admisibles son $i = 1, \dots, j-1$ y $i = j+1, \dots, n$. Así obtenemos $\sum_{j=1}^{n} [\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} + \sum_{i=j+1}^{n} a_{ij}]$. Los bloques son disjuntos: uno satisface $i < j$ y el otro $i > j$; todo par no diagonal pertenece exactamente a uno. Hay n filas con $n-1$ pares cada una, en total $n(n-1)$. Para $n = 1$, ambos bloques son vacíos y el resultado es cero.

89. Los cuadrados del denominador sugieren comparar sus recíprocos. Al restar, $1/(k+1)^2 - 1/(k+2)^2 = [(k+2)^2 - (k+1)^2]/[(k+1)^2(k+2)^2] = (2k+3)/[(k+1)^2(k+2)^2]$. Todos los denominadores son positivos. La suma se convierte en $(1/2^2 - 1/3^2) + (1/3^2 - 1/4^2) + \cdots + (1/(n+1)^2 - 1/(n+2)^2)$. Los términos interiores tienen parejas opuestas y quedan $1/4 - 1/(n+2)^2$. Para $n = 1$, el resultado es $5/36$, igual al único sumando. La identidad local muestra por qué el numerador tiene precisamente la forma $2k + 3$.

90. Se tiene $1/k^2 - 1/(k+2)^2 = [(k+2)^2 - k^2]/[k^2(k+2)^2] = 4(k+1)/[k^2(k+2)^2]$. Así la suma es $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2 - \sum_{j=3}^{n+2} 1/j^2$, tras reindexar la segunda parte con $j = k+2$. Para $n \ge 2$ se cancelan los índices comunes y queda $1 + 1/4 - 1/(n+1)^2 - 1/(n+2)^2$. El desplazamiento dos deja dos términos en cada borde. Para $n = 1$, la fórmula también es válida: los términos $1/4$ y $-1/(n+1)^2 = -1/4$ se anulan entre sí y queda $1 - 1/9 = 8/9$, exactamente el sumando original. No se presupone que los bloques interiores existan en ese caso corto.

91. El sumando tiene tres factores consecutivos. Probamos $F(k) = c\,k(k+1)(k+2)(k+3)$: al restar $F(k-1)$, los tres factores comunes se conservan y sólo cambia el extremo. En efecto, $F(k) - F(k-1) = c\,k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k-1)] = 4c\,k(k+1)(k+2)$. Elegimos $c = 1/4$. La suma es entonces $\sum_{k=1}^{n} [F(k) - F(k-1)] = F(n) - F(0) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$. La cancelación deja los valores de borde; para $n = 1$ se obtiene $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. La elección de cuatro factores se justifica por el factor constante que aparece al restar sus extremos.

92. La diferencia de cuadrados da $1 - 1/(k+2)^2 = (k+1)(k+3)/(k+2)^2$. Por tanto el producto se separa en $[\prod_{k=0}^{n} (k+1)/(k+2)][\prod_{k=0}^{n} (k+3)/(k+2)]$. El primero deja $1/(n+2)$ y el segundo $(n+3)/2$, pues los factores interiores se cancelan en ambos y todos los denominadores son positivos. El resultado es $(n+3)/[2(n+2)]$. Para $n = 0$ hay un factor, no un producto vacío: $1 - 1/4 = 3/4$, que coincide con la fórmula.

93. El producto está definido exactamente para $t \notin \{-1, -2, \dots, -n\}$, porque cada denominador es $k + t$. Dentro de ese dominio vale cero exactamente para $t \in \{1, 2, \dots, n\}$: allí hay un numerador cero; fuera de esos valores todos los factores son no nulos y su producto finito no es cero. Para formar también $P_n(-t)$ deben excluirse los valores positivos $1, \dots, n$. Por ello la identidad recíproca vale para $t \notin \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$: cada pareja de factores $(k-t)/(k+t)$ y $(k+t)/(k-t)$ está definida y su producto es 1. Para $t = 0$ todos los factores valen 1 y la identidad se cumple. Un cero de P_n no autoriza multiplicarlo por un supuesto recíproco indefinido.

94. Deben excluirse $t = 0, -1, \dots, -n$. Para $n \ge 1$, el numerador recorre $t+2, \dots, t+n+2$ y el denominador $t, \dots, t+n$. Los factores comunes, cuando los hay, son no nulos dentro del dominio. Quedan $Q_n(t) = (t+n+1)(t+n+2)/[t(t+1)]$. En $n = 1$ no hay factores comunes: la fórmula representa directamente los dos factores originales. Los únicos ceros admisibles son $t = -n-1$ y $t = -n-2$. Los demás ceros del numerador están en la lista excluida de denominadores. Para $n = 2, t = -1$, un denominador original vale cero y el producto no está

definido. La identidad local puede separar dos productos de desplazamiento uno, pero antes de hacerlo hay que mantener todas las exclusiones del producto original.

95. Ningún denominador depende de t y los índices presentes son enteros positivos. Por ello el dominio es todo $\mathbb{R}$. Si $n \geq 1$, el producto vale cero exactamente para $t = 1, \ldots, n$; si ningún factor es cero, un producto finito de reales no nulos tampoco lo es. En $t = 0$ todos los factores son 1. En $t = -1$, $R_n(-1) = \prod_{k=1}^{n}(k+1)/k = n+1$ por telescopaje. Si $n = 0$, el rango es vacío, de modo que $R_0(t) = 1$ para todo t, sin ceros; las dos fórmulas de valores especiales siguen dando 1. Un dominio vacío de índices no exige evaluar la expresión del factor en un índice inexistente.

96. En A_n aparece $k = 1$: numerador y denominador valen cero, de modo que ese factor no está definido y tampoco lo está A_n. La factorización $(k^2-1)/(k^2-k) = (k-1)(k+1)/[(k-1)k] = (k+1)/k$ sólo es válida para $k \neq 0, 1$; no permite restaurar el factor excluido. En B_n, los índices presentes son $k \geq 2$, por lo que la cancelación es legítima. Para $n \geq 2$ queda $\prod_{k=2}^{n}(k+1)/k = (n+1)/2$. Para $n = 1$, el producto es vacío y vale 1, que coincide con $(n+1)/2$. La propuesta asigna a A_n el valor de una expresión distinta, obtenida ampliando ilegítimamente el dominio del factor.

Capítulo 13

Coeficientes binomiales y teorema del binomio

C11 mostró cómo una afirmación que depende de un número natural puede propagarse mediante inducción. C12 convirtió las sumas y productos finitos en objetos que podemos reindexar, separar, recombinar y comparar con precisión. En este capítulo esas dos líneas se encuentran en una familia de números que aparece, a primera vista, en contextos diferentes: el triángulo de Pascal, la elección de subconjuntos y la expansión de una potencia como $(x+y)^n$.

La coincidencia no es accidental. Los mismos números aparecen porque las tres situaciones describen una misma estructura finita desde puntos de vista distintos. Aprenderemos a pasar de una lectura a otra y a elegir, para cada identidad, el método que mejor explica por qué es verdadera.

> **Un coeficiente binomial no es sólo una fórmula factorial. Es, al mismo tiempo, una entrada del triángulo de Pascal, un número de elecciones y un coeficiente en una expansión.**

13.1. De las expansiones pequeñas a un patrón triangular

Comencemos sin una fórmula general. Expandamos las primeras potencias de una suma:

$$(x+y)^0 = 1,$$

$$(x+y)^1 = x+y,$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

y

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.$$

Si miramos sólo los coeficientes, aparecen las filas

$$1,$$

$$1, \quad 1,$$

$$1, \quad 2, \quad 1,$$

$$1, \quad 3, \quad 3, \quad 1,$$

$$1, \quad 4, \quad 6, \quad 4, \quad 1.$$

La escritura con pequeños espacios sólo busca hacer visible la disposición triangular. El patrón importante no es gráfico sino aritmético: cada fila comienza y termina en 1, es simétrica, y cada número interior puede obtenerse sumando dos números contiguos de la fila anterior.

Por ejemplo, el 6 de la quinta fila visible aparece porque

$$3 + 3 = 6,$$

y los dos 4 aparecen porque

$$1 + 3 = 4$$

y

$$3 + 1 = 4.$$

También hay un patrón en los exponentes. En cada término de $(x + y)^4$, la suma de los exponentes de x e y es 4:

$$4 + 0, \qquad 3 + 1, \qquad 2 + 2, \qquad 1 + 3, \qquad 0 + 4.$$

Esto sugiere que en $(x + y)^n$ deberíamos esperar términos de la forma

$$x^{n-k}y^k,$$

con k recorriendo los enteros desde 0 hasta n. Lo que todavía falta explicar es el coeficiente que acompaña a cada uno.

La pregunta que guiará buena parte del capítulo es entonces:

> **¿Qué mecanismo produce los números $1, 4, 6, 4, 1$ y, en general, los coeficientes de $(x + y)^n$?**

Antes de responder mediante una fórmula cerrada, conviene estudiar el patrón por sí mismo.

13.2. El triángulo de Pascal

Numeremos las filas comenzando en $n = 0$. La fila 0 contiene sólo un 1; la fila 1 contiene dos unos; la fila 2 contiene $1, 2, 1$, etc. Podemos construir cada nueva fila mediante dos reglas:

1. los extremos son 1;
2. cada entrada interior es la suma de las dos entradas situadas inmediatamente encima.

Así obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 &
\end{array}$$

La entrada situada en la fila n y en la posición k, contando desde $k = 0$, se denotará por

$$\binom{n}{k}.$$

Con esta notación, la regla de construcción del triángulo se convierte en la **identidad de Pascal**:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

para posiciones interiores, es decir, cuando $1 \leq k \leq n-1$.

Los extremos satisfacen

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Por ejemplo,

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

La identidad de Pascal puede leerse, por ahora, como una regla recursiva: para calcular una entrada de una fila nueva necesitamos dos entradas de la fila anterior. Más adelante veremos dos demostraciones diferentes de esta identidad. Una será puramente algebraica; la otra explicará la suma mediante una partición de un conjunto de elecciones.

El triángulo ya muestra dos rasgos que conviene separar conceptualmente:

- **recurrencia:** cada fila se obtiene de la anterior;
- **simetría:** las entradas equidistantes de los extremos coinciden.

La recurrencia explica cómo construir. La simetría exigirá explicar por qué

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

13.3. Coeficientes binomiales: notación, rango y bordes

Para un entero no negativo n y un entero k con

$$0 \leq k \leq n,$$

el símbolo

$$\binom{n}{k}$$

se lee "n sobre k" o "n elige k". Lo llamamos **coeficiente binomial**.

Es importante que los dos índices desempeñan papeles diferentes. El índice superior n fija la fila del triángulo y, más adelante, el tamaño del conjunto del cual elegimos. El índice inferior k fija la posición dentro de la fila y el número de elementos seleccionados.

Por ejemplo,

$$\binom{6}{0} = 1, \qquad \binom{6}{1} = 6, \qquad \binom{6}{2} = 15, \qquad \binom{6}{3} = 20.$$

La simetría de la fila completa da

$$1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.$$

Los casos extremos tienen una interpretación natural:

$$\binom{n}{0} = 1$$

y

$$\binom{n}{n} = 1.$$

Más adelante leeremos estas igualdades como afirmaciones de conteo: hay exactamente una manera de elegir ningún elemento y exactamente una manera de elegir todos los elementos.

Convención fuera de rango. En algunas identidades resulta útil extender la notación y declarar

$$\binom{n}{k} = 0$$

cuando $k < 0$ o $k > n$, siempre con $n \geq 0$.

Esta convención permite escribir ciertas fórmulas sin separar continuamente los extremos. Por ejemplo, para $n \geq 1$ la identidad de Pascal puede expresarse de forma uniforme como

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

incluso en $k = 0$ y $k = n$, si interpretamos los coeficientes fuera de rango como 0.

Para $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{0} = 0 + 1 = 1.$$

Para $k = n$:

$$\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n} = 1 + 0 = 1.$$

La convención es una herramienta de uniformización. No elimina la obligación de controlar los rangos: cuando una prueba depende de los extremos, éstos deben seguir siendo visibles.

Nota pedagógica — Un cero convencional no crea factoriales negativos. La convención fuera de rango extiende el **valor del coeficiente**, no la fórmula factorial. Para $m \geq 0$, se puede escribir $\binom{m}{-1} = 0$, pero no sustituir -1 en $m!/[k!(m-k)!]$: aquí $(-1)!$ no está definido. Tampoco se ha definido un coeficiente con índice superior negativo. Por eso Pascal en su forma uniforme exige $n \geq 1$, aunque el índice inferior pueda ser cualquier entero.

Elige primero qué escritura necesitas: una fórmula con términos nulos convencionales o una suma que enumere sólo elecciones posibles. Ambas pueden dar el mismo resultado, pero cada término debe tener una interpretación controlada.

Control resuelto. En $\sum_{k=0}^{5} \binom{2}{k}\binom{3}{5-k}$, el primer factor requiere $0 \leq k \leq 2$ y el segundo $2 \leq k \leq 5$. Su intersección es el único valor $k = 2$. Por tanto, la suma vale $\binom{2}{2}\binom{3}{3} = 1$: elegir cinco elementos de dos grupos disjuntos de tamaños dos y tres obliga a elegirlos todos. Los demás términos valen cero por convención, sin evaluar ningún factorial negativo. En cambio, intentar Pascal con $n = 0$ introduciría índices superiores -1; ese caso no queda autorizado por esta convención.

Antes de continuar. Si una expresión contiene factoriales, comprueba sus argumentos antes de cancelarlos. Si contiene coeficientes fuera de rango, declara qué convención les da significado.

13.4. Factorial y fórmula cerrada

Para $n \geq 1$ definimos

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

También adoptamos

$$0! = 1.$$

Esta última igualdad no es un parche. Es la convención que hace compatibles las fórmulas generales con los casos de borde. Por ejemplo, la expresión factorial del coeficiente binomial es

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

para $0 \leq k \leq n$.

Cuando $k = 0$,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1,$$

y cuando $k = n$,

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

La igualdad con las entradas definidas por Pascal quedará justificada en §13.7: el conteo de subconjuntos y la expresión factorial satisfacen los mismos bordes y la misma recurrencia. No estamos introduciendo una segunda familia de números sin relacionarla con la primera.

La fórmula debe simplificarse por **cancelación estructurada**, no expandiendo factoriales más de lo necesario. Por ejemplo,

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Del mismo modo, para $n \geq 2$,

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Y, para $n \geq 1$,

$$\binom{n}{1} = n.$$

La fórmula factorial es muy eficaz para calcular y transformar expresiones, pero todavía no explica por qué el resultado cuenta algo ni por qué estos números aparecen en $(x+y)^n$. Esa explicación vendrá de la interpretación combinatoria.

13.5. Interpretación combinatoria: elegir k objetos de n

Sea S un conjunto con n elementos. Queremos contar cuántos subconjuntos de S tienen exactamente k elementos.

La respuesta es

$$\binom{n}{k}.$$

Esta lectura convierte la notación en una afirmación concreta:

> $\binom{n}{k}$ **es el número de maneras de elegir k elementos distintos de un conjunto de n elementos, sin importar el orden.**

Veamos por qué aparece la fórmula factorial.

Primero contemos elecciones **ordenadas** de k elementos distintos. Para la primera posición hay n opciones; para la segunda quedan $n-1$; para la tercera, $n-2$; y así sucesivamente. El número total es

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Pero una misma selección no ordenada de k elementos ha sido contada una vez por cada orden posible de esos k elementos. Hay

$$k!$$

ordenaciones de cada selección. Por tanto, al olvidar el orden debemos dividir por $k!$:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La fórmula factorial ya no aparece como una manipulación aislada: refleja dos operaciones de conteo.

Primer ejemplo. De un conjunto de 5 elementos, los subconjuntos de tamaño 2 son

$$\binom{5}{2} = 10.$$

Si los cinco elementos son a, b, c, d, e, cada par no ordenado, como $\{a, c\}$, corresponde a dos selecciones ordenadas: (a, c) y (c, a). Por eso el conteo ordenado $5 \cdot 4 = 20$ debe dividirse por $2! = 2$.

El principio de doble conteo. Una técnica que usaremos varias veces consiste en identificar un conjunto finito de objetos y contarlo de dos maneras distintas. Si ambos procedimientos cuentan exactamente los mismos objetos, los resultados deben coincidir.

No basta escribir dos expresiones y declarar que "cuentan lo mismo". Una prueba por doble conteo debe especificar:

1. cuál es el conjunto de objetos;
2. qué clasifica o decide el primer conteo;
3. qué clasifica o decide el segundo;
4. por qué cada objeto aparece exactamente una vez en cada procedimiento.

Esta disciplina será esencial en Pascal, Vandermonde y otras identidades.

13.6. Simetría por complemento

El triángulo de Pascal sugiere

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}.$$

Hay al menos dos razones independientes para que esto sea cierto.

Prueba factorial. Usando la fórmula cerrada,

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

La igualdad resulta de que el denominador contiene los mismos dos factores, sólo en orden invertido.

Prueba por complemento. Sea S un conjunto con n elementos. A cada subconjunto $A \subseteq S$ de tamaño k le asociamos su complemento

$$S \setminus A.$$

Como A contiene k elementos, su complemento contiene $n-k$.

Además, la operación es reversible: si conocemos $S \setminus A$, recuperamos A tomando nuevamente el complemento. Por tanto, existe una biyección entre

- los subconjuntos de tamaño k;
- los subconjuntos de tamaño $n-k$.

En consecuencia,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Las dos pruebas establecen la misma identidad, pero revelan cosas distintas. La prueba factorial es una verificación algebraica inmediata. La prueba por complemento explica la simetría como una correspondencia entre elecciones.

Ésta será una idea recurrente: **cuando una identidad tiene una interpretación combinatoria natural, la fórmula factorial puede verificarla, pero no siempre explica su estructura con la misma claridad.**

13.7. Identidad de Pascal: dos pruebas

Para $1 \leq k \leq n-1$ queremos demostrar

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

Prueba algebraica. Partimos del lado derecho:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Usando factoriales,

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

Llevamos ambas fracciones al denominador común $k!(n-k)!$:

$$\frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}.$$

Sumando numeradores,

$$\frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por tanto,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Prueba combinatoria. Sea S un conjunto de n elementos y fijemos un elemento distinguido $a \in S$. Queremos contar los subconjuntos de S que tienen tamaño k.

Hay dos clases disjuntas.

Clase 1: subconjuntos que contienen a a.

Si a ya está incluido, debemos elegir los otros $k-1$ elementos entre los $n-1$ elementos de $S \setminus \{a\}$. Hay

$$\binom{n-1}{k-1}$$

posibilidades.

Clase 2: subconjuntos que no contienen a a.

Entonces los k elementos deben elegirse enteramente entre los otros $n-1$ elementos. Hay

$$\binom{n-1}{k}$$

posibilidades.

Las dos clases son disjuntas y cubren todos los subconjuntos de tamaño k. Por la regla de adición,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Ahora la regla del triángulo de Pascal deja de ser una receta misteriosa: expresa una partición de las elecciones según incluyan o no un elemento distinguido.

Esta prueba cierra también la identificación de nuestras representaciones. Hay una única elección de tamaño cero y una única elección de todos los elementos; el conteo satisface Pascal por la partición anterior. La fila cero queda fijada en 1. Si una fila está determinada, los bordes y las sumas de parejas vecinas determinan de manera única la siguiente. Por inducción, el conteo coincide con todas las entradas del triángulo construido en §13.2. El

conteo ordenado de §13.5 demuestra su fórmula factorial. Así, triángulo, conteo y fórmula describen efectivamente la misma familia.

13.8. El teorema del binomio

Las expansiones iniciales de este capítulo sugieren una fórmula general. Para todo entero $n \geq 0$,

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}.$$

Éste es el **teorema del binomio**.

El término correspondiente a un valor fijo de k es

$$\binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Hay cuatro controles que conviene realizar siempre:

1. el índice satisface $0 \leq k \leq n$;
2. el coeficiente es $\binom{n}{k}$;
3. el exponente de y es k;
4. el exponente de x es $n-k$, de modo que la suma de exponentes es n.

Los extremos. Para $k = 0$ obtenemos

$$\binom{n}{0} x^n y^0 = x^n.$$

Para $k = n$ obtenemos

$$\binom{n}{n} x^0 y^n = y^n.$$

Por eso la expansión comienza con x^n y termina con y^n.

El caso $n = 0$. Para incluir uniformemente $n = 0$, interpretamos la potencia cero en esta identidad algebraica como el **producto vacío**, cuyo valor es 1. Así, el caso $n = 0$ se entiende dentro de la identidad polinómica sin imponer aquí una convención numérica general para la expresión 0^0. Cuando $n = 0$, la suma contiene un único término:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = \binom{0}{0} = 1.$$

Esto coincide con

$$(x+y)^0 = 1$$

de modo que el caso base queda incorporado a la misma escritura que los demás exponentes.

Ejemplo de lectura. En $(x+y)^7$, el término que contiene y^3 corresponde a $k=3$:

$$\binom{7}{3}x^{7-3}y^3 = 35x^4y^3.$$

No hace falta expandir toda la potencia para encontrarlo. El teorema da acceso directo a cualquier término.

También podemos sustituir expresiones más complejas. Por ejemplo,

$$(x-2y)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{4-k}(-2y)^k.$$

Al simplificar,

$$(x-2y)^4 = x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4.$$

Los signos alternan porque el segundo sumando es negativo y la potencia $(-2y)^k$ cambia de signo según la paridad de k.

13.9. Prueba inductiva del teorema del binomio

Esta demostración reúne tres herramientas ya estudiadas: inducción, distributividad y reindexación de sumas.

Queremos probar, para todo $n \geq 0$,

$$P(n): \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Caso base. Para $n=0$,

$$(x+y)^0 = 1$$

y

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^{0-k}y^k = \binom{0}{0} = 1.$$

Así, $P(0)$ es verdadera.

Hipótesis inductiva. Supongamos que para cierto $n \geq 0$ se cumple

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Paso inductivo. Multiplicamos por $(x+y)$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Distribuyendo,

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}.$$

Las dos sumas todavía no están alineadas: en la primera la potencia de y es k, mientras que en la segunda es $k+1$. Reindexemos la segunda suma con

$$j = k+1.$$

Entonces

$$k = j-1.$$

Los límites cambian:

$$k=0 \Rightarrow j=1, \qquad k=n \Rightarrow j=n+1.$$

El sumando se transforma en

$$\binom{n}{j-1}x^{n-(j-1)}y^j = \binom{n}{j-1}x^{n+1-j}y^j.$$

Por tanto,

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n+1-j}y^j.$$

Ahora renombramos el índice j como k en la segunda suma. Este paso sí es sólo un cambio de nombre:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k.$$

Para combinar correctamente, debemos separar los extremos. El término $k=0$ sólo aparece en la primera suma:

$$\binom{n}{0}x^{n+1} = x^{n+1}.$$

El término $k=n+1$ sólo aparece en la segunda:

$$\binom{n}{n}y^{n+1} = y^{n+1}.$$

En el rango interior $1 \le k \le n$, ambas sumas contienen el mismo monomio $x^{n+1-k}y^k$, y sus coeficientes se suman:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Por Pascal,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Así,

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

Hemos demostrado $P(n+1)$. Por inducción, el teorema vale para todo $n \geq 0$.

Qué revela esta prueba. La demostración no sólo verifica la fórmula. Muestra por qué la recurrencia de Pascal es exactamente la que necesitamos al multiplicar una expansión por $(x+y)$: cada término interior de la nueva potencia recibe una contribución desde dos términos vecinos de la fila anterior.

También muestra por qué reindexar es una operación matemática y no tipográfica: si no se transforman simultáneamente índice, límites y sumando, los dos bloques no pueden alinearse correctamente.

Nota pedagógica — Reindexar conserva contribuciones y controla extremos. La reindexación de C12 se aplica aquí a una lista de monomios. Para revisar el desplazamiento $j = k+1$, sigue una contribución completa:

$$(k,\ \binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}) \longmapsto (j,\ \binom{n}{j-1}x^{n+1-j}y^j).$$

El coeficiente y ambos exponentes cambian juntos; el grado total sigue siendo $n+1$. El intervalo $0 \leq k \leq n$ pasa a $1 \leq j \leq n+1$. Sólo después de esa sustitución se puede cambiar la letra j por k sin modificar nada más.

Control resuelto. Para $n = 2$, multiplicar $(x+y)^2$ por x da $x^3+2x^2y+xy^2$, y multiplicarlo por y da $x^2y + 2xy^2 + y^3$. En la segunda lista, el término antiguo $k = 0$ ahora tiene índice $j = 1$; el antiguo $k = 2$ tiene $j = 3$. Las contribuciones interiores son $(2+1)x^2y$ y $(1+2)xy^2$; los extremos son x^3 e y^3. Así se recupera $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

También podríamos usar la convención de §13.3 para escribir una sola suma desde 0 hasta $n+1$ con coeficiente $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. Aquí todos los exponentes son no negativos y los ceros completan los coeficientes faltantes. No conviene extender primero los productos originales: escribir un coeficiente cero junto a una potencia negativa puede introducir una expresión indefinida cuando la base es cero. Se completa la lista de **coeficientes** después de alinear los monomios.

Autocontrol. Conserva el grado, transforma los dos límites y localiza la contribución que produce cada extremo. Si alguno de esos tres controles falla, el desplazamiento aún no está justificado.

13.10. Prueba por elección de factores

Existe una explicación más directa de por qué aparecen los coeficientes binomiales.

Escribamos

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ factores}}.$$

Al expandir por distributividad, cada término final se obtiene escogiendo de cada factor una de dos posibilidades: x o y.

Para producir

$$x^{n-k}y^k,$$

exactamente k de los n factores deben aportar un y, y los $n-k$ restantes deben aportar un x.

Por tanto, la pregunta "¿cuántas veces aparece $x^{n-k}y^k$?" equivale a

"¿De cuántas maneras podemos elegir cuáles k de los n factores aportarán y?"

La respuesta es

$$\binom{n}{k}.$$

Así, el coeficiente de $x^{n-k}y^k$ es precisamente $\binom{n}{k}$ y obtenemos

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

Esta prueba explica conceptualmente la conexión que motivó el capítulo. El mismo número aparece como coeficiente y como número de subconjuntos porque **producir un término de la expansión consiste en elegir un subconjunto de factores**.

Dos pruebas, dos estructuras. La prueba inductiva organiza el teorema fila por fila y muestra cómo Pascal permite pasar de n a $n+1$. La prueba por elección de factores mira una potencia fija y explica el coeficiente directamente.

La primera enfatiza **recurrencia**. La segunda enfatiza **selección**.

Ninguna invalida a la otra. Compararlas nos enseña a distinguir entre demostrar que una fórmula se propaga correctamente y explicar por qué sus coeficientes tienen la forma que tienen.

13.11. Consecuencias por sustitución

Una identidad importante puede contener muchas otras como casos particulares. El teorema del binomio es un ejemplo especialmente fértil.

Suma de una fila. Tomemos $x = 1$ e $y = 1$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}1^k.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}.$$

La misma identidad admite una lectura combinatoria. Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos porque para cada elemento hay dos decisiones: incluirlo o no. Si, en cambio, clasificamos los subconjuntos por tamaño, hay

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

subconjuntos. Ambos conteos deben coincidir.

Suma alternada. Tomemos $x = 1$ e $y = -1$. Para $n \geq 1$,

$$(1-1)^n = 0.$$

El teorema da

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Así,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0} \qquad (n \geq 1).$$

Separando términos pares e impares,

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ par}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impar}}} \binom{n}{k}.$$

Como la suma total es 2^n, para $n \geq 1$ cada una de estas dos sumas vale

$$2^{n-1}.$$

Esta deducción muestra una estrategia general:

> **Antes de atacar una suma binomial término a término, conviene preguntar si es la expansión de $(x+y)^n$ evaluada en valores especialmente simples.**

13.12. Identidades ponderadas sin cálculo

Consideremos la identidad

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

para $1 \leq k \leq n$.

Prueba algebraica. Usando la fórmula factorial,

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Por otra parte,

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Luego ambos lados son iguales.

Prueba por un elemento distinguido. Sea S un conjunto de n elementos. Contemos pares (A, a) tales que

- $A \subseteq S$;
- $|A| = k$;
- $a \in A$ es un elemento distinguido dentro de A.

Primer método: elegimos primero A. Hay $\binom{n}{k}$ posibilidades y luego k opciones para distinguir un elemento de A. Total:

$$k\binom{n}{k}.$$

Segundo método: elegimos primero el elemento distinguido a. Hay n opciones. Después elegimos los otros $k-1$ elementos de A entre los $n-1$ restantes. Total:

$$n\binom{n-1}{k-1}.$$

Como ambos procedimientos cuentan los mismos pares (A, a), obtenemos la identidad.

Una suma ponderada. Ahora sumemos sobre k:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

El término $k = 0$ vale 0, así que podemos comenzar en $k = 1$. Usamos la identidad local:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Reindexamos con $j = k - 1$:

$$n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}.$$

La suma de una fila del triángulo vale 2^{n-1}. Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}}$$

para $n \geq 1$.

No fue necesario derivar ninguna función. La identidad surge de una transformación combinatoria local seguida de una suma de fila.

También puede interpretarse por doble conteo: el lado izquierdo cuenta pares (A, a) donde A es un subconjunto de S y $a \in A$ está distinguido; el lado derecho elige primero a y luego decide libremente cuáles de los otros $n-1$ elementos acompañan a a.

13.13. Identidad del palo de hockey

Para enteros $0 \le r \le n$ se cumple

$$\boxed{\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}}.$$

La disposición de estos términos en el triángulo de Pascal forma visualmente una figura parecida a un palo de hockey, de donde proviene el nombre tradicional de la identidad.

Prueba por Pascal y telescopaje discreto. De la identidad de Pascal,

$$\binom{j+1}{r+1} = \binom{j}{r} + \binom{j}{r+1}.$$

Despejamos

$$\binom{j}{r} = \binom{j+1}{r+1} - \binom{j}{r+1}.$$

Sumamos desde $j = r$ hasta n:

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \sum_{j=r}^{n} \left(\binom{j+1}{r+1} - \binom{j}{r+1} \right).$$

Al expandir,

$$\begin{aligned} &\left(\binom{r+1}{r+1} - \binom{r}{r+1} \right) + \left(\binom{r+2}{r+1} - \binom{r+1}{r+1} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} \right). \end{aligned}$$

Los términos interiores se cancelan. Además, por la convención fuera de rango,

$$\binom{r}{r+1} = 0.$$

Queda

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Esta prueba conecta directamente Pascal con el telescopaje de C12.

Prueba combinatoria. Contemos los subconjuntos de tamaño $r+1$ del conjunto

$$\{1, 2, \ldots, n+1\}.$$

Directamente hay

$$\binom{n+1}{r+1}$$

tales subconjuntos.

Ahora clasifiquémoslos por su elemento máximo. Si el máximo es $j+1$, entonces los otros r elementos deben elegirse entre

$$\{1, 2, \ldots, j\},$$

lo que puede hacerse de

$$\binom{j}{r}$$

maneras.

El máximo posible va desde $r+1$ hasta $n+1$, es decir, j va desde r hasta n. Sumando las clases:

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

La prueba algebraica ve una cancelación. La combinatoria ve una clasificación por máximo. Ambas describen la misma identidad desde estructuras diferentes.

13.14. Identidad de Vandermonde

Sean A y B conjuntos disjuntos, sean r y s enteros no negativos y sea n un entero con $0 \leq n \leq r+s$. Supongamos

$$|A| = r, \qquad |B| = s.$$

Queremos elegir n elementos de la unión $A \cup B$. Como la unión es disjunta,

$$|A \cup B| = r + s,$$

de modo que el número total de elecciones es

$$\binom{r+s}{n}.$$

Podemos contar las mismas elecciones de otra manera. Supongamos que elegimos exactamente k elementos de A. Entonces debemos elegir $n-k$ elementos de B. El número de posibilidades para ese valor de k es

$$\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}.$$

Sumando sobre todos los valores posibles de k obtenemos la **identidad de Vandermonde**:

$$\boxed{\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}}.$$

Si usamos la convención $\binom{m}{t} = 0$ fuera de rango, podemos sumar sobre todos los enteros k sin daño. Si preferimos escribir sólo el rango efectivo, las condiciones son

$$0 \leq k \leq r$$

y

$$0 \leq n-k \leq s.$$

Equivalente a

$$\max(0, n-s) \le k \le \min(n, r).$$

Así, una forma completamente explícita es

$$\sum_{k=\max(0,n-s)}^{\min(n,r)} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Una consecuencia central. Tomemos $r = s = n$ y elijamos n elementos de una unión disjunta de dos conjuntos de tamaño n. Vandermonde da

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Por simetría,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}.$$

Esta identidad puede parecer sorprendente si se mira sólo como suma de cuadrados. Desde el doble conteo, en cambio, dice algo sencillo: para elegir n elementos de dos grupos disjuntos de tamaño n, podemos clasificar la elección según cuántos elementos provienen del primer grupo.

Vandermonde resume una estrategia poderosa: cuando aparece un producto de dos coeficientes binomiales dentro de una suma, conviene preguntar si cada factor corresponde a una elección en una parte distinta de un conjunto mayor.

Nota pedagógica — Qué debe probar una partición de elecciones. En Vandermonde, el objeto contado es un subconjunto T de tamaño n de $A \cup B$. La clase de índice k contiene exactamente los objetos con $|T \cap A| = k$. Esa definición permite comprobar tres obligaciones: todo objeto pertenece a alguna clase, no pertenece a dos clases distintas y cada elección dentro de una clase se reconstruye de manera única.

La reconstrucción es $(U, V) \mapsto U \cup V$, donde $U \subseteq A$, $V \subseteq B$, $|U| = k$ y $|V| = n - k$. Como A y B son disjuntos, la unión tiene tamaño n y recuperamos $U = T \cap A$, $V = T \cap B$. Éste es el motivo preciso para multiplicar los dos coeficientes y luego sumar las clases. Una frase como «elegimos por separado» necesita esta garantía de reconstrucción.

Control resuelto. Si $|A| = 2$, $|B| = 3$ y $n = 4$, los únicos índices posibles son $k = 1, 2$. La primera clase tiene $\binom{2}{1}\binom{3}{3} = 2$ objetos; la segunda tiene $\binom{2}{2}\binom{3}{2} = 3$. La suma es $5 = \binom{5}{4}$. No puede haber una clase $k = 0$, porque exigiría cuatro elementos de B; tampoco una clase $k = 3$, porque A sólo tiene dos elementos.

Pregunta de diagnóstico. ¿Qué falla si los grupos comparten un elemento? Las elecciones separadas pueden seleccionar dos veces el mismo elemento, y la unión deja de conservar el tamaño. Hay que cambiar el modelo —por ejemplo, usar copias etiquetadas disjuntas— o dividir la unión original en partes realmente disjuntas. El ejercicio 87 desarrolla esa reparación. En cualquier doble conteo, explica el objeto, la clasificación y la reconstrucción antes de identificar la suma.

13.15. Del binomio al multinomio

El mecanismo del teorema del binomio no depende esencialmente de tener sólo dos opciones por factor. Consideremos

$$(x+y+z)^n = \underbrace{(x+y+z)\cdots(x+y+z)}_{n \text{ factores}}.$$

Para producir un término

$$x^a y^b z^c$$

necesitamos elegir

- a factores que aporten x;
- b factores que aporten y;
- c factores que aporten z;

con

$$a+b+c=n.$$

¿Cuántas elecciones producen ese término?

Primero elegimos los a factores que aportan x:

$$\binom{n}{a}.$$

De los $n-a$ factores restantes elegimos los b que aportarán y:

$$\binom{n-a}{b}.$$

Los $c = n-a-b$ factores restantes aportan z. Multiplicando,

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!}\frac{(n-a)!}{b!c!} = \frac{n!}{a!b!c!}.$$

Por tanto, el coeficiente de $x^a y^b z^c$ en $(x+y+z)^n$ es

$$\boxed{\frac{n!}{a!b!c!}}$$

cuando $a+b+c=n$.

El desarrollo completo puede escribirse como una suma sobre todas las ternas no negativas (a,b,c) cuya suma sea n:

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{a,b,c\geq 0\\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!b!c!}x^a y^b z^c.$$

No necesitamos desarrollar aquí una teoría general de multiíndices. Lo importante es reconocer el patrón: el coeficiente cuenta cuántas maneras hay de repartir n posiciones entre varias categorías de tamaños prescritos.

Para un número fijo de opciones, el mismo razonamiento conduce a coeficientes de la forma

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!},$$

con

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

El caso binomial corresponde a $m = 2$. El trinomial muestra que el teorema del binomio es el primer caso de un principio de selección más amplio.

Como comprobación estructural, si sustituimos $x = y = z = 1$, obtenemos

$$3^n = \sum_{\substack{a,b,c\geq 0 \\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!b!c!},$$

que expresa que cada una de las n posiciones puede asignarse independientemente a una de tres categorías.

13.16. Cierre — protocolo para identidades binomiales

A lo largo del capítulo hemos visto que una identidad binomial puede ser accesible desde varias direcciones. Frente a una expresión nueva, conviene evitar el reflejo de expandir factoriales inmediatamente.

Un protocolo eficaz es:

```
1. IDENTIFICAR EL RANGO DE CADA COEFICIENTE.
2. CONTROLAR LOS CASOS DE BORDE k=0 Y k=n.
3. PREGUNTAR SI LA SIMETRÍA k ↔ n-k SIMPLIFICA LA EXPRESIÓN.
4. PREGUNTAR SI PASCAL COMBINA O DESCOMPONE LOS TÉRMINOS.
5. SI HAY SUMAS DESPLAZADAS, REINDEXAR ÍNDICE, LÍMITES Y SUMANDO.
6. IDENTIFICAR SI LA SUMA PROVIENE DEL TEOREMA DEL BINOMIO POR SUSTITUCIÓN.
7. BUSCAR UNA INTERPRETACIÓN COMO ELECCIONES DE SUBCONJUNTOS.
8. SI APARECE UNA SUMA DE PRODUCTOS, PROBAR DOBLE CONTEO.
9. USAR FACTORIALES CUANDO ACLAREN LA ESTRUCTURA, NO POR REFLEJO.
10. COMPARAR QUÉ EXPLICA CADA PRUEBA, NO SÓLO SI LLEGA AL RESULTADO.
```

Errores frecuentes. Intercambiar los índices. En general,

$$\binom{n}{k}$$

no significa lo mismo que

$$\binom{k}{n}.$$

Olvidar $0! = 1$. Esto rompe precisamente los casos extremos que deben encajar mejor con las fórmulas generales.

Reindexar sólo la letra. Si $j = k + 1$, deben cambiar también límites y sumando. Cambiar el símbolo sin transformar la expresión produce una suma distinta.

Aplicar Pascal con índices incompatibles. La pareja correcta tiene el mismo índice superior $n - 1$ y posiciones inferiores consecutivas:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Perder los extremos en una prueba inductiva. Cuando dos sumas tienen rangos $0 \leq k \leq n$ y $1 \leq k \leq n + 1$, sólo el rango interior puede combinarse directamente.

Usar una prueba combinatoria sin decir qué se cuenta. El doble conteo requiere un conjunto finito bien definido y dos particiones o procedimientos exhaustivos y sin solapamiento.

Escribir exponentes incompatibles con el grado. En el término del binomio

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,$$

los exponentes siempre suman n.

Qué queda cerrado y qué viene después. C11, C12 y C13 forman ahora un bloque coherente:

- C11 proporcionó inducción, buen orden y recursión;
- C12 proporcionó el lenguaje de sumas, productos y reindexaciones finitas;
- C13 mostró cómo esas técnicas interactúan con conteos, recurrencias e identidades binomiales.

El siguiente capítulo cambia el centro de gravedad. Dejaremos de estudiar identidades finitas principalmente por su forma combinatoria y comenzaremos a examinar la estructura aritmética de los enteros: qué significa que un número divida a otro, cómo se comportan los divisores y qué propiedades se conservan bajo las operaciones.

No necesitábamos divisibilidad para desarrollar este capítulo. Esa separación es deliberada: las propiedades aritméticas de los coeficientes binomiales, sus congruencias y su comportamiento módulo primos pertenecen a etapas posteriores.

Por ahora, el resultado conceptual central es éste:

> **El triángulo de Pascal, las elecciones de subconjuntos y el teorema del binomio son tres representaciones de una misma estructura finita. Saber cambiar de representación es más poderoso que memorizar una lista de identidades.**

Ejercicios

Los ejercicios están organizados de modo que el lector pase de la lectura y el cálculo directo a la demostración, el doble conteo y la elección autónoma del método. Salvo indicación contraria, se supone que los índices binomiales satisfacen los rangos naturales en que las expresiones están definidas.

A. Leer el triángulo y la notación

1. **Nivel A.** Construye las filas 0 a 7 del triángulo de Pascal. En cada fila, comprueba que los extremos son 1 y que cada entrada interior se obtiene sumando las dos entradas situadas encima.
2. **Nivel A.** Lee directamente del triángulo de Pascal y calcula:
$$\binom{7}{0}, \qquad \binom{7}{1}, \qquad \binom{7}{3}, \qquad \binom{7}{6}, \qquad \binom{7}{7}.$$
3. **Nivel A.** Completa la fila
$$1,\ 8,\ \square,\ 56,\ \square,\ 56,\ \square,\ 8,\ 1$$
del triángulo de Pascal e identifica el número de fila.
4. **Nivel B.** Explica qué significan, respectivamente, el índice superior y el índice inferior en $\binom{n}{k}$. Ilustra tu explicación con $\binom{9}{4}$.

5. **Nivel B.** Usando la convención fuera de rango, calcula
$$\binom{6}{-1}, \qquad \binom{6}{0}, \qquad \binom{6}{6}, \qquad \binom{6}{7}.$$
Explica por qué la convención es útil pero no reemplaza el control de los rangos.
6. **Nivel B.** Un estudiante afirma que $\binom{4}{9} = \binom{9}{4}$ "por simetría". Localiza el error conceptual y formula correctamente la simetría de los coeficientes binomiales.

B. Factoriales y fórmula cerrada

7. **Nivel A.** Calcula mediante factoriales:
$$\binom{9}{4}, \qquad \binom{10}{2}, \qquad \binom{12}{3}.$$
Simplifica cancelando antes de desarrollar factoriales completos.
8. **Nivel B.** Deduce a partir de la fórmula factorial expresiones cerradas para
$$\binom{n}{1}, \qquad \binom{n}{2}, \qquad \binom{n}{3}.$$
9. **Nivel B.** Sustituye $k = 0$ y $k = n$ en
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
y explica por qué la convención $0! = 1$ permite que ambos casos extremos queden incluidos en una sola fórmula.
10. **Nivel C.** Para $0 \le k < n$, demuestra que
$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}.$$
Explica qué información ofrece esta razón para comparar dos coeficientes consecutivos de una misma fila.
11. **Nivel B.** Comprueba factorialmente que
$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3},$$
y después explica por qué la igualdad era previsible antes de calcular.
12. **Nivel C.** Determina todos los enteros $n \ge 2$ que satisfacen
$$\binom{n}{2} = 45.$$
Justifica cada transformación.

C. Interpretación combinatoria y simetría

13. **Nivel A.** ¿Cuántos comités de 3 personas pueden formarse a partir de un grupo de 8 personas? Explica por qué el orden de elección no debe contarse.
14. **Nivel B.** A partir de 7 objetos distintos, cuenta primero las selecciones ordenadas de 4 objetos y luego deduce el número de selecciones no ordenadas. Explica con precisión por qué aparece el factor 4!.
15. **Nivel B.** En un conjunto de 10 elementos, compara el problema "elegir 4 elementos" con el problema "decidir cuáles 6 elementos quedan fuera". Usa esta comparación para justificar una igualdad binomial concreta.

16. **Nivel C.** Demuestra combinatoriamente, mediante complementos, que
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
Identifica explícitamente la biyección utilizada.
17. **Nivel C.** Sea S un conjunto de 9 elementos. Describe una biyección entre sus subconjuntos de tamaño 2 y sus subconjuntos de tamaño 7. Explica por qué la construcción es invertible.
18. **Nivel B.** Calcula el número total de subconjuntos de un conjunto de 6 elementos sumando
$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \cdots + \binom{6}{6}.$$
Después obtén el mismo número razonando directamente sobre las dos posibilidades de pertenencia de cada elemento.
19. **Nivel C.** De un conjunto de n elementos se quieren elegir k elementos con la condición de que un elemento fijo a esté incluido. ¿Cuántas elecciones hay? ¿Y cuántas hay si a debe quedar excluido? Expresa ambas respuestas con coeficientes binomiales.
20. **Nivel C.** En un curso de 12 estudiantes se forma un equipo de 5. Demuestra que contar los equipos posibles es equivalente a contar los grupos de 7 estudiantes que no quedan en el equipo. Formula la identidad binomial general que expresa este argumento.

D. Pascal y recurrencia

21. **Nivel A.** Verifica numéricamente la identidad de Pascal para $(n, k) = (8, 3)$ y para $(n, k) = (10, 6)$.
22. **Nivel C.** Demuestra algebraicamente, usando factoriales, que para $1 \le k \le n-1$,
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$
23. **Nivel C.** Demuestra la identidad de Pascal por doble conteo: fija un elemento distinguido de un conjunto de n elementos y separa los subconjuntos de tamaño k según lo contengan o no.
24. **Nivel B.** Partiendo de la fila
$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1,$$
construye la fila siguiente sin usar factoriales.
25. **Nivel C.** Usa únicamente los bordes y la recurrencia de Pascal para calcular $\binom{12}{5}$. Organiza los cálculos de modo que quede claro qué valores previos se necesitan.
26. **Nivel D.** Explica por qué las condiciones
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
y la identidad de Pascal determinan de manera única todas las entradas del triángulo. Formula el argumento como una inducción sobre n.
27. **Nivel C.** Un estudiante escribe
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$
Da un contraejemplo numérico, explica qué índice superior debe coincidir y repara la fórmula.

28. **Nivel D.** Demuestra, para los rangos en que todos los términos son significativos,
$$\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$
Hazlo en **dos etapas sucesivas de Pascal**: primero combina los dos pares de coeficientes de la fila n y después combina los dos resultados de la fila $n+1$.

E. Teorema del binomio y lectura de términos

29. **Nivel A.** Expande completamente $(x+y)^5$ mediante el teorema del binomio.
30. **Nivel B.** Expande completamente $(2x-y)^4$. Controla por separado el coeficiente numérico y el signo de cada término.
31. **Nivel B.** Determina el coeficiente de x^5y^3 en $(x+y)^8$ sin escribir la expansión completa.
32. **Nivel B.** Determina el coeficiente de x^6 en $(1+x)^{10}$ y explica qué valor de k estás usando en el término general.
33. **Nivel B.** Identifica el término central de $(a+b)^{12}$ y justifica por qué es único.
34. **Nivel C.** Determina el término que contiene x^4 en $(3+x)^9$. Escribe tanto su coeficiente como la potencia completa.
35. **Nivel C.** Halla el coeficiente de t^3 en $(1-2t)^7$ sin expandir los demás términos.
36. **Nivel C.** Evalúa sin desarrollar término a término:
$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^{6-k}3^k.$$
Indica qué sustitución en el teorema del binomio estás utilizando.
37. **Nivel C.** En la expansión de $(x+y)^7$, empareja cada término con el término simétrico correspondiente. Explica cómo la simetría $\binom{7}{k} = \binom{7}{7-k}$ se refleja simultáneamente en coeficientes y exponentes.
38. **Nivel C.** Obtén una fórmula en n para el coeficiente de $x^{n-2}y^2$ en $(x+y)^n$, con $n \geq 2$, y simplifícala.

F. Pruebas del teorema

39. **Nivel B.** Partiendo de la expansión de $(x+y)^4$, multiplica por $(x+y)$ y reorganiza los términos hasta recuperar la fila de coeficientes de $(x+y)^5$. Señala en qué paso aparece Pascal.
40. **Nivel C.** En el paso inductivo del teorema del binomio aparece
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^{k+1}.$$
Haz la sustitución $j = k+1$ y escribe correctamente el nuevo índice, los nuevos límites y el nuevo sumando.
41. **Nivel C.** Explica por qué, después de alinear las dos sumas del paso inductivo, los términos de los extremos $k=0$ y $k=n+1$ deben tratarse separadamente antes de aplicar Pascal al rango interior.
42. **Nivel D.** Demuestra el teorema del binomio por inducción para todo $n \geq 0$. Tu prueba debe mostrar explícitamente la reindexación y los términos extremos.
43. **Nivel C.** Da una prueba del teorema del binomio por elección de factores: explica por qué el coeficiente de $x^{n-k}y^k$ es exactamente $\binom{n}{k}$.
44. **Nivel D.** Compara la prueba inductiva y la prueba por elección de factores. Indica qué explica mejor cada una: la recurrencia de Pascal, la aparición de los coeficientes y el control formal de los índices.

45. **Nivel D.** Un estudiante transforma
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$
en
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k} y^{k}.$$
Explica por qué la transformación no es una reindexación correcta y escribe la versión correcta.
46. **Nivel C.** Deduce del teorema del binomio una fórmula para $(x-y)^n$. Explica de dónde proviene el factor $(-1)^k$.

G. Consecuencias e identidades ponderadas

47. **Nivel B.** Sustituye valores apropiados en el teorema del binomio para demostrar
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
48. **Nivel B.** Demuestra, para $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
mediante una sustitución en el teorema del binomio.
49. **Nivel C.** Usa los dos ejercicios anteriores para demostrar que, para $n \geq 1$, la suma de los coeficientes de índice par es igual a la suma de los coeficientes de índice impar y que ambas valen 2^{n-1}.
50. **Nivel C.** Demuestra algebraicamente
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$
51. **Nivel D.** Demuestra combinatoriamente la identidad del ejercicio anterior contando pares (A, a) donde A es un subconjunto de tamaño k y a es un elemento distinguido de A.
52. **Nivel D.** Sin usar cálculo, deduce
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$
Usa primero una identidad local y luego una suma de fila.
53. **Nivel D.** Demuestra
$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$
de dos maneras: usando simetría y usando directamente la identidad local correspondiente.
54. **Nivel D.** Deduce, para $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} (2k-n)\binom{n}{k} = 0.$$
Explica por qué el resultado también es compatible con la simetría de la fila.

H. Hockey-stick y Vandermonde

55. **Nivel B.** Verifica numéricamente la identidad del palo de hockey para $r = 2$ y $n = 6$:
$$\sum_{j=2}^{6} \binom{j}{2} = \binom{7}{3}.$$
56. **Nivel D.** Demuestra, usando Pascal como telescopaje discreto, que
$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$
57. **Nivel D.** Da una prueba combinatoria del palo de hockey contando subconjuntos de tamaño $r+1$ de $\{1, \dots, n+1\}$ según su elemento máximo.
58. **Nivel C.** Verifica numéricamente Vandermonde para $r = 4$, $s = 5$ y $n = 3$:
$$\sum_{k} \binom{4}{k}\binom{5}{3-k} = \binom{9}{3}.$$
Escribe sólo los valores de k que contribuyen de forma no nula.
59. **Nivel D.** Para enteros no negativos r, s, n, determina el rango efectivo de k en
$$\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}.$$
Demuestra que puede escribirse como
$$\max(0, n-s) \le k \le \min(r, n).$$
60. **Nivel D.** Demuestra la identidad de Vandermonde
$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$
por doble conteo sobre la unión disjunta de dos conjuntos de tamaños r y s.
61. **Nivel D.** Usa Vandermonde y simetría para demostrar
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
62. **Nivel E.** Demuestra
$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{k} = \binom{r+s}{r}$$
transformando uno de los coeficientes por simetría y aplicando Vandermonde. Explicita el rango efectivo de la suma.

I. Multinomio elemental

63. **Nivel B.** Determina el coeficiente de x^2yz^3 en $(x+y+z)^6$.
64. **Nivel C.** Expande completamente $(x+y+z)^3$ agrupando términos iguales y justificando cada coeficiente mediante elecciones de posiciones.
65. **Nivel C.** ¿Cuántas palabras de longitud 7 pueden formarse con exactamente 3 letras A, 2 letras B y 2 letras C? Expresa la respuesta como un coeficiente multinomial y calcula su valor.
66. **Nivel D.** Usa la expansión multinomial de $(x+y+z)^n$ y la sustitución $x = y = z = 1$ para demostrar que la suma de todos los coeficientes trinomiales de orden n es 3^n.

J. Diagnóstico y comparación de métodos

67. **Nivel C.** Un estudiante intenta probar simetría escribiendo
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n-k)!}.$$
Localiza exactamente el error de paréntesis y completa una prueba correcta.

68. **Nivel C.** Diagnostica el error en
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}.$$
Explica por qué “tener dos términos parecidos” no basta para aplicar Pascal.

69. **Nivel C.** Un estudiante afirma que el término general de $(x+y)^n$ es
$$\binom{n}{k} x^{n-k} y^{n+k}.$$
Refuta la fórmula usando el grado total y escribe el término correcto.

70. **Nivel D.** Para cada una de las siguientes tareas, elige el método que consideres más natural entre factoriales, Pascal, sustitución en el binomio y doble conteo, y justifica tu elección:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$
$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

71. **Nivel D.** Compara una prueba factorial y una prueba combinatoria de la identidad de Pascal. Indica qué pasos son puramente algebraicos y qué estructura conceptual sólo se hace visible en el argumento combinatorio.

72. **Nivel E.** Se propone la siguiente reindexación:
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n+1} a_j.$$
Explica por qué es falsa en general. Repara la igualdad y aplica la corrección al tipo de reindexación que aparece en la prueba inductiva del teorema del binomio.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E.** Demuestra, para $0 \le r \le n$,
$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$
por dos métodos independientes:

a) reescribe cada término mediante Pascal de modo que la suma telescopie;
b) cuenta los subconjuntos de tamaño $r+1$ de $\{1,\dots,n+1\}$ clasificándolos por su elemento máximo.

Compara finalmente qué representa cada sumando en las dos pruebas y explica cuál de ellas hace más transparente la identidad.

74. **Nivel F.** Sean r, s, n enteros no negativos. Demuestra la identidad de Vandermonde
$$\sum_{k=\max(0,n-s)}^{\min(r,n)} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$
Tu prueba principal debe ser de doble conteo y debe identificar con precisión el conjunto que se cuenta. Después, usando simetría y una reindexación adecuada, deduce como corolario
$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{k} = \binom{r+s}{r}.$$
Explica por qué escribir "$\sum_k$" exige o bien declarar la convención fuera de rango o bien conocer el rango efectivo.

75. **Nivel F.** Para $n \geq 1$, demuestra
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$
sin usar derivadas.

Primero usa
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
y una reindexación completa. Después da una segunda prueba contando pares (A, a) donde A es un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ y $a \in A$ es distinguido. Compara las dos pruebas.

76. **Nivel F.** Sean $n \geq 1$ y $0 \leq m < n$. Demuestra
$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}.$$
Debes usar Pascal y reindexación. Separa con cuidado los extremos de las sumas y explica por qué la hipótesis $m < n$ evita confundir esta identidad con la suma alternada completa de una fila.

77. **Nivel F.** Para $0 \leq r \leq k \leq n$, demuestra
$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$$
de dos maneras:

a) mediante factoriales;
b) contando pares de subconjuntos anidados $R \subseteq K \subseteq N$ con $|N| = n$, $|K| = k$ y $|R| = r$.

Explica qué orden de construcción corresponde a cada miembro.

78. **Nivel F.** Desarrolla conceptualmente el caso trinomial. Para enteros no negativos a, b, c con $a + b + c = n$:

a) demuestra que el coeficiente de $x^a y^b z^c$ en $(x + y + z)^n$ es
$$\frac{n!}{a!b!c!};$$
b) explica el resultado mediante reparto de las n posiciones entre tres categorías;
c) deduce, sustituyendo $x = y = z = 1$, que la suma de todos los coeficientes trinomiales de orden n es 3^n.

79. **Nivel G.** Un estudiante propone la siguiente “prueba” inductiva. Supone

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

y continúa:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k (x+y) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1} \right) x^{n+1-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k .\end{aligned}$$

Localiza y explica **todos** los errores: rangos, reindexación, términos extremos, exponentes y uso de Pascal. Después reconstruye una demostración correcta completa.

80. **Nivel G.** Demuestra

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

por dos métodos:

a) transforma uno de los factores mediante simetría y aplica Vandermonde, controlando el rango;
b) divide un conjunto de $2n$ elementos en dos bloques de n elementos y cuenta los subconjuntos de tamaño n según cuántos elementos se eligen del primer bloque.

Compara qué información estructural aporta cada prueba.

N. Construcción, traducción y revisión de pruebas

Todos los tamaños de conjuntos y posiciones son enteros no negativos, con las restricciones indicadas en cada problema. Se usa la convención de §13.3 para los índices inferiores fuera de rango; no se admiten índices superiores negativos.

81. **Nivel C.** Sean S un conjunto de $n \geq 0$ elementos y $D \subseteq S$ con $|D| = m$, donde $0 \leq m \leq n$. Para $0 \leq k \leq n$, cuenta las elecciones T de tamaño k que contienen una cantidad **par** de elementos de D. Construye una suma binomial clasificando por $j = |T \cap D|$, deriva el rango efectivo y resuelve los casos $m = 0$, $m = 1$ y $m = n$. Para $m = 2$, expresa el resultado con sólo dos términos.
82. **Nivel D.** Para $2 \leq k \leq n$, clasifica los subconjuntos de tamaño k de $\{1, \ldots, n\}$ según su **segundo elemento mayor** j. Construye la identidad resultante, determina todos los valores de j y compruébala para $(n, k) = (5, 3)$. Explica qué distingue esta clasificación de la clasificación por máximo.
83. **Nivel D.** Sean $n \geq 1$, $1 \leq m \leq n$ y $0 \leq k \leq n$. En cada subconjunto $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ de tamaño k, examina $1, \ldots, m$ en ese orden. Clasifica T por el **primer elemento ausente** de esa lista, o por el caso de que estén todos presentes. Construye una identidad binomial, usando la convención fuera de rango. Verifica el caso $k = 0$ y explica por qué no basta sumar las clases «j está ausente».

84. **Nivel C.** Interpreta
$$\sum_{j=\max(0,q-s)}^{\min(r,q)} \binom{r}{j}\binom{s}{q-j} = \binom{r+s}{q}$$
como un conteo de palabras de longitud $r+s$ formadas con 0 y 1 y con exactamente q unos, donde $r,s \geq 0$ y $0 \leq q \leq r+s$. Identifica una biyección con elecciones de posiciones; comprueba el caso $(r,s,q)=(2,3,4)$ y explica qué ocurre si una palabra tiene longitud cero.
85. **Nivel D.** En un grupo de $n \geq 2$ personas se elige un equipo de cualquier tamaño y, dentro de él, una presidencia y una secretaría ocupadas por personas distintas. Traduce este problema a una suma binomial y demuestra
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$
sin cálculo. Explica por qué no se divide por 2 y verifica $n=2$.
86. **Nivel D.** En $n \geq 0$ posiciones se marcan exactamente ℓ como reservadas, con $0 \leq \ell \leq n$, y se selecciona un subconjunto cualquiera de las restantes. Traduce el conteo a
$$\sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \binom{n}{\ell}2^{n-\ell}.$$
Describe los objetos que cuentan ambos lados y comprueba los extremos $\ell=0$ y $\ell=n$.
87. **Nivel E.** Se elimina la hipótesis de que A y B sean disjuntos en la prueba de Vandermonde. Para $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$ y elecciones de tamaño dos, muestra que sumar $\binom{2}{j}\binom{2}{2-j}$ no cuenta los subconjuntos de $A \cup B$. Después repara el argumento cuando $|A|=r$, $|B|=s$ y $|A \cap B|=t$, usando las tres partes disjuntas de la unión. Escribe una fórmula válida para todo $0 \leq q \leq r+s-t$.
88. **Nivel C.** La igualdad entre las cantidades de subconjuntos de tamaño par e impar exige un conjunto con $n \geq 1$ elementos. Examina qué pasa al retirar esa hipótesis. Para $n \geq 1$, construye una correspondencia reversible que cambie sólo la pertenencia de un elemento fijo y justifique la igualdad. Para $n=0$, cuenta ambos tipos y explica exactamente qué paso de la construcción falla.
89. **Nivel D.** En el conteo de pares (T,a) de §13.12 se elimina la condición $a \in T$: ahora T es cualquier subconjunto de un conjunto S de tamaño $n \geq 1$ y a cualquier elemento de S. Construye el nuevo conteo y sepáralo en las clases $a \in T$ y $a \notin T$. Explica por qué conservar el peso $|T|$ daría una respuesta incorrecta.
90. **Nivel E.** Sean $r,s,t \geq 0$ y $0 \leq q \leq r+s+t$. Demuestra
$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} \binom{r}{i}\binom{s}{j}\binom{t}{q-i-j} = \binom{r+s+t}{q}$$
con la convención fuera de rango, por dos vías: partición directa en tres bloques disjuntos y dos aplicaciones sucesivas de Vandermonde. Compara qué paso permite abarcar todos los tamaños de los bloques, incluidos los vacíos.
91. **Nivel E.** Define $W_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$ para $n \geq 0$. Determina su valor para $n=0$, $n=1$ y $n \geq 2$. Para $n \geq 2$, compara una prueba con identidad local y reindexación con otra que empareje pares (T,a), $a \in T$, de signos opuestos cambiando la pertenencia de un elemento distinto de a. Explica qué condición permite esa segunda elección.
92. **Nivel D.** Para $n \geq 0$, demuestra $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n$ por sustitución en el binomio y contando asignaciones de tres etiquetas a n posiciones. En la segunda prueba, elige primero las posiciones cuya etiqueta será distinta de la primera. Compara qué paso garantiza la generalidad para cualquier n y comprueba el caso vacío.

Soluciones razonadas

A. Leer el triángulo y la notación

1. Las filas 0 a 7 son

$$\begin{aligned}
n=0:&\quad 1,\\
n=1:&\quad 1,\ 1,\\
n=2:&\quad 1,\ 2,\ 1,\\
n=3:&\quad 1,\ 3,\ 3,\ 1,\\
n=4:&\quad 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1,\\
n=5:&\quad 1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1,\\
n=6:&\quad 1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1,\\
n=7:&\quad 1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1.
\end{aligned}$$

Cada fila comienza y termina en 1. Para una entrada interior se verifica la regla de Pascal: por ejemplo,

$$21 = 6 + 15, \qquad 35 = 15 + 20.$$

Así, cada entrada interior de la fila n es la suma de las dos entradas adyacentes de la fila $n-1$.

2. De la fila $n = 7$,

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1,$$

leemos

$$\binom{7}{0} = 1, \qquad \binom{7}{1} = 7, \qquad \binom{7}{3} = 35, \qquad \binom{7}{6} = 7, \qquad \binom{7}{7} = 1.$$

3. La fila que comienza por $1, 8, \ldots$ es la fila $n = 8$. Usando Pascal o la fila conocida,

$$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1.$$

Por tanto, los espacios son

$$28, \qquad 70, \qquad 28.$$

4. En $\binom{n}{k}$, el índice superior n indica el tamaño del conjunto de partida —y también la fila del triángulo de Pascal—. El índice inferior k indica cuántos elementos se eligen —y también la posición dentro de esa fila, comenzando en $k = 0$—.

Así,

$$\binom{9}{4}$$

es el número de maneras de elegir 4 elementos de un conjunto de 9 elementos, y es la entrada de la fila 9 situada en la posición 4.

5. Con la convención fuera de rango,

$$\binom{6}{-1} = 0, \qquad \binom{6}{0} = 1, \qquad \binom{6}{6} = 1, \qquad \binom{6}{7} = 0.$$

La convención permite escribir identidades como Pascal sin separar continuamente los extremos. Sin embargo, no reemplaza el control de rangos: en una prueba debemos saber cuándo un coeficiente es genuinamente una elección $0 \le k \le n$ y cuándo estamos usando deliberadamente el valor convencional 0.

6. La simetría correcta mantiene fijo el índice superior:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Por tanto,

$$\binom{9}{4} = \binom{9}{5},$$

no $\binom{4}{9} = \binom{9}{4}$.

De hecho, $\binom{4}{9}$ está fuera del rango natural porque $9 > 4$; con la convención fuera de rango vale 0, mientras que

$$\binom{9}{4} = 126.$$

El error consiste en intercambiar los índices superior e inferior, cosa que la simetría no autoriza.

B. Factoriales y fórmula cerrada

7. Cancelamos factoriales antes de expandirlos:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

Además,

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45,$$

y

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220.$$

8. Las derivaciones factoriales siguientes se realizan respectivamente para $n \ge 1$, $n \ge 2$ y $n \ge 3$, para que todos los argumentos factoriales sean no negativos.

A partir de

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

obtenemos

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

y

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

9. Si $k = 0$,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!}.$$

Para que este caso valga 1, necesitamos $0! = 1$. Entonces

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Si $k = n$,

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1.$$

Así, la convención $0! = 1$ permite que una sola fórmula factorial incluya ambos extremos sin excepciones.

10. Usando la fórmula factorial,

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}.$$

Multiplicando por el recíproco,

$$= \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}}.$$

Esta razón permite comparar coeficientes consecutivos. Si $n - k > k + 1$, el cociente es mayor que 1 y los coeficientes aumentan; si $n - k < k + 1$, disminuyen; y si son iguales, dos coeficientes consecutivos coinciden.

11. Factorialmente,

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10!}{3!7!} = \binom{10}{3}.$$

La igualdad era previsible por simetría:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3}.$$

Elegir 7 elementos equivale a decidir cuáles 3 quedan fuera.

12. Usamos

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La ecuación es

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45.$$

Multiplicando por 2,

$$n(n-1) = 90,$$

de modo que

$$n^2 - n - 90 = 0.$$

Factorizamos:

$$(n-10)(n+9) = 0.$$

Las soluciones algebraicas son $n = 10$ y $n = -9$, pero se exige $n \geq 2$. Por tanto,

$$\boxed{n = 10}.$$

Comprobación:

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

C. Interpretación combinatoria y simetría

13. Un comité de 3 personas se obtiene eligiendo 3 personas de un grupo de 8, sin importar el orden:

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

El orden no debe contarse porque el comité $\{A, B, C\}$ es el mismo tanto si las personas se nombran como A, B, C como si se nombran en cualquiera de sus otras 3! ordenaciones.

14. Las selecciones ordenadas de 4 objetos distintos tomados de 7 son

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

Cada conjunto no ordenado de 4 objetos aparece exactamente 4! veces en ese conteo, una por cada ordenación posible de sus cuatro elementos. Por tanto,

$$\frac{840}{4!} = \frac{840}{24} = 35.$$

Así,

$$\binom{7}{4} = 35.$$

15. Elegir 4 elementos de un conjunto de 10 determina automáticamente cuáles 6 quedan fuera, y viceversa. La correspondencia es tomar complemento.

Por eso ambos problemas tienen el mismo número de soluciones:

$$\boxed{\binom{10}{4} = \binom{10}{6}}.$$

Numéricamente,

$$\binom{10}{4} = \binom{10}{6} = 210.$$

16. Sea S un conjunto con n elementos. Consideremos la aplicación

$$\Phi(A) = S \setminus A.$$

Si $|A| = k$, entonces

$$|\Phi(A)| = n - k.$$

Además, Φ es invertible porque

$$\Phi(\Phi(A)) = S \setminus (S \setminus A) = A.$$

Por tanto, Φ es una biyección entre los subconjuntos de tamaño k y los subconjuntos de tamaño $n - k$. Luego ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}.$$

17. Sea S un conjunto de 9 elementos. A cada subconjunto $A \subseteq S$ con $|A| = 2$ le asociamos

$$S \setminus A.$$

El complemento tiene tamaño $9 - 2 = 7$. La operación es invertible, pues el complemento del complemento devuelve A:

$$S \setminus (S \setminus A) = A.$$

Así obtenemos una biyección entre subconjuntos de tamaño 2 y subconjuntos de tamaño 7, lo que explica

$$\binom{9}{2} = \binom{9}{7}.$$

18. La suma por tamaños es

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64.$$

Directamente, cada uno de los 6 elementos tiene dos posibilidades independientes: pertenecer o no pertenecer al subconjunto. Por tanto hay

$$2^6 = 64$$

subconjuntos.

Ambos razonamientos cuentan el mismo conjunto de objetos, luego

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 2^6.$$

19. Si el elemento fijo a debe estar incluido, ya hemos elegido uno de los k elementos. Los otros $k - 1$ se eligen entre los $n - 1$ elementos restantes:

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1}}.$$

Si a debe quedar excluido, los k elementos deben elegirse entre los otros $n - 1$:

$$\boxed{\binom{n-1}{k}}.$$

Estas dos clases son precisamente las que aparecen en la prueba combinatoria de Pascal.

20. El número de equipos de 5 estudiantes formados desde un curso de 12 es

$$\binom{12}{5}.$$

Cada equipo determina exactamente el grupo complementario de 7 estudiantes que quedan fuera, y cada grupo de 7 excluidos determina el equipo de los otros 5. Por complemento,

$$\binom{12}{5} = \binom{12}{7}.$$

En general, para $0 \leq k \leq n$,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}.$$

D. Pascal y recurrencia

21. Para $(n, k) = (8, 3)$,

$$\binom{8}{3} = 56,$$

mientras que

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = 21 + 35 = 56.$$

Para $(n, k) = (10, 6)$,

$$\binom{10}{6} = 210,$$

y

$$\binom{9}{5} + \binom{9}{6} = 126 + 84 = 210.$$

En ambos casos se verifica

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

22. Partimos del lado derecho:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Usando factoriales,

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

Llevamos ambas fracciones al denominador común $k!(n-k)!$:

$$= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}.$$

Entonces

$$= \frac{[k + (n-k)](n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

23. Sea S un conjunto con n elementos y fijemos $a \in S$. Contamos los subconjuntos de tamaño k de S.

Se dividen en dos clases disjuntas:

- los que contienen a a;
- los que no contienen a a.

Si contienen a a, faltan $k-1$ elementos por elegir entre los $n-1$ restantes, de modo que hay

$$\binom{n-1}{k-1}$$

posibilidades.

Si no contienen a a, debemos elegir los k elementos entre los otros $n-1$, y hay

$$\binom{n-1}{k}$$

posibilidades.

Como las dos clases son disjuntas y exhaustivas,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

24. La fila dada es la fila $n = 7$. La siguiente comienza y termina en 1, y cada entrada interior es suma de dos entradas contiguas:

$$1,\ 1+7,\ 7+21,\ 21+35,\ 35+35,$$
$$35+21,\ 21+7,\ 7+1,\ 1.$$

Por tanto, la fila $n = 8$ es

$$\boxed{1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1}.$$

25. Usamos únicamente la recurrencia de Pascal. Para llegar a $\binom{12}{5}$ basta construir sucesivamente las entradas necesarias:

$$\binom{5}{5} = 1.$$

Después,

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15,$$

pero es más transparente avanzar por filas completas alrededor de la zona necesaria:

$$\begin{aligned}
n = 7: &\quad 1,\ 7,\ 21,\ 35, \dots \\
n = 8: &\quad 1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70, \dots \\
n = 9: &\quad 1,\ 9,\ 36,\ 84,\ 126,\ 126, \dots \\
n = 10: &\quad 1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252, \dots \\
n = 11: &\quad 1,\ 11,\ 55,\ 165,\ 330,\ 462, \dots \\
n = 12: &\quad 1,\ 12,\ 66,\ 220,\ 495,\ 792, \dots
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\binom{12}{5} = 792}.$$

Cada valor se obtiene exclusivamente sumando dos entradas de la fila anterior.

26. Demostramos por inducción sobre la fila n que las reglas determinan una única fila.

Caso base. Para $n = 0$, la condición de borde obliga a que la única entrada sea

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Por tanto, la fila 0 está determinada de manera única.

Paso inductivo. Supongamos determinada de manera única toda la fila $n-1$. En la fila n, los extremos están fijados:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Para cada posición interior $1 \le k \le n-1$, Pascal obliga a definir

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Por hipótesis inductiva, las dos entradas del lado derecho ya tienen valores únicos. Luego cada entrada interior de la fila n también queda determinada de manera única.

Así, por inducción, los bordes junto con Pascal determinan todas las entradas del triángulo.

27. Tomemos, por ejemplo, $n = 5$ y $k = 2$. La fórmula propuesta daría

$$\binom{5}{2} \stackrel{?}{=} \binom{4}{1} + \binom{3}{2}.$$

Pero

$$10 \neq 4 + 3 = 7.$$

El error es que en Pascal los dos términos del lado derecho deben tener el mismo índice superior $n-1$ y los índices inferiores deben ser consecutivos.

La fórmula correcta es

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

28. Agrupamos los cuatro términos para aplicar Pascal en dos etapas:

$$\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
$$= \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) + \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right).$$

En la primera etapa aplicamos Pascal a cada par,

$$= \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}.$$

En la segunda etapa aplicamos Pascal a los dos resultados,

$$= \boxed{\binom{n+2}{k+1}}.$$

Por ejemplo, la identidad vale directamente para $1 \le k \le n-1$; con la convención fuera de rango puede extenderse uniformemente a los bordes apropiados.

E. Teorema del binomio y lectura de términos

29. El teorema del binomio da

$$(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} y^k.$$

La fila 5 es $1, 5, 10, 10, 5, 1$. Por tanto,

$$\boxed{(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5}.$$

30. Escribimos

$$(2x-y)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (2x)^{4-k} (-y)^k.$$

Calculando término a término,

$$(2x-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4.$$

Así,

$$\boxed{(2x-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4}.$$

El signo viene de $(-1)^k$ y el factor numérico de $\binom{4}{k}2^{4-k}$.

31. En el término general

$$\binom{8}{k}x^{8-k}y^k,$$

queremos y^3, así que $k=3$. Entonces automáticamente el exponente de x es $8-3=5$.
El coeficiente es

$$\binom{8}{3}=56.$$

Por tanto, el coeficiente de x^5y^3 es

$$\boxed{56}.$$

32. En

$$(1+x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}1^{10-k}x^k,$$

la potencia de x es precisamente k. Para obtener x^6, tomamos $k=6$.
Por tanto, el coeficiente es

$$\binom{10}{6}=210.$$

Así, la respuesta es

$$\boxed{210}.$$

33. En $(a+b)^{12}$ los términos son

$$\binom{12}{k}a^{12-k}b^k.$$

Un término central debe tener los mismos exponentes de a y b:

$$12-k=k.$$

De aquí,

$$k=6.$$

Como 12 es par, existe un único valor entero medio. El término central es

$$\boxed{\binom{12}{6}a^6b^6=924a^6b^6}.$$

34. En

$$(3+x)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} 3^{9-k} x^k,$$

el término con x^4 corresponde a $k = 4$. Por tanto,

$$\binom{9}{4} 3^5 x^4.$$

Como

$$\binom{9}{4} = 126, \qquad 3^5 = 243,$$

el coeficiente es

$$126 \cdot 243 = 30618.$$

Así, el término pedido es

$$\boxed{30618x^4}.$$

35. En

$$(1-2t)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (-2t)^k,$$

el término con t^3 corresponde a $k = 3$. Su coeficiente es

$$\binom{7}{3}(-2)^3 = 35(-8) = -280.$$

Por tanto,

$$\boxed{-280}.$$

36. La suma tiene exactamente la forma binomial

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k = (2+3)^6.$$

Entonces

$$(2+3)^6 = 5^6 = 15625.$$

Por tanto,

$$\boxed{15625}.$$

37. El término de índice k es

$$\binom{7}{k}x^{7-k}y^k.$$

Su término simétrico corresponde al índice $7-k$:

$$\binom{7}{7-k}x^k y^{7-k}.$$

Como

$$\binom{7}{k} = \binom{7}{7-k},$$

los coeficientes coinciden, mientras que los exponentes de x e y se intercambian.
Los emparejamientos son

$$k = 0 \leftrightarrow 7, \quad 1 \leftrightarrow 6, \quad 2 \leftrightarrow 5, \quad 3 \leftrightarrow 4.$$

Así, la simetría de la fila se refleja en una simetría de la expansión bajo el intercambio $x \leftrightarrow y$.

38. El término general es

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Para obtener $x^{n-2}y^2$ debemos tomar $k=2$. El coeficiente es entonces

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

F. Pruebas del teorema

39. Partimos de

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Multiplicamos por $(x+y)$:

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= x(x+y)^4 + y(x+y)^4 \\ &= x^5 + 4x^4y + 6x^3y^2 + 4x^2y^3 + xy^4 \\ &\quad + x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + y^5.\end{aligned}$$

Reagrupando monomios iguales,

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= x^5 + (4+1)x^4y + (6+4)x^3y^2 \\ &\quad + (4+6)x^2y^3 + (1+4)xy^4 + y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.\end{aligned}$$

Pascal aparece exactamente al sumar coeficientes vecinos de la fila anterior:

$$4+1=5, \qquad 6+4=10, \qquad 4+6=10, \qquad 1+4=5.$$

40. Hacemos

$$j=k+1, \qquad k=j-1.$$

Si $k=0$, entonces $j=1$; si $k=n$, entonces $j=n+1$.
Además,

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}=\binom{n}{j-1}x^{n-(j-1)}y^{j}=\binom{n}{j-1}x^{n+1-j}y^{j}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n+1-j}y^{j}}.$$

41. Después de reindexar, las dos sumas tienen rangos

$$0\leq k\leq n$$

y

$$1\leq k\leq n+1.$$

Por tanto, el término $k=0$ aparece sólo en la primera suma y el término $k=n+1$ sólo en la segunda. Sólo para

$$1\leq k\leq n$$

aparecen simultáneamente ambos coeficientes que deben combinarse mediante Pascal.
En concreto, los extremos son

$$\binom{n}{0}x^{n+1}=x^{n+1}$$

y

$$\binom{n}{n}y^{n+1}=y^{n+1}.$$

En el rango interior aparecen

$$\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^{k}=\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^{k}.$$

Separar los extremos evita introducir términos inexistentes o aplicar Pascal fuera del par correcto.

42. Sea

$$P(n): \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Caso base. Para $n = 0$,

$$(x+y)^0 = 1$$

y

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = \binom{0}{0} = 1.$$

Luego $P(0)$ es verdadera.
Hipótesis inductiva. Supongamos

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Multiplicando por $(x+y)$,

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k \\ &+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}.\end{aligned}$$

En la segunda suma hacemos $j = k+1$:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j} y^j.$$

Renombrando j como k,

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k \\ &+ \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k.\end{aligned}$$

Separamos extremos. Para $k = 0$ queda x^{n+1} y para $k = n+1$ queda y^{n+1}. En $1 \le k \le n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.\end{aligned}$$

Así $P(n+1)$ es verdadera. Por inducción, el teorema del binomio vale para todo $n \ge 0$.

43. Escribimos

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ factores}}.$$

Al expandir, en cada factor debemos elegir x o y. Para producir exactamente

$$x^{n-k}y^k,$$

debemos elegir y en exactamente k de los n factores. Los restantes $n-k$ factores aportan x.

El número de maneras de escoger cuáles k factores aportan y es

$$\binom{n}{k}.$$

Por eso el coeficiente de $x^{n-k}y^k$ es precisamente $\binom{n}{k}$, y

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

44. Las dos pruebas establecen el mismo teorema, pero iluminan estructuras distintas.

La **prueba inductiva** explica especialmente bien la recurrencia de Pascal. Al pasar de $(x+y)^n$ a $(x+y)^{n+1}$, cada monomio interior recibe dos contribuciones provenientes de coeficientes vecinos:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

También obliga a controlar formalmente reindexación, límites y términos extremos.

La **prueba por elección de factores** explica mejor por qué aparece $\binom{n}{k}$: producir $x^{n-k}y^k$ equivale a elegir exactamente k de los n factores que aportarán y.

En resumen:

- recurrencia de Pascal: más visible en la prueba inductiva;
- aparición conceptual de los coeficientes: más visible en la prueba combinatoria;
- control formal de índices: más exigente y explícito en la prueba inductiva.

45. La transformación propuesta falla en tres lugares: no modifica correctamente los límites, no transforma todos los exponentes y cambia el coeficiente sin justificar la sustitución.

Si hacemos

$$j = k+1, \qquad k = j-1,$$

entonces j recorre desde 1 hasta $n+1$, y

$$\binom{n}{k} x^{n-k}y^{k+1} = \binom{n}{j-1} x^{n+1-j}y^j.$$

La reindexación correcta es

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j}y^j}.$$

Sólo después puede renombrarse j como k.

46. Aplicamos el teorema del binomio a $x + (-y)$:

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(-y)^k.$$

Como

$$(-y)^k = (-1)^k y^k,$$

obtenemos

$$\boxed{(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}.$$

El factor $(-1)^k$ proviene exclusivamente de elevar el segundo sumando negativo a la potencia k.

G. Consecuencias e identidades ponderadas

47. En el teorema del binomio tomamos $x = y = 1$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k.$$

Entonces

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}.$$

48. Tomamos $x = 1$ e $y = -1$. Para $n \geq 1$,

$$(1-1)^n = 0.$$

Por el teorema del binomio,

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Así,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}.$$

49. Sea

$$E = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ par}}} \binom{n}{k}, \qquad O = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ impar}}} \binom{n}{k}.$$

Del ejercicio 47,

$$E + O = 2^n.$$

Del ejercicio 48,

$$E - O = 0.$$

Por tanto,

$$E = O.$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$2E = 2^n,$$

de modo que

$$E = O = 2^{n-1}.$$

Así, para $n \ge 1$,

$$\boxed{\sum_{k \text{ par}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impar}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}}.$$

50. Usando factoriales,

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Como $k! = k(k-1)!$,

$$k\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Por otra parte,

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Por tanto,

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

51. Sea S un conjunto de n elementos. Contemos pares (A, a) tales que

$$A \subseteq S, \qquad |A| = k, \qquad a \in A$$

y a está distinguido.

Primer conteo. Elegimos primero A: hay $\binom{n}{k}$ posibilidades. Dentro de A elegimos el elemento distinguido: hay k opciones. Total:

$$k\binom{n}{k}.$$

Segundo conteo. Elegimos primero a: hay n posibilidades. Después elegimos los otros $k-1$ elementos de A entre los $n-1$ restantes:

$$n\binom{n-1}{k-1}.$$

Ambos procedimientos cuentan exactamente los mismos pares, de modo que

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

52. Para $n = 0$, ambos lados valen cero: la suma contiene $0\binom{0}{0} = 0$ y $n2^{n-1} = 0 \cdot 2^{-1} = 0$. Este caso se comprueba directamente; no requiere una fila de índice superior -1. En lo que sigue suponemos $n \geq 1$.

El término $k = 0$ es nulo, así que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Usamos la identidad local

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}:$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Reindexamos con $j = k-1$. Entonces j recorre $0, \ldots, n-1$:

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}.$$

La suma de la fila $n-1$ es 2^{n-1}. Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}.$$

53. Para $n = 0$, ambos lados valen cero por evaluación directa. Las dos pruebas siguientes se realizan para $n \geq 1$, de modo que la fila $n-1$ existe.

Primera prueba: simetría.

Hacemos $j = n - k$. Entonces

$$(n-k)\binom{n}{k} = j\binom{n}{n-j} = j\binom{n}{j}.$$

Al recorrer $k = 0, \ldots, n$, el nuevo índice j recorre los mismos valores en orden inverso. Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.$$

Segunda prueba: identidad local.

Factorialmente o por doble conteo,

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}.$$

El término $k = n$ vale 0 bajo la convención fuera de rango, por lo que

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

Así,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k} = n2^{n-1}}.$$

54. Por linealidad,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k-n)\binom{n}{k} = 2\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} - n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Usando

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

y

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,$$

obtenemos

$$2n2^{n-1} - n2^n = n2^n - n2^n = 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k-n)\binom{n}{k}=0}.$$

La simetría también lo explica: los términos de índices k y $n-k$ tienen el mismo coeficiente binomial, mientras que sus pesos son opuestos:

$$2(n-k)-n=-(2k-n).$$

Por eso se cancelan por pares.

H. Hockey-stick y Vandermonde

55. Calculamos

$$\sum_{j=2}^{6}\binom{j}{2}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}.$$

Esto vale

$$1+3+6+10+15=35.$$

Por otra parte,

$$\binom{7}{3}=35.$$

Así,

$$\boxed{\sum_{j=2}^{6}\binom{j}{2}=\binom{7}{3}}.$$

56. De Pascal,

$$\binom{j+1}{r+1}=\binom{j}{r}+\binom{j}{r+1}.$$

Despejamos

$$\binom{j}{r}=\binom{j+1}{r+1}-\binom{j}{r+1}.$$

Sumando desde $j=r$ hasta n,

$$\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}=\sum_{j=r}^{n}\left(\binom{j+1}{r+1}-\binom{j}{r+1}\right).$$

Al expandir, todos los términos interiores se cancelan:

$$\left(\binom{r+1}{r+1}-\binom{r}{r+1}\right)+\left(\binom{r+2}{r+1}-\binom{r+1}{r+1}\right)$$
$$+\cdots+\left(\binom{n+1}{r+1}-\binom{n}{r+1}\right).$$

Como $\binom{r}{r+1}=0$, queda

$$\boxed{\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}}.$$

57. Contemos los subconjuntos de tamaño $r+1$ de

$$\{1, 2, \ldots, n+1\}.$$

Directamente hay

$$\binom{n+1}{r+1}$$

subconjuntos.

Ahora los clasificamos por su elemento máximo. Si el máximo es $j+1$, los otros r elementos deben elegirse entre

$$\{1, \ldots, j\},$$

lo que puede hacerse de

$$\binom{j}{r}$$

formas.

El máximo puede ser $r+1, r+2, \ldots, n+1$, es decir, j recorre $r, \ldots, n$. Sumando todas las clases,

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Así queda demostrada combinatoriamente la identidad del palo de hockey.

58. Para que ambos factores sean no nulos necesitamos

$$0 \leq k \leq 4$$

y

$$0 \leq 3 - k \leq 5.$$

Aquí los valores efectivos son $k = 0, 1, 2, 3$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k} \binom{4}{k}\binom{5}{3-k} &= \binom{4}{0}\binom{5}{3} + \binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\binom{5}{0} \\ &= 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \\ &= 10 + 40 + 30 + 4 \\ &= 84.\end{aligned}$$

Además,

$$\binom{9}{3} = 84.$$

Por tanto se verifica Vandermonde.

59. Para que

$$\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$$

sea no nulo, deben cumplirse simultáneamente

$$0 \le k \le r$$

y

$$0 \le n-k \le s.$$

La segunda doble desigualdad equivale a

$$n-s \le k \le n.$$

Combinando ambas condiciones obtenemos

$$k \ge 0, \qquad k \ge n-s,$$

es decir,

$$k \ge \text{máx}(0, n-s),$$

y también

$$k \le r, \qquad k \le n,$$

es decir,

$$k \le \text{mín}(r, n).$$

Por tanto, el rango efectivo es

$$\boxed{\text{máx}(0, n-s) \le k \le \text{mín}(r, n)}.$$

60. Sean A y B conjuntos disjuntos con

$$|A| = r, \qquad |B| = s.$$

Contemos los subconjuntos de tamaño n de $A \cup B$.

Directamente, como

$$|A \cup B| = r + s,$$

hay

$$\binom{r+s}{n}$$

elecciones.

Ahora clasificamos cada subconjunto según cuántos elementos contiene de A. Si contiene exactamente k elementos de A, debemos elegir

$$\binom{r}{k}$$

elementos de A y

$$\binom{s}{n-k}$$

elementos de B. Para ese k hay

$$\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$$

posibilidades.
Sumando sobre todos los valores efectivos de k,

$$\boxed{\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}}.$$

Las clases son disjuntas y exhaustivas porque cada subconjunto de tamaño n tiene un número único de elementos procedentes de A.

61. Aplicamos Vandermonde con $r = s = n$ y tamaño total elegido igual a n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Por simetría,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Entonces

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}.$$

62. Por simetría,

$$\binom{s}{k} = \binom{s}{s-k}.$$

Entonces

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{s-k}.$$

Vandermonde, con tamaño total elegido s, da

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{s-k} = \binom{r+s}{s}.$$

Finalmente, por simetría,

$$\binom{r+s}{s} = \binom{r+s}{r}.$$

Así,

$$\boxed{\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{k} = \binom{r+s}{r}}.$$

El rango efectivo exige simultáneamente $0 \le k \le r$ y $0 \le k \le s$, por lo que

$$\boxed{0 \le k \le \min(r,s)}.$$

I. Multinomio elemental

63. El monomio x^2yz^3 tiene exponentes

$$2+1+3=6,$$

como corresponde a $(x+y+z)^6$.
Su coeficiente multinomial es

$$\frac{6!}{2!1!3!} = \frac{720}{2\cdot 1\cdot 6} = 60.$$

Por tanto, el coeficiente es

$$\boxed{60}.$$

64. En $(x+y+z)^3$ cada término corresponde a repartir las tres posiciones entre x, y, z. Los casos son:

- una sola variable aparece tres veces: coeficiente 1;
- una variable aparece dos veces y otra una vez: coeficiente $3!/(2!1!) = 3$;
- aparecen las tres variables una vez: coeficiente $3! = 6$.

Por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned}(x+y+z)^3 = {} & x^3+y^3+z^3 \\ & + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 \\ & + 6xyz.\end{aligned}}$$

Por ejemplo, el coeficiente de x^2y es 3 porque debemos elegir cuál de las tres posiciones aporta y; las otras dos aportan x.

65. Debemos ordenar un multiconjunto con 3 letras A, 2 letras B y 2 letras C. El número de palabras es

$$\frac{7!}{3!2!2!}.$$

Calculando,

$$\frac{5040}{6\cdot 2\cdot 2} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Por tanto,

$$\boxed{210}.$$

66. La expansión multinomial es

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{a,b,c\geq 0\\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!b!c!}x^a y^b z^c.$$

Sustituyendo

$$x = y = z = 1,$$

obtenemos

$$(1+1+1)^n = \sum_{\substack{a,b,c\geq 0\\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!b!c!}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_{\substack{a,b,c\geq 0\\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!b!c!} = 3^n}.$$

El lado izquierdo es precisamente la suma de todos los coeficientes trinomiales de orden n.

J. Diagnóstico y comparación de métodos

67. El error está en desarrollar

$$n-(n-k).$$

No es

$$n-n-k,$$

sino

$$n-(n-k) = n-n+k = k.$$

La prueba correcta es

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}.$$

68. La identidad escrita es, en general, falsa:

$$\binom{n}{k} \neq \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Por ejemplo, con $n = 5$ y $k = 2$,

$$\binom{5}{2} = 10,$$

mientras que

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{1} = 6 + 5 = 11.$$

Pascal exige que los dos términos del lado derecho tengan el mismo índice superior $n-1$ y posiciones inferiores consecutivas:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

La semejanza visual de los términos no basta: deben coincidir exactamente con la estructura de la recurrencia.

69. En una expansión de $(x+y)^n$, todo monomio tiene grado total n. La fórmula propuesta tiene grado

$$(n-k) + (n+k) = 2n,$$

Para $n \geq 1$, este grado no es n y refuta la fórmula general. Por ejemplo, con $n = 1, k = 0$ se propondría xy en vez de x. Para $n = 0, k = 0$, ambas propuestas dan el término constante 1; esa coincidencia aislada no demuestra la fórmula para todos los exponentes.

El término correcto es

$$\boxed{\binom{n}{k} x^{n-k} y^k},$$

pues sus exponentes satisfacen

$$(n-k) + k = n.$$

70. Una elección natural de método es la siguiente.

Para

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

el **doble conteo por complemento** es especialmente informativo: elegir k elementos equivale a decidir cuáles $n-k$ quedan fuera. La prueba factorial también es corta, pero explica menos.

Para

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

la **sustitución en el teorema del binomio** con $x = y = 1$ es inmediata:

$$(1+1)^n = 2^n.$$

También existe una lectura combinatoria contando todos los subconjuntos.

Para

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$$

el **doble conteo** es el método más natural: se eligen n elementos de una unión disjunta de bloques de tamaños r y s, clasificando según cuántos provienen del primero.

La elección no es única; se justifica por la estructura que cada método hace visible.

71. En la prueba factorial de Pascal se parte de

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

y se transforman fracciones hasta obtener

$$\binom{n}{k}.$$

Los pasos son puramente algebraicos: expansión factorial, denominador común, suma y simplificación.

En la prueba combinatoria se cuenta el conjunto de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de n elementos. Fijando un elemento a, esos subconjuntos se dividen en dos clases:

- los que contienen a a;
- los que no lo contienen.

Las cantidades respectivas son

$$\binom{n-1}{k-1} \quad \text{y} \quad \binom{n-1}{k}.$$

La estructura conceptual que sólo aparece claramente aquí es la **partición de un conjunto de elecciones en dos clases disjuntas y exhaustivas**. La prueba factorial verifica la igualdad; la combinatoria explica por qué hay una suma de esos dos términos.

72. La igualdad propuesta

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n+1} a_j$$

es falsa en general porque las listas de términos son distintas. El lado izquierdo contiene

$$a_0, a_1, \ldots, a_n,$$

mientras que el derecho contiene

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}.$$

Si queremos hacer el cambio

$$j = k + 1,$$

entonces

$$k = j - 1,$$

y la igualdad correcta es

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}}.$$

En la prueba inductiva del binomio,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

se convierte en

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j} y^{j}}.$$

Cambian simultáneamente índice, límites y sumando.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Queremos demostrar

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

a) Pascal y telescopaje. Pascal da

$$\binom{j+1}{r+1} = \binom{j}{r} + \binom{j}{r+1}.$$

Por tanto,

$$\binom{j}{r} = \binom{j+1}{r+1} - \binom{j}{r+1}.$$

Sustituyendo en la suma,

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \sum_{j=r}^{n} \left(\binom{j+1}{r+1} - \binom{j}{r+1} \right).$$

Al expandir,

$$\left(\binom{r+1}{r+1} - \binom{r}{r+1} \right) + \left(\binom{r+2}{r+1} - \binom{r+1}{r+1} \right) + \cdots + \left(\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} \right).$$

Todos los términos interiores se cancelan. Como

$$\binom{r}{r+1} = 0,$$

queda

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

b) Doble conteo. Contemos los subconjuntos de tamaño $r+1$ de

$$\{1, \ldots, n+1\}.$$

Directamente hay

$$\binom{n+1}{r+1}.$$

Ahora los clasificamos por su máximo. Si el máximo es $j+1$, los otros r elementos deben elegirse entre $\{1, \ldots, j\}$, lo que produce

$$\binom{j}{r}$$

subconjuntos.

Como j recorre $r, \ldots, n$, el conteo por clases da

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}.$$

Ambos conteos se refieren al mismo conjunto, así que la identidad queda demostrada.

Comparación. En la prueba telescópica, cada $\binom{j}{r}$ aparece como una **diferencia** entre dos entradas consecutivas de una columna diagonal de Pascal; la estructura visible es la cancelación.

En la prueba combinatoria, cada $\binom{j}{r}$ cuenta los subconjuntos cuyo máximo es exactamente $j+1$; la estructura visible es una partición por máximo.

La segunda prueba hace más transparente por qué la suma completa debe ser un único coeficiente binomial; la primera muestra cómo Pascal produce algebraicamente esa acumulación.

74. Sean A y B conjuntos disjuntos con

$$|A| = r, \qquad |B| = s.$$

Contemos los subconjuntos $T \subseteq A \cup B$ con

$$|T| = n.$$

Directamente hay

$$\binom{r+s}{n}$$

posibilidades.

Si fijamos

$$k = |T \cap A|,$$

entonces debemos elegir k elementos de A y $n-k$ de B. Para ese valor de k hay

$$\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$$

elecciones.

Para que ambos coeficientes sean no nulos,

$$0 \leq k \leq r$$

y

$$0 \leq n-k \leq s.$$

La segunda condición equivale a

$$n-s \leq k \leq n.$$

Por tanto,

$$\text{máx}(0, n-s) \leq k \leq \text{mín}(r, n).$$

Las clases según k son disjuntas y exhaustivas. Así,

$$\boxed{\sum_{k=\text{máx}(0,n-s)}^{\text{mín}(r,n)} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}}.$$

Corolario. Queremos transformar

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}.$$

Por simetría,

$$\binom{s}{k} = \binom{s}{s-k}.$$

Entonces

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{s-k}.$$

Aplicando Vandermonde con tamaño total elegido s,

$$= \binom{r+s}{s} = \binom{r+s}{r}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} = \binom{r+s}{r}}.$$

Aquí el rango efectivo es

$$0 \leq k \leq \text{mín}(r, s).$$

Escribir simplemente $\sum_k$ es legítimo si previamente adoptamos la convención de que los coeficientes fuera de rango valen 0; si no, hay que escribir explícitamente el intervalo efectivo.

75. Queremos demostrar, para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Primera prueba: identidad local y reindexación. El término $k = 0$ vale 0, de modo que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Usamos

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}:$$
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Hacemos

$$j = k - 1.$$

Entonces

$$k = 1 \Rightarrow j = 0, \qquad k = n \Rightarrow j = n - 1,$$

y

$$n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}.$$

La suma de la fila $n-1$ es 2^{n-1}, por lo que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}.$$

Segunda prueba: pares (A, a). Sea $N = \{1, \ldots, n\}$. Contemos los pares

$$(A, a)$$

donde $A \subseteq N$ y $a \in A$ está distinguido.

Si clasificamos por $|A| = k$, hay $\binom{n}{k}$ elecciones para A y luego k elecciones para a. Sumando:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Alternativamente, elegimos primero el elemento distinguido a: hay n opciones. Para cada uno de los otros $n-1$ elementos decidimos independientemente si pertenece o no a A, lo que da

$$2^{n-1}$$

posibilidades. Total:

$$n2^{n-1}.$$

Comparación. La primera prueba transforma la suma mediante una identidad local y exhibe reindexación + suma de fila. La segunda identifica directamente el objeto global contado. Ambas explican el mismo factor n: en una aparece algebraicamente al extraerlo; en la otra corresponde a elegir primero el elemento distinguido.

76. Definamos

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}, \qquad 0 \le m < n.$$

Aplicamos Pascal:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Entonces

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

En la primera suma, el término $k = 0$ es

$$\binom{n-1}{-1} = 0.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}.$$

Reindexamos con

$$j = k - 1.$$

Entonces $j = 0, \ldots, m-1$ y

$$(-1)^k = (-1)^{j+1} = -(-1)^j.$$

Así,

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} = -\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{n-1}{j}.$$

Por consiguiente,

$$S_m = -\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

Renombrando el índice de la primera suma como k, los términos desde $k = 0$ hasta $m-1$ se cancelan. Sólo queda el último término de la segunda suma:

$$\boxed{S_m = (-1)^m \binom{n-1}{m}}.$$

Es decir,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}}.$$

La hipótesis $m < n$ mantiene el resultado en el régimen de **suma parcial**, donde el término final $\binom{n-1}{m}$ está dentro del rango natural. Si se toma la fila completa $m = n$, la identidad relevante estudiada antes es

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

77. Queremos demostrar, para $0 \le r \le k \le n$,

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

a) Prueba factorial. El lado izquierdo es

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{r!(k-r)!}.$$

Cancelando $k!$,

$$= \frac{n!}{r!(k-r)!(n-k)!}.$$

El lado derecho es

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{(n-r)!}{(k-r)!(n-k)!},$$

que se simplifica a

$$\frac{n!}{r!(k-r)!(n-k)!}.$$

Por tanto, ambos lados son iguales.

b) Doble conteo. Sea N un conjunto con n elementos. Contemos pares anidados

$$R \subseteq K \subseteq N$$

con

$$|R| = r, \qquad |K| = k.$$

Primer orden de construcción. Elegimos primero K: hay

$$\binom{n}{k}$$

opciones. Luego elegimos dentro de K el subconjunto R de tamaño r:

$$\binom{k}{r}.$$

Total:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r}.$$

Segundo orden de construcción. Elegimos primero R: hay

$$\binom{n}{r}$$

opciones. Para completar K, debemos elegir otros $k-r$ elementos entre los $n-r$ elementos de $N \setminus R$:

$$\binom{n-r}{k-r}.$$

Total:

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

Ambos métodos construyen exactamente los mismos pares (R, K), de modo que

$$\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}}.$$

78. Consideremos

$$(x+y+z)^n = \underbrace{(x+y+z)\cdots(x+y+z)}_{n \text{ factores}}.$$

a) Coeficiente de $x^a y^b z^c$. Para obtener $x^a y^b z^c$, con

$$a+b+c=n,$$

debemos decidir qué factores aportan x, cuáles aportan y y cuáles aportan z.
Primero elegimos los a factores que aportan x:

$$\binom{n}{a}.$$

De los $n-a$ restantes elegimos los b que aportan y:

$$\binom{n-a}{b}.$$

Los restantes c factores aportan z. Por tanto, el número de contribuciones es

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}.$$

Factorialmente,

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!}\frac{(n-a)!}{b!c!} = \boxed{\frac{n!}{a!b!c!}}.$$

b) Interpretación como reparto de posiciones. Las n posiciones de los factores se reparten en tres categorías:

- a posiciones etiquetadas x;
- b posiciones etiquetadas y;
- c posiciones etiquetadas z.

El coeficiente multinomial cuenta exactamente esos repartos.

c) Suma de coeficientes. La expansión completa es

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{a,b,c\geq 0\\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!b!c!}x^a y^b z^c.$$

Tomando $x = y = z = 1$,

$$3^n = \sum_{\substack{a,b,c\geq 0\\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!b!c!}.$$

Así, la suma de todos los coeficientes trinomiales de orden n es

$$\boxed{3^n}.$$

79. La supuesta prueba contiene varios errores distintos.

1. Primer producto distribuido: rangos y exponentes. Desde la hipótesis inductiva,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,$$

tenemos

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k\\ &+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}.\end{aligned}$$

En la propuesta, la primera suma aparece con rango $1 \leq k \leq n+1$ sin una reindexación que lo justifique. Además, si se cambia el índice, deben cambiar también coeficiente y exponentes.

2. Reindexación correcta de la segunda suma. En

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1},$$

hacemos

$$j = k+1.$$

Entonces

$$k = j-1,$$

los límites pasan de $0, n$ a $1, n+1$, y el sumando se transforma en

$$\binom{n}{j-1}x^{n+1-j}y^j.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n+1-j}y^j.$$

Después podemos renombrar j como k.

3. Los términos extremos no pueden combinarse como si ambas sumas tuvieran el mismo rango. Tras la reindexación correcta obtenemos

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k \\ &+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

El término $k=0$ aparece sólo en la primera suma:

$$\binom{n}{0}x^{n+1} = x^{n+1}.$$

El término $k=n+1$ aparece sólo en la segunda:

$$\binom{n}{n}y^{n+1} = y^{n+1}.$$

Sólo en el rango interior $1 \le k \le n$ se pueden sumar coeficientes.

4. Pascal fue aplicado al par equivocado. La propuesta usa

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k+1},$$

pero Pascal combina índices inferiores consecutivos:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

El término $\binom{n}{k+1}$ no pertenece al par correcto.

5. Reconstrucción correcta. La base $n=0$ es $1=\binom{0}{0}$, con las potencias cero interpretadas como productos vacíos según §13.8. Suponemos ahora la identidad para un $n \ge 0$. La distribución y la reindexación ya justificadas producen las dos sumas de rangos $0, \ldots, n$ y $1, \ldots, n+1$.

En el rango interior,

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Por tanto,

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k}y^k + y^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k}y^k.$$

Éste es exactamente el enunciado para $n+1$. La base y el paso inductivo demuestran la identidad para todos los enteros $n \geq 0$. Si $n = 0$ en el paso, la suma interior es vacía y los extremos dan $x + y$.

Los errores de la prueba defectuosa son, por tanto: cambiar rangos sin reindexar, no transformar simultáneamente índice/límites/sumando, perder los extremos, desajustar exponentes y aplicar Pascal a coeficientes que no forman el par requerido.

80. Queremos demostrar

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

a) Vandermonde + simetría. Vandermonde con $r = s = n$ y tamaño total elegido igual a n da

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Por simetría,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Entonces

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}.$$

El rango es exactamente $0 \leq k \leq n$, pues ambos bloques tienen tamaño n y estamos eligiendo n elementos en total.

b) Doble conteo directo. Dividamos un conjunto de $2n$ elementos en dos bloques disjuntos A y B, cada uno con n elementos.

Queremos contar los subconjuntos de tamaño n del total. Directamente hay

$$\binom{2n}{n}.$$

Ahora clasificamos esos subconjuntos según el número k de elementos que contienen de A. Si elegimos k elementos de A, debemos elegir los otros $n-k$ de B. Para un k fijo hay

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

posibilidades.

Por simetría,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

así que la clase correspondiente a k tiene

$$\binom{n}{k}^2$$

elementos.

Sumando para $k = 0, \ldots, n$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Comparación. La prueba con Vandermonde es compacta y muestra que la identidad es una especialización de una convolución general. La prueba de doble conteo expone directamente qué significa cada cuadrado $\binom{n}{k}^2$: una elección de k elementos del primer bloque junto con una elección complementaria de $n-k$ elementos del segundo. La segunda hace más visible la estructura combinatoria; la primera sitúa la identidad dentro de una familia más amplia.

N. Construcción, traducción y revisión de pruebas

81. Los objetos son subconjuntos $T \subseteq S$ con $|T| = k$ y $|T \cap D|$ par. Fijado ese valor j, las partes en D y $S \setminus D$ tienen tamaños j y $k-j$. Se eligen de $\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}$ maneras; las dos partes son disjuntas y reconstruyen T de manera única. Las restricciones dan $\max(0, k-n+m) \le j \le \min(m,k)$. Por tanto, la cantidad buscada es

$$\boxed{\sum_{\substack{\max(0,k-n+m)\le j\le \min(m,k)\\ j \text{ par}}} \binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}}.$$

Cada objeto tiene un único j par, así que las clases son disjuntas y exhaustivas dentro de la familia restringida. Si no hay ningún índice par viable, la suma es vacía y vale cero. Para $m = 0$, $j = 0$ y todos los $\binom{n}{k}$ subconjuntos son aptos. Para $m = 1$, sólo sirve $j = 0$: deben excluir al único elemento de D, y la cantidad es $\binom{n-1}{k}$, cero si $k = n$. Para $m = n$, necesariamente $j = k$: hay $\binom{n}{k}$ elecciones si k es par y ninguna si es impar. Esto incluye $n = m = k = 0$, con una elección vacía.

Si $m = 2$, los únicos valores pares posibles son cero y dos. Usando coeficientes cero fuera de rango, la cantidad es $\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-2}$, pues $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$. Se eligen ninguno o ambos elementos de D. Aquí $n \ge 2$, de modo que los índices superiores son no negativos. No se ha contado toda la familia de tamaño k: la restricción de paridad determina qué clases se pueden sumar.

82. Si el segundo elemento mayor es j, se incluye j, se eligen los $k-2$ elementos menores entre $1, \ldots, j-1$ y se elige exactamente un elemento mayor entre $j+1, \ldots, n$. Hay

$$\binom{j-1}{k-2}(n-j)$$

elecciones. La primera elección es posible si $j \ge k-1$; la segunda si $j \le n-1$. Cada conjunto de tamaño al menos dos tiene un único segundo elemento mayor, de modo que las clases son disjuntas y exhaustivas. Además, las tres partes reconstruyen el conjunto de forma única. Luego

$$\boxed{\sum_{j=k-1}^{n-1}(n-j)\binom{j-1}{k-2}=\binom{n}{k}}.$$

Para $n=5$, $k=3$, las clases $j=2,3,4$ aportan $3\cdot 1$, $2\cdot 2$, $1\cdot 3$, respectivamente: $3+4+3=10=\binom{5}{3}$. Clasificar por máximo fija el último elemento y deja todos los restantes debajo; aquí se fija el penúltimo y todavía se debe elegir el máximo, lo que explica el factor $n-j$. En $k=2$, el factor binomial es $\binom{j-1}{0}=1$, y en $k=n$ sólo queda $j=n-1$; ambos extremos dan la cuenta correcta.

83. Si j es el primer ausente, los elementos $1,\dots,j-1$ están presentes y j no está. Los otros $k-j+1$ se eligen de $j+1,\dots,n$, por lo que esa clase contiene $\binom{n-j}{k-j+1}$ objetos. Si los primeros m están todos presentes, faltan $k-m$ elementos entre los $n-m$ restantes. La identidad es

$$\boxed{\binom{n}{k}=\sum_{j=1}^{m}\binom{n-j}{k-j+1}+\binom{n-m}{k-m}}.$$

Todos los índices superiores son no negativos. Los índices inferiores imposibles dan cero por la convención declarada. Una elección tiene exactamente un primer ausente o no tiene ninguno entre los primeros m; por ello las clases son disjuntas y exhaustivas. Sus elementos fijados y su parte libre reconstruyen la elección de modo único. Para $k=0$, sólo la clase $j=1$ contribuye $\binom{n-1}{0}=1$; todos los demás términos son cero. Las clases «j está ausente» se solapan: el conjunto vacío pertenece a todas ellas si $m>1$. Exigir que sea el **primer** ausente elimina esa multiplicidad.

84. A una palabra le asociamos el conjunto de posiciones donde aparece 1. Su inversa pone 1 en las posiciones elegidas y 0 en las demás, así que las palabras con q unos son $\binom{r+s}{q}$. Partimos la palabra después de sus primeras r posiciones. Si ese bloque contiene j unos, el segundo contiene $q-j$. Hay $\binom{r}{j}\binom{s}{q-j}$ palabras, porque cada elección en los dos bloques determina exactamente una palabra por concatenación. Las clases son disjuntas y exhaustivas por el número único de unos del primer bloque. La viabilidad exige $0\le j\le r$ y $0\le q-j\le s$, que produce el rango indicado.

Para $(2,3,4)$, $j=1,2$ da $2\cdot 1+1\cdot 3=5=\binom{5}{4}$. Un bloque de longitud cero tiene una única palabra, la palabra vacía, y contiene cero unos. Si ambos bloques son vacíos, necesariamente $q=0$ y ambos lados valen uno. La traducción mantiene las posiciones distintas aunque los símbolos se repitan.

85. Los objetos son ternas (T,a,b) con $T\subseteq S$, $a,b\in T$ y $a\neq b$; los cargos dan orden al par (a,b). Para $|T|=k$, hay $\binom{n}{k}$ equipos y $k(k-1)$ asignaciones de cargos. Si $k=0$ o 1, no hay asignaciones y el término es cero. Sumando tamaños se obtiene el lado izquierdo.

Si elegimos primero a la presidencia y luego a la secretaría, hay $n(n-1)$ pares ordenados. Cada una de las otras $n-2$ personas puede pertenecer o no al equipo; hay 2^{n-2} posibilidades. Cada terna se construye exactamente una vez en ambos órdenes, de donde resulta la identidad. No se divide por dos: intercambiar los cargos produce un objeto distinto. Para $n=2$, el único equipo apto contiene ambas personas y admite dos asignaciones; la fórmula da $2\cdot 1\cdot 2^0=2$.

La identidad local correspondiente, para $2\le k\le n$, es $k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Al reindexar $j=k-2$ en la suma de los términos aptos se recupera también la suma de la fila $n-2$.

86. Contamos pares (R, T) de subconjuntos disjuntos de las n posiciones, con $|R| = \ell$ y sin tamaño fijado para T. Si $|T| = k$, elegimos primero T de $\binom{n}{k}$ maneras y luego R entre las posiciones restantes, de $\binom{n-k}{\ell}$ maneras. Los valores posibles son $0 \le k \le n - \ell$. Cada par pertenece a una única clase por k, y el orden de construcción no cambia el objeto.

Si elegimos primero R, hay $\binom{n}{\ell}$ elecciones. Las $n - \ell$ posiciones libres deciden independientemente si pertenecen a T, por lo que hay $2^{n-\ell}$ posibilidades. Ambos métodos son exhaustivos y no repiten pares; queda demostrada la identidad.

Si $\ell = 0$, R es vacío y la igualdad se reduce a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Si $\ell = n$, R contiene todas las posiciones y T debe ser vacío: el único término $k = 0$ vale uno. Esto incluye $n = 0$, donde existe exactamente el par de conjuntos vacíos.

87. La suma defectuosa vale $1 + 4 + 1 = 6$, mientras que $A \cup B = \{a, b, c\}$ tiene sólo $\binom{3}{2} = 3$ subconjuntos de tamaño dos. Una elección separada puede tomar b en ambos grupos y producir la unión $\{b\}$, de tamaño uno. También puede producir el mismo subconjunto de varias maneras: $\{a, b\}$ resulta de tomar ambos elementos de A o de tomar a en A y b en B. Fallan tanto el tamaño como la unicidad.

Dividimos ahora la unión en $A \setminus B$, $A \cap B$ y $B \setminus A$, de tamaños $r - t$, t y $s - t$. Aquí $0 \le t \le \min(r, s)$. Para una elección de tamaño q, sean i y j las cantidades tomadas de las primeras dos partes; la tercera aporta $q - i - j$. Con coeficientes cero fuera de rango,

$$\boxed{\binom{r+s-t}{q} = \sum_{i=0}^{r-t} \sum_{j=0}^{t} \binom{r-t}{i} \binom{t}{j} \binom{s-t}{q-i-j}.}$$

Cada elección determina un único par (i, j) y tres intersecciones; las partes disjuntas reconstruyen la elección de tamaño q. Así las clases son disjuntas y exhaustivas. En el ejemplo, las tres partes son unitarias y elegir dos de ellas da las tres elecciones correctas. No hemos corregido la fórmula cambiando sólo su lado derecho: se necesita reparar el objeto y su construcción.

88. Sea S no vacío y fijemos $a \in S$. A un subconjunto T le asociamos $T \setminus \{a\}$ si contiene a, y $T \cup \{a\}$ si no lo contiene. La transformación cambia el tamaño en uno, por lo que intercambia paridad. Al aplicarla dos veces recuperamos T; es una biyección entre los subconjuntos de tamaño par y los de tamaño impar. Como el total es 2^n, cada familia tiene 2^{n-1} elementos.

Para $n = 0$, S es vacío y su único subconjunto es vacío, de tamaño par. Las cantidades son uno y cero. No existe un elemento a cuya pertenencia se pueda cambiar; precisamente la elección inicial de a deja de estar disponible. También la suma alternada vale $\binom{0}{0} = 1$, no cero. Por tanto, retirar $n \ge 1$ cambia el resultado, además de invalidar la construcción. El argumento prueba la igualdad por una correspondencia concreta, en vez de deducirla únicamente por sustitución.

89. Para cada uno de los 2^n subconjuntos T hay n opciones de a, pertenezca o no a T. La nueva cantidad es $n2^n$. Clasificando por $|T| = k$, el peso correcto es n, de modo que la suma es $\sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k} = n2^n$.

En la clase $a \in T$, fijar T da k opciones; en la clase $a \notin T$ da $n - k$. Son clases disjuntas y exhaustivas porque cada elemento pertenece o no al subconjunto. Para contar cada clase también podemos elegir primero a: los otros $n - 1$ elementos se deciden libremente, y la pertenencia del propio a queda fijada. Cada clase tiene $n2^{n-1}$ pares. Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k} = n2^n.$$

Conservar el peso k seguiría contando sólo la primera clase y perdería todos los pares con a fuera de T. Para $n = 1$, los nuevos pares son $(\varnothing, a)$ y $(\{a\}, a)$; el conteo antiguo sólo incluía el segundo. Si se examina aparte $n = 0$, no hay pares de ninguna clase: esta conclusión directa no requiere una fórmula que use una fila de índice superior -1.

90. Tomamos bloques disjuntos R, S, T de tamaños r, s, t. Los objetos son subconjuntos de tamaño q de su unión. Fijar las cantidades i en R y j en S obliga a tomar $q - i - j$ en T. Las elecciones en los tres bloques se multiplican porque sus intersecciones reconstruyen el subconjunto de manera única. Las clases por (i, j) son disjuntas y exhaustivas. Las cantidades imposibles dan cero; sumando las clases obtenemos la identidad.

Para la otra prueba, fijamos i. Si $u = q - i$ satisface $0 \le u \le s + t$, Vandermonde da

$$\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j}\binom{t}{u-j} = \binom{s+t}{u}.$$

Si $u < 0$ o $u > s + t$, todos los productos son cero y el lado derecho también lo es: la igualdad interior sigue siendo válida por la convención. Así la doble suma se reduce a $\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}\binom{s+t}{q-i} = \binom{r+s+t}{q}$, por Vandermonde aplicado a tamaños r y $s + t$.

La prueba directa obtiene la generalidad de la reconstrucción para tamaños arbitrarios, sin depender de ejemplos numéricos. La prueba sucesiva la obtiene de las hipótesis de Vandermonde y de la comprobación explícita de los valores imposibles de u. Si algún bloque es vacío, su única elección es el subconjunto vacío; el coeficiente correspondiente sólo contribuye en índice cero. Ambas pruebas lo incluyen. Para $r = s = t = q = 0$, hay un único subconjunto vacío y ambos lados valen uno.

91. Directamente, $W_0 = 0$ y $W_1 = -1$. Para $n \ge 2$, la identidad local $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, aplicada desde $k = 1$, permite escribir

$$W_n = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} = -n\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j} = 0.$$

En la reindexación $j = k - 1$ cambian los límites a $0, n - 1$ y el signo a $(-1)^{j+1} = -(-1)^j$. La última suma vale cero porque $n - 1 \ge 1$. Para $n = 1$ esa suma vale uno, lo que también produce -1.

En la prueba por emparejamiento, asignamos a cada par (T, a) el signo $(-1)^{|T|}$. Tomamos $S = \{1, \dots, n\}$ y, para cada a, fijamos b_a como el menor elemento de $S \setminus \{a\}$. Existe porque $n \ge 2$ y depende sólo de a. Cambiar la pertenencia de b_a en T mantiene $a \in T$, cambia la paridad y, al repetirse, recupera el mismo par. No hay pares fijos, de modo que los signos se cancelan dos a dos. La suma de signos por tamaños es exactamente W_n.

La prueba algebraica hace visible el signo perdido al desplazar el índice y utiliza la fila $n - 1$. La prueba por pares explica la cancelación y por qué debe existir un segundo elemento. Para $n = 1$, no hay tal elemento y queda el único par de signo negativo; para $n = 0$, no hay pares. El resultado completo es $W_n = -1$ si $n = 1$ y $W_n = 0$ en los demás casos.

92. Sustituir $x = 1$ e $y = 2$ en el teorema del binomio da directamente

$$(1 + 2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}.$$

Para la prueba de conteo, llamemos a las etiquetas A, B y C. Hay 3^n asignaciones porque cada posición decide independientemente una de tres etiquetas. Si exactamente k posiciones tienen etiqueta distinta de A, se eligen esas posiciones de $\binom{n}{k}$ maneras y cada una decide entre B y C, dando 2^k opciones. Las restantes están obligadas a recibir A. Cada asignación

determina un único conjunto de posiciones distintas de A y sus etiquetas; la reconstrucción es única. Las clases por k son exhaustivas y disjuntas, por lo que su suma cuenta todas las asignaciones.

La prueba por sustitución hereda la generalidad del teorema demostrado para todo entero no negativo. La prueba de conteo la establece directamente con elecciones independientes y una partición válida para un número arbitrario de posiciones. Unos pocos ejemplos numéricos no reemplazan ninguno de esos pasos. Si $n = 0$, hay una única asignación vacía y la suma contiene el término $2^0\binom{0}{0} = 1 = 3^0$.

Capítulo 14

Los enteros y la divisibilidad

Hasta ahora hemos trabajado con expresiones, demostraciones, relaciones, funciones, inducción, sumas finitas y coeficientes binomiales. En todos esos temas los enteros aparecieron como objetos familiares sobre los cuales podíamos calcular. A partir de este capítulo cambia el punto de vista: comenzaremos a estudiar la aritmética de los enteros como una estructura matemática en sí misma.

El concepto inicial será elemental: que un entero **divida** a otro. Pero la familiaridad puede engañar. En matemáticas, escribir $a \mid b$ no significa que una calculadora pueda efectuar una división decimal; significa que existe un entero que sirve de cociente exacto. Esa condición de existencia convierte la divisibilidad en una relación apta para demostrar teoremas, construir contraejemplos, estudiar ecuaciones y organizar conjuntos de múltiplos.

La idea central del capítulo puede resumirse así:

> **Una afirmación de divisibilidad es una afirmación de existencia. Para demostrarla debemos producir, explícita o implícitamente, un testigo entero.**

Esta perspectiva nos permitirá pasar de preguntas como "¿6 divide a 42?" a cuestiones más estructurales: ¿qué operaciones conservan la divisibilidad?, ¿qué puede deducirse de varios divisores comunes?, ¿qué relación hay entre $a \mid b$ y los conjuntos $a\mathbb{Z}$ y $b\mathbb{Z}$?, ¿cuándo una ecuación puede tener soluciones enteras?, ¿cómo puede una identidad algebraica fabricar divisibilidades?

Todavía no desarrollaremos el máximo común divisor, el algoritmo de Euclides, los números primos ni las congruencias. El objetivo es más básico y, a la vez, más profundo: obtener todo lo posible directamente de la definición de divisibilidad y de las combinaciones lineales.

14.1. Una ecuación que puede no tener solución entera

Consideremos las ecuaciones

$$6x = 42$$

y

$$6x = 43.$$

Si el dominio es $\mathbb{R}$, ambas tienen solución:

$$x = 7$$

y

$$x = \frac{43}{6}.$$

Pero si exigimos $x \in \mathbb{Z}$, la situación cambia. La primera ecuación conserva la solución $x = 7$, mientras que la segunda no tiene solución entera.

La diferencia no está en que una ecuación sea "más difícil" que la otra. Está en una propiedad aritmética precisa: 42 puede escribirse como 6 multiplicado por un entero, mientras que 43 no.

En efecto,

$$42 = 6 \cdot 7,$$

pero no existe ningún $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$43 = 6q.$$

Esto sugiere que, cuando trabajamos sobre los enteros, una ecuación de la forma

$$ax = b$$

no debe analizarse solamente mediante la operación formal "dividir ambos lados por a". La pregunta decisiva es otra:

¿Existe un entero x tal que $b = ax$?

Ese problema de existencia es exactamente el que codificará la relación de divisibilidad.

Obsérvese el cambio de perspectiva. En álgebra elemental solemos interpretar

$$x = \frac{b}{a}$$

como una expresión válida siempre que $a \neq 0$. En aritmética entera, en cambio, el número b/a puede existir como racional y, sin embargo, no pertenecer a $\mathbb{Z}$. Por eso el dominio forma parte esencial del problema.

Por ejemplo,

$$8x = -56$$

tiene la solución entera $x = -7$, pero

$$8x = -55$$

no la tiene. Los signos no son el obstáculo: lo relevante es si el término independiente es un múltiplo entero del coeficiente.

Esta observación proporciona la puerta de entrada al concepto fundamental del capítulo.

14.2. Definición de divisibilidad y testigos

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$. Diremos que a **divide a** b si existe un entero q tal que

$$b = aq.$$

Lo escribimos

$$a \mid b.$$

Formalmente,

$$\boxed{a \mid b \iff \exists q \in \mathbb{Z} : \ b = aq}$$

con la convención, fijada para este tomo, de que el divisor a es siempre no nulo.

El entero q es un **testigo de divisibilidad**. Si queremos demostrar que $a \mid b$, basta exhibir un entero que cumpla la ecuación requerida.

Por ejemplo,

$$7 \mid 42$$

porque

$$42 = 7 \cdot 6.$$

Aquí 6 es un testigo.

También

$$-7 \mid 42$$

porque

$$42 = (-7)(-6),$$

y

$$7 \mid (-42)$$

porque

$$-42 = 7(-6).$$

La definición no privilegia los enteros positivos. El testigo puede ser positivo, negativo o cero.

En cambio,

$$5 \nmid 18,$$

porque no existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $18 = 5q$. El cociente $18/5$ existe en $\mathbb{Q}$, pero no es un entero. Por tanto, no sirve como testigo.

Conviene mantener simultáneamente tres lecturas de una misma afirmación:

$$a \mid b;$$

"a divide a b";

$$b = aq \quad \text{para algún } q \in \mathbb{Z};$$

y

"existe un testigo entero que expresa a b como múltiplo de a".

Esta tercera lectura será especialmente útil en las demostraciones. Cuando una hipótesis diga $a \mid b$, casi siempre el primer paso será **desplegar la definición** y escribir

$$b = aq$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$.

Análogamente, para demostrar una conclusión del tipo $a \mid c$, tendremos que llegar a una igualdad

$$c = ar$$

con $r \in \mathbb{Z}$.

La divisibilidad será, por tanto, un entrenamiento continuo en el uso matemático de los cuantificadores existenciales estudiados en C6.

Nota pedagógica — El dominio del testigo es parte de la afirmación. Para $a \neq 0$, la igualdad $b = aq$ determina un único candidato $q = b/a$. Encontrarlo en $\mathbb{Q}$ todavía no prueba $a \mid b$: falta demostrar que pertenece a $\mathbb{Z}$. Si se permitieran testigos racionales, cualquier entero no nulo dividiría a cualquier entero y desaparecería la distinción que estamos estudiando.

Hay dos formas de cerrar una prueba. Para afirmar divisibilidad, escribe $b = aQ$ y explica por qué Q es entero. Para negarla, descarta el único candidato o demuestra que ninguna posición de la lista de múltiplos puede dar b. No hace falta probar infinitos cocientes uno a uno.

Control resuelto. Para $m \in \mathbb{Z}$, $7 \mid (14m - 7)$ porque $14m - 7 = 7(2m - 1)$. El testigo $2m - 1$ es entero incluso si m es negativo. En cambio, $7 \nmid (14m - 4)$: una igualdad $14m - 4 = 7q$ obligaría a $7[q - (2m - 1)] = 3$. El entero entre corchetes no puede ser cero, porque el lado derecho no lo es; si fuera no nulo, el valor absoluto del lado izquierdo sería al menos siete. Como $|3| < 7$, hay contradicción.

Qué revisar al dividir. La división puede conservar una igualdad racional y perder la condición de testigo entero. Incluso si el resultado final es entero, su cociente por el divisor puede no serlo: $6/2 = 3$ es entero, pero no es múltiplo de seis. La condición decisiva debe comprobarse después de la transformación.

14.3. Múltiplos y divisores

Si $a \mid b$, utilizamos tres expresiones equivalentes:

- a **divide** a b;
- a es un **divisor** de b;
- b es un **múltiplo** de a.

Por ejemplo, como

$$30 = 5 \cdot 6,$$

podemos decir que 5 divide a 30, que 5 es un divisor de 30 o que 30 es un múltiplo de 5.

Para un entero no nulo a, sus múltiplos forman la sucesión bilateral

$$\ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots$$

que más adelante escribiremos de forma compacta como $a\mathbb{Z}$.

Por ejemplo, los múltiplos de 4 son

$$\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots$$

y los múltiplos de -4 son exactamente los mismos números. Esto anticipa una propiedad importante: cambiar el signo del divisor no cambia el conjunto de sus múltiplos.

Los divisores de un entero fijo se comportan de manera diferente. Para 12, por ejemplo, los divisores son

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12.$$

En cambio, 5 no es divisor de 12 porque $12/5$ no es entero.

Un entero no nulo tiene sólo una cantidad finita de divisores. Más adelante probaremos formalmente la razón: si $d \mid n$ y $n \neq 0$, entonces

$$|d| \leq |n|.$$

Por tanto, cualquier divisor de n debe encontrarse dentro del conjunto finito de enteros comprendidos entre $-|n|$ y $|n|$.

Esta observación también ayuda a evitar una confusión frecuente. Ser divisor no significa simplemente ser menor en valor absoluto. Por ejemplo,

$$4 < 10,$$

pero

$$4 \nmid 10.$$

La divisibilidad no es una comparación de tamaños; es una condición de multiplicación exacta.

Tampoco debemos confundir "a divide a b" con "b divide a a". Por ejemplo,

$$3 \mid 12,$$

pero

$$12 \nmid 3.$$

La relación tiene una dirección, y esa dirección será crucial cuando la estudiemos como relación matemática.

14.4. Signos, cero y divisores universales

La definición permite controlar los signos sin necesidad de memorizar reglas separadas.

Supongamos que $a \mid b$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Pero también

$$b = (-a)(-q),$$

de modo que

$$(-a) \mid b.$$

Además,

$$-b = a(-q),$$

por lo que

$$a \mid (-b).$$

En consecuencia, para $a \neq 0$,

$$\boxed{a \mid b \iff (-a) \mid b \iff a \mid (-b)}.$$

El signo no altera la divisibilidad esencial; sólo modifica el signo del testigo.

Hay dos divisores que aparecen en todos los enteros. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,

$$n = 1 \cdot n$$

y

$$n = (-1)(-n).$$

Por tanto,

$$1 \mid n \qquad \text{y} \qquad -1 \mid n$$

para todo entero n.

El cero exige más cuidado. Si $a \neq 0$, entonces

$$0 = a \cdot 0,$$

de modo que

$$\boxed{a \mid 0 \quad \text{para todo } a \neq 0.}$$

Así, todo entero no nulo divide a 0.

Pero en este tomo **no admitimos a** 0 **como divisor**. Nuestra definición de $a \mid b$ incluye explícitamente la hipótesis $a \neq 0$. Por tanto, expresiones del tipo

$$0 \mid b$$

quedan fuera de la relación definida aquí.

Esta convención evita mezclar dos cuestiones distintas. Si uno permitiera formalmente $0 \mid 0$, la ecuación $0 = 0q$ tendría infinitos testigos; si $b \neq 0$, la ecuación $b = 0q$ no tendría ninguno. Algunos textos adoptan convenciones diferentes. Nosotros mantendremos una sola regla estable en C14–C17:

el divisor de una expresión $a \mid b$ debe ser no nulo.

Así, cada vez que usemos divisibilidad podremos contar con esa hipótesis sin tener que reabrir la convención.

14.5. El cálculo elemental de la divisibilidad

Las primeras propiedades de la divisibilidad se obtienen directamente construyendo testigos.

Reflexividad. Si $a \neq 0$, entonces

$$a = a \cdot 1.$$

Como $1 \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{a \mid a.}$$

La relación de divisibilidad es, por tanto, reflexiva sobre los enteros no nulos.

Multiplicar un múltiplo. Si $a \mid b$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Para cualquier $c \in \mathbb{Z}$,

$$bc = (aq)c = a(qc).$$

Como $qc \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{a \mid bc.}$$

El nuevo testigo es qc.

Transitividad. Supongamos

$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad b \mid c,$$

con $a, b \neq 0$. Entonces existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$b = ar$$

y

$$c = bs.$$

Sustituyendo,

$$c = (ar)s = a(rs).$$

Como $rs \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{a \mid c.}$$

Suma y resta de múltiplos. Si

$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad a \mid c,$$

podemos escribir

$$b = ar, \qquad c = as$$

con $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$b + c = a(r + s)$$

y

$$b - c = a(r - s).$$

Como $r + s$ y $r - s$ son enteros,

$$\boxed{a \mid (b + c)}$$

y

$$\boxed{a \mid (b - c)}.$$

Estas demostraciones ilustran el patrón que debe hacerse automático:

1. desplegar la hipótesis de divisibilidad;
2. nombrar los testigos;
3. operar algebraicamente;
4. identificar un nuevo testigo entero.

La frase "es obvio que sigue siendo divisible" puede ocultar precisamente el paso que una demostración debe justificar.

14.6. Combinaciones lineales

La propiedad de suma y resta admite una forma mucho más potente.

Supongamos que $d \mid a$ y $d \mid b$. Entonces existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = du, \qquad b = dv.$$

Sean ahora $r, s \in \mathbb{Z}$. Consideremos la combinación

$$ra + sb.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$ra + sb = r(du) + s(dv) = d(ru + sv).$$

Como $ru + sv \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\boxed{d \mid a \text{ y } d \mid b \Longrightarrow d \mid (ra + sb)}$$

para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$.

La expresión $ra + sb$ se llama una **combinación lineal entera** de a y b.

Esta propiedad contiene varios resultados anteriores como casos particulares. Si elegimos

$$r = s = 1,$$

obtenemos $d \mid (a + b)$. Si elegimos

$$r = 1, \qquad s = -1,$$

obtenemos $d \mid (a - b)$. Si tomamos $s = 0$, recuperamos que cualquier múltiplo entero de a sigue siendo divisible por d.

La utilidad real aparece cuando escogemos los coeficientes de manera estratégica. Supongamos, por ejemplo, que sabemos

$$d \mid 84$$

y

$$d \mid 30.$$

Entonces también

$$d \mid (84 - 2 \cdot 30) = 24,$$

y luego

$$d \mid (30 - 24) = 6.$$

Sin haber identificado todavía cuál es el "mejor" divisor común, hemos reducido dos números grandes a uno mucho menor usando únicamente combinaciones lineales.

La misma idea se extiende a cualquier cantidad finita de enteros. Si d divide a cada uno de

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

entonces, para cualesquiera enteros $r_1, \dots, r_n$,

$$\boxed{d \mid (r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n).}$$

La demostración es idéntica: escribir $a_i = dq_i$ y factorizar d.

Esta propiedad será una de las herramientas longitudinales del bloque de aritmética. En C15 veremos que las combinaciones lineales no sólo producen nuevas divisibilidades: también permiten localizar un divisor común especialmente importante.

14.7. Cancelación, tamaño y divisibilidad mutua

La divisibilidad permite ciertas cancelaciones, pero sólo bajo hipótesis controladas.

Cancelación de un factor común. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$ y $c \neq 0$. Supongamos

$$ca \mid cb.$$

Por definición, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$cb = (ca)q = c(aq).$$

Como $c \neq 0$, podemos cancelar c en la igualdad de enteros y obtener

$$b = aq.$$

Por tanto,

$$\boxed{ca \mid cb \Longrightarrow a \mid b}$$

cuando el factor cancelado c es no nulo.

Obsérvese que no estamos cancelando dentro del símbolo $\mid$ de forma puramente visual. Primero traducimos la divisibilidad a una igualdad y sólo entonces aplicamos una ley de cancelación válida.

El tamaño de un divisor. Supongamos que

$$a \mid b$$

y que $b \neq 0$. Entonces

$$b = aq$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$. Como $b \neq 0$, necesariamente $q \neq 0$. Por tanto,

$$|q| \geq 1.$$

Tomando valores absolutos,

$$|b| = |a||q| \geq |a|.$$

Luego

$$\boxed{a \mid b,\ b \neq 0 \Longrightarrow |a| \leq |b|.}$$

Ésta es la razón formal por la cual un entero no nulo tiene sólo finitos divisores.

Divisibilidad mutua. Supongamos ahora que $a, b \neq 0$ y

$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad b \mid a.$$

La primera divisibilidad da

$$|a| \leq |b|,$$

y la segunda,

$$|b| \leq |a|.$$

Por antisimetría del orden usual,

$$|a| = |b|.$$

Así,

$$\boxed{a \mid b \text{ y } b \mid a \Longrightarrow a = \pm b.}$$

El signo es esencial. De

$$2 \mid (-2)$$

y

$$-2 \mid 2$$

no podemos concluir $2 = -2$.

Este detalle anticipa por qué la divisibilidad será un orden parcial sobre los enteros positivos, pero no sobre todos los enteros no nulos.

14.8. Divisibilidad como relación

En C8 estudiamos relaciones mediante propiedades como reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad. Podemos aplicar ahora ese lenguaje a la divisibilidad.

Consideremos primero la relación $\mid$ sobre

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ya sabemos que es **reflexiva**:

$$a \mid a.$$

También es **transitiva**:

$$a \mid b, \quad b \mid c \Longrightarrow a \mid c.$$

No es simétrica. Por ejemplo,

$$2 \mid 6,$$

pero

$$6 \nmid 2.$$

Tampoco es antisimétrica sobre $\mathbb{Z}^*$. En efecto,

$$2 \mid (-2)$$

y

$$-2 \mid 2,$$

pero $2 \neq -2$.

El obstáculo es exactamente el signo. Si restringimos la relación al conjunto de enteros positivos

$$\mathbb{Z}_{>0},$$

la situación cambia.

Sean $a, b > 0$ y supongamos

$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad b \mid a.$$

Por divisibilidad mutua,

$$a = \pm b.$$

Como ambos son positivos, sólo es posible

$$a = b.$$

Así, sobre $\mathbb{Z}_{>0}$, la divisibilidad es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por tanto:

$$\boxed{\mid \text{ es un orden parcial sobre } \mathbb{Z}_{>0}.}$$

No es un orden total. Por ejemplo, entre 2 y 3 no se cumple ni

$$2 \mid 3$$

ni

$$3 \mid 2.$$

Los dos elementos son incomparables respecto de la divisibilidad.

En un conjunto pequeño, como

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$

podemos visualizar esta relación observando qué números dividen a cuáles. El 1 está por debajo de todos en el orden de divisibilidad, mientras que 12 recibe divisibilidad de varios elementos. Sin embargo, no desarrollaremos aquí teoría de retículos ni diagramas más generales; nos basta reconocer que una noción aritmética familiar posee una estructura relacional precisa.

14.9. El conjunto $a\mathbb{Z}$ y la inclusión invertida

Para un entero no nulo a, definimos

$$a\mathbb{Z} = \{ak : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Este conjunto contiene exactamente todos los múltiplos enteros de a.
Por ejemplo,

$$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

y

$$6\mathbb{Z} = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, \ldots\}.$$

Se observa que

$$6\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}.$$

La razón es que todo múltiplo de 6 también es múltiplo de 2.
Esta observación se generaliza.

Proposición. Para $a, b \neq 0$,

$$\boxed{a \mid b \iff b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.}$$

Demostración. Supongamos primero que $a \mid b$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Sea $x \in b\mathbb{Z}$. Por definición, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x = bt.$$

Sustituyendo $b = aq$,

$$x = (aq)t = a(qt).$$

Como $qt \in \mathbb{Z}$, se tiene $x \in a\mathbb{Z}$. Por tanto,

$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

Recíprocamente, supongamos

$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

Como

$$b = b \cdot 1,$$

tenemos $b \in b\mathbb{Z}$. Por la inclusión, $b \in a\mathbb{Z}$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq,$$

y por definición $a \mid b$.
La equivalencia queda demostrada.
Hay una inversión conceptual interesante:

$$a \mid b$$

significa que b está "por encima" de a en el orden de divisibilidad, pero al pasar a conjuntos de múltiplos obtenemos

$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

La dirección se invierte.

También podemos caracterizar cuándo dos conjuntos de múltiplos son iguales. Si

$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z},$$

entonces tenemos simultáneamente

$$a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$$

y

$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

Por la equivalencia anterior,

$$b \mid a$$

y

$$a \mid b.$$

Luego

$$a = \pm b.$$

El recíproco es inmediato, pues a y $-a$ tienen los mismos múltiplos. Así,

$$\boxed{a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \iff a = \pm b.}$$

Más adelante, en álgebra abstracta, conjuntos como $a\mathbb{Z}$ adquirirán interpretaciones adicionales. Aquí sólo necesitamos verlos como conjuntos de múltiplos y explotar la relación entre divisibilidad e inclusión.

Nota pedagógica — Una inclusión requiere todos los múltiplos. La inversión de §14.9 se controla siguiendo un elemento arbitrario. Si $b = aq$, entonces un múltiplo bt de b se convierte en $a(qt)$; éste es un múltiplo de a porque qt es entero. Para el sentido contrario basta examinar el generador $b = b \cdot 1$. La palabra «todos» en la inclusión y la elección de un elemento concreto en el converso cumplen funciones distintas.

Control parametrizado resuelto. Sea $a \neq 0$ y $m \neq 0$. Todo elemento de $(am)\mathbb{Z}$ tiene forma $amt = a(mt)$, así que $(am)\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$. Si $m = 1$ o $m = -1$, los conjuntos son iguales: cambiar el signo del parámetro del múltiplo recupera cualquier elemento. Si $|m| \geq 2$, la inclusión es estricta. En efecto, $a \in a\mathbb{Z}$, pero una igualdad $a = amq$ exigiría $1 = mq$ tras cancelar a. Ningún entero q puede satisfacerla, pues $q = 0$ da cero y $q \neq 0$ da $|mq| \geq 2$.

Por ejemplo, $(-15)\mathbb{Z} \subsetneq 5\mathbb{Z}$, y el elemento 5 prueba la estrictitud. Compartir algunos elementos, como cero o quince, no establece una inclusión. Tampoco un signo negativo cambia la dirección: son los testigos enteros, no el orden usual entre los números, los que deciden la relación.

El caso $m = 0$ queda fuera de esta comparación entre generadores no nulos. Aunque el conjunto de productos $0t$ podría describirse como $\{0\}$, eso no autoriza a usar cero como divisor bajo la convención del capítulo.

14.10. Cómo demostrar una afirmación de divisibilidad

Las pruebas de divisibilidad suelen ser cortas cuando se identifica correctamente el objetivo. El método fundamental es traducir el símbolo $\mid$ a una ecuación con un testigo entero.

Supongamos que queremos demostrar

$$a \mid F$$

para cierta expresión entera F. El objetivo equivale a construir un entero q tal que

$$F = aq.$$

Un protocolo útil es el siguiente:

```
1. IDENTIFICAR QUÉ DIVISIBILIDAD SE QUIERE PROBAR.
2. ESCRIBIR LA DEFINICIÓN EXISTENCIAL.
3. DESPLEGAR LAS HIPÓTESIS DE DIVISIBILIDAD COMO IGUALDADES.
4. CONSTRUIR UN NUEVO TESTIGO ENTERO.
5. SI HAY VARIAS HIPÓTESIS, PROBAR UNA COMBINACIÓN LINEAL.
6. SI LA AFIRMACIÓN PARECE FALSA, BUSCAR UN CONTRAEJEMPLO PEQUEÑO.
7. CONTROLAR SIGNOS Y CASOS CERO.
```

Ejemplo de prueba directa. Supongamos

$$6 \mid n.$$

Queremos demostrar

$$3 \mid n.$$

La hipótesis significa que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n = 6q.$$

Entonces

$$n = 3(2q).$$

Como $2q \in \mathbb{Z}$, concluimos

$$3 \mid n.$$

El testigo para la conclusión es $2q$.

Un converso falso. El converso sería:

si $3 \mid n$, entonces $6 \mid n$.

Es falso. Basta tomar

$$n = 3.$$

Entonces $3 \mid 3$, pero $6 \nmid 3$.

No hace falta una teoría compleja para refutar una afirmación universal: un único contraejemplo basta.

Contraposición. A veces una afirmación puede demostrarse mediante contraposición. Por ejemplo, la implicación

$$6 \mid n \Longrightarrow 2 \mid n$$

es equivalente a

$$2 \nmid n \Longrightarrow 6 \nmid n.$$

Sin embargo, en divisibilidad elemental la prueba directa suele ser más transparente porque exhibe el testigo. Conviene elegir el método que haga visible la estructura, no el que simplemente parezca más sofisticado.

14.11. La ecuación $ax = b$

La definición de divisibilidad puede reinterpretarse exactamente como un criterio de solvencia para una ecuación lineal de una variable sobre los enteros.

Sea $a \neq 0$. Consideremos

$$ax = b, \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

Afirmamos que

$$\boxed{ax = b \text{ tiene solución entera } \iff a \mid b.}$$

Demostración. Si la ecuación tiene una solución $x_0 \in \mathbb{Z}$, entonces

$$b = ax_0.$$

Por definición,

$$a \mid b.$$

Recíprocamente, si $a \mid b$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Entonces $x = q$ es una solución entera de

$$ax = b.$$

La equivalencia está probada.

Esta formulación muestra que el "testigo" de la divisibilidad y la "solución" de la ecuación son exactamente el mismo entero.

Por ejemplo,

$$15x = 90$$

tiene solución entera porque $15 \mid 90$, y el testigo 6 proporciona

$$x = 6.$$

En cambio,

$$15x = 92$$

no tiene solución entera porque $15 \nmid 92$.

Además, cuando $a \neq 0$, la solución entera —si existe— es única. Si

$$ax_1 = b$$

y

$$ax_2 = b,$$

entonces

$$a(x_1 - x_2) = 0.$$

Como $a \neq 0$, se sigue que

$$x_1 - x_2 = 0,$$

y por tanto

$$x_1 = x_2.$$

Así, una ecuación $ax = b$ sobre los enteros tiene exactamente una de dos posibilidades: ninguna solución entera o una única solución entera.

En problemas con parámetros conviene separar tres preguntas:

1. ¿existe una solución entera?;
2. si existe, ¿cuál es?;
3. ¿para qué valores del parámetro existe?

La divisibilidad responde primero a la cuestión de existencia.

14.12. Ecuaciones diofánticas lineales de dos variables

Una **ecuación diofántica** es, en términos generales, una ecuación en la que buscamos soluciones enteras. En este capítulo sólo utilizaremos como laboratorio las ecuaciones lineales de dos variables:

$$ax + by = c, \qquad x, y \in \mathbb{Z}.$$

No intentaremos todavía resolver el problema general. Nuestro objetivo es descubrir qué obstrucciones pueden deducirse directamente de la divisibilidad.

Supongamos que un entero no nulo d divide simultáneamente a a y a b:

$$d \mid a, \qquad d \mid b.$$

Entonces, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$, la combinación lineal

$$ax + by$$

es divisible por d. En efecto, ése es precisamente el resultado de la sección 14.6.

Por tanto, si la ecuación

$$ax + by = c$$

tuviera una solución entera, necesariamente tendría que cumplirse

$$d \mid c$$

para **todo** divisor común no nulo d de a y b.

Esto nos da una condición necesaria:

$$\boxed{\text{si } d \mid a,\ d \mid b \text{ y } d \nmid c,\ \text{entonces } ax + by = c \text{ no tiene soluciones enteras.}}$$

Por ejemplo, consideremos

$$4x + 6y = 7.$$

Como

$$2 \mid 4$$

y

$$2 \mid 6,$$

el lado izquierdo es divisible por 2 para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$. Pero

$$2 \nmid 7.$$

Por tanto, la ecuación no puede tener soluciones enteras.

La demostración puede escribirse como contradicción. Si existieran $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$4x + 6y = 7,$$

entonces 2 dividiría al lado izquierdo y, por igualdad, tendría que dividir a 7, lo cual es falso.

Es fundamental comprender el alcance lógico de este argumento. Hemos encontrado una **obstrucción**. No hemos demostrado que, cuando todos los divisores comunes de los coeficientes dividen a c, siempre exista una solución. Convertir esta condición necesaria en un criterio completo requerirá herramientas de C15.

14.13. Certificados de existencia y familias concretas

Para demostrar que una ecuación diofántica tiene solución basta exhibir una solución concreta.

Consideremos

$$18x + 30y = 6.$$

La pareja

$$(x, y) = (2, -1)$$

es un certificado de existencia porque

$$18(2) + 30(-1) = 36 - 30 = 6.$$

No hace falta, para demostrar existencia, clasificar todas las soluciones.

Una vez que conocemos una solución, a veces podemos construir otras mediante una transformación que no cambie el lado izquierdo. En este ejemplo,

$$18 \cdot 5 + 30(-3) = 90 - 90 = 0.$$

Por tanto, si sumamos

$$(5, -3)$$

a una solución, el valor de $18x + 30y$ permanece inalterado.

Partiendo de $(2, -1)$ obtenemos, para cualquier $t \in \mathbb{Z}$,

$$x = 2 + 5t,$$

$$y = -1 - 3t.$$

En efecto,

$$18(2 + 5t) + 30(-1 - 3t) = 36 + 90t - 30 - 90t = 6.$$

Así hemos construido una familia infinita de soluciones:

$$\boxed{(x, y) = (2 + 5t, -1 - 3t), \qquad t \in \mathbb{Z}.}$$

Este procedimiento es completamente verificable con las herramientas actuales. Sin embargo, debemos ser cuidadosos con la conclusión.

Hemos demostrado que **todas las parejas de esa forma son soluciones**. No hemos demostrado todavía que **toda solución posible tenga esa forma**.

Ésta es una distinción lógica importante:

- exhibir una solución demuestra existencia;
- exhibir una familia demuestra existencia de muchas soluciones;
- clasificar todas las soluciones exige una demostración adicional.

En C15 obtendremos un procedimiento sistemático para decidir cuándo una ecuación lineal diofántica es soluble y para describir su estructura general. Aquí basta entender cómo la divisibilidad produce obstrucciones y cómo una identidad puede producir certificados positivos.

Nota pedagógica — Generación y exhaustividad son dos pruebas. Para una familia propuesta $F(t)$, verificar que cada $t \in \mathbb{Z}$ produce una solución prueba **generación**. Para afirmar que son todas, hay que comenzar con una solución arbitraria y demostrar que existe un entero t que la representa. Son implicaciones en sentidos opuestos. Una lista de comprobaciones, por extensa que sea, sólo atiende a la primera.

Control resuelto. Considera $2x + y = 1$. La familia $(t, 1 - 2t)$ produce soluciones para todo entero t, pues $2t + 1 - 2t = 1$. Además es exhaustiva: si (x, y) es una solución entera cualquiera, la ecuación obliga a $y = 1 - 2x$; al tomar $t = x \in \mathbb{Z}$ recuperamos la pareja. El parámetro es único porque coincide con la primera coordenada.

Ahora compara la familia $(2t, 1 - 4t)$. Todas sus parejas también son soluciones, pero no contiene $(1, -1)$: exigiría $2t = 1$, imposible para un entero t. Hemos generado una subfamilia infinita, sin haber clasificado todas las soluciones. El salto en el parámetro ha perdido las soluciones cuya primera coordenada es impar.

La familia de $18x + 30y = 6$ presentada arriba tiene una verificación de generación. Para afirmar exhaustividad habría que estudiar la ecuación que cumplen las diferencias entre una solución arbitraria y $(2, -1)$, y demostrar la forma de esas diferencias; esa conclusión no se añade mediante otra sustitución. La clasificación sistemática queda para C15. En ecuaciones concretas más sencillas, como el control anterior o un problema con una restricción adicional, se puede probar exhaustividad directamente con las herramientas actuales.

14.14. Identidades algebraicas como máquinas de divisibilidad

Una identidad algebraica puede demostrar una divisibilidad si exhibe el factor que necesitamos.

Consideremos la conocida factorización

$$u^n - v^n = (u - v)\left(\sum_{j=0}^{n-1} u^{n-1-j}v^j\right),$$

válida para todo entero $n \geq 1$. La suma tiene n términos y todos sus exponentes son no negativos. Como en las identidades polinómicas de C13, una potencia de exponente cero representa el producto vacío 1, incluso al evaluar la base en cero.

Para demostrar la factorización, multiplica la suma por $u - v$. La parte multiplicada por u es $\sum_{j=0}^{n-1} u^{n-j}v^j$; la multiplicada por v se reindexa como $\sum_{j=1}^{n} u^{n-j}v^j$. Los términos con índices $1, \ldots, n-1$ se cancelan y quedan $u^n - v^n$. Para $n = 1$, el rango interior es vacío y el testigo es el único término $u^0v^0 = 1$. Así la prueba no necesita interpretar una lista que contenga exponentes negativos.

Si $u, v \in \mathbb{Z}$ y $u \neq v$, el segundo factor es un entero. Por tanto,

$$\boxed{u - v \mid u^n - v^n.}$$

La factorización no sólo demuestra la divisibilidad: produce directamente el testigo

$$\sum_{j=0}^{n-1} u^{n-1-j}v^j.$$

El requisito $u \neq v$ no es decorativo. Bajo la convención de este tomo, si $u = v$ el supuesto divisor $u - v$ sería 0, y la expresión $0 \mid 0$ queda fuera de nuestra relación.

Como caso particular, tomemos

$$u = N, \qquad v = 1.$$

Si $N \neq 1$ y $m \geq 1$, obtenemos

$$\boxed{N - 1 \mid N^m - 1.}$$

Por ejemplo,

$$9 - 1 = 8$$

divide a

$$9^4 - 1.$$

No necesitamos calcular $9^4 - 1$; la factorización ya contiene el testigo:

$$9^4 - 1 = (9 - 1)(9^3 + 9^2 + 9 + 1).$$

Existe una idea análoga para sumas de potencias impares. Aplica la identidad demostrada a u y $-v$: si $n \geq 1$ es impar, entonces $u^n - (-v)^n = u^n + v^n$ y el factor $u - (-v)$ es $u + v$. El testigo entero es $\sum_{j=0}^{n-1} u^{n-1-j}(-v)^j$. Por tanto, si n es impar y positivo,

$$u^n + v^n$$

posee el factor $u + v$. Siempre que $u + v \neq 0$,

$$\boxed{u+v \mid u^n+v^n \quad (n \text{ impar}).}$$

Lo esencial es aprender a reconocer una factorización como una **máquina de testigos**. El objetivo no es desarrollar todavía teoría formal de polinomios; es aprovechar identidades algebraicas ya conocidas para producir afirmaciones aritméticas.

14.15. Parámetros, conversos falsos y diagnóstico

Los problemas de divisibilidad con parámetros suelen simplificarse cuando transformamos una expresión mediante combinaciones lineales.

Consideremos la condición

$$n+1 \mid n^2+1.$$

Queremos determinar para qué enteros n puede ocurrir. Primero debemos excluir

$$n=-1,$$

porque entonces el supuesto divisor $n+1$ sería 0.

Ahora observemos que

$$n^2+1-(n-1)(n+1)=2.$$

Si

$$n+1 \mid n^2+1,$$

y, evidentemente,

$$n+1 \mid (n-1)(n+1),$$

entonces, por resta,

$$n+1 \mid 2.$$

Recíprocamente, si $n+1 \mid 2$, la identidad

$$n^2+1=(n-1)(n+1)+2$$

muestra que $n+1 \mid n^2+1$.

Así, el problema se ha reducido a clasificar los divisores enteros no nulos de 2:

$$n+1 \in \{-2,-1,1,2\}.$$

Por tanto,

$$\boxed{n \in \{-3,-2,0,1\}.}$$

Este tipo de reducción es una aplicación directa de las combinaciones lineales: reemplazamos una expresión grande por una constante mucho más pequeña.

Conversos y generalizaciones falsas. La aritmética está llena de afirmaciones plausibles que son falsas. Conviene entrenar el reflejo de probar casos pequeños antes de aceptar un converso.

Falso 1.

$$a \mid bc \Longrightarrow a \mid b.$$

Contraejemplo:

$$6 \mid (2 \cdot 3),$$

pero

$$6 \nmid 2.$$

Falso 2.

$$a \mid bc \Longrightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c.$$

El mismo ejemplo sirve:

$$6 \mid 2 \cdot 3,$$

pero

$$6 \nmid 2$$

y

$$6 \nmid 3.$$

Más adelante veremos que, bajo hipótesis adicionales relacionadas con números primos, aparece un resultado de aspecto parecido. Precisamente por eso es importante no anticiparlo sin sus hipótesis.

Falso 3.

$$a \mid b \text{ y } c \mid d \Longrightarrow a + c \mid b + d.$$

Tomemos

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 6.$$

Entonces $2 \mid 2$ y $3 \mid 6$, pero

$$5 \nmid 8.$$

Falso 4.

$$a \mid (b + c) \Longrightarrow a \mid b \text{ y } a \mid c.$$

Tomemos

$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = 2.$$

Entonces

$$3 \mid (1 + 2),$$

pero 3 no divide ni a 1 ni a 2.

Los contraejemplos no son anomalías. Señalan exactamente dónde una propiedad necesita hipótesis adicionales. Registrar esos fallos prepara el terreno para C16, donde estudiaremos qué cambia cuando el divisor es primo.

14.16. Cierre — protocolo para problemas de divisibilidad

La divisibilidad comenzó como una reformulación de una pregunta muy sencilla: ¿cuándo tiene solución entera la ecuación $ax = b$? A lo largo del capítulo vimos que esa noción organiza mucho más que una operación de cociente.

Una afirmación

$$a \mid b$$

es una proposición existencial. Afirma que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Esa lectura permite demostrar propiedades básicas, construir combinaciones lineales, comparar tamaños, estudiar la divisibilidad como relación, interpretar los conjuntos $a\mathbb{Z}$ y detectar obstrucciones en ecuaciones diofánticas.

Ante un nuevo problema de divisibilidad, el siguiente protocolo resume las decisiones principales:

```
1. TRADUCIR a | b COMO b = aq CON q ENTERO.
2. BUSCAR O CONSTRUIR EL TESTIGO.
3. SI HAY VARIAS HIPÓTESIS, FORMAR COMBINACIONES LINEALES.
4. CONTROLAR SIGNOS Y CASOS CERO.
5. USAR TRANSITIVIDAD O CANCELACIÓN SÓLO BAJO SUS HIPÓTESIS.
6. PARA ax=b, PREGUNTAR SI a | b.
7. PARA ax+by=c, BUSCAR DIVISORES COMUNES QUE PRODUZCAN OBSTRUCCIONES.
8. SI SE PROPONE UN CONVERSO, PROBAR CASOS PEQUEÑOS ANTES DE CREERLO.
9. SI APARECEN POTENCIAS, BUSCAR UNA FACTORIZACIÓN QUE EXHIBA EL TESTIGO.
10. DISTINGUIR ENTRE EXISTENCIA, IMPOSIBILIDAD Y CLASIFICACIÓN COMPLETA.
```

Hay tres tipos de argumento que conviene reconocer de inmediato.

Prueba de existencia. Se exhibe un testigo. Para $a \mid b$, se construye q con $b = aq$; para una ecuación diofántica, se exhibe una solución.

Prueba de imposibilidad. Se muestra que una propiedad necesaria no puede cumplirse. Si todo valor de $ax + by$ es divisible por d y $d \nmid c$, entonces $ax + by = c$ es imposible en enteros.

Clasificación. Se pretende describir todos los casos posibles o todas las soluciones. Este objetivo es más fuerte que exhibir ejemplos y requiere demostrar exhaustividad.

El capítulo también ha mostrado una tensión que todavía no sabemos resolver de manera sistemática. Si dos enteros tienen varios divisores comunes, podemos usar cualquiera de ellos para producir combinaciones lineales y obstrucciones. Pero surge una pregunta natural:

> **¿Existe un divisor común que concentre toda la información relevante y pueda encontrarse mediante un procedimiento sistemático?**

La respuesta conduce al siguiente capítulo: **máximo común divisor y algoritmo de Euclides**.

Ejercicios

Los ejercicios están organizados para pasar de la lectura directa de la definición a la construcción autónoma de testigos, combinaciones lineales, contraejemplos y certificados de existencia o imposibilidad. En todo el capítulo se mantiene la convención de que en una expresión $a \mid b$ el divisor a es no nulo.

A. Definición, testigos, múltiplos y divisores

1. **Nivel A.** Decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Cuando una sea verdadera, exhibe un testigo entero; cuando sea falsa, explica por qué no puede existir:
$$7 \mid 56, \qquad -6 \mid 42, \qquad 8 \mid 54, \qquad 9 \mid (-72), \qquad 11 \mid 0.$$
2. **Nivel A.** Reescribe cada afirmación como una ecuación de la forma $b = aq$ con $q \in \mathbb{Z}$:
$$5 \mid 35, \qquad -4 \mid 28, \qquad 12 \mid (-84).$$
Identifica el testigo en cada caso.
3. **Nivel A.** Lista los múltiplos de 6 comprendidos entre -40 y 40. Después lista los múltiplos de -6 en el mismo intervalo y compara ambos conjuntos.
4. **Nivel A.** Determina todos los divisores enteros de 18. Explica por qué cada divisor positivo aparece acompañado de uno negativo.
5. **Nivel B.** Decide si cada frase expresa correctamente una relación de divisibilidad:

a) "4 es múltiplo de 20";
b) "5 es divisor de 20";
c) "21 es múltiplo de 7";
d) "9 divide a 3". Corrige las frases falsas.

6. **Nivel B.** Para cada entero
$$n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$
determina si $4 \mid 12n$. No calcules cocientes decimales: construye directamente el testigo.
7. **Nivel B.** Explica, usando la definición, por qué todo entero no nulo divide a 0. Después explica por qué, bajo la convención de este tomo, una expresión con 0 como divisor queda fuera de la relación definida.
8. **Nivel C.** Sea $n \neq 0$. Demuestra que el conjunto de divisores enteros de n es finito usando únicamente el hecho de que, si $d \mid n$, entonces $n = dq$ para algún entero q y que $q \neq 0$.

B. Propiedades básicas de la divisibilidad

9. **Nivel B.** Demuestra directamente desde la definición que $a \mid a$ para todo entero no nulo a. Identifica el testigo.
10. **Nivel B.** Demuestra que si $a \mid b$, entonces $a \mid bc$ para todo $c \in \mathbb{Z}$. Tu prueba debe construir explícitamente el nuevo testigo.
11. **Nivel C.** Demuestra la transitividad: si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$. Nombra por separado los dos testigos iniciales y el testigo final.
12. **Nivel C.** Si $a \mid b$ y $a \mid c$, demuestra
$$a \mid (b + c) \qquad \text{y} \qquad a \mid (b - c).$$
Explica por qué la clausura de $\mathbb{Z}$ bajo suma y resta es parte de la prueba.
13. **Nivel B.** Sabiendo que
$$7 \mid 84 \qquad \text{y} \qquad 7 \mid 35,$$
deduce sin dividir que
$$7 \mid 119, \qquad 7 \mid 49, \qquad 7 \mid (-133).$$
En cada caso indica qué propiedad usaste.
14. **Nivel C.** Supón que $a \mid b$. Demuestra que, para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$,
$$a \mid (rb + sab).$$
Da el testigo final en términos de un testigo de $a \mid b$.

15. **Nivel C.** Si $a \mid b$ y $c \mid d$, demuestra que
$$ac \mid bd.$$
Escribe $b = ar$ y $d = cs$ y construye el testigo correspondiente.
16. **Nivel C.** Si
$$3 \mid n \qquad \text{y} \qquad 5 \mid m,$$
demuestra que
$$15 \mid 5n + 3m.$$
No uses factorización prima ni congruencias.
17. **Nivel D.** Sea $a \neq 0$. Demuestra que si
$$a \mid b_1, \quad a \mid b_2, \quad \ldots, \quad a \mid b_r,$$
entonces, para cualesquiera $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}$,
$$a \mid (c_1 b_1 + \cdots + c_r b_r).$$
Hazlo construyendo un único testigo.
18. **Nivel D.** Analiza el siguiente razonamiento: > "Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid bc$ porque a divide a cada factor."

La conclusión es verdadera. Determina si la justificación dada es suficiente y proporciona una prueba correcta desde la definición que use sólo una de las dos hipótesis si es posible.

C. Signos, cancelación, tamaño y divisibilidad mutua

19. **Nivel B.** Demuestra que, para $a \neq 0$,
$$a \mid b \iff (-a) \mid b \iff a \mid (-b).$$
Describe cómo cambia el testigo en cada paso.
20. **Nivel C.** Demuestra que si $c \neq 0$ y
$$ca \mid cb,$$
entonces
$$a \mid b.$$
Indica exactamente dónde se utiliza la hipótesis $c \neq 0$.
21. **Nivel C.** Sean $a, b \neq 0$. Demuestra que
$$a \mid b \Longrightarrow |a| \leq |b|.$$
Parte de $b = aq$ y justifica por qué $|q| \geq 1$.
22. **Nivel D.** Sean $a, b \neq 0$. Si
$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad b \mid a,$$
demuestra que
$$a = \pm b.$$
Haz explícito el uso de las cotas de valor absoluto.
23. **Nivel C.** Determina todos los enteros no nulos d tales que
$$d \mid 15 \qquad \text{y} \qquad |d| \geq 5.$$
Justifica que tu lista es exhaustiva sin usar factorización prima.
24. **Nivel D.** Un estudiante afirma: > "De $ca \mid cb$ siempre puedo cancelar c."

Explica por qué una prueba formal debe controlar que $c \neq 0$ dentro de la convención adoptada. Reformula la regla de cancelación con todas sus hipótesis y demuéstrala.

D. Combinaciones lineales

25. **Nivel B.** Demuestra que si
$$d \mid a \qquad \text{y} \qquad d \mid b,$$
entonces
$$d \mid (ra + sb)$$
para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$.
26. **Nivel B.** Sabiendo que
$$6 \mid 48 \qquad \text{y} \qquad 6 \mid 30,$$
elige coeficientes enteros r, s para demostrar mediante una combinación lineal que
$$6 \mid 18$$
y que
$$6 \mid 6.$$
27. **Nivel C.** Si $d \mid a$ y $d \mid b$, demuestra que para todo $k \in \mathbb{Z}$,
$$d \mid (a - kb).$$
Explica por qué esta forma es útil para eliminar parte de una expresión.
28. **Nivel C.** Supón que
$$d \mid (5n + 2) \qquad \text{y} \qquad d \mid (3n + 1).$$
Construye una combinación lineal que elimine n y demuestra que $d \mid 1$. ¿Qué valores puede tomar entonces d?
29. **Nivel C.** Si
$$d \mid (7n + 4) \qquad \text{y} \qquad d \mid (5n + 3),$$
encuentra una combinación lineal que produzca una constante no nula. Deduce una restricción sobre d.
30. **Nivel D.** Demuestra que todo divisor común de $14n + 9$ y $8n + 5$ divide a 2. Debes exhibir explícitamente la combinación lineal utilizada.
31. **Nivel D.** Sea d un entero no nulo que divide a a y a b. Demuestra que d divide a
$$(a + b)^2 - (a - b)^2.$$
Simplifica primero la expresión y después compara dos pruebas posibles.
32. **Nivel D.** Si $d \mid a$ y $d \mid b$, demuestra que d divide a cualquier expresión de la forma
$$r_1 a + r_2 b + r_3(a - b) + r_4(2a + 3b),$$
con $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Z}$. Reduce toda la expresión a una sola combinación lineal de a y b.
33. **Nivel D.** Supón que un entero no nulo d divide simultáneamente a
$$4n + 1 \qquad \text{y} \qquad 6n + 1.$$
Demuestra que $d \mid 1$ y determina todos los valores posibles de d.
34. **Nivel E.** Sean $u, v \in \mathbb{Z}$ y $d \neq 0$. Supón que
$$d \mid (2u + 3v) \qquad \text{y} \qquad d \mid (5u + 7v).$$
Encuentra combinaciones lineales que permitan concluir que $d \mid u$ y $d \mid v$. No invoques matrices ni determinantes: construye las combinaciones directamente.

E. Relación de divisibilidad y conjuntos $a\mathbb{Z}$

35. **Nivel B.** Sobre $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, decide si la divisibilidad es reflexiva, simétrica y transitiva. Prueba las propiedades verdaderas y da contraejemplos para las falsas.
36. **Nivel C.** Da un ejemplo que muestre que la divisibilidad no es antisimétrica sobre $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Explica por qué el problema desaparece al restringir la relación a $\mathbb{Z}_{>0}$.
37. **Nivel C.** Demuestra que la divisibilidad es un orden parcial sobre $\mathbb{Z}_{>0}$. Debes verificar por separado reflexividad, antisimetría y transitividad.
38. **Nivel B.** Escribe explícitamente los elementos de
$$4\mathbb{Z}, \qquad 6\mathbb{Z}, \qquad (-4)\mathbb{Z}$$
que se encuentran entre -25 y 25. ¿Qué igualdades o inclusiones sugieren las listas?
39. **Nivel C.** Demuestra, para $a, b \neq 0$, que
$$a \mid b \Longrightarrow b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$
Toma un elemento arbitrario de $b\mathbb{Z}$ y demuestra que pertenece a $a\mathbb{Z}$.
40. **Nivel C.** Demuestra el converso del ejercicio anterior:
$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \Longrightarrow a \mid b.$$
Indica qué elemento particular de $b\mathbb{Z}$ conviene elegir.
41. **Nivel D.** Para $a, b \neq 0$, demuestra
$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \Longleftrightarrow a = \pm b.$$
Tu prueba debe usar la equivalencia entre divisibilidad e inclusión y la divisibilidad mutua.
42. **Nivel D.** Ordena por inclusión los conjuntos
$$2\mathbb{Z}, \qquad 4\mathbb{Z}, \qquad 8\mathbb{Z}.$$
Después ordena $2, 4, 8$ por divisibilidad y explica por qué las dos direcciones parecen invertidas.

F. Ecuaciones $ax = b$

43. **Nivel A.** Decide cuáles de las ecuaciones tienen solución entera y resuélvelas cuando sea posible:
$$6x = 48, \qquad 6x = 50, \qquad -7x = 35, \qquad 9x = -54.$$
44. **Nivel B.** Demuestra, para $a \neq 0$, que
$$ax = b$$
tiene solución entera si y sólo si
$$a \mid b.$$
45. **Nivel B.** Determina todos los enteros m para los cuales la ecuación
$$5x = 20m + 15$$
tiene solución entera. Cuando exista, expresa una solución en función de m.
46. **Nivel C.** Determina los enteros n para los cuales
$$4x = 6n + 2$$
tiene una solución entera. Resuelve el problema usando sólo la definición de divisibilidad y una clasificación elemental de los enteros pares e impares, sin notación de congruencias.
47. **Nivel C.** Sea $a \neq 0$. Demuestra que si $ax = b$ tiene una solución entera, entonces esa solución es única. Explica por qué esta afirmación es muy distinta de lo que ocurrirá con ecuaciones lineales en dos variables.

48. **Nivel D.** Supón que $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, y que
$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad a \mid c.$$
Demuestra que las ecuaciones $ax = b$ y $ax = c$ tienen soluciones enteras y usa esas soluciones para construir una solución entera de
$$ax = b + c.$$
Relaciona el argumento con el cierre de la divisibilidad bajo suma.

G. Ecuaciones diofánticas lineales

49. **Nivel B.** Decide si cada pareja propuesta es solución de la ecuación indicada:

a) $(x, y) = (2, -1)$ para $18x + 30y = 6$;
b) $(x, y) = (1, 1)$ para $4x + 6y = 10$;
c) $(x, y) = (-2, 3)$ para $5x + 7y = 11$.

50. **Nivel C.** Demuestra que la ecuación
$$4x + 6y = 7$$
no tiene soluciones enteras. Usa el hecho de que 2 divide a cada término del lado izquierdo, pero no al lado derecho.
51. **Nivel C.** Demuestra que
$$6x + 10y = 15$$
no tiene solución entera. Identifica un divisor común de los coeficientes que produce la obstrucción.
52. **Nivel C.** Exhibe una solución entera de cada ecuación:
$$8x + 12y = 4, \qquad 15x + 21y = 6.$$
Explica por qué una pareja concreta es un certificado suficiente de existencia.
53. **Nivel D.** Supón que $d \mid a$ y $d \mid b$. Demuestra que cualquier solución entera de
$$ax + by = c$$
obliga a
$$d \mid c.$$
Tu prueba debe funcionar para cualquier divisor común d, no sólo para un ejemplo numérico.
54. **Nivel D.** La ecuación
$$12x + 18y = c$$
tiene una solución entera para cierto c. Demuestra que necesariamente $6 \mid c$. Explica por qué esta conclusión es sólo una condición necesaria y no has demostrado aún un criterio completo.
55. **Nivel C.** Partiendo de la solución
$$18(2) + 30(-1) = 6,$$
demuestra que para todo $m \in \mathbb{Z}$ la ecuación
$$18x + 30y = 6m$$
tiene al menos una solución entera. Exhibe una fórmula concreta para una solución.
56. **Nivel D.** Si (x_0, y_0) satisface
$$18x + 30y = c,$$
demuestra que, para todo $t \in \mathbb{Z}$,
$$(x_0 + 5t,\ y_0 - 3t)$$
también es solución. Verifica directamente que el lado izquierdo no cambia.

57. **Nivel D.** Un estudiante encuentra tres soluciones distintas de
$$8x + 12y = 4$$
y concluye: “éstas son todas las soluciones”. Explica por qué la conclusión no se sigue de los datos. ¿Qué habría que demostrar adicionalmente para justificar una clasificación completa?
58. **Nivel E.** Para cada ecuación, da un certificado de existencia o un certificado de imposibilidad usando únicamente divisibilidad elemental:
$$10x + 14y = 6,$$
$$10x + 14y = 5,$$
$$9x + 15y = 12.$$
Cuando afirmes existencia, exhibe una solución concreta; cuando afirmes imposibilidad, identifica un divisor común que no divide al término independiente.

H. Identidades de divisibilidad y factorización

59. **Nivel B.** Factoriza
$$u^2 - v^2$$
y usa la factorización para demostrar
$$u - v \mid u^2 - v^2$$
cuando $u - v \neq 0$.
60. **Nivel C.** Demuestra, para $m \geq 1$,
$$u - v \mid u^m - v^m$$
si $u - v \neq 0$. Exhibe explícitamente el factor que funciona como testigo.
61. **Nivel C.** Deduce del ejercicio anterior que, para $n \neq 1$ y $m \geq 1$,
$$n - 1 \mid n^m - 1.$$
Explica por qué la restricción $n \neq 1$ aparece bajo la convención del capítulo.
62. **Nivel C.** Demuestra que, para $n \neq -1$ y $m \geq 1$,
$$n + 1 \mid n^{2m} - 1.$$
Usa una diferencia de potencias apropiada, sin notación de congruencias.
63. **Nivel D.** Demuestra que, para todo entero n y todo $m \geq 1$ para los cuales el divisor indicado sea no nulo,
$$n^m - 1 \mid n^{2m} - 1.$$
Identifica el cociente exacto.
64. **Nivel D.** Demuestra que, si $a - b \neq 0$,
$$a - b \mid a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$
Primero reconoce la expresión y después exhibe el testigo.
65. **Nivel D.** Determina todos los enteros $n \neq -1$ tales que
$$n + 1 \mid n + 7.$$
Reduce el problema a que $n + 1$ divida una constante y clasifica los divisores enteros posibles.
66. **Nivel E.** Determina todos los enteros $n \neq 2$ tales que
$$n - 2 \mid n^2 - 3n + 5.$$
Resta un múltiplo adecuado de $n - 2$ hasta obtener una constante. No uses algoritmo de Euclides ni congruencias.

I. Diagnóstico y elección de método

67. **Nivel C.** Refuta mediante un contraejemplo la afirmación
$$a \mid bc \Longrightarrow a \mid b.$$
Explica por qué el hecho de que $bc = aq$ no permite, por sí solo, expresar b como múltiplo de a.
68. **Nivel C.** Refuta mediante un contraejemplo
$$a \mid bc \Longrightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c.$$
Elige números pequeños y verifica todas las divisibilidades involucradas.
69. **Nivel C.** Refuta
$$a \mid b, \quad c \mid d \Longrightarrow a + c \mid b + d.$$
Después explica por qué sumar dos relaciones de divisibilidad con divisores diferentes no produce automáticamente una nueva relación.
70. **Nivel C.** Refuta
$$a \mid (b + c) \Longrightarrow a \mid b \text{ y } a \mid c.$$
Luego formula una hipótesis adicional sencilla que sí permita deducir una de las dos divisibilidades a partir de la otra y de $a \mid (b + c)$.
71. **Nivel D.** Para cada problema, elige el método que consideres más natural —definición con testigo, combinación lineal, inclusión de conjuntos de múltiplos o factorización— y justifica tu elección:

a) demostrar $7 \mid (35n + 14)$;
b) demostrar $a \mid b \iff b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$;
c) demostrar $u - v \mid u^5 - v^5$;
d) decidir qué puede deducirse de un divisor común de $12n + 7$ y $8n + 5$.

72. **Nivel E.** Audita la afirmación: > “Si d divide a dos expresiones, entonces divide a cualquier cosa obtenida al combinarlas.”

Reformula la frase como un teorema correcto. Especifica qué significa “combinarlas”, qué coeficientes están permitidos y por qué el resultado deja de estar justificado si se introducen operaciones que no producen combinaciones lineales enteras.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E.** Demuestra que la relación de divisibilidad define un orden parcial sobre $\mathbb{Z}_{>0}$: verifica reflexividad, antisimetría y transitividad. Después explica exactamente por qué la antisimetría falla sobre $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si a y $-a$ se consideran elementos distintos. Da un contraejemplo mínimo y relaciona el fallo con la conclusión $a = \pm b$ obtenida de la divisibilidad mutua.
74. **Nivel F.** Sean $a, b \neq 0$. Demuestra
$$a \mid b \iff b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$
A partir de esta equivalencia, demuestra
$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \iff a = \pm b.$$
Finalmente explica con precisión por qué la dirección de la inclusión de conjuntos de múltiplos es inversa a la dirección intuitiva de “ser múltiplo”.
75. **Nivel F.** Demuestra que si $a \mid b$, entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$,
$$a \mid (b + ka).$$
Demuestra también el recíproco en la forma:
$$a \mid (b + ka) \Longrightarrow a \mid b.$$

Usa esta equivalencia para reducir, sin efectuar divisiones largas, las siguientes preguntas:

a) ¿37 divide a $37 \cdot 125 + 74$?;
b) si d divide a $101n + 37$ y a $100n + 36$, ¿qué entero pequeño debe dividir también?;
c) si d divide a $53n + 18$ y a $52n + 17$, demuestra que $d \mid 35$ y describe la restricción resultante sobre d. En cada apartado exhibe la combinación lineal o el testigo correspondiente.

76. **Nivel F.** Para $m \geq 1$ y $u - v \neq 0$, demuestra

$$u - v \mid u^m - v^m$$

mediante una factorización explícita. Deduce, bajo las condiciones que hacen no nulos los divisores,

$$n - 1 \mid n^m - 1$$

y

$$n + 1 \mid n^{2m} - 1.$$

Tu solución no puede usar congruencias. Compara los dos corolarios e identifica qué sustitución produce cada uno.

77. **Nivel F.** Determina todos los enteros $n \neq -1$ tales que

$$n + 1 \mid n^2 + 1.$$

La prueba debe transformar la condición mediante una combinación lineal hasta obtener

$$n + 1 \mid 2.$$

Clasifica después todos los divisores enteros no nulos de 2, recupera los valores posibles de n y verifica cada candidato en la condición original.

78. **Nivel F.** Sean $a_1, \ldots, a_m$ enteros no nulos tales que

$$a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m.$$

a) Demuestra que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_m|.$$

b) Supón además que $|a_1| = |a_m|$. Demuestra que todos los valores absolutos son iguales y que, para cada i,

$$a_i = \pm a_1.$$

c) Explica qué parte del argumento usa transitividad y qué parte usa la cota asociada a la divisibilidad.

79. **Nivel G.** Un estudiante intenta demostrar

$$a \mid bc \Longrightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c$$

del siguiente modo: > Como $a \mid bc$, existe $q \in \mathbb{Z}$ con $bc = aq$. Si $c \neq 0$, dividimos por c y obtenemos $b = a(q/c)$. Por tanto $a \mid b$. Si $c = 0$, entonces $a \mid c$.

Audita la prueba completa: 1. identifica el paso inválido; 2. explica por qué q/c no tiene por qué ser entero; 3. da un contraejemplo numérico a la afirmación; 4. explica por qué la definición de divisibilidad no permite la cancelación realizada; 5. registra qué tipo de hipótesis adicionales habrá que estudiar más adelante para obtener resultados de esta clase, sin usarlas todavía.

80. **Nivel G.** Estudia la ecuación diofántica

$$18x + 30y = c.$$

Debes realizar cinco tareas:

a) demuestra que si existe una solución entera, entonces necesariamente $6 \mid c$;

b) verifica el certificado
$$18(2) + 30(-1) = 6;$$
c) deduce que si $c = 6m$, con $m \in \mathbb{Z}$, entonces existe al menos una solución, y exhibe una;
d) partiendo de una solución (x_0, y_0), demuestra que
$$(x_0 + 5t,\ y_0 - 3t), \qquad t \in \mathbb{Z},$$
produce infinitas soluciones;
e) explica por qué este ejemplo plantea una nueva pregunta general: dado $ax + by = c$, ¿cómo identificar de manera sistemática el divisor común que contiene la información decisiva y cómo relacionarlo con combinaciones lineales?

No enuncies ni utilices todavía un criterio general basado en resultados del capítulo siguiente.

N. Testigos, dominios y certificados

En cada problema, todas las variables son enteras salvo los cocientes racionales que se examinan expresamente. Se mantiene la convención de divisor no nulo.

81. **Nivel D.** Sean $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$ enteros. Construye un testigo entero de $k!(n-k)! \mid n!$ usando C13. Determina además cuándo se cumple la divisibilidad inversa $n! \mid k!(n-k)!$. Justifica la clasificación sin factorización prima y trata $n = 0$.
82. **Nivel C.** Para todo $n \in \mathbb{Z}$, construye un testigo explícito de $2 \mid n(n+1)$. Escríbelo mediante $n = 2t$ y $n = 2t+1$, y explica por qué el argumento incluye enteros negativos. Un estudiante propone usar siempre $q = n^2/2$; decide si ese candidato cumple la igualdad requerida.
83. **Nivel D.** Determina todos los enteros $n \neq 3$ para los que $n - 3 \mid 2n + 5$. Exhibe el testigo en cada caso y demuestra que no hay otros. Evita cocientes decimales y el algoritmo de Euclides.
84. **Nivel D.** Supón $a, c \neq 0$, $a \mid b$ y $c \mid b$, y escribe $b = aq$ con $q \in \mathbb{Z}$. Se afirma que $a \mid b/c$ porque «se cancela c». Construye contraejemplos para cada entero $m \geq 2$ tomando $a = c = m$ y $b = m(m+1)$. Después demuestra la reparación exacta: $a \mid b/c$ si y sólo si $c \mid q$.
85. **Nivel D.** Sean $a \neq 0$, $u = as$ y $v = at$, con $s, t \in \mathbb{Z}$, y supón que $h = (u+v)/2$ es entero. ¿Debe cumplirse $a \mid h$? Construye una familia de contraejemplos con $a = 2r$, $r \geq 1$, y demuestra que la condición exacta es que $s + t$ sea par.
86. **Nivel D.** Sean $d \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a + b = du$ y $a - b = dv$, con $u, v \in \mathbb{Z}$. Un argumento concluye $d \mid a$ y $d \mid b$ al sumar, restar y dividir por dos. Refútalo con una familia de ejemplos y demuestra que ambas conclusiones son válidas exactamente cuando u y v tienen la misma paridad.
87. **Nivel C.** Para $a, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, estudia por inclusión los conjuntos $a\mathbb{Z}$, $(am)\mathbb{Z}$ y $(am^2)\mathbb{Z}$. Determina cuándo las dos inclusiones son estrictas y cuándo hay igualdad. En los casos estrictos exhibe un elemento que falte en cada conjunto menor; incluye m negativo.
88. **Nivel E.** Sean $a, b \neq 0$. Demuestra que $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}$ puede ser el conjunto de múltiplos de un entero no nulo exactamente cuando $a \mid b$ o $b \mid a$. Determina el conjunto unión en esos casos. Para probar necesidad, estudia el elemento $a + b$ sin introducir MCD, MCM ni teoría de ideales.
89. **Nivel D.** Sean $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{Z}$. Define $L = \{b + ak : k \in \mathbb{Z}\}$. Demuestra que si $a \mid b$, entonces $L = a\mathbb{Z}$, y si $a \nmid b$, entonces $L \cap a\mathbb{Z} = \varnothing$. Explica por qué bastaría un elemento en la intersección para decidir la divisibilidad. No uses clases de congruencia.

90. **Nivel D.** Verifica el certificado $35(-1) + 22(2) = 9$. Para $m \in \mathbb{Z}$, fabrica a partir de él una familia infinita de soluciones de $35x + 22y = 9m$. Después impón la restricción $x + y = m$ y determina todas las parejas que cumplen ambas ecuaciones. Distingue qué parte prueba generación y qué parte prueba exhaustividad.
91. **Nivel D.** Considera $26x + 39y = c$ con $x, y \in \mathbb{Z}$. Usando únicamente el divisor común trece y el certificado $39 - 26 = 13$, demuestra que hay solución exactamente cuando $13 \mid c$ y exhibe una para cada $c = 13m$. Después decide si existe una solución con x, $y \geq 0$ para $c = 13, 26, 39$, justificando los casos imposibles.
92. **Nivel E.** Sean $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid 14b$ y $a \mid 9b$, ¿qué puedes concluir sobre b? Construye un testigo a partir de los dos testigos iniciales. Repite la pregunta sustituyendo $9b$ por $10b$: obtén una conclusión válida y decide si todavía se puede afirmar $a \mid b$. No uses propiedades de primos ni un criterio general de MCD.

Soluciones razonadas

A. Definición, testigos, múltiplos y divisores

1. Analizamos cada caso directamente desde la definición.

- $7 \mid 56$ es verdadera porque
$$56 = 7 \cdot 8,$$
y $8 \in \mathbb{Z}$ es un testigo.
- $-6 \mid 42$ es verdadera porque
$$42 = (-6)(-7),$$
de modo que el testigo es -7.
- $8 \mid 54$ es falsa. Si fuese verdadera existiría $q \in \mathbb{Z}$ con $54 = 8q$. Pero $q = 54/8 = 27/4$ no es entero.
- $9 \mid (-72)$ es verdadera porque
$$-72 = 9(-8).$$
- $11 \mid 0$ es verdadera porque
$$0 = 11 \cdot 0.$$

El último caso recuerda que todo entero no nulo divide a 0 bajo la convención del capítulo.

2. Las ecuaciones que exhiben los testigos son

$$35 = 5 \cdot 7,$$

$$28 = (-4)(-7),$$

y

$$-84 = 12(-7).$$

Por tanto, los testigos son respectivamente 7, -7 y -7.

3. Los múltiplos de 6 entre -40 y 40 son

$$-36, -30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36.$$

Los múltiplos de -6 son exactamente los mismos, porque

$$(-6)k = 6(-k)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto,

$$6\mathbb{Z} = (-6)\mathbb{Z}.$$

Cambiar el signo del generador no cambia su conjunto de múltiplos.

4. Los divisores positivos de 18 son

$$1, 2, 3, 6, 9, 18.$$

Por tanto, todos los divisores enteros son

$$\boxed{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 18}.$$

Si $d \mid 18$, entonces $18 = dq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$. También

$$18 = (-d)(-q),$$

de modo que $-d \mid 18$. Por eso cada divisor positivo aparece acompañado de su opuesto.

5. a) "4 es múltiplo de 20" es falsa, porque exigiría $20 \mid 4$. La corrección natural es: 20 **es múltiplo de** 4, ya que $20 = 4 \cdot 5$.

b) "5 es divisor de 20" es verdadera porque $20 = 5 \cdot 4$.

c) "21 es múltiplo de 7" es verdadera porque $21 = 7 \cdot 3$.

d) "9 divide a 3" es falsa. La relación correcta es $3 \mid 9$, pues $9 = 3 \cdot 3$.

La distinción esencial es que "a es divisor de b" significa $a \mid b$, mientras que "b es múltiplo de a" expresa exactamente la misma relación con el lenguaje invertido.

6. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,

$$12n = 4(3n).$$

Como $3n \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$4 \mid 12n$$

para todos los valores indicados, incluido $n = 0$.

Los testigos son $3n$. Para

$$n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$$

obtenemos respectivamente

$$-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9.$$

7. Sea $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$. Entonces

$$0 = a \cdot 0,$$

y el testigo $0 \in \mathbb{Z}$ demuestra

$$a \mid 0.$$

En cambio, la relación de divisibilidad adoptada en este tomo se define sólo cuando el divisor es no nulo. Por ello una expresión como

$$0 \mid b$$

no se evalúa aquí como verdadera o falsa dentro de la relación: queda fuera de su dominio de definición. Esta convención será mantenida de forma uniforme en C14–C17.

8. Sea $n \neq 0$ y sea d un divisor de n. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n = dq.$$

Como $n \neq 0$, necesariamente $d \neq 0$ y $q \neq 0$. En particular,

$$|q| \geq 1.$$

Tomando valores absolutos,

$$|n| = |d||q| \geq |d|.$$

Por tanto,

$$|d| \leq |n|.$$

Todo divisor entero de n debe pertenecer al conjunto finito

$$\{-|n|, -|n|+1, \ldots, -1, 1, \ldots, |n|-1, |n|\}.$$

Luego el conjunto de divisores enteros de n es finito.

B. Propiedades básicas de la divisibilidad

9. Sea $a \neq 0$. Tenemos

$$a = a \cdot 1.$$

Como $1 \in \mathbb{Z}$, la definición da

$$\boxed{a \mid a}.$$

El testigo es 1.

10. Supongamos $a \mid b$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Para cualquier $c \in \mathbb{Z}$,

$$bc = (aq)c = a(qc).$$

Como $qc \in \mathbb{Z}$, concluimos

$$\boxed{a \mid bc}.$$

El nuevo testigo es qc.

11. De $a \mid b$ existe $r \in \mathbb{Z}$ con

$$b = ar.$$

De $b \mid c$ existe $s \in \mathbb{Z}$ con

$$c = bs.$$

Sustituyendo la primera igualdad en la segunda,

$$c = (ar)s = a(rs).$$

Como $rs \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\boxed{a \mid c}.$$

Los testigos iniciales son r y s; el testigo final es rs.

12. Sean

$$b = ar, \qquad c = as$$

con $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$b + c = a(r + s)$$

y

$$b - c = a(r - s).$$

Como $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo suma y resta,

$$r + s \in \mathbb{Z}, \qquad r - s \in \mathbb{Z}.$$

Por definición,

$$\boxed{a \mid (b + c)} \qquad \text{y} \qquad \boxed{a \mid (b - c)}.$$

La clausura de los enteros es lo que garantiza que los nuevos cocientes siguen siendo testigos válidos.

13. Como $7 \mid 84$ y $7 \mid 35$:

- por suma,
$$7 \mid (84 + 35) = 119;$$
- por resta,
$$7 \mid (84 - 35) = 49;$$
- para -133, observamos
$$-133 = -(84 + 49).$$
Ya sabemos que $7 \mid 84$ y $7 \mid 49$, luego $7 \mid 133$, y cambiar el signo del múltiplo conserva la divisibilidad. Por tanto,
$$7 \mid (-133).$$

También puede verse directamente que $-133 = 7(-19)$.

14. Supongamos que $a \mid b$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Para $r, s \in \mathbb{Z}$,

$$rb + sab = r(aq) + sa(aq) = a(rq + saq).$$

Como

$$rq + saq = q(r + sa) \in \mathbb{Z},$$

se concluye

$$\boxed{a \mid (rb + sab)}.$$

Un testigo final es

$$q(r + sa).$$

15. Escribamos

$$b = ar, \qquad d = cs$$

con $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$bd = (ar)(cs) = ac(rs).$$

Como $rs \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{ac \mid bd}.$$

El testigo es rs.

16. De $3 \mid n$ existe $r \in \mathbb{Z}$ con

$$n = 3r.$$

De $5 \mid m$ existe $s \in \mathbb{Z}$ con

$$m = 5s.$$

Entonces

$$5n + 3m = 5(3r) + 3(5s) = 15(r + s).$$

Como $r + s \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{15 \mid (5n + 3m)}.$$

No se usó ninguna propiedad de números primos; sólo se construyó un testigo entero.

17. Para cada $i = 1, \ldots, r$, la hipótesis $a \mid b_i$ permite escribir

$$b_i = aq_i$$

con $q_i \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned} c_1b_1 + \cdots + c_rb_r &= c_1(aq_1) + \cdots + c_r(aq_r) \\ &= a(c_1q_1 + \cdots + c_rq_r). \end{aligned}$$

El número

$$Q = c_1q_1 + \cdots + c_rq_r$$

es entero porque es una suma finita de productos de enteros. Por tanto,

$$\boxed{a \mid (c_1b_1 + \cdots + c_rb_r)}.$$

El único testigo final es Q.

18. La conclusión es verdadera, pero la frase “porque a divide a cada factor” no es una justificación precisa y además usa más hipótesis de las necesarias.

Basta suponer $a \mid b$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Multiplicando por c,

$$bc = (aq)c = a(qc).$$

Como $qc \in \mathbb{Z}$,

$$a \mid bc.$$

La hipótesis $a \mid c$ es redundante para esta conclusión. La propiedad correcta es: **si** $a \mid b$**, entonces** $a \mid bc$ **para todo entero** c.

C. Signos, cancelación, tamaño y divisibilidad mutua

19. Supongamos $a \mid b$. Entonces

$$b = aq$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$. Como

$$b = (-a)(-q),$$

obtenemos $(-a) \mid b$. Y como

$$-b = a(-q),$$

obtenemos $a \mid (-b)$.
Los mismos argumentos pueden recorrerse en sentido inverso. Por tanto,

$$\boxed{a \mid b \iff (-a) \mid b \iff a \mid (-b)}.$$

Cambiar el signo del divisor o del múltiplo cambia el signo del testigo.

20. Supongamos $c \neq 0$ y

$$ca \mid cb.$$

Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$cb = (ca)q = c(aq).$$

Como $c \neq 0$, la ley de cancelación en $\mathbb{Z}$ permite deducir

$$b = aq.$$

Por definición,

$$\boxed{a \mid b}.$$

La hipótesis $c \neq 0$ se usa exactamente al cancelar c en la igualdad. Además, bajo la convención del capítulo, si $c = 0$ la expresión $ca \mid cb$ tendría divisor 0 y ni siquiera pertenecería a la relación definida.

21. Sea $a \mid b$ con $a, b \neq 0$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Como $b \neq 0$, el producto aq es no nulo y, en particular, $q \neq 0$. Por tanto,

$$|q| \geq 1.$$

Tomando valores absolutos,

$$|b| = |a||q| \geq |a|.$$

Así,

$$\boxed{|a| \leq |b|}.$$

22. De $a \mid b$ y $b \neq 0$, por el ejercicio anterior,

$$|a| \leq |b|.$$

De $b \mid a$ y $a \neq 0$,

$$|b| \leq |a|.$$

Luego

$$|a| = |b|.$$

Dos enteros no nulos con el mismo valor absoluto son iguales o opuestos. Por tanto,

$$\boxed{a = \pm b}.$$

El signo no puede eliminarse en general: por ejemplo, $2 \mid (-2)$ y $-2 \mid 2$, pero $2 \neq -2$.

23. Si $d \mid 15$, entonces, por la cota de divisibilidad,

$$|d| \leq 15.$$

Además se exige $|d| \geq 5$. Basta entonces probar los enteros con valor absoluto entre 5 y 15.

Los divisores positivos de 15 en ese rango son 5 y 15, porque

$$15 = 5 \cdot 3 = 15 \cdot 1.$$

Ninguno de $6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ divide a 15: el cociente correspondiente no es entero. Por simetría de signos, también dividen -5 y -15.

Así,

$$\boxed{d \in \{-15, -5, 5, 15\}}.$$

La exhaustividad proviene de la cota $|d| \leq 15$, no de una factorización prima.

24. La regla correcta es:

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ y $ca \mid cb$, entonces $a \mid b$.

La hipótesis $c \neq 0$ es indispensable para aplicar cancelación a una igualdad de enteros. En efecto, de

$$ca \mid cb$$

obtenemos un $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$cb = caq.$$

Como $c \neq 0$,

$$b = aq,$$

y así $a \mid b$.

Si $c = 0$, además, el supuesto divisor ca es 0, y la expresión queda fuera de la relación de divisibilidad definida en este capítulo. Por eso no es correcto afirmar que se puede "cancelar siempre" sin revisar las hipótesis.

D. Combinaciones lineales

25. Sean

$$a = du, \qquad b = dv$$

con $u, v \in \mathbb{Z}$. Para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$,

$$ra + sb = rdu + sdv = d(ru + sv).$$

Como $ru + sv \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{d \mid (ra + sb)}.$$

El testigo final es $ru + sv$.

26. Para obtener 18 podemos elegir

$$18 = 48 - 30.$$

Así, con $r = 1$ y $s = -1$,

$$6 \mid (48 - 30) = 18.$$

Para obtener 6, por ejemplo,

$$6 = 2 \cdot 30 - 48.$$

Con $r = -1$ y $s = 2$,

$$6 \mid (-48 + 2 \cdot 30) = 6.$$

En ambos casos la conclusión proviene del cierre de la divisibilidad bajo combinaciones lineales enteras.

27. Si $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces para $k \in \mathbb{Z}$ la expresión

$$a - kb$$

es la combinación lineal

$$1 \cdot a + (-k)b.$$

Por el teorema de combinaciones lineales,

$$\boxed{d \mid (a - kb)}.$$

Esta forma es útil porque puede escogerse k para cancelar términos dependientes de un parámetro y reducir una pregunta de divisibilidad a otra mucho más simple.

28. Sea

$$A = 5n + 2, \qquad B = 3n + 1.$$

Como $d \mid A$ y $d \mid B$, también divide cualquier combinación lineal. Elegimos coeficientes que eliminen n:

$$3A - 5B = 3(5n + 2) - 5(3n + 1) = 15n + 6 - 15n - 5 = 1.$$

Por tanto,

$$d \mid 1.$$

Los únicos divisores enteros no nulos de 1 son 1 y -1. Luego

$$\boxed{d = \pm 1}.$$

29. Tomemos

$$A = 7n + 4, \qquad B = 5n + 3.$$

Eliminamos n mediante

$$5A - 7B = 5(7n + 4) - 7(5n + 3) = 35n + 20 - 35n - 21 = -1.$$

Así,

$$d \mid (-1),$$

y por tanto

$$\boxed{d = \pm 1}.$$

La restricción es máxima: ningún otro entero no nulo puede dividir simultáneamente a las dos expresiones.

30. Sea d un divisor común de

$$14n + 9$$

y

$$8n + 5.$$

Una combinación que elimina n es

$$4(14n + 9) - 7(8n + 5) = 56n + 36 - 56n - 35 = 1.$$

Luego $d \mid 1$. En particular, multiplicando por 2,

$$\boxed{d \mid 2}.$$

De hecho, hemos obtenido la conclusión más fuerte $d = \pm 1$.

31. Primero simplificamos:

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2) = 4ab.$$

Como $d \mid a$, existe $q \in \mathbb{Z}$ con $a = dq$. Entonces

$$4ab = 4(dq)b = d(4qb),$$

de modo que

$$\boxed{d \mid [(a+b)^2-(a-b)^2]}.$$

Esta prueba usa sólo $d \mid a$.

Otra vía usa ambas hipótesis: de $d \mid a$ y $d \mid b$ se deduce $d \mid (a+b)$ y $d \mid (a-b)$; por compatibilidad con productos, d divide sus cuadrados, y por resta divide la diferencia de cuadrados. La primera prueba es más corta; la segunda muestra cómo se encadenan propiedades de divisibilidad.

32. Agrupamos coeficientes de a y b:

$$\begin{aligned} &r_1a + r_2b + r_3(a-b) + r_4(2a+3b) \\ &= (r_1 + r_3 + 2r_4)a + (r_2 - r_3 + 3r_4)b. \end{aligned}$$

Los dos nuevos coeficientes son enteros. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, el teorema de combinaciones lineales implica

$$\boxed{d \mid r_1a + r_2b + r_3(a-b) + r_4(2a+3b)}.$$

33. Sea

$$A = 4n+1, \qquad B = 6n+1.$$

Como d divide a ambos, divide también

$$3A - 2B = 3(4n+1) - 2(6n+1) = 12n + 3 - 12n - 2 = 1.$$

Así,

$$d \mid 1,$$

y los únicos valores posibles son

$$\boxed{d = \pm 1}.$$

34. Definamos

$$A = 2u+3v, \qquad B = 5u+7v.$$

Por hipótesis, $d \mid A$ y $d \mid B$.

Para aislar u:

$$7A - 3B = 7(2u+3v) - 3(5u+7v) = 14u + 21v - 15u - 21v = -u.$$

Así, $d \mid (-u)$ y por cambio de signo

$$\boxed{d \mid u}.$$

Para aislar v:

$$5A - 2B = 5(2u + 3v) - 2(5u + 7v) = 10u + 15v - 10u - 14v = v.$$

Por tanto,

$$\boxed{d \mid v}.$$

No fue necesario invocar determinantes: las dos conclusiones surgieron de escoger directamente combinaciones lineales que cancelan una variable.

E. Relación de divisibilidad y conjuntos $a\mathbb{Z}$

35. Sobre $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

- **Reflexiva:** sí. Para todo $a \neq 0$,
$$a = a \cdot 1,$$
luego $a \mid a$.
- **Simétrica:** no. Por ejemplo,
$$2 \mid 6,$$
pero $6 \nmid 2$.
- **Transitiva:** sí. Si $b = ar$ y $c = bs$, entonces
$$c = a(rs),$$
y por tanto $a \mid c$.

Así, la divisibilidad es reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

36. Tomemos $a = 2$ y $b = -2$. Entonces

$$2 \mid (-2)$$

y

$$-2 \mid 2,$$

pero $2 \neq -2$. Por tanto, la divisibilidad no es antisimétrica sobre $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Si restringimos a $\mathbb{Z}_{>0}$ y $a \mid b$, $b \mid a$, la divisibilidad mutua da

$$a = \pm b.$$

Como $a, b > 0$, la opción negativa es imposible, de modo que $a = b$. Así se recupera la antisimetría.

37. Sobre $\mathbb{Z}_{>0}$ verificamos las tres propiedades de un orden parcial.
Reflexividad. Para todo $a > 0$,

$$a = a \cdot 1,$$

luego $a \mid a$.
Antisimetría. Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = \pm b$. Como ambos son positivos,

$$a = b.$$

Transitividad. Si $a \mid b$ y $b \mid c$, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ con $b = ar$ y $c = bs$. Entonces

$$c = a(rs),$$

y por tanto $a \mid c$.
En consecuencia,

$$\boxed{\mid \text{ es un orden parcial sobre } \mathbb{Z}_{>0}}.$$

38. Entre -25 y 25:

$$4\mathbb{Z} : -24, -20, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24;$$

$$6\mathbb{Z} : -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24;$$

y

$$(-4)\mathbb{Z} : -24, -20, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24.$$

Las listas sugieren correctamente que

$$\boxed{4\mathbb{Z} = (-4)\mathbb{Z}}.$$

En cambio, no hay inclusión entre $4\mathbb{Z}$ y $6\mathbb{Z}$: por ejemplo, $4 \in 4\mathbb{Z}$ pero $4 \notin 6\mathbb{Z}$, mientras que $6 \in 6\mathbb{Z}$ pero $6 \notin 4\mathbb{Z}$.

39. Supongamos $a \mid b$. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Sea $x \in b\mathbb{Z}$. Por definición, existe $t \in \mathbb{Z}$ con

$$x = bt.$$

Sustituyendo,

$$x = (aq)t = a(qt).$$

Como $qt \in \mathbb{Z}$, se tiene $x \in a\mathbb{Z}$. Como x fue arbitrario,

$$\boxed{b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}}.$$

40. Supongamos

$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

El elemento clave es b mismo. Como

$$b = b \cdot 1,$$

se tiene $b \in b\mathbb{Z}$. Por la inclusión,

$$b \in a\mathbb{Z}.$$

Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Por definición,

$$\boxed{a \mid b}.$$

41. Supongamos primero

$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}.$$

Entonces

$$a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

Por la equivalencia entre divisibilidad e inclusión,

$$b \mid a \qquad \text{y} \qquad a \mid b.$$

La divisibilidad mutua implica

$$a = \pm b.$$

Recíprocamente, si $a = b$, es inmediato que $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$. Si $a = -b$, entonces todo múltiplo ak puede escribirse como

$$ak = (-b)k = b(-k),$$

y viceversa. Por tanto los conjuntos coinciden. Concluimos

$$\boxed{a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \iff a = \pm b}.$$

42. Como todo múltiplo de 8 es múltiplo de 4, y todo múltiplo de 4 es múltiplo de 2,

$$\boxed{8\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}}.$$

En cambio, por divisibilidad,

$$\boxed{2 \mid 4 \mid 8}.$$

La dirección se invierte porque si $a \mid b$, entonces b es un múltiplo de a, de modo que **todo múltiplo de** b es automáticamente un múltiplo de a. Así,

$$a \mid b \Longrightarrow b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

F. Ecuaciones $ax = b$

43.

- $6x = 48$: como $48 = 6 \cdot 8$, hay solución entera y
$$x = 8.$$
- $6x = 50$: $6 \nmid 50$, de modo que no hay solución entera.
- $-7x = 35$: como $35 = (-7)(-5)$,
$$x = -5.$$
- $9x = -54$: como $-54 = 9(-6)$,
$$x = -6.$$

44. Sea $a \neq 0$.
Si $ax = b$ tiene una solución entera x_0, entonces

$$b = ax_0$$

con $x_0 \in \mathbb{Z}$. Por definición,

$$a \mid b.$$

Recíprocamente, si $a \mid b$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = aq.$$

Tomando $x = q$, obtenemos una solución entera de $ax = b$.
Por tanto,

$$\boxed{ax = b \text{ tiene solución entera} \iff a \mid b}.$$

45. Tenemos

$$20m + 15 = 5(4m + 3).$$

Como $4m + 3 \in \mathbb{Z}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, se cumple

$$5 \mid (20m + 15)$$

para **todo** entero m. Por tanto la ecuación tiene solución entera para cada $m \in \mathbb{Z}$, y una solución es

$$\boxed{x = 4m + 3}.$$

46. La ecuación

$$4x = 6n + 2$$

tiene solución entera exactamente cuando

$$4 \mid (6n + 2).$$

Factorizamos 2:

$$6n + 2 = 2(3n + 1).$$

Por tanto necesitamos que $3n + 1$ sea par.
Si n es par, escribimos $n = 2k$. Entonces

$$3n + 1 = 6k + 1,$$

que es impar; no hay solución.
Si n es impar, escribimos $n = 2k + 1$. Entonces

$$3n + 1 = 6k + 4 = 2(3k + 2),$$

que es par. En ese caso

$$6n + 2 = 4(3k + 2),$$

y existe solución.
Así, la condición exacta es

$$\boxed{n \text{ impar}}.$$

Cuando n es impar,

$$\boxed{x = \frac{3n+1}{2}}.$$

47. Supongamos que x_1 y x_2 son dos soluciones enteras de

$$ax = b,$$

con $a \neq 0$. Entonces

$$ax_1 = b = ax_2.$$

Restando,

$$a(x_1 - x_2) = 0.$$

Como $a \neq 0$, podemos escribir

$$a(x_1 - x_2) = a \cdot 0$$

y cancelar el factor no nulo a. Así,

$$x_1 - x_2 = 0,$$

luego

$$\boxed{x_1 = x_2}.$$

Por tanto, si una ecuación $ax = b$ tiene solución entera, ésta es única. Esto contrasta con ecuaciones lineales en dos variables, donde una misma ecuación puede admitir infinitas parejas enteras; en C14 ya hemos visto ejemplos construidos mediante transformaciones que preservan el lado izquierdo.

48. De $a \mid b$ existe $x_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ax_1 = b.$$

De $a \mid c$ existe $x_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ax_2 = c.$$

Sumando las igualdades,

$$a(x_1 + x_2) = b + c.$$

Como $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$, una solución entera de

$$ax = b + c$$

es

$$\boxed{x = x_1 + x_2}.$$

El argumento es exactamente la traducción, en lenguaje de ecuaciones, de la propiedad

$$a \mid b, \quad a \mid c \Longrightarrow a \mid (b+c).$$

G. Ecuaciones diofánticas lineales

49. a)

$$18(2) + 30(-1) = 36 - 30 = 6,$$

por tanto $(2, -1)$ sí es solución.

b)

$$4(1) + 6(1) = 10,$$

por tanto $(1, 1)$ sí es solución.

c)

$$5(-2) + 7(3) = -10 + 21 = 11,$$

por tanto $(-2, 3)$ sí es solución.

Las tres parejas propuestas satisfacen exactamente sus respectivas ecuaciones.

50. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$4x + 6y = 2(2x + 3y).$$

Así,

$$2 \mid (4x + 6y).$$

Si existiera una solución de

$$4x + 6y = 7,$$

entonces tendría que cumplirse $2 \mid 7$, lo cual es falso. Por tanto,

$$\boxed{4x + 6y = 7 \text{ no tiene soluciones enteras}}.$$

51. El entero 2 divide a ambos coeficientes:

$$2 \mid 6, \qquad 2 \mid 10.$$

Por tanto, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$2 \mid (6x + 10y).$$

Pero

$$2 \nmid 15.$$

Luego la igualdad

$$6x + 10y = 15$$

es imposible en enteros. Así,

$$\boxed{\text{no hay solución entera}}.$$

52. Para

$$8x + 12y = 4,$$

podemos tomar

$$(x, y) = (2, -1),$$

porque

$$8(2) + 12(-1) = 16 - 12 = 4.$$

Para

$$15x + 21y = 6,$$

podemos tomar

$$(x, y) = (-1, 1),$$

porque

$$15(-1) + 21(1) = 6.$$

Una sola pareja que satisface la ecuación basta para demostrar existencia. No es necesario, para ese objetivo, describir todas las soluciones.

53. Supongamos que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ satisface

$$ax + by = c.$$

Como $d \mid a$ y $d \mid b$, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = dr, \qquad b = ds.$$

Entonces

$$c = ax + by = drx + dsy = d(rx + sy).$$

Como $rx + sy \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{d \mid c}.$$

El argumento funciona para cualquier divisor común no nulo d de a y b.

54. Como

$$6 \mid 12 \qquad \text{y} \qquad 6 \mid 18,$$

cualquier combinación

$$12x + 18y$$

con $x, y \in \mathbb{Z}$ es divisible por 6. Si existe una solución de

$$12x + 18y = c,$$

entonces necesariamente

$$\boxed{6 \mid c}.$$

Esto es sólo una **condición necesaria**: hemos demostrado

$$\text{solución} \Longrightarrow 6 \mid c,$$

pero no el converso. Para tener un criterio completo habría que demostrar además que cada c que cumpla la condición produce una solución, algo que no se sigue de este argumento y que se estudiará sistemáticamente en C15.

55. Partimos de

$$18(2) + 30(-1) = 6.$$

Multiplicamos toda la igualdad por un entero arbitrario m:

$$18(2m) + 30(-m) = 6m.$$

Por tanto, para todo $m \in \mathbb{Z}$ una solución concreta de

$$18x + 30y = 6m$$

es

$$\boxed{(x, y) = (2m, -m)}.$$

56. Supongamos

$$18x_0 + 30y_0 = c.$$

Para $t \in \mathbb{Z}$ calculamos

$$\begin{aligned} 18(x_0 + 5t) + 30(y_0 - 3t) &= 18x_0 + 90t + 30y_0 - 90t \\ &= 18x_0 + 30y_0 \\ &= c. \end{aligned}$$

Luego

$$\boxed{(x_0 + 5t,\ y_0 - 3t)}$$

es solución para todo $t \in \mathbb{Z}$. La transformación suma al lado izquierdo

$$18(5t) + 30(-3t) = 90t - 90t = 0,$$

de modo que no altera su valor.

57. Encontrar tres soluciones demuestra sólo que la ecuación tiene **al menos** tres soluciones. No demuestra que no existan otras.

Para justificar la frase "éstas son todas las soluciones" habría que probar **exhaustividad**: tomar una solución arbitraria (x, y) de

$$8x + 12y = 4$$

y demostrar que necesariamente pertenece a la lista o a una familia paramétrica previamente descrita.

Es decir, una clasificación completa requiere una implicación del tipo

$$(x, y) \text{ solución} \Longrightarrow (x, y) \text{ tiene una forma determinada.}$$

Exhibir ejemplos sólo prueba la implicación contraria para esos ejemplos. La clasificación general de ecuaciones lineales diofánticas se reserva para C15.

58. Primera ecuación:

$$10x + 14y = 6.$$

Hay existencia. Por ejemplo,

$$10(2) + 14(-1) = 20 - 14 = 6.$$

Luego $(2, -1)$ es un certificado.

Segunda ecuación:

$$10x + 14y = 5.$$

El entero 2 divide a 10 y a 14, luego divide a todo $10x + 14y$. Pero $2 \nmid 5$. Por tanto no hay soluciones enteras.

Tercera ecuación:

$$9x + 15y = 12.$$

Hay existencia. Por ejemplo,

$$9(3) + 15(-1) = 27 - 15 = 12.$$

Luego $(3, -1)$ es un certificado.

Así, la primera y la tercera son solubles por exhibición directa; la segunda es imposible por una obstrucción de divisibilidad.

H. Identidades de divisibilidad y factorización

59. Usamos la diferencia de cuadrados:

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v).$$

Si $u - v \neq 0$, el divisor está admitido por la convención del capítulo, y como $u + v \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$\boxed{u - v \mid u^2 - v^2}.$$

El testigo es $u + v$.

60. La identidad se demuestra multiplicando la suma por $u-v$: las dos sumas resultantes se cancelan en los índices interiores, como en §14.14. Para $m=1$ la suma del testigo tiene un único término, 1, y da $u-v=(u-v)\cdot 1$.

Para $m\geq 1$ se cumple la identidad

$$u^m - v^m = (u-v)\left(\sum_{j=0}^{m-1} u^{m-1-j}v^j\right).$$

El factor entre paréntesis es un entero si $u,v\in\mathbb{Z}$. Por tanto, siempre que $u-v\neq 0$,

$$\boxed{u-v \mid u^m - v^m}.$$

El testigo explícito es

$$\boxed{\sum_{j=0}^{m-1} u^{m-1-j}v^j}.$$

61. Aplicamos el ejercicio anterior con

$$u=n, \qquad v=1.$$

Entonces

$$n^m - 1 = (n-1)\left(\sum_{j=0}^{m-1} n^j\right).$$

Si $n\neq 1$, el divisor $n-1$ es no nulo y, como el segundo factor es entero,

$$\boxed{n-1 \mid n^m - 1}.$$

La restricción $n\neq 1$ aparece únicamente porque, bajo la convención del capítulo, 0 no se admite como divisor. Si $n=1$, la expresión que aparecería a la izquierda sería $0\mid 0$, que queda fuera de la relación definida.

62. Escribimos

$$n^{2m} - 1 = (n^2)^m - 1^m.$$

Por diferencia de potencias,

$$(n^2)^m - 1 = (n^2-1)\left(\sum_{j=0}^{m-1} n^{2j}\right).$$

Además,

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1).$$

Por tanto,

$$n^{2m} - 1 = (n+1)(n-1)\left(\sum_{j=0}^{m-1} n^{2j}\right).$$

Si $n\neq -1$, el divisor $n+1$ es no nulo, y el factor restante es entero. Luego

$$\boxed{n+1 \mid n^{2m}-1}.$$

No se usaron congruencias, sólo factorizaciones.

63. Usamos la diferencia de cuadrados con

$$A = n^m.$$

Entonces

$$n^{2m}-1 = (n^m)^2 - 1^2 = (n^m-1)(n^m+1).$$

Siempre que $n^m - 1 \neq 0$, la definición de divisibilidad permite concluir

$$\boxed{n^m-1 \mid n^{2m}-1}.$$

El cociente exacto es

$$\boxed{n^m+1}.$$

64. Reconocemos el cubo de una diferencia:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3.$$

Así,

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2.$$

Si $a - b \neq 0$, el segundo factor $(a-b)^2$ es un entero y sirve como testigo. Por tanto,

$$\boxed{a-b \mid a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}.$$

65. Queremos

$$n+1 \mid n+7.$$

Como evidentemente

$$n+1 \mid n+1,$$

por resta la condición implica

$$n+1 \mid (n+7) - (n+1) = 6.$$

Recíprocamente, si $n+1 \mid 6$, entonces

$$n+7 = (n+1) + 6$$

es suma de dos múltiplos de $n+1$, así que $n+1 \mid n+7$. Por tanto las condiciones son equivalentes:

$$n+1 \mid n+7 \iff n+1 \mid 6.$$

Los divisores enteros no nulos de 6 son

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6.$$

Así,

$$n+1 \in \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\},$$

y por tanto

$$\boxed{n \in \{-7,-4,-3,-2,0,1,2,5\}}.$$

Todos estos valores satisfacen la condición porque $n+1$ divide a 6 y, por la equivalencia demostrada, divide a $n+7$.

66. Buscamos reducir

$$n^2-3n+5$$

por un múltiplo de $n-2$. Observamos que

$$(n-2)(n-1) = n^2-3n+2.$$

Por tanto,

$$n^2-3n+5 = (n-2)(n-1)+3.$$

Así,

$$n-2 \mid n^2-3n+5 \iff n-2 \mid 3,$$

siempre con $n \neq 2$.

Los divisores enteros no nulos de 3 son

$$\pm 1,\ \pm 3.$$

Entonces

$$n-2 \in \{-3,-1,1,3\},$$

de donde

$$\boxed{n \in \{-1,1,3,5\}}.$$

La equivalencia garantiza también el recíproco: para cada uno de esos valores, $n-2$ divide a la expresión original.

I. Diagnóstico y elección de método

67. Tomemos

$$a=6, \qquad b=2, \qquad c=3.$$

Entonces

$$bc = 6,$$

de modo que

$$6 \mid bc.$$

Pero

$$6 \nmid 2.$$

Por tanto, la implicación es falsa.

La razón lógica del fallo es que de

$$bc = aq$$

no podemos concluir que $b = a(q/c)$ con un **testigo entero**: aunque $c \neq 0$, el cociente q/c puede no ser entero. La divisibilidad requiere un cociente en $\mathbb{Z}$, no sólo una igualdad válida en $\mathbb{Q}$.

68. Usamos nuevamente

$$a = 6, \qquad b = 2, \qquad c = 3.$$

Entonces

$$6 \mid 2 \cdot 3,$$

pero

$$6 \nmid 2 \qquad \text{y} \qquad 6 \nmid 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{a \mid bc \not\Rightarrow a \mid b \ \text{o} \ a \mid c}.$$

Este contraejemplo será importante más adelante: resultados de apariencia semejante requieren hipótesis adicionales que todavía no forman parte de C14.

69. Tomemos

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 6.$$

Entonces

$$2 \mid 2 \qquad \text{y} \qquad 3 \mid 6.$$

Sin embargo,

$$a + c = 5, \qquad b + d = 8,$$

y

$$5 \nmid 8.$$

Por tanto la afirmación es falsa.

La razón es que las dos divisibilidades tienen **divisores diferentes**. Escribir $b = ar$ y $d = cs$ produce

$$b + d = ar + cs,$$

pero no existe en general un factor común $a + c$ que pueda extraerse. La propiedad de combinación lineal exige un mismo divisor común.

70. Tomemos

$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = 2.$$

Entonces

$$3 \mid (1 + 2),$$

pero

$$3 \nmid 1 \qquad \text{y} \qquad 3 \nmid 2.$$

Así, la implicación es falsa.

Una hipótesis adicional sencilla que sí permite recuperar una de las divisibilidades es, por ejemplo, suponer además $a \mid b$. Si

$$a \mid (b + c) \qquad \text{y} \qquad a \mid b,$$

entonces por resta

$$a \mid [(b + c) - b] = c.$$

Simétricamente, si sabemos $a \mid c$, entonces de $a \mid (b + c)$ deducimos $a \mid b$.

71. a) $7 \mid (35n + 14)$**.** El método más natural es la **definición con testigo** o una factorización inmediata:

$$35n + 14 = 7(5n + 2).$$

Como $5n + 2 \in \mathbb{Z}$, el testigo está a la vista.

b) $a \mid b \iff b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$**.** El método natural es la **inclusión de conjuntos de múltiplos**, porque la afirmación compara directamente divisibilidad con pertenencia a $a\mathbb{Z}$ y $b\mathbb{Z}$.

c) $u - v \mid u^5 - v^5$**.** El método natural es la **factorización**:

$$u^5 - v^5 = (u - v)(u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4).$$

d) Divisor común de $12n + 7$ **y** $8n + 5$**.** El método natural es una **combinación lineal** que elimine n:

$$2(12n + 7) - 3(8n + 5) = 24n + 14 - 24n - 15 = -1.$$

Por tanto todo divisor común d satisface

$$d \mid 1,$$

y así $d = \pm 1$.

La elección de método depende de la estructura visible en cada problema, no de una jerarquía fija de técnicas.

72. La frase correcta es:

Si $d \neq 0$, $d \mid A$ y $d \mid B$, entonces para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$> d \mid (rA + sB). >$$

Aquí "combinarlas" significa formar una **combinación lineal entera**: multiplicar cada expresión por un coeficiente entero y sumar los resultados. Si

$$A = du, \qquad B = dv,$$

entonces

$$rA + sB = d(ru + sv),$$

y $ru + sv$ sigue siendo entero.

La formulación original "cualquier cosa obtenida al combinarlas" es demasiado amplia. Por ejemplo, operaciones como dividir una de las expresiones por un entero arbitrario pueden destruir la existencia de un testigo entero. Si $d \mid A$, no se sigue en general que d divida $A/2$, incluso cuando $A/2$ sea entero. También una operación no lineal puede necesitar una justificación distinta: algunos productos conservan divisibilidad, pero eso proviene de otra propiedad, no del teorema de combinaciones lineales.

La garantía automática de esta sección se limita a expresiones

$$rA + sB$$

con $r, s \in \mathbb{Z}$.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Queremos demostrar que la relación $\mid$ es un orden parcial sobre $\mathbb{Z}_{>0}$.

Reflexividad. Para todo $a > 0$,

$$a = a \cdot 1,$$

por lo que $a \mid a$.

Antisimetría. Supongamos $a, b > 0$ y

$$a \mid b, \qquad b \mid a.$$

Por la propiedad de divisibilidad mutua para enteros no nulos,

$$a = \pm b.$$

Como a y b son positivos, la posibilidad $a = -b$ queda excluida. Por tanto,

$$a = b.$$

Transitividad. Si $a \mid b$ y $b \mid c$, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$b = ar, \qquad c = bs.$$

Entonces

$$c = a(rs),$$

y por tanto $a \mid c$.

Así, $\mid$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva sobre $\mathbb{Z}_{>0}$; luego define un orden parcial.

Ahora consideremos $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. La antisimetría falla porque los signos producen pares distintos que se dividen mutuamente. El contraejemplo mínimo en valor absoluto es

$$1 \mid (-1) \qquad \text{y} \qquad -1 \mid 1,$$

pero

$$1 \neq -1.$$

Esto concuerda exactamente con el teorema general de divisibilidad mutua:

$$a \mid b, \quad b \mid a \Longrightarrow a = \pm b.$$

Sobre los positivos, el signo negativo desaparece y se obtiene $a = b$; sobre los enteros no nulos, $a = -b$ sigue siendo una posibilidad legítima. Ésa es la razón precisa del fallo de antisimetría.

74. Primero probamos

$$a \mid b \iff b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

($\Rightarrow$) Supongamos $a \mid b$. Existe $q \in \mathbb{Z}$ con

$$b = aq.$$

Sea $x \in b\mathbb{Z}$. Entonces $x = bt$ para algún $t \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo,

$$x = (aq)t = a(qt).$$

Como $qt \in \mathbb{Z}$, se tiene $x \in a\mathbb{Z}$. Por tanto,

$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

($\Leftarrow$) Supongamos

$$b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

Como $b = b \cdot 1$, tenemos $b \in b\mathbb{Z}$. La inclusión implica $b \in a\mathbb{Z}$, de modo que existe $q \in \mathbb{Z}$ con

$$b = aq.$$

Así, $a \mid b$.
Queda demostrada la equivalencia.
Ahora supongamos

$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}.$$

Entonces se tienen las dos inclusiones, por lo que la equivalencia anterior da

$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad b \mid a.$$

Por divisibilidad mutua,

$$a = \pm b.$$

Recíprocamente, si $a = b$ es trivial que los conjuntos coinciden. Si $a = -b$, entonces

$$ak = b(-k),$$

de modo que cada múltiplo de a es múltiplo de b, y viceversa. Por tanto,

$$\boxed{a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \iff a = \pm b}.$$

La dirección de la inclusión parece invertida porque "b es múltiplo de a" significa que b contiene al factor a. Por ello, cualquier nuevo múltiplo de b contiene también ese factor a. Cuanto más arriba está un número en el orden de divisibilidad, más restrictivo es ser múltiplo suyo; por eso su conjunto de múltiplos es más pequeño por inclusión.

75. Primero demostremos la equivalencia básica. Si $a \mid b$, existe $q \in \mathbb{Z}$ con $b = aq$. Entonces

$$b + ka = a(q + k),$$

y como $q + k \in \mathbb{Z}$,

$$a \mid (b + ka).$$

Recíprocamente, si $a \mid (b+ka)$, entonces también $a \mid ka$. Restando el múltiplo ka obtenemos

$$a \mid [(b + ka) - ka] = b.$$

Así,

$$\boxed{a \mid b \iff a \mid (b + ka)}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

a)

$$37 \cdot 125 + 74 = 37 \cdot 125 + 2 \cdot 37 = 37(127).$$

Por tanto,

$$\boxed{37 \mid 37 \cdot 125 + 74}.$$

b) Sea

$$A = 101n + 37, \qquad B = 100n + 36.$$

Si $d \mid A$ y $d \mid B$, entonces por resta

$$d \mid (A - B) = n + 1.$$

Como también $d \mid B$, podemos eliminar n:

$$B - 100(n + 1) = 100n + 36 - 100n - 100 = -64.$$

Por tanto,

$$\boxed{d \mid 64}.$$

c) Sea

$$C = 53n + 18, \qquad D = 52n + 17.$$

Por resta,

$$d \mid (C - D) = n + 1.$$

Luego, usando D,

$$52(n+1) - D = 52n + 52 - (52n + 17) = 35.$$

Así,

$$\boxed{d \mid 35}.$$

La restricción resultante es que d debe ser uno de los divisores enteros no nulos de 35:

$$\boxed{d \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35\}}.$$

No afirmamos que todos ellos dividan necesariamente a ambas expresiones para un n dado; afirmamos sólo que cualquier divisor común posible debe pertenecer a esa lista.

76. La factorización de §14.14 se obtiene por distributividad y telescopaje: al multiplicar el testigo por u y por v, las contribuciones interiores coinciden y se restan, dejando $u^m - v^m$. Para $m = 1$ el testigo es 1; en los dos corolarios, las sumas con un solo término también valen 1.

Para $m \geq 1$ usamos la identidad

$$u^m - v^m = (u - v) \left(\sum_{j=0}^{m-1} u^{m-1-j} v^j \right).$$

Si $u - v \neq 0$, el factor de la derecha entre paréntesis es un entero y actúa como testigo. Luego

$$\boxed{u - v \mid u^m - v^m}.$$

Primer corolario. Tomamos

$$u = n, \qquad v = 1.$$

Entonces, si $n \neq 1$,

$$\boxed{n - 1 \mid n^m - 1}.$$

Segundo corolario. Queremos un factor $n + 1$. Aplicamos la diferencia de potencias a

$$u = n^2, \qquad v = 1.$$

Así,

$$n^{2m} - 1 = (n^2 - 1) \left(\sum_{j=0}^{m-1} n^{2j} \right).$$

Como

$$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1),$$

obtenemos, si $n \neq -1$,

$$\boxed{n + 1 \mid n^{2m} - 1}.$$

La diferencia conceptual entre ambos corolarios es la sustitución. El primero usa directamente $u = n$, $v = 1$; el segundo usa $u = n^2$, $v = 1$ y luego factoriza $n^2 - 1$. En ningún paso se necesitan congruencias.

77. Queremos determinar los enteros $n \neq -1$ que satisfacen

$$n+1 \mid n^2+1.$$

La clave es la identidad

$$n^2+1-(n-1)(n+1)=2.$$

Si $n+1 \mid n^2+1$, entonces $n+1$ divide también a $(n-1)(n+1)$. Por cierre bajo resta,

$$\boxed{n+1 \mid 2}.$$

Recíprocamente, si $n+1 \mid 2$, entonces

$$n^2+1=(n-1)(n+1)+2$$

es suma de dos múltiplos de $n+1$, y por tanto $n+1 \mid n^2+1$. Así, para $n \neq -1$,

$$n+1 \mid n^2+1 \iff n+1 \mid 2.$$

Los divisores enteros no nulos de 2 son

$$-2,-1,1,2.$$

Por tanto,

$$n+1 \in \{-2,-1,1,2\},$$

de donde

$$\boxed{n \in \{-3,-2,0,1\}}.$$

Verificamos:

- $n=-3$: $n+1=-2$ y $n^2+1=10$, luego $-2 \mid 10$;
- $n=-2$: $n+1=-1$ y $n^2+1=5$, luego $-1 \mid 5$;
- $n=0$: $n+1=1$ y $n^2+1=1$;
- $n=1$: $n+1=2$ y $n^2+1=2$.

Todos los candidatos funcionan, y la equivalencia demuestra que no hay otros.

78. Supongamos

$$a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$$

con todos los a_i no nulos.

a) Cada relación consecutiva

$$a_i \mid a_{i+1}$$

permite aplicar la cota de divisibilidad:

$$|a_i| \leq |a_{i+1}|.$$

Encadenando,

$$\boxed{|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_m|}.$$

b) Supongamos además

$$|a_1| = |a_m|.$$

Tenemos una cadena de números reales

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_m| = |a_1|.$$

No puede haber una desigualdad estricta intermedia, porque entonces el último valor sería estrictamente mayor que el primero. Por tanto,

$$|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_m|.$$

Así, para cada i,

$$|a_i| = |a_1|,$$

y por tanto

$$\boxed{a_i = \pm a_1}.$$

También puede verse mediante la divisibilidad: por transitividad, $a_1 \mid a_i$; como tienen el mismo valor absoluto, el cociente sólo puede ser 1 o -1.

c) La **transitividad** permite pasar de la cadena local a relaciones como

$$a_1 \mid a_i \qquad \text{y} \qquad a_i \mid a_m.$$

La **cota** $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ produce la monotonía de los valores absolutos. En la prueba más directa de la parte b), esa monotonía y la igualdad de los extremos fuerzan la igualdad de todos los valores intermedios.

79. La supuesta prueba parte correctamente de

$$a \mid bc \Longrightarrow bc = aq$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$. El error aparece cuando se divide por c y se escribe

$$b = a\left(\frac{q}{c}\right)$$

como si q/c fuese automáticamente un entero.

1. Paso inválido. La división por c puede ser válida como igualdad racional cuando $c \neq 0$, pero no conserva necesariamente la condición que exige la divisibilidad: un **testigo entero**.

2. Por qué q/c puede no ser entero. Nada en $bc = aq$ obliga a que $c \mid q$. Por ejemplo, si

$$a = 6, \quad b = 2, \quad c = 3,$$

entonces

$$bc = 6 = 6 \cdot 1,$$

así que podemos tomar $q = 1$. Pero

$$\frac{q}{c} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

3. Contraejemplo. Con esos mismos valores,

$$6 \mid 2 \cdot 3,$$

pero

$$6 \nmid 2 \qquad \text{y} \qquad 6 \nmid 3.$$

Por tanto la afirmación completa es falsa.

4. Por qué la definición no permite la cancelación. Para demostrar $a \mid b$ necesitamos producir un entero r tal que

$$b = ar.$$

La manipulación sólo produce el candidato racional $r = q/c$; mientras no se demuestre que $q/c \in \mathbb{Z}$, no existe un testigo válido. La cancelación legítima estudiada antes tenía la forma

$$ca \mid cb \Longrightarrow a \mid b,$$

porque la igualdad asociada es

$$cb = caq,$$

y al cancelar $c \neq 0$ queda directamente

$$b = aq$$

con el mismo testigo entero q. Aquí la situación algebraica es distinta.

5. Qué falta estudiar. Para obtener resultados de la forma "un divisor de un producto debe dividir a uno de los factores" hacen falta hipótesis adicionales sobre el divisor y sobre la estructura aritmética de los enteros. Esas hipótesis se estudiarán más adelante, especialmente al introducir números primos en C16. En C14 no debemos usarlas ni anticipar un teorema que sin ellas es falso.

80. Estudiamos

$$18x + 30y = c.$$

a) Condición necesaria. Como

$$6 \mid 18 \qquad \text{y} \qquad 6 \mid 30,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$6 \mid (18x + 30y).$$

Por tanto, si existe una solución de

$$18x + 30y = c,$$

necesariamente

$$\boxed{6 \mid c}.$$

b) Certificado para $c = 6$. Calculamos

$$18(2) + 30(-1) = 36 - 30 = 6.$$

Así,

$$\boxed{(2, -1)}$$

es una solución de $18x + 30y = 6$.

c) Existencia cuando $c = 6m$. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Multiplicamos el certificado anterior por m:

$$18(2m) + 30(-m) = 6m.$$

Por tanto, una solución explícita es

$$\boxed{(x, y) = (2m, -m)}.$$

Esto demuestra que, para esta ecuación concreta, la condición $6 \mid c$ no sólo es necesaria: también basta para producir al menos una solución.

d) Familia infinita a partir de una solución. Supongamos que (x_0, y_0) satisface

$$18x_0 + 30y_0 = c.$$

Para $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 18(x_0 + 5t) + 30(y_0 - 3t) &= 18x_0 + 90t + 30y_0 - 90t \\ &= 18x_0 + 30y_0 \\ &= c. \end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{(x_0 + 5t,\ y_0 - 3t)}$$

es solución para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Además, si $t_1 \neq t_2$, las primeras coordenadas

$$x_0 + 5t_1 \qquad \text{y} \qquad x_0 + 5t_2$$

son distintas. Por tanto esta construcción produce infinitas soluciones diferentes.

e) Puente conceptual hacia C15. En este ejemplo encontramos un entero, 6, con dos propiedades decisivas:

1. divide simultáneamente a los coeficientes 18 y 30;
2. además puede escribirse como una combinación lineal de ellos:

$$6 = 18(2) + 30(-1).$$

La primera propiedad produce la obstrucción $6 \mid c$; la segunda permite convertir cualquier múltiplo $6m$ en una combinación lineal de 18 y 30, fabricando una solución.

Esto sugiere la pregunta general correcta para el capítulo siguiente: dados dos coeficientes a y b, ¿cómo encontrar sistemáticamente un divisor común que concentre toda la información relevante y, al mismo tiempo, pueda obtenerse mediante combinaciones lineales de a y b?

C14 no responde todavía esa pregunta en general. Sólo muestra, mediante este ejemplo, por qué necesitamos una herramienta nueva.

N. Testigos, dominios y certificados

81. C13 proporciona el entero $\binom{n}{k}$, que cuenta los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de n elementos. La fórmula factorial se reescribe como $n! = k!(n-k)!\binom{n}{k}$. Como los factoriales son positivos, el divisor es no nulo y $\binom{n}{k}$ es el testigo buscado.

Si también $n! \mid k!(n-k)!$, existiría un entero q con $k!(n-k)! = n!q$. Al sustituir y cancelar el factorial no nulo obtenemos $1 = \binom{n}{k}q$. Como $\binom{n}{k}$ es positivo, esto obliga a $\binom{n}{k} = 1$ y $q = 1$. En $k = 0$ o $k = n$ hay un único subconjunto, de modo que los dos factoriales son iguales y la divisibilidad inversa sí se cumple. Si $0 < k < n$, hay al menos dos subconjuntos distintos: toma uno de tamaño k y reemplaza uno de sus elementos por otro que esté fuera. Por tanto

$\binom{n}{k} \geq 2$ y la inversa no se cumple. La clasificación completa es $k = 0$ o $k = n$; para $n = 0$ ambos casos coinciden en $k = 0$, y los dos números valen $0! = 1$.

82. Si $n = 2t$, entonces $n(n+1) = 2[t(2t+1)]$, con testigo entero $t(2t+1)$. Si $n = 2t+1$, entonces $n(n+1) = (2t+1)(2t+2) = 2[(2t+1)(t+1)]$, con testigo entero $(2t+1)(t+1)$. Las dos formas de los enteros pares e impares cubren todos los enteros, también negativos, y en ambas el testigo es un producto de enteros. Para $n = 0$ y $n = -1$, el producto y el testigo son cero.

El candidato $n^2/2$ falla primero en la igualdad: $2(n^2/2) = n^2$, que sólo coincide con $n(n+1) = n^2 + n$ cuando $n = 0$. Además, para n impar ni siquiera es entero. Por ejemplo, para $n = 2$ el candidato es entero pero da 4 en vez de 6; para $n = 1$ no es entero y da 1 en vez de 2. Un testigo válido debe satisfacer simultáneamente la igualdad y el dominio. El testigo único puede escribirse uniformemente como $n(n+1)/2$ después de que los dos casos hayan probado que esa expresión es entera.

83. La identidad $2n + 5 = 2(n-3) + 11$ permite reducir la condición. Si $n - 3$ divide a $2n + 5$, también divide a $2(n-3)$ y, por resta, a once. Si divide a once, por suma divide a $2n + 5$. Luego, para $n \neq 3$, las dos condiciones son equivalentes.

Los divisores enteros de once son ± 1 y ± 11. Se puede verificar la lista sin teoría de primos: la cota de §14.7 reduce los valores absolutos a $1, \ldots, 11$, y la comprobación de esos once candidatos deja sólo uno y once. Así $n - 3 \in \{-11, -1, 1, 11\}$ y

$$\boxed{n \in \{-8, 2, 4, 14\}}.$$

Los testigos para la expresión original son, respectivamente, $1, -9, 13, 3$: $-11 = (-11) \cdot 1$, $9 = (-1)(-9)$, $13 = 1 \cdot 13$ y $33 = 11 \cdot 3$. La equivalencia y la lista finita de divisores prueban exhaustividad. El valor $n = 3$ se excluyó antes de operar porque produciría un divisor cero.

84. Como $c \mid b$, el número b/c es entero; eso asegura que la conclusión propuesta tiene sentido, pero no que sea verdadera. Para $a = c = m$, $b = m(m+1)$, ambas hipótesis tienen testigo $m + 1$. Sin embargo $b/c = m + 1$ y $m \nmid (m+1)$: si $m + 1 = mr$, entonces $1 = m(r-1)$, imposible para $m \geq 2$. El cociente candidato $q/c = (m+1)/m$ es racional y no entero.

Si $c \mid q$, escribimos $q = cs$ con $s \in \mathbb{Z}$. Entonces $b = acs$ y $b/c = as$, por lo que $a \mid b/c$. Recíprocamente, si $b/c = as$ para un entero s, multiplicamos por c y comparamos con $b = aq$: $aq = acs$. Al cancelar $a \neq 0$ resulta $q = cs$, que prueba $c \mid q$. La reparación exige que el **testigo** sea divisible por c; saber que el dividendo b lo es no basta. Los signos de a y c no afectan la demostración.

85. La respuesta general es negativa. Para $a = 2r$, $u = 0$ y $v = 2r$, ambos números son múltiplos de a y su promedio es $h = r \in \mathbb{Z}$. Pero $2r \nmid r$: un testigo entero Q exigiría $1 = 2Q$ tras cancelar $r \neq 0$. El promedio puede ser entero sin pertenecer al conjunto de múltiplos del divisor original.

Para obtener el criterio exacto, observamos $2h = u + v = a(s+t)$. Si $a \mid h$, escribimos $h = aQ$ con $Q \in \mathbb{Z}$; al sustituir y cancelar $a \neq 0$, $2Q = s + t$, así que $s + t$ es par. Recíprocamente, si $s + t = 2Q$ para un entero Q, entonces $h = aQ$, que proporciona el testigo. La condición de pertenencia de h a $\mathbb{Z}$ no reemplaza la condición de pertenencia de $(s+t)/2$ a $\mathbb{Z}$. Cuando $s + t$ es par, el testigo es exactamente $(s+t)/2$.

86. Sumar y restar da $2a = d(u+v)$ y $2b = d(u-v)$; por sí solo esto prueba divisibilidad de $2a$ y $2b$. Para $d = 2r$, $a = b = r$, $r \geq 1$, los testigos iniciales son $u = 1$, $v = 0$, pues $a + b = 2r$ y $a - b = 0$. Sin embargo d no divide a a ni a b, porque $r = 2rQ$ exigiría $1 = 2Q$. La división por dos ha perdido el dominio de los testigos.

Si u y v tienen la misma paridad, tanto $u + v$ como $u - v$ son pares. Los enteros $(u+v)/2$ y $(u-v)/2$ son entonces testigos de $d \mid a$ y $d \mid b$. Recíprocamente, si ambas conclusiones son

verdaderas, escribimos $a = dA$, $b = dB$. Al comparar con las igualdades iniciales y cancelar d, obtenemos $u = A + B$ y $v = A - B$; su diferencia es $2B$, así que tienen la misma paridad. Esto prueba necesidad y suficiencia. Incluso una sola conclusión, $d \mid a$, obligaría a que $u + v$ fuese par y permitiría obtener la otra.

87. Un elemento am^2t se escribe $am(mt)$, y un elemento amt se escribe $a(mt)$. Por tanto,

$$(am^2)\mathbb{Z} \subseteq (am)\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}.$$

Si $|m| = 1$, multiplicar el generador por m sólo conserva o cambia su signo, y los tres conjuntos coinciden. Si $|m| \geq 2$, el elemento a pertenece al conjunto mayor pero no a $(am)\mathbb{Z}$, porque $a = amq$ implicaría $1 = mq$. A su vez am pertenece al conjunto intermedio pero no a $(am^2)\mathbb{Z}$, porque $am = am^2q$ implicaría otra vez $1 = mq$. Esa igualdad es imposible para un entero q: si no es cero, $|mq| \geq 2$. Las dos inclusiones son estrictas. Todo entero no nulo m cae en uno de esos casos, lo que completa la clasificación. Los signos negativos sólo modifican los testigos; no la dirección de la inclusión.

88. Si $a \mid b$, entonces $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$, de modo que la unión es $a\mathbb{Z}$. Si $b \mid a$, la unión es $b\mathbb{Z}$. Queda probada la suficiencia.

Para la necesidad, supongamos que la unión es $c\mathbb{Z}$, con $c \neq 0$. Como a y b pertenecen a la unión, ambos son múltiplos de c; su suma también pertenece a $c\mathbb{Z}$ y, por la igualdad de conjuntos, a $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z}$. Si $a + b \in a\mathbb{Z}$, entonces $a \mid (a + b)$ y, al restar a, $a \mid b$. Si $a + b \in b\mathbb{Z}$, análogamente $b \mid a$. La pertenencia a una unión obliga a una de esas dos alternativas, aunque pueda cumplir ambas. Esto incluye $a + b = 0$, caso en que $a = -b$ y los conjuntos ya coinciden.

Por ejemplo, $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$ no es $c\mathbb{Z}$ para ningún $c \neq 0$: el número $10 = 4 + 6$ no pertenece a la unión, aunque todo conjunto de múltiplos es cerrado bajo suma. No se necesita encontrar un generador común para probar la imposibilidad.

89. Si $b = aq$ para un entero q, entonces $b + ak = a(q + k)$ y todo elemento de L pertenece a $a\mathbb{Z}$. Para el sentido inverso, cualquier $at \in a\mathbb{Z}$ se escribe $b + a(t - q)$; como $t - q$ es entero, pertenece a L. Así se obtiene igualdad, no sólo inclusión.

Si existiera un elemento $x \in L \cap a\mathbb{Z}$, habría enteros k, t con $x = b + ak = at$. Por resta, $b = a(t - k)$, lo que probaría $a \mid b$. Por tanto, cuando $a \nmid b$, la intersección es vacía. Este argumento también explica por qué un solo elemento compartido basta para decidir la divisibilidad: produce el testigo $t - k$. El caso $b = 0$ pertenece a la primera alternativa con testigo cero. Por ejemplo, $5 + 3\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$ no comparten elementos porque $3 \nmid 5$; en cambio, $6 + 3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$. La descripción se obtiene directamente con igualdades enteras.

90. El certificado es correcto: $-35 + 44 = 9$. Al multiplicar por m, obtenemos una solución $(-m, 2m)$. Como $35 \cdot 22 + 22(-35) = 0$, podemos añadir cualquier múltiplo entero del desplazamiento $(22, -35)$:

$$(x, y) = (-m + 22t,\ 2m - 35t), \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

La sustitución da $35x + 22y = 9m$ para todo t, y distintos parámetros producen primeras coordenadas distintas. Esto prueba generación de infinitas soluciones, sin afirmar que sean todas las de la ecuación sin restricción.

Para clasificar las que además satisfacen $x + y = m$, partimos de una pareja arbitraria con ambas propiedades. De $y = m - x$ resulta $35x + 22(m - x) = 9m$, es decir, $13x = -13m$. Cancelar trece da $x = -m$ y luego $y = 2m$. Esta pareja cumple ambas ecuaciones para todo entero m, así que es la única. Dentro de la familia construida, la suma es $m - 13t$ y la restricción selecciona $t = 0$; la exhaustividad no depende de suponer que esa familia era completa, porque se probó desde una pareja arbitraria.

91. El lado izquierdo es $13(2x + 3y)$, así que cualquier solución obliga a $13 \mid c$. Recíprocamente, si $c = 13m$, el certificado multiplicado por m da $26(-m) + 39m = 13m$; por ello $(-m, m)$ es una solución entera. Esto demuestra el criterio para estos coeficientes concretos, sin invocar un teorema general de MCD ni afirmar una familia exhaustiva.

La condición de no negatividad exige una revisión adicional. Para $c = 13$, cancelar trece da $2x + 3y = 1$. Si $x \geq 1$, el lado izquierdo es al menos dos; si $y \geq 1$, es al menos tres. Si ambos son cero, es cero. Las alternativas cubren todas las parejas no negativas, y ninguna da uno. Por tanto no hay solución no negativa, aunque $(-1, 1)$ sí es una solución entera.

Para $c = 26$, la pareja $(1, 0)$ es un certificado no negativo; para $c = 39$, lo es $(0, 1)$. La existencia sobre $\mathbb{Z}^2$ y la existencia bajo restricciones adicionales son preguntas distintas. La condición $13 \mid c$ por sí sola no garantiza satisfacer dichas restricciones.

92. Escribimos $14b = au$ y $9b = av$ con $u, v \in \mathbb{Z}$. La identidad $2 \cdot 14 - 3 \cdot 9 = 1$ permite recuperar

$$b = 2(14b) - 3(9b) = a(2u - 3v).$$

El testigo $2u - 3v$ es entero, de modo que $a \mid b$. El certificado numérico asegura el dominio del testigo y evita una división por un factor cuya divisibilidad no está establecida.

En la segunda pregunta escribimos $14b = au$ y $10b = aw$. Ahora $3 \cdot 14 - 4 \cdot 10 = 2$, así que $2b = a(3u - 4w)$ y concluimos $a \mid 2b$. No se puede dividir por dos y afirmar automáticamente $a \mid b$. Con $a = 2$ y $b = 1$, las dos hipótesis son verdaderas, con testigos siete y cinco, pero $2 \nmid 1$. El testigo construido para $2b$ es $3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 1$, cuya mitad no es entera. Las dos preguntas muestran qué cambia cuando una combinación conocida produce uno o produce dos. No se ha supuesto que exista una combinación con valor uno para coeficientes arbitrarios.

Capítulo 15

Máximo común divisor y algoritmo de Euclides

En el capítulo anterior vimos que una ecuación como $18x + 30y = c$ está sometida a restricciones aritméticas: cualquier divisor común de 18 y 30 debe dividir también a c si existe una solución entera. Pero esa observación deja una pregunta abierta. Los números 18 y 30 tienen varios divisores comunes; entre ellos aparecen 1, 2, 3 y 6. ¿Debemos comprobarlos uno por uno? ¿Hay uno que contenga toda la información relevante?

La respuesta es el **máximo común divisor**. Sin embargo, el interés del concepto no está únicamente en elegir el mayor número de una lista de divisores. En este capítulo veremos que el mismo entero aparece desde cuatro puntos de vista distintos:

- como divisor común que concentra a todos los demás;
- como último resto no nulo de un algoritmo;
- como combinación lineal de los números iniciales;
- como generador de todas sus combinaciones lineales enteras.

Esa coincidencia es una de las primeras experiencias plenamente estructurales de la aritmética elemental. Un problema de divisibilidad, un procedimiento de cálculo y una ecuación diofántica terminan describiendo el mismo objeto.

La idea central será:

> **El máximo común divisor no es sólo un resultado que se calcula: es el entero positivo que organiza todos los divisores comunes y todas las combinaciones lineales de dos enteros.**

Para llegar a esa afirmación necesitaremos un segundo ingrediente: la **división con resto**. Ella permitirá reemplazar un par de enteros por otro más pequeño sin cambiar sus divisores comunes. La repetición de ese paso es el algoritmo de Euclides.

Todavía no utilizaremos factorización prima ni congruencias. Precisamente queremos descubrir cuánto puede obtenerse antes de disponer de esas herramientas.

15.1. Del divisor común decisivo al máximo común divisor

Volvamos a la ecuación

$$18x + 30y = c.$$

En C14 vimos que si d divide simultáneamente a 18 y a 30, entonces d divide a toda combinación lineal $18x+30y$. Por tanto, si la ecuación tiene una solución entera, necesariamente $d \mid c$.

Los divisores comunes positivos de 18 y 30 son

$$1, 2, 3, 6.$$

No todos proporcionan una obstrucción igualmente fuerte. Saber que $2 \mid c$ elimina ciertos valores de c, pero saber que $6 \mid c$ elimina más. Además, si $6 \mid c$, entonces automáticamente $1 \mid c$, $2 \mid c$ y $3 \mid c$.

El número 6 parece, por tanto, concentrar la información de los demás divisores comunes.

Esta observación sugiere dos maneras de describir al entero que buscamos.

La primera es cuantitativa:

buscar el **mayor divisor común positivo**.

La segunda es estructural:

buscar un divisor común positivo que sea divisible por **todo** divisor común.

En los enteros ambas perspectivas terminarán coincidiendo, pero no conviene confundirlas desde el principio. La segunda propiedad es más fuerte y será especialmente útil cuando estudiemos combinaciones lineales.

Por ejemplo, para 18 y 30 el número 6 cumple:

$$6 \mid 18, \qquad 6 \mid 30,$$

y, además, cada divisor común de 18 y 30 divide a 6.

Queremos construir un procedimiento que encuentre ese número sin tener que listar primero todos los divisores. El algoritmo de Euclides hará exactamente eso.

15.2. Definición del MCD, signos y casos cero

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos. Llamaremos **máximo común divisor** de a y b al entero positivo d que satisface las siguientes condiciones:

1. $d \mid a$;
2. $d \mid b$;
3. si c divide simultáneamente a a y a b, entonces $c \mid d$.

Cuando existe, escribimos

$$d = \gcd(a, b).$$

La tercera condición dice que d es un divisor común **universal**: todo divisor común de a y b debe dividirlo.

Esta formulación contiene inmediatamente la idea de "máximo". En efecto, si $c > 0$ es un divisor común, entonces $c \mid d$. Como $d > 0$, la propiedad de tamaño estudiada en C14 implica

$$c \leq d.$$

Por tanto, un entero que satisface las tres condiciones anteriores es necesariamente el mayor divisor común positivo.

El recíproco —que el mayor divisor común positivo satisface siempre la propiedad universal— no se dará por supuesto. Lo justificaremos constructivamente en este capítulo mediante Euclides y Bézout. De este modo evitamos esconder dentro de la definición precisamente la estructura que queremos descubrir.

Unicidad. Si d y e fueran dos enteros positivos que satisfacen la propiedad universal para el mismo par (a, b), entonces, como d es divisor común, tendríamos $d \mid e$; y como e también es divisor común, tendríamos $e \mid d$. Al ser ambos positivos, la divisibilidad mutua implica

$$d = e.$$

Así, si el MCD existe, es único.

Signos. Los signos no cambian los divisores comunes esenciales. Puesto que $c \mid a$ si y sólo si $c \mid (-a)$, los pares (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$ y $(-a, -b)$ tienen exactamente los mismos divisores comunes. Por tanto,

$$\boxed{\gcd(a, b) = \gcd(|a|, |b|)}.$$

Esta igualdad nos permitirá normalizar signos antes de ejecutar el algoritmo.

El caso de un cero. Si $a \neq 0$, entonces los divisores comunes de a y 0 son exactamente los divisores de a, porque todo entero no nulo divide a 0. El entero positivo $|a|$ divide a a y a 0, y todo divisor de a divide a $|a|$. Por consiguiente,

$$\boxed{\gcd(a, 0) = |a|}.$$

Análogamente,

$$\gcd(0, b) = |b|$$

cuando $b \neq 0$.

En este tomo dejamos $\gcd(0, 0)$ **sin definir**. El par $(0, 0)$ no contiene un divisor común positivo privilegiado por tamaño: todo entero no nulo divide a ambos componentes.

Para pares no nulos, todavía debemos demostrar que el entero especificado por nuestra definición existe siempre. Esa deuda se saldará con el algoritmo de Euclides.

Nota pedagógica — Normalizar signos sin borrar los casos de borde. El MCD es positivo aunque sus argumentos tengan signos distintos. Pasar de a a $|a|$ conserva exactamente sus divisores: $c \mid a$ equivale a $c \mid (-a)$. La normalización sirve para calcular el MCD; al reconstruir una identidad de Bézout hay que devolver los signos originales. Una identidad para $|a|, |b|$ no tiene automáticamente los mismos coeficientes para a, b.

Control resuelto. De $6 = -84 + 3 \cdot 30$ obtenemos $6 = (-84) \cdot 1 + 30 \cdot 3$. Por tanto $\gcd(-84, 30) = 6$, pero el coeficiente de la primera entrada ahora es uno, no menos uno. Para $(-18, 0)$, el MCD es dieciocho: éste divide ambas entradas y cualquier divisor común divide a -18, luego a dieciocho. El cero no obliga a que el MCD sea cero.

Si ambas entradas son cero, todos los enteros no nulos las dividen. No hay un divisor común positivo que absorba a todos los demás: para cualquier candidato $d > 0$, el divisor común $2d$ no divide a d. En este capítulo $\gcd(0, 0)$ queda sin definir. La ecuación $0x + 0y = c$ se estudia directamente: todas las parejas enteras si $c = 0$, ninguna si $c \neq 0$. Esta clasificación no requiere introducir un MCD fuera de su dominio.

15.3. Divisores comunes y combinaciones lineales

C14 estableció una propiedad que ahora se vuelve decisiva: si $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces d divide cualquier combinación lineal entera de a y b.

Es decir, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{d \mid a, \quad d \mid b \Longrightarrow d \mid (ax + by).}$$

La demostración es inmediata desde los testigos. Si $a = du$ y $b = dv$, entonces

$$ax + by = d(ux + vy),$$

y $ux + vy$ es un entero.

Si $d = \gcd(a, b)$, obtenemos una consecuencia importante:

toda combinación lineal de a y b es múltiplo de su MCD.

En símbolos,

$$\gcd(a,b) \mid (ax+by)$$

para todos $x, y \in \mathbb{Z}$.

Ésta es la dirección fácil de la relación entre MCD y combinaciones lineales. La dirección profunda será demostrar que el propio MCD puede obtenerse como una de esas combinaciones:

$$\gcd(a,b) = ax_0 + by_0$$

para ciertos enteros x_0, y_0.

Antes de poder construir esos coeficientes necesitamos un mecanismo para reducir los números sin alterar sus divisores comunes.

Supongamos, por ejemplo, que d divide a 84 y a 30. Entonces también divide a

$$84 - 2 \cdot 30 = 24,$$

y por tanto divide a

$$30 - 24 = 6.$$

Toda la información sobre los divisores comunes de 84 y 30 parece ir sobreviviendo mientras reemplazamos números grandes por diferencias más pequeñas. El algoritmo de Euclides formalizará esta intuición, pero para hacerlo de manera eficiente necesitamos dividir con resto.

15.4. El algoritmo de división

La división con resto es una afirmación de existencia **y** unicidad.

Teorema del algoritmo de división. Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$. Entonces existen únicos enteros q y r tales que

$$\boxed{a = bq + r, \qquad 0 \le r < b.}$$

El entero q se llama **cociente** y r se llama **resto**.

Es importante que el teorema incluya enteros negativos. Por ejemplo,

$$-17 = 5(-4) + 3,$$

por lo que al dividir -17 por 5 el cociente canónico es -4 y el resto es 3. La expresión

$$-17 = 5(-3) - 2$$

es una igualdad correcta, pero no es la forma exigida por el algoritmo de división porque el resto debe satisfacer $0 \le r < 5$.

Existencia: una aplicación del buen orden. Fijemos $a \in \mathbb{Z}$ y $b > 0$. Consideremos el conjunto

$$S = \{a - bk : k \in \mathbb{Z},\ a - bk \geq 0\}.$$

El conjunto S no es vacío. Si $a \geq 0$, basta tomar $k = 0$. Si $a < 0$, podemos tomar, por ejemplo, $k = -|a|$; entonces

$$a - b(-|a|) = a + b|a| \geq 0.$$

Como S es un conjunto no vacío de enteros no negativos, el principio del buen orden garantiza que posee un elemento mínimo. Llamemos r a ese mínimo. Por definición de S, existe un entero q tal que

$$r = a - bq,$$

o equivalentemente,

$$a = bq + r.$$

Sólo falta probar que $r < b$. Supongamos, por contradicción, que $r \geq b$. Entonces

$$r - b \geq 0,$$

y además

$$r - b = a - bq - b = a - b(q + 1).$$

Por tanto, $r - b \in S$. Pero $r - b < r$, contradiciendo que r era el menor elemento de S. Luego

$$0 \leq r < b.$$

La existencia queda demostrada.

Unicidad. Supongamos que existen dos representaciones válidas:

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b,$$

y

$$a = bq' + r', \qquad 0 \leq r' < b.$$

Restando,

$$b(q - q') = r' - r.$$

El lado derecho satisface

$$-(b - 1) \leq r' - r \leq b - 1,$$

por lo que

$$|r' - r| < b.$$

Pero el lado izquierdo es múltiplo de b. El único múltiplo de b cuyo valor absoluto es menor que b es 0. Así,

$$r' - r = 0,$$

y entonces $r = r'$ y $q = q'$.

El algoritmo de división proporciona, por tanto, un reemplazo canónico de a por un resto estrictamente menor que b. Ésta será la fuente del descenso que hace finito al algoritmo de Euclides.

15.5. Un paso euclidiano conserva los divisores comunes

Supongamos que el algoritmo de división produce

$$a = bq + r.$$

La identidad puede reescribirse como

$$r = a - bq.$$

Estas dos formas permiten pasar de (a, b) a (b, r) y volver, usando únicamente combinaciones lineales.

Lema del paso euclidiano. Los pares (a, b) y (b, r) tienen exactamente los mismos divisores comunes.

Demostración. Supongamos primero que d divide a a y a b. Como

$$r = a - bq,$$

el cierre por combinaciones lineales implica $d \mid r$. Por tanto, d divide a b y a r.

Recíprocamente, supongamos que d divide a b y a r. Como

$$a = bq + r,$$

se sigue que $d \mid a$. Por tanto, d divide a a y a b.

Así, un entero no nulo es divisor común de a y b si y sólo si es divisor común de b y r.

En consecuencia, ambos pares deben tener el mismo MCD siempre que lo expresemos con la normalización positiva:

$$\boxed{\gcd(a, b) = \gcd(b, r)}.$$

Como $r = a - qb$, también podemos escribir la forma más general

$$\boxed{\gcd(a, b) = \gcd(b, a - qb)}.$$

Esta identidad es el motor de Euclides. No dice simplemente que dos MCD resultan iguales por casualidad: dice que el **conjunto completo de divisores comunes permanece inalterado**.

Por ejemplo,

$$\gcd(84, 30) = \gcd(30, 24)$$

porque $24 = 84 - 2 \cdot 30$. Luego

$$\gcd(30, 24) = \gcd(24, 6),$$

porque $6 = 30 - 24$. Finalmente,

$$\gcd(24, 6) = 6.$$

Lo que en C14 aparecía como una técnica de reducción se ha convertido ahora en un principio algorítmico.

15.6. El algoritmo de Euclides

Tomemos dos enteros positivos $a \geq b > 0$. Aplicamos repetidamente el algoritmo de división:

$$a = bq_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < b.$$

Si $r_1 = 0$, el proceso termina. Si no, dividimos b por r_1:

$$b = r_1 q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Si $r_2 \neq 0$, continuamos:

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < r_2,$$

y así sucesivamente.

Éste es el **algoritmo de Euclides**.

Ejemplo: 662 y 414. Comenzamos con

$$662 = 414 \cdot 1 + 248.$$

Luego,

$$414 = 248 \cdot 1 + 166,$$

$$248 = 166 \cdot 1 + 82,$$

$$166 = 82 \cdot 2 + 2,$$

y finalmente

$$82 = 2 \cdot 41 + 0.$$

El último resto no nulo es 2. Por tanto,

$$\boxed{\gcd(662, 414) = 2.}$$

El algoritmo no requiere listar los divisores de 662 ni los de 414. Reduce sistemáticamente el problema hasta llegar a un par cuya estructura es transparente.

Podemos leer la cadena de MCD asociada:

$$\gcd(662, 414) = \gcd(414, 248) = \gcd(248, 166) = \gcd(166, 82) = \gcd(82, 2) = 2.$$

Cada igualdad está respaldada por el lema de la sección anterior.

Esto explica **qué** devuelve el procedimiento. Pero un algoritmo matemático exige responder dos preguntas adicionales:

1. ¿por qué debe terminar?;
2. ¿por qué el resultado final es correcto?

Son preguntas distintas y requieren argumentos distintos.

15.7. Por qué Euclides termina y por qué es correcto

Terminación. En una ejecución no trivial de Euclides, los restos satisfacen

$$b > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0.$$

Cada resto no nulo es un entero no negativo estrictamente menor que el anterior.

No puede existir una sucesión infinita estrictamente decreciente de enteros no negativos. Esto es una consecuencia del principio del buen orden: si existiera una colección infinita de restos sucesivos, el conjunto de sus valores tendría un mínimo; pero el paso siguiente produciría un entero no negativo aún menor.

Por tanto, en algún momento aparece un resto igual a 0.

Así queda demostrada la **terminación**.

Corrección. La terminación, por sí sola, no nos dice que el último resto no nulo sea el MCD. Para eso usamos el lema del paso euclidiano.

Cada división

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$$

conserva exactamente los divisores comunes:

$$\gcd(r_{k-2}, r_{k-1}) = \gcd(r_{k-1}, r_k).$$

Cuando el proceso termina, tenemos una última igualdad de la forma

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 0.$$

Por tanto, el par terminal es $(r_{n-1}, 0)$. Su MCD es

$$\gcd(r_{n-1}, 0) = |r_{n-1}|.$$

Como todos los pasos conservaron los divisores comunes, ese mismo entero es el MCD del par inicial.

Por consiguiente:

> **El algoritmo de Euclides termina y su último resto no nulo es el máximo común divisor de los dos enteros iniciales.**

Esta demostración hace algo más: establece constructivamente la existencia del MCD para todo par de enteros no ambos nulos. Si los enteros tienen signos, primero pasamos a sus valores absolutos; si uno es cero, ya conocemos el resultado; si ambos son no nulos, Euclides produce el MCD.

Así queda saldada la deuda de existencia dejada en la sección 15.2.

Nota pedagógica — Tres obligaciones distintas en una prueba algorítmica. Una ejecución exige comprobar **invariancia**, **terminación** e **identificación del resultado**. La igualdad $a = bq + r$ conserva los divisores comunes entre (a, b) y (b, r) para cualquier entero q. Esta propiedad no garantiza que los nuevos números sean menores. El descenso procede de elegir $0 \leq r < b$ con divisor positivo; el buen orden descarta una cadena infinita de restos positivos estrictamente decrecientes.

Control resuelto. Con $q = 0$, $(19, 7)$ pasa a $(7, 19)$ y después vuelve a $(19, 7)$. Ambas identidades son verdaderas y el MCD se conserva, pero la ejecución nunca termina. Con divisiones canónicas, $19 = 2 \cdot 7 + 5$, $7 = 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $2 = 2 \cdot 1 + 0$. Aquí el descenso

garantiza terminación. Al llegar a $(1, 0)$, los divisores comunes son exactamente los divisores de uno: el invariante identifica el resultado como MCD del par inicial.

Un certificado independiente también puede cerrar la corrección: $1 = 3 \cdot 19 - 8 \cdot 7$. Uno divide las dos entradas y cualquier divisor común divide esta combinación. Verificarlo confirma el resultado, pero no demuestra que una regla defectuosa termine en otros ejemplos. Al auditar, indica qué afirmación falla en vez de llamar «incorrecta» a toda igualdad no canónica.

15.8. Sustitución hacia atrás y Euclides extendido

El algoritmo de Euclides calcula el MCD, pero conserva más información de la que parece. Cada resto es una combinación lineal de los dos números anteriores y, por sustitución sucesiva, termina siendo una combinación lineal de los dos números originales.

Volvamos al ejemplo:

$$662 = 414 + 248,$$

$$414 = 248 + 166,$$

$$248 = 166 + 82,$$

$$166 = 2 \cdot 82 + 2.$$

Empezamos por la última igualdad no nula:

$$2 = 166 - 2 \cdot 82.$$

Como

$$82 = 248 - 166,$$

sustituimos:

$$2 = 166 - 2(248 - 166) = 3 \cdot 166 - 2 \cdot 248.$$

Ahora usamos

$$166 = 414 - 248 :$$

$$2 = 3(414 - 248) - 2 \cdot 248 = 3 \cdot 414 - 5 \cdot 248.$$

Finalmente,

$$248 = 662 - 414,$$

de modo que

$$2 = 3 \cdot 414 - 5(662 - 414) = 8 \cdot 414 - 5 \cdot 662.$$

Hemos obtenido la identidad

$$\boxed{2 = (-5) \cdot 662 + 8 \cdot 414.}$$

El MCD no sólo ha sido calculado: ha sido **certificado** como combinación lineal de los datos iniciales.

El procedimiento de llevar simultáneamente el control del MCD y de los coeficientes que lo expresan como combinación lineal recibe el nombre de **algoritmo de Euclides extendido**.

Una forma de organizarlo consiste en mantener, para cada resto r_k, coeficientes s_k, t_k tales que

$$r_k = s_k a + t_k b.$$

Para iniciar esta recurrencia, fijamos $r_{-1} = a$ y $r_0 = b$, con coeficientes $(s_{-1}, t_{-1}) = (1, 0)$ y $(s_0, t_0) = (0, 1)$. Así las dos identidades iniciales ya representan los datos. Se calcula la fila siguiente sólo mientras el divisor actual sea no nulo.

Si

$$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k,$$

entonces

$$r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1},$$

y por tanto los coeficientes satisfacen

$$s_k = s_{k-2} - q_k s_{k-1}$$

$$t_k = t_{k-2} - q_k t_{k-1}.$$

No necesitamos memorizar una tabla específica. Lo esencial es comprender el invariante: **cada resto permanece expresado como combinación lineal de los números originales**.

Nota pedagógica — Unicidad del resto y libertad de los coeficientes. La división canónica tiene cociente y resto únicos bajo la condición $0 \le r < b$. Esa unicidad no se transfiere a los coeficientes de Bézout. Una sustitución hacia atrás entrega una pareja; otras ejecuciones o la adición de una combinación nula pueden dar otra pareja válida.

Control resuelto. La identidad $6 = -84 + 3 \cdot 30$ y la identidad $6 = 4 \cdot 84 - 11 \cdot 30$ son ambas ciertas. La diferencia de sus parejas es $(5, -14)$ y $84 \cdot 5 + 30(-14) = 0$. Así, para todo $t \in \mathbb{Z}$,

$$6 = 84(-1 + 5t) + 30(3 - 14t).$$

Los parámetros distintos dan primeras coordenadas distintas. La comprobación anterior prueba generación; que esta familia sea completa se justificará mediante el argumento de exhaustividad de §15.14. No basta la no unicidad para concluir que una lista arbitraria contiene todas las representaciones.

Si una entrada es cero y la otra es $a \neq 0$, en $ax + 0y = |a|$ la coordenada x está fijada en $a/|a|$, mientras y es cualquier entero. También hay infinitas parejas. Lo único único en todas estas situaciones es el valor positivo del MCD, no el certificado que lo representa.

15.9. Identidad de Bézout

La observación anterior se convierte en uno de los teoremas centrales de la aritmética elemental.

Teorema de Bézout. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos, y sea

$$d = \gcd(a, b).$$

Entonces existen enteros x, y tales que

$$\boxed{d = ax + by.}$$

Demostración mediante Euclides extendido. Si uno de los números es cero, el resultado es inmediato. Por ejemplo, si $b = 0$ y $a \neq 0$, entonces $d = |a|$ y podemos escribir $d = a(1) + 0(0)$ cuando $a > 0$, o $d = a(-1) + 0(0)$ cuando $a < 0$.

Supongamos ahora que ambos son no nulos. Tras normalizar signos, ejecutamos el algoritmo de Euclides. El último resto no nulo es d. Como cada resto se obtiene restando un múltiplo entero del resto anterior al precedente, una sustitución hacia atrás expresa d como combinación lineal de los dos datos iniciales.

Así existen $x, y \in \mathbb{Z}$ con

$$d = ax + by.$$

Los coeficientes no son únicos. Bézout afirma existencia, no unicidad.

Si

$$d = ax_0 + by_0,$$

entonces para cualquier $t \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) = d,$$

porque los términos adicionales se cancelan:

$$a\frac{b}{d}t - b\frac{a}{d}t = 0.$$

Como $d \mid a$ y $d \mid b$, los cocientes a/d y b/d son enteros.

En el ejemplo anterior,

$$2 = (-5) \cdot 662 + 8 \cdot 414.$$

Por tanto, además de $(-5, 8)$, existen infinitos pares de coeficientes de Bézout.

Cierre de la caracterización universal. Bézout permite ahora cerrar la relación entre la definición universal y la expresión “mayor divisor común positivo”. Si $d = \gcd(a, b)$, ya sabemos que d es el mayor divisor común positivo.

Recíprocamente, supongamos que m es el mayor divisor común positivo de a y b. El algoritmo de Euclides produce un entero d que satisface la propiedad universal y, por tanto, es un divisor común positivo. Como m es el mayor, $d \leq m$. Pero m es divisor común y la propiedad universal de d da $m \mid d$, de donde $m \leq d$. Así $m = d$.

Por tanto, en los enteros las dos descripciones coinciden.

15.10. Todas las combinaciones lineales forman $d\mathbb{Z}$

La identidad de Bézout permite describir de una sola vez **todas** las combinaciones lineales de dos enteros.

Definamos

$$L(a,b) = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea $d = \gcd(a,b)$. Afirmamos que

$$\boxed{L(a,b) = d\mathbb{Z}.}$$

La igualdad de conjuntos exige demostrar dos inclusiones.

Primera inclusión: $L(a,b) \subseteq d\mathbb{Z}$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, el número d divide cualquier combinación lineal $ax + by$. Por tanto, cada elemento de $L(a,b)$ es un múltiplo de d:

$$L(a,b) \subseteq d\mathbb{Z}.$$

Segunda inclusión: $d\mathbb{Z} \subseteq L(a,b)$. Por Bézout existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$d = ax_0 + by_0.$$

Sea ahora $m \in d\mathbb{Z}$. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = dk.$$

Multiplicando la identidad de Bézout por k,

$$m = k(ax_0 + by_0) = a(kx_0) + b(ky_0).$$

Como $kx_0, ky_0 \in \mathbb{Z}$, se tiene $m \in L(a,b)$. Por tanto,

$$d\mathbb{Z} \subseteq L(a,b).$$

Las dos inclusiones prueban la igualdad.

Este resultado condensa el capítulo:

> **las combinaciones lineales de a y b son exactamente los múltiplos de su MCD.**

Por ejemplo, como $\gcd(84, 30) = 6$,

$$\{84x + 30y : x, y \in \mathbb{Z}\} = 6\mathbb{Z}.$$

Esto significa dos cosas simultáneamente:

- ninguna combinación $84x + 30y$ puede producir un entero que no sea múltiplo de 6;
- todo múltiplo de 6 puede producirse mediante alguna combinación $84x + 30y$.

C14 había demostrado sólo la primera afirmación. Bézout proporciona la segunda.

15.11. Coprimalidad y criterio de Bézout

Dos enteros a y b, no ambos nulos, se llaman **coprimos** cuando

$$\gcd(a,b) = 1.$$

La identidad de Bézout produce una caracterización especialmente útil.

Criterio de Bézout para coprimalidad.

$$\boxed{\gcd(a,b)=1 \iff \exists x,y\in\mathbb{Z}:\ ax+by=1.}$$

Demostración. Si $\gcd(a,b)=1$, Bézout garantiza enteros x,y con

$$1=ax+by.$$

Recíprocamente, supongamos que existen $x,y\in\mathbb{Z}$ tales que

$$ax+by=1.$$

Sea d un divisor común de a y b. Entonces d divide cualquier combinación lineal, y en particular

$$d\mid 1.$$

Los únicos divisores de 1 son 1 y -1. Por tanto, el MCD positivo de a y b es 1.

Esta caracterización transforma una afirmación sobre divisores en un **certificado explícito**.

Por ejemplo,

$$35=2\cdot 12+11,$$

$$12=1\cdot 11+1.$$

Sustituyendo,

$$1=12-11=12-(35-2\cdot 12)=3\cdot 12-35.$$

Así,

$$1=(-1)\cdot 35+3\cdot 12,$$

y por tanto

$$\gcd(35,12)=1.$$

La combinación que produce 1 es más que una comprobación numérica: certifica que cualquier divisor común de los dos números debe ser una unidad ± 1.

15.12. Cancelación bajo coprimalidad

En C14 vimos que la inferencia

$$a\mid bc \Longrightarrow a\mid c$$

es falsa en general. Por ejemplo,

$$6\mid 2\cdot 3,$$

pero $6\nmid 3$.

La identidad de Bézout revela una hipótesis que sí permite cancelar.

Proposición de cancelación coprima. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$. Si

$$\gcd(a, b) = 1$$

y

$$a \mid bc,$$

entonces

$$\boxed{a \mid c.}$$

Demostración. Como $\gcd(a, b) = 1$, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$ax + by = 1.$$

Multiplicamos por c:

$$acx + bcy = c.$$

El entero a divide a acx. Además, por hipótesis $a \mid bc$, y por tanto $a \mid bcy$. Como a divide a ambos sumandos del lado izquierdo, divide a su suma. Luego

$$a \mid c.$$

La hipótesis de coprimalidad es esencial. En el contraejemplo anterior,

$$\gcd(6, 2) = 2 \neq 1.$$

Por eso no puede aplicarse la proposición.

Este resultado prepara una propiedad que reaparecerá con especial fuerza cuando estudiemos números primos, pero todavía no necesitamos definirlos. Aquí todo se deduce de Bézout.

15.13. Criterio completo para $ax + by = c$

Estamos en condiciones de cerrar la pregunta dejada abierta en C14.

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ y sea

$$d = \gcd(a, b).$$

Teorema de solvencia diofántica lineal. La ecuación

$$ax + by = c$$

tiene una solución entera si y sólo si

$$\boxed{d \mid c.}$$

Necesidad. Si (x, y) es una solución, entonces

$$c = ax + by.$$

Como $d \mid a$ y $d \mid b$, se sigue que d divide cualquier combinación lineal. Por tanto,

$$d \mid c.$$

Ésta era precisamente la obstrucción obtenida en C14.

Suficiencia. Supongamos ahora que

$$d \mid c.$$

Entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = dm.$$

Por Bézout existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ con

$$d = ax_0 + by_0.$$

Multiplicando por m,

$$c = dm = a(mx_0) + b(my_0).$$

Por tanto,

$$x = mx_0, \qquad y = my_0$$

es una solución entera.

Ejemplo. Consideremos

$$84x + 30y = c.$$

El algoritmo de Euclides da

$$84 = 2 \cdot 30 + 24,$$

$$30 = 1 \cdot 24 + 6,$$

$$24 = 4 \cdot 6.$$

Luego

$$\gcd(84, 30) = 6.$$

Por tanto,

$$84x + 30y = c$$

tiene solución entera **exactamente** para los enteros c divisibles por 6.
Además,

$$6 = 30 - 24 = 30 - (84 - 2 \cdot 30) = 3 \cdot 30 - 84.$$

Así,

$$6 = (-1)\cdot 84 + 3\cdot 30.$$

Si, por ejemplo, $c = 18 = 3\cdot 6$, multiplicamos por 3:

$$18 = (-3)\cdot 84 + 9\cdot 30.$$

Una solución es

$$(x, y) = (-3, 9).$$

El teorema distingue con precisión tres niveles lógicos:

- encontrar un divisor común que no divide a c demuestra imposibilidad;
- Bézout permite construir una solución cuando el MCD sí divide a c;
- todavía falta describir **todas** las soluciones.

Ése es el siguiente paso.

15.14. Todas las soluciones de una ecuación diofántica lineal

Supongamos que

$$ax + by = c$$

tiene al menos una solución entera (x_0, y_0) y que

$$d = \gcd(a, b).$$

Cuando a y b son ambos no nulos, afirmamos que todas las soluciones están dadas por

$$\boxed{x = x_0 + \frac{b}{d}t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \qquad t \in \mathbb{Z}.}$$

Como $d \mid a$ y $d \mid b$, los números a/d y b/d son enteros.

Verificación. Tomemos cualquier $t \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right)$$

es igual a

$$ax_0 + by_0 + \frac{ab}{d}t - \frac{ab}{d}t = c.$$

Por tanto, toda pareja de la forma indicada es solución.

Exhaustividad. Ahora sea (x, y) una solución cualquiera. Restando las ecuaciones

$$ax + by = c$$

y

$$ax_0 + by_0 = c,$$

obtenemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Dividimos por d y escribimos

$$a' = \frac{a}{d}, \qquad b' = \frac{b}{d}.$$

Entonces

$$a'(x - x_0) = -b'(y - y_0).$$

Además,

$$\gcd(a', b') = 1.$$

¿Por qué? Si un entero positivo dividiera a a' y a b', al multiplicarlo por d produciría un divisor común de a y b mayor que el permitido por la propiedad universal de d, salvo que ese entero fuera 1.

De la igualdad anterior se deduce que b' divide a $a'(x - x_0)$. Como a' y b' son coprimos, la cancelación coprima implica

$$b' \mid (x - x_0).$$

Por tanto, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x - x_0 = b't = \frac{b}{d}t.$$

Sustituyendo en

$$a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0,$$

obtenemos

$$y - y_0 = -a't = -\frac{a}{d}t.$$

Así, toda solución pertenece a la familia anunciada.

Ejemplo. Para

$$84x + 30y = 6,$$

una solución particular es

$$(x_0, y_0) = (-1, 3),$$

porque

$$84(-1) + 30(3) = 6.$$

Como $d = 6$,

$$\frac{30}{6} = 5, \qquad \frac{84}{6} = 14.$$

Todas las soluciones son

$$\boxed{x = -1 + 5t, \qquad y = 3 - 14t, \qquad t \in \mathbb{Z}.}$$

Coeficientes cero. Si uno de los coeficientes es cero, conviene tratar el caso directamente en lugar de forzar la demostración anterior.

Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación es

$$by = c.$$

Tiene solución si y sólo si $b \mid c$; cuando existe, $y = c/b$ queda fijado y x puede ser cualquier entero.

Si $b = 0$ y $a \neq 0$, ocurre lo simétrico: $x = c/a$ queda fijado y y es libre.

El caso $a = b = 0$ queda fuera del teorema principal y debe analizarse aparte: $0x + 0y = c$ tiene todas las parejas enteras como soluciones si $c = 0$, y ninguna si $c \neq 0$.

Nota pedagógica — La dirección primitiva evita perder soluciones. Comprobar una familia por sustitución sólo prueba que sus parejas son soluciones. La exhaustividad empieza con una pareja arbitraria, resta una solución particular y usa los coeficientes reducidos $a/d, b/d$. Por ser coprimos, éstos fuerzan el desplazamiento entero $(b/d, -a/d)$. Usar $(b, -a)$ también genera soluciones, pero puede saltarse algunas cuando $d > 1$.

Control resuelto. Para $6x + 10y = 2$, una solución es $(2, -1)$ y la familia completa es $(2 + 5t, -1 - 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$. En efecto, restar la solución particular da $3(x - 2) = -5(y + 1)$; la cancelación coprima obliga a $x - 2 = 5t$, y entonces $y + 1 = -3t$. La familia $(2 + 10s, -1 - 6s)$ sólo selecciona los parámetros pares. Pierde $(7, -4)$, que sí satisface la ecuación: exigiría $10s = 5$ con s entero.

Con un coeficiente cero conviene clasificar directamente. En $0x - 8y = 24$, $y = -3$ y x queda libre, de modo que todas las parejas son $(t, -3)$. La familia $(2t, -3)$ produce soluciones, pero pierde $(1, -3)$. Tras obtener una familia completa, una restricción adicional se traduce en condiciones sobre el parámetro. Hay que probar las dos direcciones: toda solución restringida aporta un parámetro permitido, y todo parámetro permitido produce una solución restringida.

15.15. Problemas paramétricos y elección del algoritmo

El algoritmo de Euclides no sirve sólo para calcular MCD de números concretos. También permite simplificar expresiones con parámetros.

Ejemplo 1. Consideremos

$$\gcd(n + 1, 2n + 3).$$

Un paso euclidiano produce

$$(2n + 3) - 2(n + 1) = 1.$$

Todo divisor común de $n + 1$ y $2n + 3$ divide a 1. Por tanto,

$$\boxed{\gcd(n + 1, 2n + 3) = 1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

No fue necesario factorizar ninguna expresión ni estudiar casos.

Ejemplo 2. Consideremos

$$\gcd(3n+2, 5n+3).$$

Una combinación lineal cuidadosamente elegida elimina el parámetro:

$$5(3n+2) - 3(5n+3) = 1.$$

Así, cualquier divisor común debe dividir a 1, y por tanto

$$\boxed{\gcd(3n+2, 5n+3) = 1.}$$

Ejemplo 3. Ahora tomemos

$$\gcd(2n+4, 4n+6).$$

Tenemos

$$2(2n+4) - (4n+6) = 2.$$

Por tanto, cualquier divisor común divide a 2. Por otra parte, ambos números son pares, de modo que 2 divide a los dos. En consecuencia,

$$\boxed{\gcd(2n+4, 4n+6) = 2.}$$

Estos ejemplos muestran un principio general: al enfrentarnos a un MCD paramétrico no siempre conviene ejecutar mecánicamente muchas divisiones. A veces basta una combinación lineal que reduzca el problema a una constante pequeña.

Podemos organizar la elección de método así:

```
¿LOS NÚMEROS SON PEQUEÑOS Y SUS DIVISORES SON EVIDENTES?
        ↓ sí
LISTAR PUEDE SER SUFICIENTE
        ↓ no
¿UNA COMBINACIÓN LINEAL ELIMINA EL PARÁMETRO?
        ↓ sí
USAR UN PASO EUCLIDIANO ESTRATÉGICO
        ↓ no
EJECUTAR EUCLIDES
        ↓
¿SE NECESITA UNA COMBINACIÓN QUE PRODUZCA EL MCD?
        ↓ sí
USAR EUCLIDES EXTENDIDO
        ↓
¿SE ESTUDIA ax+by=c?
        ↓
APLICAR EL CRITERIO d|c Y, SI CORRESPONDE, CLASIFICAR SOLUCIONES
```

La habilidad matemática no consiste en aplicar siempre el procedimiento más largo, sino en reconocer qué información se necesita y qué versión del método la produce con mayor claridad.

15.16. Cierre — protocolo euclidiano y puente hacia los primos

El capítulo comenzó preguntando cuál de los divisores comunes de dos enteros concentra toda la información. La respuesta resultó mucho más rica que una simple selección por tamaño.

Si

$$d = \gcd(a, b),$$

entonces:

- d divide a a y a b;
- todo divisor común de a y b divide a d;
- el algoritmo de Euclides encuentra d como último resto no nulo;
- Euclides extendido produce enteros x, y tales que $d = ax + by$;
- todas las combinaciones lineales de a y b forman exactamente $d\mathbb{Z}$;
- la ecuación $ax + by = c$ es soluble exactamente cuando $d \mid c$;
- una vez encontrada una solución particular, todas las soluciones pueden parametrizarse.

La cadena conceptual completa es:

```
DIVISORES COMUNES
        ↓
MCD
        ↓
DIVISIÓN CON RESTO
        ↓
PASO EUCLIDIANO
        ↓
EUCLIDES
        ↓
ÚLTIMO RESTO NO NULO
        ↓
SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS
        ↓
BÉZOUT
        ↓
L(a,b)=dZ
        ↓
COPRIMALIDAD
        ↓
CRITERIO DE ax+by=c
        ↓
TODAS LAS SOLUCIONES
```

Ante un nuevo problema, conviene aplicar el siguiente protocolo:

```
1. NORMALIZAR SIGNOS CUANDO SEA ÚTIL.
2. IDENTIFICAR SI SE BUSCA MCD, BÉZOUT O SOLVENCIA DIOFÁNTICA.
3. PARA EL MCD, USAR DIVISIÓN CON RESTO Y PASOS EUCLIDIANOS.
4. DISTINGUIR TERMINACIÓN DE CORRECCIÓN.
5. SI SE NECESITA UNA COMBINACIÓN LINEAL, HACER SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS.
6. PARA PROBAR COPRIMALIDAD, BUSCAR UNA COMBINACIÓN QUE PRODUZCA 1.
7. PARA ax+by=c, CALCULAR d=gcd(a,b) Y COMPROBAR d|c.
8. SI d|c, ESCALAR UNA IDENTIDAD DE BÉZOUT PARA OBTENER UNA SOLUCIÓN.
```

```
9. SI SE PIDEN TODAS LAS SOLUCIONES, DEMOSTRAR LA FAMILIA PARAMÉTRICA Y SU
↪  EXHAUSTIVIDAD.
10. EN PROBLEMAS CON PARÁMETROS, BUSCAR COMBINACIONES LINEALES QUE ELIMINEN EL
↪  PARÁMETRO ANTES DE HACER CÁLCULOS LARGOS.
```

Hay una idea adicional que merece quedar registrada. La propiedad

$$\gcd(a,b)=1, \qquad a \mid bc \Longrightarrow a \mid c$$

muestra que la coprimalidad permite recuperar cierta forma de cancelación multiplicativa. Pero todavía no hemos identificado qué enteros poseen un comportamiento multiplicativo especialmente rígido ni cómo se descomponen los enteros en piezas elementales.

La siguiente pregunta es, por tanto:

> **Si el MCD organiza los divisores comunes, ¿cuáles son los bloques multiplicativos elementales a partir de los cuales se construyen los enteros?**

Ésa será la entrada al capítulo 16: **Números primos y factorización**.

Ejercicios

Los ejercicios están organizados para pasar del cálculo y la definición del MCD a la comprensión algorítmica de Euclides, la construcción de certificados de Bézout y la clasificación completa de ecuaciones diofánticas lineales. En todo el capítulo se mantiene la convención de que $\gcd(a,b)$ está definido para $(a,b)\neq(0,0)$ y es siempre positivo. No se requiere factorización prima ni aritmética modular.

A. Definición, signos y propiedades del MCD

1. **Nivel A.** Calcula $\gcd(a,b)$ en cada caso y explica qué convención de signos o de cero utilizas:
$$(18,30), \qquad (-42,30), \qquad (0,-27), \qquad (35,64).$$
2. **Nivel B.** Verifica directamente, usando la definición universal del MCD, que
$$\gcd(42,30)=6.$$
Debes comprobar que 6 divide a ambos números y que todo divisor común de 42 y 30 divide a 6.
3. **Nivel B.** Demuestra que, para $(a,b)\neq(0,0)$,
$$\gcd(a,b)=\gcd(|a|,|b|).$$
No apeles a factorización: compara los conjuntos de divisores comunes.
4. **Nivel B.** Sea $a\neq 0$. Demuestra desde la definición universal que
$$\gcd(a,0)=|a|.$$
Explica por qué $\gcd(0,0)$ queda fuera de la convención de este capítulo.
5. **Nivel C.** Sea $a\neq 0$. Demuestra
$$\gcd(a,a)=|a| \qquad \text{y} \qquad \gcd(a,-a)=|a|.$$
Haz explícita la propiedad universal en ambos casos.
6. **Nivel C.** Supón que $d>0$, que $d\mid a$ y $d\mid b$, y que existen $x,y\in\mathbb{Z}$ tales que
$$d=ax+by.$$
Demuestra que necesariamente
$$d=\gcd(a,b).$$

Este ejercicio debe resolverse sólo con divisibilidad y combinaciones lineales.

7. **Nivel C.** Sean $(a, b) \neq (0, 0)$ y $k \neq 0$. Conjetura y demuestra una fórmula para
$$\gcd(ka, kb)$$
en términos de $|k|$ y $\gcd(a, b)$. No uses factorización prima.
8. **Nivel D.** Un estudiante define el MCD de a y b como "el mayor divisor común positivo" y otro lo define como "el divisor común positivo divisible por todo divisor común". Explica qué dirección de la equivalencia es inmediata y qué dirección requiere una justificación adicional. Formula una prueba válida usando los resultados disponibles en C15.

B. Algoritmo de división

9. **Nivel A.** Encuentra el cociente y el resto canónicos en
$$137 = 12q + r, \qquad 0 \leq r < 12,$$
y luego haz lo mismo para
$$-137 = 12q + r, \qquad 0 \leq r < 12.$$
10. **Nivel A.** Para cada par (a, b) con $b > 0$, encuentra los únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = bq + r$ y $0 \leq r < b$:
$$(73, 9), \qquad (-73, 9), \qquad (240, 16), \qquad (-1, 7).$$
11. **Nivel B.** Decide cuáles de las siguientes escrituras son divisiones con resto válidas en el sentido del algoritmo de división. Corrige las inválidas:
$$41 = 7 \cdot 5 + 6,$$
$$41 = 7 \cdot 6 - 1,$$
$$-41 = 7(-6) + 1,$$
$$25 = 5 \cdot 4 + 5.$$
12. **Nivel C.** Demuestra la unicidad del cociente y del resto. Parte de
$$a = bq + r = bq' + r', \qquad 0 \leq r, r' < b,$$
y demuestra primero que $r - r'$ es un múltiplo de b cuyo valor absoluto es menor que b.
13. **Nivel D.** Reconstruye la prueba de existencia del algoritmo de división mediante el principio del buen orden. Debes justificar cuidadosamente que el conjunto
$$S = \{a - bk : k \in \mathbb{Z},\ a - bk \geq 0\}$$
es no vacío y que su menor elemento es estrictamente menor que b.
14. **Nivel C.** Sea $b > 0$. Demuestra que el resto de dividir a por b es 0 si y sólo si
$$b \mid a.$$
Relaciona explícitamente el algoritmo de división con la definición de divisibilidad de C14.
15. **Nivel C.** Supón
$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$
Determina el cociente y el resto canónicos de $-a$ al dividirlo por b en los dos casos $r = 0$ y $r > 0$. Demuestra tus fórmulas.
16. **Nivel D.** Un estudiante afirma que en una división con resto basta exigir $|r| < b$. Explica por qué esa condición no garantiza unicidad y exhibe un mismo par (a, b) con dos representaciones distintas que cumplan $|r| < b$. Luego explica qué corrige la condición $0 \leq r < b$.

C. Paso euclidiano e invariancia del MCD

17. **Nivel B.** Usa un solo paso euclidiano para demostrar
$$\gcd(252, 105) = \gcd(105, 42).$$
No calcules todavía el valor final del MCD.
18. **Nivel B.** Demuestra que
$$\gcd(84, 30) = \gcd(30, 24) = \gcd(24, 6).$$
En cada igualdad escribe la combinación lineal que muestra que ambos pares tienen los mismos divisores comunes.
19. **Nivel C.** Demuestra el lema del paso euclidiano: si
$$a = bq + r,$$
entonces (a, b) y (b, r) tienen exactamente los mismos divisores comunes.
20. **Nivel C.** Deduce, para $q \in \mathbb{Z}$,
$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a - qb).$$
Explica por qué esta igualdad sigue siendo válida aunque $a - qb$ sea negativo.
21. **Nivel C.** Demuestra, para todo $n \in \mathbb{Z}$,
$$\gcd(n + 1, 2n + 3) = 1.$$
Elige una combinación lineal que elimine el parámetro.
22. **Nivel C.** Demuestra, para todo $n \in \mathbb{Z}$,
$$\gcd(3n + 2, 5n + 3) = 1.$$
Tu argumento debe producir explícitamente una combinación lineal igual a 1.
23. **Nivel D.** Demuestra, para todo $n \in \mathbb{Z}$,
$$\gcd(2n + 4, 4n + 6) = 2.$$
Debes probar tanto que 2 es divisor común como que cualquier divisor común divide a 2.
24. **Nivel D.** Sean $a, b, k \in \mathbb{Z}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. Demuestra
$$\gcd(a, b) = \gcd(a, b + ka).$$
Después explica cómo esta forma del paso euclidiano permite escoger combinaciones lineales estratégicas en problemas con parámetros.

D. Algoritmo de Euclides

25. **Nivel B.** Calcula $\gcd(662, 414)$ mediante el algoritmo de Euclides. Escribe todas las divisiones y señala el último resto no nulo.
26. **Nivel B.** Calcula
$$\gcd(1001, 391)$$
mediante Euclides. Después verifica el resultado comprobando que el último resto no nulo divide a los dos restos inmediatamente anteriores.
27. **Nivel B.** Calcula
$$\gcd(1071, 462)$$
mediante Euclides. No uses factorización.
28. **Nivel C.** Calcula
$$\gcd(12345, 6789)$$
mediante Euclides y registra la cadena completa de pares
$$(a, b) \to (b, r_1) \to (r_1, r_2) \to \cdots .$$

29. **Nivel C.** Calcula
$$\gcd(-987, 610).$$
Explica primero cómo normalizas los signos y luego ejecuta Euclides únicamente con divisores positivos.
30. **Nivel D.** Demuestra que el algoritmo de Euclides termina. Tu prueba debe usar el descenso estricto de los restos y el principio del buen orden, y debe evitar cualquier afirmación sobre corrección.
31. **Nivel D.** Demuestra la corrección del algoritmo de Euclides suponiendo ya conocida su terminación. Debes justificar por qué cada paso conserva los divisores comunes y por qué el último resto no nulo es el MCD.
32. **Nivel E.** Compara dos procedimientos para hallar $\gcd(119, 34)$:

a) restar repetidamente el menor del mayor;
b) usar división con resto. Explica por qué ambos se apoyan en la misma invariancia de divisores comunes y por qué el segundo comprime varios pasos del primero.

E. Euclides extendido y Bézout

33. **Nivel C.** Calcula $\gcd(252, 198)$ por Euclides y realiza sustitución hacia atrás hasta obtener una identidad
$$\gcd(252, 198) = 252x + 198y.$$
Verifica numéricamente tu identidad.
34. **Nivel C.** A partir de la cadena euclidiana de 662 y 414, recupera por sustitución hacia atrás una identidad de Bézout. Comprueba que llegas a
$$2 = 8 \cdot 414 - 5 \cdot 662$$
o a otra identidad equivalente.
35. **Nivel C.** Calcula $\gcd(84, 30)$ y encuentra enteros x, y tales que
$$\gcd(84, 30) = 84x + 30y.$$
Verifica directamente el resultado.
36. **Nivel D.** Supón que
$$d = ax_0 + by_0$$
y que $d = \gcd(a, b)$. Demuestra que, para todo $t \in \mathbb{Z}$,
$$d = a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right).$$
Concluye que los coeficientes de Bézout no son únicos.
37. **Nivel D.** Usa Euclides extendido para encontrar $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que
$$35x + 64y = 1.$$
Después produce dos pares distintos adicionales que también den 1.
38. **Nivel D.** Sea
$$L(a, b) = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}, \qquad d = \gcd(a, b).$$
Demuestra la inclusión
$$L(a, b) \subseteq d\mathbb{Z}$$
sin usar todavía Bézout.
39. **Nivel D.** Usa la identidad de Bézout para demostrar la inclusión inversa
$$d\mathbb{Z} \subseteq L(a, b).$$
Concluye
$$L(a, b) = d\mathbb{Z}.$$

40. **Nivel E.** Sea $d > 0$ un divisor común de a y b. Supón además que logras construir enteros x, y con
$$d = ax + by.$$
Demuestra que este solo certificado basta para concluir que $d = \gcd(a, b)$. Explica por qué esta técnica puede evitar ejecutar Euclides hasta el final cuando una combinación conveniente ya es visible.

F. Coprimalidad y cancelación

41. **Nivel B.** Decide cuáles de los siguientes pares son coprimos y justifica cada respuesta mediante Euclides:
$$(14, 25), \qquad (21, 35), \qquad (55, 34), \qquad (0, 1).$$
42. **Nivel C.** Demuestra el criterio de Bézout para coprimalidad:
$$\gcd(a, b) = 1 \iff \exists x, y \in \mathbb{Z} : \ ax + by = 1.$$
Debes demostrar ambas implicaciones.
43. **Nivel C.** Encuentra una identidad de Bézout que demuestre directamente que 89 y 55 son coprimos. No basta con indicar que su MCD es 1: exhibe los coeficientes.
44. **Nivel D.** Demuestra el lema de cancelación coprima:
$$\gcd(a, b) = 1, \qquad a \mid bc \Longrightarrow a \mid c.$$
Parte de una identidad $ax + by = 1$, multiplícala por c y justifica cada divisibilidad.
45. **Nivel C.** Da un contraejemplo concreto a
$$a \mid bc \Longrightarrow a \mid c$$
cuando no se supone $\gcd(a, b) = 1$. Explica exactamente qué paso de la demostración del ejercicio anterior deja de estar disponible.
46. **Nivel D.** Demuestra que, si
$$\gcd(a, b) = 1,$$
entonces
$$\gcd(a, a + b) = 1.$$
Da dos pruebas: una comparando divisores comunes y otra transformando una identidad de Bézout.
47. **Nivel E.** Supón
$$\gcd(a, b) = 1 \qquad \text{y} \qquad \gcd(a, c) = 1.$$
Demuestra, sin usar teoría de primos, que
$$\gcd(a, bc) = 1.$$
Una estrategia posible es combinar dos identidades de Bézout.
48. **Nivel D.** Demuestra que la coprimalidad se conserva bajo un paso euclidiano:
$$\gcd(a, b) = 1 \iff \gcd(a, b + ka) = 1$$
para todo $k \in \mathbb{Z}$.

G. Criterio diofántico de existencia

49. **Nivel B.** Decide si la ecuación
$$18x + 30y = 7$$
tiene soluciones enteras. Tu respuesta debe ser un certificado basado en el MCD.

50. **Nivel C.** Decide si
$$18x + 30y = 42$$
tiene soluciones enteras y construye una solución particular a partir de una identidad de Bézout para 18 y 30.

51. **Nivel C.** Resuelve el problema de existencia para
$$84x + 30y = 6.$$
Calcula primero el MCD y construye luego una solución particular.

52. **Nivel C.** Demuestra que
$$84x + 30y = 15$$
no tiene soluciones enteras. Distingue claramente entre "no encontré una solución" y "puedo demostrar que ninguna existe".

53. **Nivel D.** Demuestra el criterio completo de solvencia:
$$ax + by = c \text{ tiene solución entera } \iff \gcd(a, b) \mid c,$$
para $(a, b) \neq (0, 0)$. Separa explícitamente necesidad y suficiencia.

54. **Nivel C.** Analiza los casos con un coeficiente cero:

a) $0x + 12y = c$;
b) $15x + 0y = c$. Caracteriza exactamente los valores de c para los cuales existe solución y describe qué variable queda libre.

55. **Nivel D.** Caracteriza todos los enteros c para los que
$$24x + 36y = c$$
tiene solución entera. Tu respuesta debe tener la forma de una condición de divisibilidad necesaria y suficiente.

56. **Nivel D.** Sea $c \in \mathbb{Z}$. Caracteriza la solvencia de
$$28x + 42y = c.$$
Cuando exista solución, escribe una solución particular directamente en términos de c.

H. Clasificación de todas las soluciones

57. **Nivel D.** Sea (x_0, y_0) una solución de
$$ax + by = c$$
y sea $d = \gcd(a, b)$. Verifica que, para todo $t \in \mathbb{Z}$,
$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t$$
también es solución.

58. **Nivel D.** Encuentra todas las soluciones enteras de
$$18x + 30y = 42.$$
Debes dar una solución particular, la familia paramétrica y una demostración de que no existen otras.

59. **Nivel D.** Encuentra todas las soluciones enteras de
$$84x + 30y = 6.$$
Verifica la familia obtenida por sustitución directa.

60. **Nivel D.** Usa la identidad
$$1 = 11 \cdot 35 - 6 \cdot 64$$
para describir todas las soluciones enteras de
$$35x + 64y = 1.$$

61. **Nivel E.** Encuentra todas las soluciones enteras de
$$-21x + 15y = 3.$$
Controla cuidadosamente los signos en la fórmula general.

62. **Nivel C.** Describe todas las soluciones enteras de
$$0x + 7y = 21.$$
Explica por qué la fórmula general del caso $ab \neq 0$ no debe aplicarse mecánicamente cuando un coeficiente es cero.

63. **Nivel E.** Encuentra todas las soluciones enteras no negativas de
$$18x + 30y = 96.$$
Primero obtiene la familia completa de soluciones enteras y luego impón las desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$ sobre el parámetro.

64. **Nivel F.** Demuestra la **exhaustividad** de la fórmula general. Si (x, y) y (x_0, y_0) son dos soluciones de $ax + by = c$, prueba que
$$a(x - x_0) = -b(y - y_0),$$
reduce por $d = \gcd(a, b)$ y usa coprimalidad para demostrar que la diferencia entre ambas soluciones tiene exactamente la forma parametrizada.

I. Diagnóstico y elección de método

65. **Nivel D.** Audita la supuesta división
$$317 = 52 \cdot 5 + 57.$$
Explica por qué no es un paso válido del algoritmo de división aunque la igualdad sea correcta, y reemplázala por la división canónica.

66. **Nivel D.** Un estudiante calcula correctamente $\gcd(252, 198) = 18$, pero escribe después
$$18 = 3 \cdot 252 - 4 \cdot 198.$$
Comprueba la igualdad, diagnostica el error y reconstruye una identidad de Bézout correcta mediante sustitución hacia atrás.

67. **Nivel D.** Para cada tarea, indica el método más eficiente entre: inspección de divisores, un paso euclidiano, Euclides completo, Euclides extendido, criterio diofántico o clasificación paramétrica. Justifica tu elección:

a) calcular $\gcd(84, 30)$;
b) demostrar $\gcd(7n + 3, 5n + 2) = 1$;
c) decidir si $24x + 36y = 50$ es soluble;
d) encontrar todas las soluciones de $35x + 64y = 1$.

68. **Nivel D.** Demuestra, para todo $n \in \mathbb{Z}$,
$$\gcd(7n + 3, 5n + 2) = 1.$$
Busca una combinación lineal constante antes de ejecutar Euclides simbólicamente.

69. **Nivel E.** Demuestra, para todo $n \in \mathbb{Z}$,
$$\gcd(6n+9, 4n+6) = |2n+3|.$$
Tu prueba debe mostrar que $2n+3$ es divisor común y que cualquier divisor común lo divide.
70. **Nivel D.** Demuestra
$$\gcd(4n+1, 6n+1) = 1$$
para todo $n \in \mathbb{Z}$ mediante una combinación lineal que elimine n.
71. **Nivel E.** Analiza la afirmación: > "Si la ecuación $ax + by = 1$ tiene una solución entera, entonces a y b son coprimos."

Determina si es verdadera y da una demostración o un contraejemplo. Explica qué papel cumple la propiedad de que todo divisor común divide toda combinación lineal.

72. **Nivel F.** Un estudiante encuentra una pareja (x_0, y_0) que satisface $ax_0 + by_0 = c$ y concluye: "ya he resuelto completamente la ecuación". Explica qué ha demostrado realmente, qué falta para describir **todas** las soluciones y qué resultados de C15 permiten cerrar esa brecha.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E.** Demuestra, para $a, b, q \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$,
$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a - qb).$$
Trata cuidadosamente los signos y demuestra que ambos pares tienen **exactamente** los mismos divisores comunes. Explica por qué esta identidad contiene el mecanismo local completo del algoritmo de Euclides.
74. **Nivel F.** Formaliza el algoritmo de Euclides para $a \geq b > 0$ y demuestra por separado:
75. que la sucesión de restos termina;
76. que cada paso conserva el conjunto de divisores comunes;
77. que el último resto no nulo es el MCD. Tu solución debe distinguir explícitamente **terminación** de **corrección**.
78. **Nivel F.** Calcula $\gcd(252, 198)$ mediante Euclides, recupera una identidad
$$d = 252x + 198y,$$
y produce al menos **tres pares distintos** de coeficientes de Bézout. Después demuestra estructuralmente por qué los coeficientes no son únicos.
79. **Nivel F.** Sea $d = \gcd(a, b)$. Demuestra directamente
$$\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\} = d\mathbb{Z}.$$
Tu prueba debe contener ambas inclusiones y señalar con precisión en cuál de ellas se usa la identidad de Bézout.
80. **Nivel F.** Demuestra
$$\gcd(a, b) = 1, \qquad a \mid bc \Longrightarrow a \mid c$$
mediante Bézout. Después da un contraejemplo cuando se elimina la hipótesis $\gcd(a, b) = 1$ y explica por qué esta propiedad prepara, pero no sustituye, la teoría multiplicativa que se desarrollará en C16.
81. **Nivel G.** Considera
$$84x + 30y = c.$$

a) Calcula $\gcd(84, 30)$.
b) Caracteriza exactamente los $c \in \mathbb{Z}$ para los que existe solución.
c) Construye una solución particular en función de c cuando sea posible.
d) Describe todas las soluciones.
e) Demuestra la exhaustividad de tu parametrización.

79. **Nivel G.** Audita la siguiente "solución" del algoritmo de Euclides:

$$662 = 414 \cdot 1 + 248,$$
$$414 = 248 \cdot 2 - 82,$$
$$248 = 82 \cdot 1 + 166,$$
$$166 = 82 \cdot 2 + 2,$$
$$82 = 2 \cdot 41 + 0.$$

El estudiante concluye que $\gcd(662, 414) = 2$ y, al sustituir hacia atrás, afirma

$$2 = 3 \cdot 414 - 2 \cdot 662,$$

añadiendo que esos coeficientes de Bézout son únicos.

Localiza y corrige **todos** los errores: restos fuera del rango canónico, signos, orden de las divisiones, identidad que no verifica y afirmación de unicidad. Reconstruye finalmente una ejecución válida y una identidad de Bézout correcta.

80. **Nivel G.** Realiza una síntesis euclidiana completa con 662 y 414:
81. calcula el MCD mediante Euclides;
82. demuestra por qué el algoritmo termina y conserva divisores comunes;
83. recupera una identidad de Bézout;
84. decide la solvencia de
$$414x + 662y = 2;$$
85. construye una solución particular;
86. describe todas las soluciones;
87. demuestra su exhaustividad;
88. explica qué partes del procedimiento dependen sólo de divisibilidad y combinaciones lineales y qué nueva perspectiva multiplicativa queda abierta para C16.

N. Certificados, restricciones y auditoría algorítmica

Todas las variables y parámetros son enteros. El MCD se usa sólo para pares distintos de $(0, 0)$; no se necesitan primos ni congruencias.

81. **Nivel C.** Se entregan $A = 3535$, $B = 2222$ y el certificado $-A + 2B = 909$. Decide si este certificado determina por sí solo el MCD. Después audita $7A - 11B = 303$ y busca un certificado mejor que permita determinarlo sin ejecutar Euclides. Explica qué comprobación adicional necesita cada combinación.
82. **Nivel C.** Para $n \in \mathbb{Z}$, sean $A = 12n + 8$ y $B = 18n + 12$. Determina el MCD usando un certificado y decide cuándo el par sale del dominio de definición. Explica por qué eliminar el parámetro para obtener cero no sería suficiente.
83. **Nivel D.** Se conoce $1 = 5 \cdot 23 - 6 \cdot 19$. Sin repetir Euclides, clasifica todas las soluciones enteras de $23x + 19y = -7$ y determina cuál cumple $-10 \leq x \leq 8$. Justifica la exhaustividad.
84. **Nivel D.** Para $(a, b) = (221, 91)$ se propone $13 = a - 2b$. Audita el certificado, calcula el MCD y exhibe una identidad correcta. Indica si la divisibilidad de ambas entradas por trece bastaría para cerrar la prueba.
85. **Nivel C.** Para enteros n, c, clasifica todas las soluciones de $nx + 0y = c$. Separa $n = 0$ antes de aplicar cualquier criterio de MCD e indica qué cambia si se exige $x = y$.
86. **Nivel D.** Clasifica todas las soluciones enteras de $-28x - 42y = 14$. Decide cuáles satisfacen simultáneamente $x \geq 0$ e $y \geq 0$, y cuáles satisfacen $x \leq 0$ e $y \leq 0$.
87. **Nivel D.** Para $n, c \in \mathbb{Z}$, clasifica $nx - ny = c$ y después impón $x, y \geq 0$. Incluye $n = 0$ y explica si la no negatividad puede eliminar todas las soluciones cuando $n \neq 0$ y $n \mid c$.

88. **Nivel C.** Determina todas las soluciones de $0x - 9y = 27$ sujetas a $-2 \le x + y \le 2$. Compara con $0x + 0y = 27$ y $0x + 0y = 0$ bajo la misma restricción.
89. **Nivel D.** Clasifica todas las soluciones no negativas de $14x + 9y = 126$. Obtén primero una familia completa sobre los enteros y demuestra que el intervalo final de parámetros es exacto.
90. **Nivel D.** Clasifica las soluciones de $10x - 6y = 4$ con $x, y \ge 0$. Después exige además $x + y \le 20$ y explica por qué una restricción produce infinitas parejas y la otra sólo finitas.
91. **Nivel D.** Para cada entero m, determina todas las soluciones de $15x + 21y = 3m$ que satisfacen $x + y = 1$. Da una condición exacta sobre m y expresa los parámetros admitidos sin usar congruencias.
92. **Nivel E.** Para $6x + 10y = 2$, un estudiante propone la familia $(2 + 10s, -1 - 6s)$, $s \in \mathbb{Z}$, y pide soluciones con $0 \le x \le 12$. Audita la generación, repara la exhaustividad y determina exactamente cuáles pierde la propuesta dentro de ese intervalo.
93. **Nivel D.** Audita la cadena $43 = 12 \cdot 4 - 5$, $12 = (-5)(-2) + 2$, $-5 = 2(-3) + 1$, $2 = 1 \cdot 2 + 0$. ¿Son ciertas las identidades? ¿Es Euclides canónico? Determina si, a pesar de ello, la cadena certifica el MCD y reconstruye Bézout.
94. **Nivel E.** Una regla reemplaza (a, b) por (b, a) usando siempre cociente cero. Aplícala a $(26, 15)$ y audita identidad, invariancia y terminación. Repara la regla y determina un certificado final para el mismo par.
95. **Nivel E.** Sea $b > 0$ y $a = bq + r$ con $q, r \in \mathbb{Z}$, sin condición sobre el resto. Divide $r = bk + s$, $0 \le s < b$, y repara la división de a. Demuestra que se conserva el MCD y aplica la reparación a $-47 = 9(-3) - 20$.
96. **Nivel E.** En Euclides extendido para $(56, 15)$ se registran $11 = 56 - 3 \cdot 15$, $4 = 15 - 11 = -56 + 4 \cdot 15$ y $3 = 11 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 56 - 10 \cdot 15$. Localiza la primera fila incoherente, repara los coeficientes restantes y compara dos certificados finales distintos.

Soluciones razonadas

A. Definición, signos y propiedades del MCD

1. Usamos que el MCD es siempre positivo, que los signos no alteran los divisores comunes y que $\gcd(0, b) = |b|$ para $b \neq 0$.

$$\gcd(18, 30) = 6.$$

Para el segundo par,

$$\gcd(-42, 30) = \gcd(42, 30) = 6.$$

Para el tercero,

$$\gcd(0, -27) = |-27| = 27.$$

Finalmente, Euclides da

$$64 = 35 + 29, \qquad 35 = 29 + 6, \qquad 29 = 4 \cdot 6 + 5, \qquad 6 = 5 + 1,$$

de modo que

$$\gcd(35, 64) = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{6,\ 6,\ 27,\ 1}.$$

2. Primero,

$$42 = 6 \cdot 7, \qquad 30 = 6 \cdot 5,$$

así que 6 es divisor común de 42 y 30.

Sea ahora c cualquier divisor común. Entonces $c \mid 42$ y $c \mid 30$. Por cierre bajo combinaciones lineales,

$$c \mid (42 - 30) = 12,$$

y luego

$$c \mid (30 - 2 \cdot 12) = 6.$$

Así, todo divisor común de 42 y 30 divide a 6. Como $6 > 0$, satisface exactamente la definición universal del MCD. Por consiguiente,

$$\boxed{\gcd(42, 30) = 6}.$$

3. Para cualquier entero no nulo d,

$$d \mid a \iff d \mid |a|.$$

En efecto, $|a|$ es a o $-a$, y cambiar el signo del dividendo no altera la divisibilidad. Lo mismo vale para b.

Por tanto,

$$d \mid a \text{ y } d \mid b \iff d \mid |a| \text{ y } d \mid |b|.$$

Los pares (a, b) y $(|a|, |b|)$ tienen exactamente el mismo conjunto de divisores comunes. El entero positivo que satisface la propiedad universal es, por unicidad, el mismo para ambos pares. Luego

$$\boxed{\gcd(a, b) = \gcd(|a|, |b|)}.$$

4. Sea $a \neq 0$. El número $|a|$ divide a a, porque $a = \pm|a|$, y también divide a 0, pues

$$0 = |a| \cdot 0.$$

Sea c cualquier divisor común de a y 0. La condición relevante es $c \mid a$; de ella se sigue también $c \mid |a|$. Por tanto, todo divisor común divide a $|a|$.

Como $|a| > 0$,

$$\boxed{\gcd(a, 0) = |a|}.$$

Para $(0, 0)$ no hay un divisor común positivo privilegiado: todo entero no nulo divide a ambos componentes. Por la convención adoptada en este capítulo, $\gcd(0, 0)$ queda sin definir.

5. El entero $|a|$ divide a a y, por tanto, divide también al segundo componente tanto en (a, a) como en $(a, -a)$.

Si c es divisor común de a y a, entonces $c \mid a$, y de aquí $c \mid |a|$. Por la definición universal,

$$\gcd(a, a) = |a|.$$

Si c es divisor común de a y $-a$, vuelve a cumplirse $c \mid a$, por lo que $c \mid |a|$. Así,

$$\gcd(a, -a) = |a|.$$

En conclusión,

$$\boxed{\gcd(a, a) = \gcd(a, -a) = |a|}.$$

6. Sabemos que $d > 0$ y que $d \mid a$, $d \mid b$, así que d es un divisor común positivo.

Sea c cualquier divisor común de a y b. Entonces c divide toda combinación lineal entera de a y b. En particular,

$$c \mid (ax + by).$$

Pero por hipótesis

$$ax + by = d.$$

Por tanto,

$$c \mid d.$$

Así, d es divisor común positivo y todo divisor común divide a d. Esa es precisamente la caracterización universal del MCD. Luego

$$\boxed{d = \gcd(a, b)}.$$

7. La fórmula es

$$\boxed{\gcd(ka, kb) = |k| \gcd(a, b)}.$$

Sea $d = \gcd(a, b)$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$,

$$|k|d \mid ka, \qquad |k|d \mid kb,$$

de modo que $|k|d$ es divisor común positivo de ka y kb.

Por Bézout existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$d = ax + by.$$

Multiplicando por $|k|$ y usando $|k| = \varepsilon k$ con $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$|k|d = (ka)(\varepsilon x) + (kb)(\varepsilon y).$$

Si c divide a ka y a kb, entonces divide esa combinación lineal; por tanto,

$$c \mid |k|d.$$

Así, $|k|d$ satisface la propiedad universal para el par (ka, kb), y queda demostrada la fórmula.

8. Supongamos primero que $u > 0$ es un divisor común de a y b y que todo divisor común divide a u. Si $c > 0$ es cualquier divisor común, entonces $c \mid u$. Como ambos son positivos,

$$c \leq u.$$

Por tanto, u es el mayor divisor común positivo. Esta dirección es inmediata una vez conocida la propiedad de tamaño de la divisibilidad.

Para la dirección inversa, supongamos ahora que m es el **mayor divisor común positivo** de a y b. Ejecutemos el algoritmo de Euclides y llamemos d al último resto no nulo. Por la corrección de Euclides, d es divisor común positivo y, además, todo divisor común de a y b divide a d.

Como m es el mayor divisor común positivo y d es un divisor común positivo,

$$d \leq m.$$

Por otra parte, m también es divisor común, y la propiedad universal de d da

$$m \mid d.$$

Como $m, d > 0$, se sigue que

$$m \leq d.$$

Por tanto,

$$m = d.$$

Como todo divisor común divide a d, también divide a m. Así, el mayor divisor común positivo satisface la caracterización universal.

En consecuencia, en $\mathbb{Z}$ ambas definiciones son equivalentes. La primera dirección usa sólo la relación entre divisibilidad y tamaño; la segunda necesita la estructura proporcionada por Euclides —equivalentemente, puede cerrarse mediante Bézout— y no se deduce únicamente del orden de los enteros.

9. Para 137,

$$137 = 12 \cdot 11 + 5,$$

y $0 \leq 5 < 12$. Por tanto,

$$\boxed{q = 11,\ r = 5}.$$

Para -137 no podemos usar resto negativo. Tomamos

$$-137 = 12(-12) + 7,$$

y $0 \leq 7 < 12$. Luego

$$\boxed{q = -12,\ r = 7}.$$

10. Aplicamos la condición canónica $0 \leq r < b$:

$$73 = 9 \cdot 8 + 1,$$

por lo que $(q, r) = (8, 1)$.

$$-73 = 9(-9) + 8,$$

por lo que $(q, r) = (-9, 8)$.

$$240 = 16 \cdot 15 + 0,$$

por lo que $(q, r) = (15, 0)$.
Finalmente,

$$-1 = 7(-1) + 6,$$

de modo que $(q, r) = (-1, 6)$.
Así,

$$\boxed{(8, 1),\ (-9, 8),\ (15, 0),\ (-1, 6)}.$$

11. La escritura

$$41 = 7 \cdot 5 + 6$$

es válida porque $0 \leq 6 < 7$.
La igualdad

$$41 = 7 \cdot 6 - 1$$

es cierta, pero el resto -1 no es canónico. La corrección es

$$41 = 7 \cdot 5 + 6.$$

La igualdad

$$-41 = 7(-6) + 1$$

es válida, pues $0 \leq 1 < 7$.
Finalmente,

$$25 = 5 \cdot 4 + 5$$

no es válida como división canónica porque el resto debe satisfacer $r < 5$. La forma correcta es

$$25 = 5 \cdot 5 + 0.$$

12. Supongamos

$$a = bq + r = bq' + r', \qquad 0 \leq r, r' < b.$$

Restando,

$$b(q - q') = r' - r.$$

Por tanto, $r' - r$ es múltiplo de b. Además,

$$-(b-1) \leq r' - r \leq b - 1,$$

así que

$$|r' - r| < b.$$

El único múltiplo de b cuyo valor absoluto es estrictamente menor que b es 0. Luego

$$r' - r = 0,$$

es decir,

$$r = r'.$$

Sustituyendo en las dos expresiones de a,

$$bq = bq'.$$

Como $b > 0$, se sigue que $q = q'$. El cociente y el resto son, por tanto, únicos.

13. Sea

$$S = \{a - bk : k \in \mathbb{Z},\ a - bk \geq 0\},$$

con $b > 0$.

Primero probamos que S no es vacío. Si $a \geq 0$, basta tomar $k = 0$, pues $a \in S$. Si $a < 0$, tomamos por ejemplo $k = -|a|$. Entonces

$$a - b(-|a|) = a + b|a| \geq 0,$$

pues $b \geq 1$ y $a = -|a|$.

Por el principio del buen orden, S tiene un menor elemento r. Por definición de S, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$r = a - bq,$$

es decir,

$$a = bq + r.$$

Ya sabemos que $r \geq 0$. Si $r \geq b$, entonces

$$r - b \geq 0$$

y

$$r - b = a - b(q + 1),$$

de modo que $r - b \in S$. Pero $r - b < r$, contradicción con la minimalidad de r. Por tanto,

$$0 \leq r < b.$$

Esto prueba la existencia de la división canónica.

14. Si el resto es 0, entonces

$$a = bq$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$. Por definición,

$$b \mid a.$$

Recíprocamente, si $b \mid a$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = bq.$$

Esto ya es una división con resto con $r = 0$, y cumple $0 \leq 0 < b$. Por unicidad del algoritmo de división, el resto canónico debe ser 0.

Así,

$$\boxed{r = 0 \iff b \mid a}.$$

15. Partimos de

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

Si $r = 0$, entonces

$$-a = b(-q) + 0.$$

Por tanto, el cociente y resto de $-a$ son

$$\boxed{-q,\ 0}.$$

Si $r > 0$, entonces

$$-a = -bq - r = b(-q - 1) + (b - r).$$

Como $0 < r < b$,

$$0 < b - r < b.$$

Así, la forma canónica es

$$\boxed{-a = b(-q - 1) + (b - r)}.$$

Por tanto, para $r > 0$ el cociente es $-q - 1$ y el resto es $b - r$.

16. La condición $|r| < b$ permite restos negativos y, por ello, puede admitir dos representaciones.

Por ejemplo, con $a = 5$ y $b = 3$,

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$

y también

$$5 = 3 \cdot 2 - 1.$$

En ambos casos,

$$|2| < 3, \qquad |-1| < 3,$$

pero los cocientes y restos son distintos.

La condición canónica

$$0 \leq r < b$$

elige exactamente uno de los representantes posibles del resto y elimina esa ambigüedad. Para 5 dividido por 3, la única forma canónica es

$$5 = 3 \cdot 1 + 2.$$

C. Paso euclidiano e invariancia del MCD

17. Dividimos 252 por 105:

$$252 = 105 \cdot 2 + 42.$$

Por el lema del paso euclidiano, los pares $(252, 105)$ y $(105, 42)$ tienen exactamente los mismos divisores comunes. Por tanto,

$$\boxed{\gcd(252, 105) = \gcd(105, 42)}.$$

No es necesario calcular todavía que ambos MCD valen 21.

18. Tenemos

$$84 = 30 \cdot 2 + 24,$$

de modo que

$$24 = 84 - 2 \cdot 30.$$

Si d divide a 84 y a 30, divide a 24. Recíprocamente, si divide a 30 y a 24, entonces divide a

$$84 = 2 \cdot 30 + 24.$$

Por tanto,

$$\gcd(84, 30) = \gcd(30, 24).$$

Luego,

$$30 = 24 \cdot 1 + 6, \qquad 6 = 30 - 24.$$

El mismo argumento muestra que $(30, 24)$ y $(24, 6)$ tienen exactamente los mismos divisores comunes. Así,

$$\boxed{\gcd(84, 30) = \gcd(30, 24) = \gcd(24, 6)}.$$

19. Supongamos

$$a = bq + r.$$

Si $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces

$$r = a - bq$$

es una combinación lineal de a y b, por lo que $d \mid r$. Así, d es divisor común de b y r.
Recíprocamente, si $d \mid b$ y $d \mid r$, entonces

$$a = bq + r,$$

por lo que $d \mid a$. Así, d es divisor común de a y b.
Hemos probado

$$d \mid a,\ d \mid b \iff d \mid b,\ d \mid r.$$

Los dos pares tienen exactamente los mismos divisores comunes y, por tanto, el mismo MCD.

20. Tomamos

$$r = a - qb.$$

Entonces

$$a = bq + r.$$

El lema del paso euclidiano da inmediatamente

$$\boxed{\gcd(a, b) = \gcd(b, a - qb)}.$$

Si $a - qb < 0$, no hay problema: cambiar el signo de un componente no cambia sus divisores comunes. En particular,

$$\gcd(b, a - qb) = \gcd(b, |a - qb|).$$

La identidad es válida para todo $q \in \mathbb{Z}$.

21. Sea d un divisor común de $n + 1$ y $2n + 3$. Entonces d divide cualquier combinación lineal de ambos. En particular,

$$2(n + 1) - (2n + 3) = -1.$$

Por tanto,

$$d \mid 1.$$

Todo divisor común es entonces ± 1. Como el MCD es positivo,

$$\boxed{\gcd(n + 1, 2n + 3) = 1}.$$

La combinación lineal que elimina el parámetro es precisamente

$$2(n+1) - (2n+3) = -1.$$

22. Calculamos una combinación lineal constante:

$$3(5n+3) - 5(3n+2) = 15n + 9 - 15n - 10 = -1.$$

Sea d un divisor común de $3n+2$ y $5n+3$. Entonces d divide el miembro izquierdo y, por tanto,

$$d \mid 1.$$

Así, el único divisor común positivo posible es 1. Luego

$$\boxed{\gcd(3n+2, 5n+3) = 1}.$$

23. Observamos primero que

$$2n + 4 = 2(n+2), \qquad 4n + 6 = 2(2n+3).$$

Por tanto,

$$2 \mid (2n+4), \qquad 2 \mid (4n+6),$$

así que 2 es divisor común.

Sea ahora d cualquier divisor común. Entonces

$$d \mid 2(2n+4) - (4n+6).$$

Pero

$$2(2n+4) - (4n+6) = 4n + 8 - 4n - 6 = 2.$$

Así,

$$d \mid 2.$$

Por la definición universal,

$$\boxed{\gcd(2n+4, 4n+6) = 2}.$$

24. Sea d divisor común de a y b. Entonces

$$d \mid b + ka,$$

porque $b + ka$ es una combinación lineal de a y b. Así, todo divisor común de (a, b) es divisor común de $(a, b + ka)$.

Recíprocamente, si $d \mid a$ y $d \mid b + ka$, entonces

$$b = (b + ka) - ka,$$

de modo que $d \mid b$. Por tanto, d es divisor común de (a, b).

Los dos pares tienen exactamente los mismos divisores comunes y, por tanto,

$$\boxed{\gcd(a, b) = \gcd(a, b + ka)}.$$

La utilidad estratégica es que podemos escoger k para cancelar términos o reducir tamaños. En expresiones con parámetros, una combinación adecuada puede eliminar el parámetro y producir un divisor común constante.

D. Algoritmo de Euclides

25. Aplicamos Euclides:

$$662 = 414 \cdot 1 + 248,$$

$$414 = 248 \cdot 1 + 166,$$

$$248 = 166 \cdot 1 + 82,$$

$$166 = 82 \cdot 2 + 2,$$

$$82 = 2 \cdot 41 + 0.$$

El último resto no nulo es 2. Por tanto,

$$\boxed{\gcd(662, 414) = 2}.$$

26. La cadena euclidiana es

$$1001 = 391 \cdot 2 + 219,$$

$$391 = 219 \cdot 1 + 172,$$

$$219 = 172 \cdot 1 + 47,$$

$$172 = 47 \cdot 3 + 31,$$

$$47 = 31 \cdot 1 + 16,$$

$$31 = 16 \cdot 1 + 15,$$

$$16 = 15 \cdot 1 + 1,$$

$$15 = 1 \cdot 15 + 0.$$

El último resto no nulo es 1, así que

$$\boxed{\gcd(1001, 391) = 1}.$$

En el penúltimo paso aparece

$$1 = 16 - 15,$$

por lo que 1 divide a 16 y a 15, los dos restos inmediatamente anteriores. Esto es consistente con que todos los divisores comunes de la cadena terminen concentrados en el último resto no nulo.

27. Ejecutamos Euclides:

$$1071 = 462 \cdot 2 + 147,$$

$$462 = 147 \cdot 3 + 21,$$

$$147 = 21 \cdot 7 + 0.$$

El último resto no nulo es 21. Luego

$$\boxed{\gcd(1071, 462) = 21}.$$

28. La cadena es

$$12345 = 6789 \cdot 1 + 5556,$$

$$6789 = 5556 \cdot 1 + 1233,$$

$$5556 = 1233 \cdot 4 + 624,$$

$$1233 = 624 \cdot 1 + 609,$$

$$624 = 609 \cdot 1 + 15,$$

$$609 = 15 \cdot 40 + 9,$$

$$15 = 9 \cdot 1 + 6,$$

$$9 = 6 \cdot 1 + 3,$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\gcd(12345, 6789) = 3}.$$

La cadena de pares puede registrarse como

$$(12345, 6789) \to (6789, 5556) \to (5556, 1233) \to (1233, 624)$$

$$\to (624, 609) \to (609, 15) \to (15, 9) \to (9, 6) \to (6, 3) \to (3, 0).$$

29. Primero normalizamos signos:

$$\gcd(-987, 610) = \gcd(987, 610).$$

Ahora aplicamos Euclides:

$$987 = 610 + 377,$$

$$610 = 377 + 233,$$

$$377 = 233 + 144,$$

$$233 = 144 + 89,$$

$$144 = 89 + 55,$$

$$89 = 55 + 34,$$

$$55 = 34 + 21,$$

$$34 = 21 + 13,$$

$$21 = 13 + 8,$$

$$13 = 8 + 5,$$

$$8 = 5 + 3,$$

$$5 = 3 + 2,$$

$$3 = 2 + 1,$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0.$$

El último resto no nulo es 1. Por tanto,

$$\boxed{\gcd(-987, 610) = 1}.$$

30. En cada paso del algoritmo, con divisor positivo, el algoritmo de división produce

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}, \qquad 0 \leq r_{i+1} < r_i.$$

Mientras el resto sea no nulo, obtenemos una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos:

$$r_1 > r_2 > r_3 > \cdots > 0.$$

Supongamos que el algoritmo no terminara. Entonces existiría un conjunto no vacío de restos positivos producidos por la ejecución. Por el principio del buen orden, ese conjunto tendría un menor elemento $m > 0$.

Pero si m aparece como divisor en un nuevo paso y la ejecución continúa, el algoritmo de división produce un resto r con

$$0 \leq r < m.$$

Como la ejecución supuestamente no termina, ese resto sería positivo, de modo que

$$0 < r < m,$$

contradicción con la minimalidad de m.

Por tanto, el algoritmo debe alcanzar un resto 0 después de un número finito de pasos.

Esta prueba establece solamente **terminación**. No demuestra aún que el último resto no nulo sea el MCD.

31. Suponemos conocida la terminación. La ejecución tiene entonces la forma

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}$$

hasta llegar a

$$r_{m-2} = q_{m-1} r_{m-1} + r_m,$$

$$r_{m-1} = q_m r_m + 0.$$

Por el lema del paso euclidiano, cada reemplazo

$$(r_{i-1}, r_i) \longmapsto (r_i, r_{i+1})$$

conserva exactamente el conjunto de divisores comunes. Por tanto, el par inicial (a, b) tiene los mismos divisores comunes que el último par no trivial (r_{m-1}, r_m).

En el último paso,

$$r_m \mid r_{m-1},$$

porque $r_{m-1} = q_m r_m$. Así, los divisores comunes de r_{m-1} y r_m son exactamente los divisores de r_m. El entero positivo r_m divide a ambos y todo divisor común divide a r_m.

Luego

$$\boxed{\gcd(a, b) = r_m}.$$

Esto prueba la **corrección** del algoritmo, distinta de su terminación.

32. Por restas repetidas:

$$119 - 34 = 85,$$

$$85 - 34 = 51,$$

$$51 - 34 = 17,$$

y

$$34 - 17 = 17.$$

Así se llega a

$$\gcd(119, 34) = 17.$$

Con división con resto,

$$119 = 34 \cdot 3 + 17,$$

$$34 = 17 \cdot 2 + 0.$$

También obtenemos

$$\boxed{\gcd(119, 34) = 17}.$$

Los dos procedimientos se basan en la misma invariancia:

$$\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$$

o, más generalmente,

$$\gcd(a, b) = \gcd(a - qb, b).$$

La división con resto elige de una sola vez un cociente q que resume varias restas sucesivas. Por eso Euclides es una compresión sistemática del método de restas.

E. Euclides extendido y Bézout

33. Aplicamos Euclides:

$$252 = 198 + 54,$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36,$$

$$54 = 36 + 18,$$

$$36 = 18 \cdot 2.$$

Por tanto,

$$\gcd(252, 198) = 18.$$

Sustituimos hacia atrás:

$$18 = 54 - 36,$$

y como

$$36 = 198 - 3 \cdot 54,$$

tenemos

$$18 = 54 - (198 - 3 \cdot 54) = 4 \cdot 54 - 198.$$

Además,

$$54 = 252 - 198.$$

Así,

$$18 = 4(252 - 198) - 198 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198.$$

Por tanto,

$$\boxed{18 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198}.$$

Verificación:

$$4 \cdot 252 - 5 \cdot 198 = 1008 - 990 = 18.$$

34. Partimos de la cadena

$$662 = 414 + 248,$$

$$414 = 248 + 166,$$

$$248 = 166 + 82,$$

$$166 = 2 \cdot 82 + 2.$$

Entonces

$$2 = 166 - 2 \cdot 82.$$

Como

$$82 = 248 - 166,$$

obtenemos

$$2 = 166 - 2(248 - 166) = 3 \cdot 166 - 2 \cdot 248.$$

A su vez,

$$166 = 414 - 248,$$

por lo que

$$2 = 3(414 - 248) - 2 \cdot 248 = 3 \cdot 414 - 5 \cdot 248.$$

Finalmente,

$$248 = 662 - 414.$$

Así,

$$2 = 3 \cdot 414 - 5(662 - 414) = 8 \cdot 414 - 5 \cdot 662.$$

Por tanto,

$$\boxed{2 = 8 \cdot 414 - 5 \cdot 662}.$$

35. Euclides da

$$84 = 30 \cdot 2 + 24,$$

$$30 = 24 + 6,$$

$$24 = 6 \cdot 4.$$

Por tanto,

$$\gcd(84, 30) = 6.$$

Sustituyendo,

$$6 = 30 - 24,$$

y

$$24 = 84 - 2 \cdot 30.$$

Luego

$$6 = 30 - (84 - 2 \cdot 30) = -84 + 3 \cdot 30.$$

Así,

$$\boxed{6 = 84(-1) + 30(3)}.$$

Los coeficientes pueden tomarse como

$$\boxed{x = -1,\ y = 3}.$$

36. Partimos de

$$d = ax_0 + by_0,$$

con $d = \gcd(a, b)$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, los números a/d y b/d son enteros. Para cualquier $t \in \mathbb{Z}$,

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right)$$

es igual a

$$ax_0 + by_0 + \frac{ab}{d}t - \frac{ab}{d}t = d.$$

Por tanto,

$$\boxed{d = a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right)}.$$

Al variar t obtenemos, en general, infinitos pares de coeficientes distintos. Por eso una identidad de Bézout no tiene coeficientes únicos.

37. Reconstruimos el certificado mediante Euclides extendido. Las divisiones son $64 = 35 + 29$, $35 = 29 + 6$, $29 = 4 \cdot 6 + 5$, $6 = 5 + 1$ y $5 = 5 \cdot 1 + 0$. Hacia atrás,

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 = 6 - (29 - 4 \cdot 6) = 5 \cdot 6 - 29 \\ &= 5(35 - 29) - 29 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 29 \\ &= 5 \cdot 35 - 6(64 - 35) = 11 \cdot 35 - 6 \cdot 64. \end{aligned}$$

La sustitución verifica $385 - 384 = 1$. Por tanto, la identidad obtenida es

$$1 = 11 \cdot 35 - 6 \cdot 64.$$

Así, una solución es

$$(x_0, y_0) = (11, -6).$$

Como $\gcd(35, 64) = 1$, todos los pares de Bézout que representan 1 se obtienen mediante

$$x = 11 + 64t, \qquad y = -6 - 35t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $t = 1$,

$$(x, y) = (75, -41).$$

Tomando $t = -1$,

$$(x, y) = (-53, 29).$$

Por tanto, tres pares distintos son

$$\boxed{(11, -6),\ (75, -41),\ (-53, 29)}.$$

38. Sea

$$z = ax + by \in L(a, b).$$

Como $d = \gcd(a, b)$, tenemos

$$d \mid a, \qquad d \mid b.$$

Por cierre bajo combinaciones lineales,

$$d \mid (ax + by) = z.$$

Entonces z es múltiplo de d, es decir,

$$z \in d\mathbb{Z}.$$

Como z era arbitrario,

$$\boxed{L(a, b) \subseteq d\mathbb{Z}}.$$

En esta inclusión no se usa Bézout; sólo que d divide a a y a b.

39. Por Bézout existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$d = ax_0 + by_0.$$

Sea $z \in d\mathbb{Z}$. Entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ con

$$z = dm.$$

Multiplicando la identidad de Bézout por m,

$$z = dm = a(mx_0) + b(my_0).$$

Como $mx_0, my_0 \in \mathbb{Z}$,

$$z \in L(a, b).$$

Por tanto,

$$d\mathbb{Z} \subseteq L(a, b).$$

Combinando con el ejercicio anterior,

$$\boxed{L(a, b) = d\mathbb{Z}}.$$

40. Sabemos que $d > 0$, $d \mid a$, $d \mid b$ y que

$$d = ax + by.$$

Sea c cualquier divisor común de a y b. Entonces c divide toda combinación lineal de a y b, en particular

$$c \mid (ax + by) = d.$$

Así, d es divisor común positivo y todo divisor común divide a d. Por definición universal,

$$\boxed{d = \gcd(a, b)}.$$

Este argumento muestra que una identidad lineal adecuada actúa como un **certificado** del MCD. Si ya encontramos una combinación que produce un divisor común positivo, no es necesario completar una larga ejecución de Euclides para verificar la propiedad universal.

F. Coprimalidad y cancelación

41. Aplicamos Euclides en cada caso.
Para $(14, 25)$,

$$25 = 14 + 11, \qquad 14 = 11 + 3, \qquad 11 = 3 \cdot 3 + 2, \qquad 3 = 2 + 1,$$

de modo que

$$\gcd(14, 25) = 1.$$

Para $(21, 35)$,

$$35 = 21 + 14, \qquad 21 = 14 + 7, \qquad 14 = 2 \cdot 7,$$

así que

$$\gcd(21, 35) = 7.$$

Para $(55, 34)$,

$$55 = 34 + 21, \qquad 34 = 21 + 13, \qquad 21 = 13 + 8, \qquad 13 = 8 + 5,$$

$$8 = 5 + 3, \qquad 5 = 3 + 2, \qquad 3 = 2 + 1,$$

por lo que

$$\gcd(55, 34) = 1.$$

Finalmente,

$$\gcd(0, 1) = 1.$$

Por tanto, los pares coprimos son

$$\boxed{(14, 25),\ (55, 34),\ (0, 1)}.$$

42. Supongamos primero que

$$\gcd(a, b) = 1.$$

Por la identidad de Bézout existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$ax + by = \gcd(a, b) = 1.$$

Esto prueba una implicación.
Recíprocamente, supongamos que existen x, y tales que

$$ax + by = 1.$$

Sea d un divisor común de a y b. Entonces d divide toda combinación lineal, y por tanto

$$d \mid 1.$$

Así, todo divisor común es ± 1, de modo que el MCD positivo es 1:

$$\gcd(a, b) = 1.$$

En conclusión,

$$\boxed{\gcd(a, b) = 1 \iff \exists x, y \in \mathbb{Z} :\ ax + by = 1}.$$

43. Euclides para 89 y 55 produce la cadena de Fibonacci:

$$89 = 55 + 34, \quad 55 = 34 + 21, \quad 34 = 21 + 13,$$

$$21 = 13 + 8, \quad 13 = 8 + 5, \quad 8 = 5 + 3, \quad 5 = 3 + 2, \quad 3 = 2 + 1.$$

La sustitución hacia atrás da, por ejemplo,

$$1 = -21 \cdot 89 + 34 \cdot 55.$$

Verificación:

$$-21 \cdot 89 + 34 \cdot 55 = -1869 + 1870 = 1.$$

Por el criterio de Bézout,

$$\boxed{\gcd(89, 55) = 1}.$$

44. Como $\gcd(a, b) = 1$, Bézout garantiza enteros x, y tales que

$$ax + by = 1.$$

Multiplicamos por c:

$$acx + bcy = c.$$

Por hipótesis,

$$a \mid bc.$$

Luego a divide a bcy. También es evidente que

$$a \mid acx.$$

Por tanto, a divide la suma

$$acx + bcy = c.$$

Así,

$$\boxed{a \mid c}.$$

La coprimalidad es exactamente lo que permite producir la identidad $ax + by = 1$ usada en la cancelación.

45. Tomemos

$$a = 6, \qquad b = 3, \qquad c = 2.$$

Entonces

$$bc = 6,$$

por lo que

$$6 \mid bc.$$

Sin embargo,

$$6 \nmid 2.$$

Por tanto, la implicación falla sin coprimalidad.

En la demostración del ejercicio anterior necesitábamos una identidad

$$ax + by = 1.$$

Aquí

$$\gcd(6, 3) = 3 \neq 1,$$

así que no existen enteros x, y con $6x + 3y = 1$. Ese es exactamente el paso que deja de estar disponible.

46. Primera prueba: divisores comunes.

Sea d divisor común de a y $a + b$. Entonces

$$d \mid (a + b) - a = b.$$

Por tanto, d es divisor común de a y b. Como $\gcd(a, b) = 1$, se sigue que $d \mid 1$. Luego

$$\gcd(a, a + b) = 1.$$

Segunda prueba: Bézout.

Como $\gcd(a, b) = 1$, existen x, y con

$$ax + by = 1.$$

Escribimos $b = (a + b) - a$:

$$1 = ax + y[(a + b) - a] = a(x - y) + (a + b)y.$$

Hemos obtenido una identidad de Bézout para a y $a + b$. Por tanto,

$$\boxed{\gcd(a, a + b) = 1}.$$

47. Como $\gcd(a, b) = 1$, existen x, y tales que

$$ax + by = 1.$$

Como $\gcd(a, c) = 1$, existen u, v tales que

$$au + cv = 1.$$

Multiplicamos ambas identidades:

$$1 = (ax + by)(au + cv).$$

Expandiendo,

$$1 = a^2xu + acxv + abuy + bc\,yv.$$

Los tres primeros términos contienen un factor a:

$$1 = a(axu + cxv + buy) + bc(yv).$$

Así hemos construido una identidad

$$1 = aX + bcY$$

con $X, Y \in \mathbb{Z}$. Por el criterio de Bézout,

$$\boxed{\gcd(a, bc) = 1}.$$

No se utilizó teoría de números primos.

48. Por el paso euclidiano,

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, b + ka)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Por tanto,

$$\gcd(a, b) = 1 \iff \gcd(a, b + ka) = 1.$$

Así,

$$\boxed{\gcd(a, b) = 1 \iff \gcd(a, b + ka) = 1}.$$

La coprimalidad se conserva porque el conjunto completo de divisores comunes se conserva bajo esa transformación.

G. Criterio diofántico de existencia

49. Calculamos

$$\gcd(18, 30) = 6.$$

Si existieran enteros x, y con

$$18x + 30y = 7,$$

entonces 6, al dividir a 18 y a 30, dividiría también a toda combinación lineal de ellos. En particular, tendría que cumplirse

$$6 \mid 7,$$

lo cual es falso.
Por tanto,

$$\boxed{18x + 30y = 7 \text{ no tiene soluciones enteras}}.$$

El certificado de imposibilidad es $\gcd(18, 30) = 6 \nmid 7$.

50. Tenemos

$$\gcd(18, 30) = 6,$$

y

$$6 \mid 42.$$

Por tanto, el criterio diofántico garantiza solvencia.
Una identidad de Bézout es

$$6 = 2 \cdot 18 - 1 \cdot 30.$$

Como $42 = 7 \cdot 6$, multiplicamos por 7:

$$42 = 14 \cdot 18 - 7 \cdot 30.$$

Así, una solución particular es

$$\boxed{x = 14,\ y = -7}.$$

51. Euclides da

$$84 = 2 \cdot 30 + 24,$$

$$30 = 24 + 6,$$

de modo que

$$\gcd(84, 30) = 6.$$

Como $6 \mid 6$, existe solución.
Además,

$$6 = 30 - (84 - 2 \cdot 30) = -84 + 3 \cdot 30.$$

Por tanto,

$$\boxed{x = -1,\ y = 3}$$

es una solución particular de

$$84x + 30y = 6.$$

52. Ya sabemos que

$$\gcd(84, 30) = 6.$$

Si existieran enteros x, y tales que

$$84x + 30y = 15,$$

entonces, como 6 divide a 84 y a 30, tendría que dividir también al miembro izquierdo y, por igualdad, a 15.
Pero

$$6 \nmid 15.$$

Por tanto,

$$\boxed{84x + 30y = 15 \text{ no tiene soluciones enteras}}.$$

No se trata de que una búsqueda haya fallado: la divisibilidad por el MCD constituye una obstrucción que descarta todas las parejas enteras posibles.

53. Sea

$$d = \gcd(a, b), \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

Necesidad. Supongamos que existe una solución (x, y):

$$ax + by = c.$$

Como $d \mid a$ y $d \mid b$, se tiene

$$d \mid (ax + by) = c.$$

Por tanto,

$$d \mid c.$$

Suficiencia. Supongamos ahora que

$$d \mid c.$$

Entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = dm.$$

Por Bézout existen x_0, y_0 con

$$d = ax_0 + by_0.$$

Multiplicando por m,

$$c = dm = a(mx_0) + b(my_0).$$

Así,

$$x = mx_0, \qquad y = my_0$$

es una solución entera.
En conclusión,

$$\boxed{ax + by = c \text{ tiene solución entera } \iff \gcd(a, b) \mid c}.$$

54. a) La ecuación

$$0x + 12y = c$$

se reduce a

$$12y = c.$$

Existe $y \in \mathbb{Z}$ si y sólo si

$$12 \mid c.$$

Cuando esto ocurre,

$$y = \frac{c}{12},$$

mientras que x puede ser cualquier entero. Así,

$$\boxed{(x, y) = \left(t, \frac{c}{12}\right), \quad t \in \mathbb{Z}}$$

cuando $12 \mid c$.

b) La ecuación

$$15x + 0y = c$$

se reduce a

$$15x = c.$$

Es soluble si y sólo si

$$15 \mid c.$$

En ese caso,

$$x = \frac{c}{15},$$

y y queda libre:

$$\boxed{(x, y) = \left(\frac{c}{15}, t\right), \quad t \in \mathbb{Z}}.$$

55. Calculamos

$$\gcd(24, 36) = 12.$$

Por el criterio diofántico,

$$24x + 36y = c$$

tiene solución entera si y sólo si

$$\boxed{12 \mid c}.$$

Por tanto, los valores posibles de c son exactamente los múltiplos de 12:

$$c \in 12\mathbb{Z}.$$

56. Tenemos

$$\gcd(28, 42) = 14.$$

Por tanto,

$$28x + 42y = c$$

es soluble si y sólo si

$$\boxed{14 \mid c}.$$

Supongamos entonces

$$c = 14m$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Como

$$14 = -28 + 42,$$

multiplicando por m obtenemos

$$c = -28m + 42m.$$

Así, una solución particular es

$$\boxed{x = -m = -\frac{c}{14}, \qquad y = m = \frac{c}{14}}.$$

H. Clasificación de todas las soluciones

57. Sea

$$(x_0, y_0)$$

una solución de

$$ax + by = c.$$

Tomamos

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t,$$

donde $d = \gcd(a, b)$ y $t \in \mathbb{Z}$.
Entonces

$$ax + by = a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right).$$

Al expandir,

$$ax + by = ax_0 + by_0 + \frac{ab}{d}t - \frac{ab}{d}t = c.$$

Por tanto, cada valor entero de t produce otra solución.

58. La ecuación es

$$18x + 30y = 42.$$

Como

$$d = \gcd(18, 30) = 6,$$

una solución particular sencilla es

$$(x_0, y_0) = (4, -1),$$

pues

$$18 \cdot 4 + 30(-1) = 72 - 30 = 42.$$

La fórmula general da

$$x = 4 + \frac{30}{6}t = 4 + 5t,$$

$$y = -1 - \frac{18}{6}t = -1 - 3t.$$

Así,

$$\boxed{x = 4 + 5t, \qquad y = -1 - 3t, \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

Para probar exhaustividad, sea (x, y) otra solución. Restando la ecuación de $(4, -1)$,

$$18(x - 4) + 30(y + 1) = 0.$$

Dividiendo por 6,

$$3(x - 4) = -5(y + 1).$$

Como $\gcd(3, 5) = 1$, la cancelación coprima implica que $5 \mid (x - 4)$. Por tanto,

$$x - 4 = 5t$$

para algún $t \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo,

$$3(5t) = -5(y + 1),$$

de donde

$$y + 1 = -3t.$$

Por tanto, toda solución pertenece a la familia dada.

59. Ya sabemos que

$$\gcd(84, 30) = 6$$

y que una solución particular es

$$(x_0, y_0) = (-1, 3).$$

Por tanto,

$$x = -1 + \frac{30}{6}t = -1 + 5t,$$

$$y = 3 - \frac{84}{6}t = 3 - 14t.$$

Así,

$$\boxed{x = -1 + 5t, \qquad y = 3 - 14t, \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

Verificamos:

$$84(-1 + 5t) + 30(3 - 14t) = -84 + 420t + 90 - 420t = 6.$$

La familia satisface la ecuación para todo $t \in \mathbb{Z}$. La exhaustividad sigue del teorema general de clasificación: cualquier otra solución difiere de $(-1, 3)$ en un múltiplo de $(5, -14)$, porque $30/6 = 5$ y $84/6 = 14$.

60. La identidad dada es

$$1 = 11 \cdot 35 - 6 \cdot 64.$$

Por tanto, una solución particular es

$$(x_0, y_0) = (11, -6).$$

Como $\gcd(35, 64) = 1$, la fórmula general es

$$x = 11 + 64t,$$

$$y = -6 - 35t,$$

con $t \in \mathbb{Z}$.
Así,

$$\boxed{(x, y) = (11 + 64t,\ -6 - 35t), \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

La sustitución directa produce

$$35(11 + 64t) + 64(-6 - 35t) = 385 - 384 = 1.$$

La exhaustividad sigue de la clasificación general con $d = 1$: toda solución difiere de $(11, -6)$ en un múltiplo entero de $(64, -35)$.

61. Consideramos

$$-21x + 15y = 3.$$

El MCD de -21 y 15 es

$$d = 3.$$

Una solución particular es

$$(x_0, y_0) = (2, 3),$$

pues

$$-21 \cdot 2 + 15 \cdot 3 = -42 + 45 = 3.$$

La fórmula general debe respetar el signo de $a = -21$:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t = 2 + 5t,$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t = 3 - (-7)t = 3 + 7t.$$

Por tanto,

$$\boxed{x = 2 + 5t, \qquad y = 3 + 7t, \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

Verificación:

$$-21(2 + 5t) + 15(3 + 7t) = -42 - 105t + 45 + 105t = 3.$$

62. La ecuación

$$0x + 7y = 21$$

se reduce a

$$7y = 21.$$

Por tanto,

$$y = 3.$$

La variable x no aparece en la ecuación y queda completamente libre. Así,

$$\boxed{(x, y) = (t, 3), \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

La fórmula general usada cuando ambos coeficientes son no nulos no debe aplicarse mecánicamente aquí, porque expresiones como

$$\frac{a}{d}$$

pueden ser 0 y la deducción de exhaustividad basada en cancelar coeficientes reducidos cambia de naturaleza. El caso con un coeficiente cero se resuelve directamente.

63. La ecuación es

$$18x + 30y = 96.$$

Como

$$\gcd(18, 30) = 6$$

y $6 \mid 96$, hay soluciones. Dividimos por 6:

$$3x + 5y = 16.$$

Una solución particular es

$$(x_0, y_0) = (2, 2),$$

pues

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16.$$

La familia completa de soluciones enteras es

$$x = 2 + 5t, \qquad y = 2 - 3t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Ahora imponemos no negatividad:

$$2 + 5t \geq 0$$

implica, para $t \in \mathbb{Z}$,

$$t \geq 0.$$

Por otra parte,

$$2 - 3t \geq 0$$

implica

$$t \leq 0.$$

Luego necesariamente

$$t = 0.$$

La única solución entera no negativa es

$$\boxed{(x, y) = (2, 2)}.$$

64. Sean (x, y) y (x_0, y_0) dos soluciones de

$$ax + by = c.$$

Restando,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

por lo que

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0).$$

Sea

$$d = \gcd(a, b), \qquad a = da', \qquad b = db'.$$

Entonces

$$a'(x - x_0) = -b'(y - y_0),$$

y

$$\gcd(a', b') = 1.$$

De

$$a' \mid b'(y - y_0)$$

y la coprimalidad $\gcd(a', b') = 1$, el lema de cancelación coprima da

$$a' \mid (y - y_0).$$

Así existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$y - y_0 = -a't = -\frac{a}{d}t.$$

Sustituyendo en la igualdad reducida,

$$a'(x - x_0) = b'a't,$$

y, como $a' \neq 0$ en el caso $ab \neq 0$,

$$x - x_0 = b't = \frac{b}{d}t.$$

Por tanto, cuando $ab \neq 0$,

$$\boxed{x = x_0 + \frac{b}{d}t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t}.$$

Quedan los casos con un coeficiente cero. Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y dos soluciones deben tener la misma coordenada $y = c/b$, mientras x es libre; como $d = |b|$, la fórmula anterior se reduce precisamente a variar x en pasos de $b/d = \pm 1$. Si $b = 0$, el argumento es simétrico: $x = c/a$ queda fijado y y es libre. Así, también en los casos degenerados la descripción paramétrica, interpretada con cuidado, es exhaustiva.

Toda solución tiene exactamente la forma correspondiente. Esto prueba la exhaustividad.

I. Diagnóstico y elección de método

65. La igualdad

$$317 = 52 \cdot 5 + 57$$

es aritméticamente correcta porque

$$260 + 57 = 317.$$

Sin embargo, no es una división con resto canónica: el resto debe satisfacer

$$0 \leq r < 52,$$

y aquí

$$57 > 52.$$

Dividimos correctamente:

$$317 = 52 \cdot 6 + 5.$$

Como

$$0 \leq 5 < 52,$$

la división canónica es

$$\boxed{317 = 52 \cdot 6 + 5}.$$

66. Primero verificamos la identidad propuesta:

$$3 \cdot 252 - 4 \cdot 198 = 756 - 792 = -36.$$

Por tanto, no es igual a 18.

Reconstruimos Bézout desde Euclides:

$$252 = 198 + 54,$$

$$198 = 3 \cdot 54 + 36,$$

$$54 = 36 + 18.$$

Entonces

$$18 = 54 - 36.$$

Como

$$36 = 198 - 3 \cdot 54,$$

se sigue que

$$18 = 54 - (198 - 3 \cdot 54) = 4 \cdot 54 - 198.$$

Y como

$$54 = 252 - 198,$$

obtenemos

$$18 = 4(252 - 198) - 198 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198.$$

La identidad correcta es

$$\boxed{18 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198}.$$

El error del estudiante consiste en haber escrito coeficientes que no verifican la igualdad; una identidad de Bézout debe comprobarse por sustitución.

67. a) Calcular $\gcd(84, 30)$**.**

El método más eficiente es **Euclides completo**:

$$84 = 2 \cdot 30 + 24, \qquad 30 = 24 + 6, \qquad 24 = 4 \cdot 6.$$

Da rápidamente 6.

b) Demostrar $\gcd(7n + 3, 5n + 2) = 1$**.**

Lo más eficiente es buscar **una combinación lineal estratégica**, es decir, un paso euclidiano simbólico:

$$5(7n + 3) - 7(5n + 2) = 1.$$

No conviene ejecutar un Euclides largo con parámetros.

c) Decidir si $24x + 36y = 50$ **es soluble.**

Usamos el **criterio diofántico**. Como

$$\gcd(24, 36) = 12$$

y

$$12 \nmid 50,$$

no hay solución.

d) Encontrar todas las soluciones de $35x + 64y = 1$**.**

Se necesita primero **Euclides extendido** para obtener una solución particular y luego **clasificación paramétrica** para describir todas. Una identidad es

$$1 = 11 \cdot 35 - 6 \cdot 64,$$

y de ella resulta

$$x = 11 + 64t, \qquad y = -6 - 35t.$$

La elección del método depende de si buscamos un valor del MCD, un certificado de coprimalidad, una decisión de existencia o la familia completa de soluciones.

68. Buscamos una combinación que elimine n:

$$5(7n+3) - 7(5n+2) = 35n + 15 - 35n - 14 = 1.$$

Sea d un divisor común de $7n+3$ y $5n+2$. Entonces d divide cualquier combinación lineal de ambos, en particular 1. Por tanto,

$$d \mid 1.$$

Así,

$$\boxed{\gcd(7n+3, 5n+2) = 1}.$$

69. Observamos que

$$6n + 9 = 3(2n+3)$$

y

$$4n + 6 = 2(2n+3).$$

Por tanto,

$$2n + 3$$

divide a ambos números, y así $|2n+3|$ es un divisor común positivo.

Sea d cualquier divisor común de $6n+9$ y $4n+6$. Entonces

$$d \mid (6n+9) - (4n+6) = 2n + 3.$$

Así, todo divisor común divide a $|2n+3|$. Por la definición universal,

$$\boxed{\gcd(6n+9, 4n+6) = |2n+3|}.$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, nunca ocurre $2n+3 = 0$, de modo que el lado derecho es siempre positivo.

70. Calculamos

$$3(4n+1) - 2(6n+1) = 12n + 3 - 12n - 2 = 1.$$

Sea d un divisor común de $4n+1$ y $6n+1$. Entonces d divide esa combinación lineal, y por tanto

$$d \mid 1.$$

Así,

$$\boxed{\gcd(4n+1, 6n+1) = 1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

71. La afirmación es verdadera.

Supongamos que existen enteros x, y tales que

$$ax + by = 1.$$

Sea d cualquier divisor común de a y b. Como todo divisor común divide toda combinación lineal,

$$d \mid (ax + by).$$

Por tanto,

$$d \mid 1.$$

Así, los únicos divisores comunes posibles son ± 1, y el MCD positivo es

$$\boxed{\gcd(a, b) = 1}.$$

El papel decisivo de la propiedad de combinaciones lineales es convertir una sola igualdad $ax + by = 1$ en un certificado universal: fuerza a todos los divisores comunes a dividir a 1.

72. Primero separamos $a = b = 0$. Una pareja que satisface la ecuación implica entonces $c = 0$, y todas las parejas de $\mathbb{Z}^2$ son soluciones; no se introduce $\gcd(0, 0)$. La existencia de una pareja tampoco basta por sí sola como explicación de esa clasificación, que se obtiene directamente de $0 = 0$. En lo que sigue suponemos $(a, b) \neq (0, 0)$.

Encontrar una pareja

$$(x_0, y_0)$$

con

$$ax_0 + by_0 = c$$

demuestra dos cosas:

1. que la ecuación es soluble;
2. que (x_0, y_0) es una solución particular.

Pero no describe necesariamente todas las soluciones.

Para completar el problema hay que demostrar que toda otra solución (x, y) difiere de (x_0, y_0) por

$$x - x_0 = \frac{b}{d}t, \qquad y - y_0 = -\frac{a}{d}t$$

para algún $t \in \mathbb{Z}$, donde

$$d = \gcd(a, b).$$

Así, la familia completa es

$$\boxed{x = x_0 + \frac{b}{d}t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

La verificación de que esta familia produce soluciones usa cancelación algebraica. Si $ab \neq 0$, la exhaustividad usa la ecuación homogénea obtenida al restar dos soluciones y el lema de cancelación coprima. Si $a = 0$, la ecuación fija $y = c/b$ y deja x libre; el paso $b/d = \pm 1$ recorre todos los enteros. Si $b = 0$, se fija $x = c/a$ y el paso $-a/d = \pm 1$ recorre todos los valores de y. Así también se justifican las familias con un único coeficiente cero.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Sean $a, b, q \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Definamos

$$r = a - qb.$$

Queremos comparar los divisores comunes de (a, b) y (b, r).

Supongamos que d divide a a y a b. Entonces

$$r = a - qb$$

es una combinación lineal de a y b, por lo que

$$d \mid r.$$

Así, d divide a b y a r.

Recíprocamente, supongamos que d divide a b y a r. Como

$$a = qb + r,$$

se sigue que

$$d \mid a.$$

Por tanto,

$$d \mid a,\ d \mid b \iff d \mid b,\ d \mid (a - qb).$$

Los dos pares tienen exactamente el mismo conjunto de divisores comunes. El posible signo de $a - qb$ no altera nada, porque

$$d \mid (a - qb) \iff d \mid -(a - qb).$$

Como el MCD es el divisor común positivo que satisface la propiedad universal,

$$\boxed{\gcd(a, b) = \gcd(b, a - qb)}.$$

Esta identidad contiene el mecanismo local completo de Euclides: cada paso reemplaza el par actual por otro con exactamente los mismos divisores comunes, pero con un segundo componente menor que el divisor positivo cuando, después de normalizar los signos, q es el cociente de la división canónica. La identidad de MCD es válida con b negativo; el teorema de división canónica de §15.4 se aplica con divisor positivo.

74. Sea

$$a \geq b > 0.$$

Fijamos $r_{-1} = a$ y $r_0 = b$; la división de índice $i \geq 1$ es $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$, con $i \geq 1$. Sólo se realiza un nuevo paso mientras su divisor sea positivo.

Aplicamos sucesivamente el algoritmo de división:

$$a = q_1 b + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < b,$$

$$b = q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < r_1,$$

y así sucesivamente.

1. Terminación.

Mientras los restos sean no nulos,

$$b > r_1 > r_2 > \cdots > 0.$$

No puede existir una sucesión infinita estrictamente decreciente de enteros positivos. En efecto, si existiera, el conjunto de sus valores tendría por buen orden un mínimo $m > 0$, pero el paso siguiente produciría un resto positivo menor que m. Contradicción.

Por tanto, existe un índice $s \geq 0$ tal que $r_s > 0$ y el primer resto cero es

$$r_{s+1} = 0.$$

2. Conservación de divisores comunes.

Cada división satisface $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ y, por tanto, $r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$. Si un entero no nulo d divide a r_{i-2} y r_{i-1}, la segunda igualdad prueba que divide a r_i. Si divide a r_{i-1} y r_i, la primera prueba que divide a r_{i-2}. Así los pares (r_{i-2}, r_{i-1}) y (r_{i-1}, r_i) tienen exactamente los mismos divisores comunes. La afirmación vale también cuando el nuevo resto es cero. Por repetición, el par inicial y el terminal comparten todos sus divisores comunes.

3. Identificación del MCD.

El algoritmo termina con

$$r_{s-1} = q_{s+1} r_s + 0.$$

Por tanto,

$$r_s \mid r_{s-1}.$$

Así, r_s divide a ambos elementos del último par y todo divisor común del último par divide a r_s. Como $r_s > 0$,

$$r_s = \gcd(r_{s-1}, r_s).$$

Por invariancia de los divisores comunes,

$$\boxed{\gcd(a, b) = r_s}.$$

La prueba de **terminación** usa únicamente el descenso de restos y buen orden. La prueba de **corrección** usa la invariancia de divisores comunes y la estructura del último paso. Son afirmaciones lógicamente distintas.

75. Aplicamos Euclides:

$$252 = 198 + 54,$$

$$198 = 3 \cdot 54 + 36,$$

$$54 = 36 + 18,$$

$$36 = 2 \cdot 18.$$

Por tanto,

$$d = \gcd(252, 198) = 18.$$

Sustituyendo hacia atrás,

$$18 = 54 - 36,$$

$$36 = 198 - 3 \cdot 54,$$

de modo que

$$18 = 4 \cdot 54 - 198.$$

Como

$$54 = 252 - 198,$$

obtenemos

$$\boxed{18 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198}.$$

Así, un par de coeficientes es

$$(x_0, y_0) = (4, -5).$$

Como

$$\frac{198}{18} = 11, \qquad \frac{252}{18} = 14,$$

todos los pares que representan 18 tienen la forma

$$x = 4 + 11t, \qquad y = -5 - 14t.$$

Tomando $t = 0, 1, -1$ obtenemos, por ejemplo,

$$\boxed{(4, -5),\ (15, -19),\ (-7, 9)}.$$

Verificación del segundo:

$$252 \cdot 15 + 198(-19) = 3780 - 3762 = 18.$$

Verificación del tercero:

$$252(-7) + 198 \cdot 9 = -1764 + 1782 = 18.$$

Estructuralmente, si

$$18 = 252x_0 + 198y_0,$$

entonces para cualquier t

$$252(x_0 + 11t) + 198(y_0 - 14t)$$

añade

$$252 \cdot 11t - 198 \cdot 14t = 2772t - 2772t = 0.$$

Por eso los coeficientes de Bézout no son únicos.

76. Sea

$$L = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}, \qquad d = \gcd(a, b).$$

Demostraremos las dos inclusiones.

Primera inclusión: $L \subseteq d\mathbb{Z}$.

Como

$$d \mid a \qquad \text{y} \qquad d \mid b,$$

se tiene

$$d \mid (ax + by)$$

para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. Por tanto, cada elemento de L es múltiplo de d:

$$L \subseteq d\mathbb{Z}.$$

Aquí no se usa Bézout.

Segunda inclusión: $d\mathbb{Z} \subseteq L$.

Por Bézout existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$d = ax_0 + by_0.$$

Sea dm un múltiplo arbitrario de d. Multiplicando por m,

$$dm = a(mx_0) + b(my_0).$$

Como $mx_0, my_0 \in \mathbb{Z}$,

$$dm \in L.$$

Por tanto,

$$d\mathbb{Z} \subseteq L.$$

Concluimos

$$\boxed{\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\} = d\mathbb{Z}}.$$

La identidad de Bézout se usa exactamente en la segunda inclusión.

77. Supongamos

$$\gcd(a, b) = 1 \qquad \text{y} \qquad a \mid bc.$$

Por Bézout existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$ax + by = 1.$$

Multiplicando por c,

$$acx + bcy = c.$$

El primer término es divisible por a. El segundo también lo es porque $a \mid bc$, y entonces

$$a \mid bcy.$$

Por cierre bajo suma,

$$a \mid c.$$

Así,

$$\boxed{\gcd(a,b)=1,\ a \mid bc \Longrightarrow a \mid c}.$$

Si eliminamos la coprimalidad, la afirmación puede fallar. Por ejemplo,

$$6 \mid 3 \cdot 2,$$

pero

$$6 \nmid 2.$$

Aquí

$$\gcd(6,3)=3 \neq 1.$$

La propiedad anticipa una idea central de la teoría multiplicativa: bajo hipótesis adecuadas, ciertos factores pueden cancelarse dentro de una relación de divisibilidad. Sin embargo, todavía no hemos introducido primos ni factorización; por eso este lema prepara C16 pero no sustituye su teoría.

78. Consideramos

$$84x + 30y = c.$$

a) MCD.
Euclides da

$$84 = 2 \cdot 30 + 24,$$

$$30 = 24 + 6,$$

$$24 = 4 \cdot 6.$$

Luego

$$\boxed{\gcd(84,30)=6}.$$

b) Criterio de existencia.
La ecuación tiene solución entera si y sólo si

$$\boxed{6 \mid c}.$$

Escribamos entonces

$$c = 6m.$$

c) Solución particular.
Como

$$6 = -84 + 3 \cdot 30,$$

multiplicando por m obtenemos

$$c = -84m + 30(3m).$$

Una solución particular es

$$\boxed{x_0 = -m, \qquad y_0 = 3m}.$$

Equivalente, en función de c,

$$x_0 = -\frac{c}{6}, \qquad y_0 = \frac{c}{2}.$$

d) Todas las soluciones.

Como

$$\frac{30}{6} = 5, \qquad \frac{84}{6} = 14,$$

la familia es

$$\boxed{x = -m + 5t, \qquad y = 3m - 14t, \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

e) Exhaustividad.

Sea (x, y) cualquier otra solución. Restamos la ecuación satisfecha por (x_0, y_0):

$$84(x - x_0) + 30(y - y_0) = 0.$$

Dividiendo por 6,

$$14(x - x_0) = -5(y - y_0).$$

Como

$$\gcd(14, 5) = 1,$$

de

$$5 \mid 14(x - x_0)$$

se sigue, por cancelación coprima,

$$5 \mid (x - x_0).$$

Por tanto,

$$x - x_0 = 5t$$

para algún $t \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo,

$$14(5t) = -5(y - y_0),$$

de donde

$$y - y_0 = -14t.$$

Así, toda solución pertenece a la familia anterior. La parametrización es exhaustiva.

79. La supuesta ejecución contiene varios errores.

La primera división,

$$662 = 414 \cdot 1 + 248,$$

es correcta y canónica porque

$$0 \leq 248 < 414.$$

La segunda línea es

$$414 = 248 \cdot 2 - 82.$$

Aunque la igualdad es correcta,

$$496 - 82 = 414,$$

el resto -82 es negativo y no satisface la condición canónica

$$0 \leq r < 248.$$

La división correcta es

$$\boxed{414 = 248 \cdot 1 + 166}.$$

La línea siguiente,

$$248 = 82 \cdot 1 + 166,$$

también es aritméticamente cierta, pero no es un paso euclidiano válido: el resto 166 no cumple

$$166 < 82.$$

Además, se ha cambiado indebidamente el divisor de 248 a 82 sin que 82 sea el resto canónico de la línea anterior.

Desde la división correcta

$$414 = 248 + 166$$

debemos continuar con

$$\boxed{248 = 166 \cdot 1 + 82}.$$

Luego,

$$\boxed{166 = 82 \cdot 2 + 2}$$

y

$$\boxed{82 = 2 \cdot 41 + 0}.$$

Por tanto, la ejecución válida completa es

$$662 = 414 + 248,$$

$$414 = 248 + 166,$$

$$248 = 166 + 82,$$

$$166 = 2 \cdot 82 + 2,$$

$$82 = 41 \cdot 2 + 0.$$

El último resto no nulo es 2, así que la conclusión

$$\gcd(662, 414) = 2$$

sí era correcta, pero estaba apoyada en una cadena defectuosa.
Ahora auditamos la supuesta identidad

$$2 = 3 \cdot 414 - 2 \cdot 662.$$

El lado derecho vale

$$1242 - 1324 = -82,$$

no 2. Por tanto, la identidad es falsa.
Hacemos sustitución hacia atrás:

$$2 = 166 - 2 \cdot 82,$$

$$82 = 248 - 166,$$

por lo que

$$2 = 3 \cdot 166 - 2 \cdot 248.$$

Como

$$166 = 414 - 248,$$

obtenemos

$$2 = 3 \cdot 414 - 5 \cdot 248.$$

Finalmente,

$$248 = 662 - 414,$$

y así

$$\boxed{2 = 8 \cdot 414 - 5 \cdot 662}.$$

Los coeficientes de Bézout tampoco son únicos. Como

$$d = 2,$$

si una representación es

$$2 = 414 \cdot 8 + 662(-5),$$

entonces para cualquier $t \in \mathbb{Z}$,

$$x = 8 + \frac{662}{2}t = 8 + 331t,$$

$$y = -5 - \frac{414}{2}t = -5 - 207t$$

produce otra representación:

$$2 = 414(8 + 331t) + 662(-5 - 207t).$$

Por tanto, la afirmación de unicidad es falsa.

80. Trabajamos con 662 y 414.

1. Cálculo del MCD.

Euclides da

$$662 = 414 + 248,$$

$$414 = 248 + 166,$$

$$248 = 166 + 82,$$

$$166 = 2 \cdot 82 + 2,$$

$$82 = 41 \cdot 2 + 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\gcd(662, 414) = 2}.$$

2. Terminación e invariancia.

En cada división canónica,

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}, \qquad 0 \leq r_{i+1} < r_i.$$

Mientras los restos sean positivos forman una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos, que debe terminar por el principio del buen orden.

Además,

$$r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i.$$

Por ello, todo divisor común de r_{i-1} y r_i divide a r_{i+1}. Recíprocamente,

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1},$$

de modo que todo divisor común de r_i y r_{i+1} divide a r_{i-1}. Así, cada paso conserva exactamente los divisores comunes. El último resto no nulo es entonces el MCD.

3. Identidad de Bézout.

Partimos de

$$2 = 166 - 2 \cdot 82.$$

Como

$$82 = 248 - 166,$$

$$2 = 3 \cdot 166 - 2 \cdot 248.$$

Como

$$166 = 414 - 248,$$

$$2 = 3 \cdot 414 - 5 \cdot 248.$$

Y como

$$248 = 662 - 414,$$

$$\boxed{2 = 8 \cdot 414 - 5 \cdot 662}.$$

4. Solvencia de $414x + 662y = 2$**.**
El MCD de 414 y 662 es 2, y

$$2 \mid 2.$$

Por el criterio diofántico, la ecuación es soluble.
5. Solución particular.
La identidad de Bézout ya proporciona una:

$$\boxed{x_0 = 8, \qquad y_0 = -5}.$$

6. Todas las soluciones.
Como

$$\frac{662}{2} = 331, \qquad \frac{414}{2} = 207,$$

la familia completa es

$$\boxed{x = 8 + 331t, \qquad y = -5 - 207t, \qquad t \in \mathbb{Z}}.$$

Verificamos:

$$414(8 + 331t) + 662(-5 - 207t)$$

$$= 3312 + 137034t - 3310 - 137034t = 2.$$

7. Exhaustividad.
Sea (x, y) otra solución. Restando la ecuación de $(8, -5)$,

$$414(x - 8) + 662(y + 5) = 0.$$

Dividimos por 2:

$$207(x - 8) = -331(y + 5).$$

Como

$$\gcd(207, 331) = 1,$$

de

$$331 \mid 207(x-8)$$

y la cancelación coprima se deduce

$$331 \mid (x-8).$$

Por tanto,

$$x - 8 = 331t$$

para algún $t \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo,

$$207(331t) = -331(y+5),$$

y cancelando 331,

$$y + 5 = -207t.$$

Así,

$$x = 8 + 331t, \qquad y = -5 - 207t.$$

No existen otras soluciones.

8. Balance conceptual.

Todo el procedimiento usado hasta aquí descansa en:

- la definición de divisibilidad;
- el cierre de la divisibilidad bajo combinaciones lineales;
- el algoritmo de división;
- la invariancia de divisores comunes bajo el paso euclidiano;
- el principio del buen orden para garantizar terminación;
- la identidad de Bézout;
- la cancelación coprima;
- el criterio diofántico y la clasificación paramétrica.

Nada de esto exige todavía factorización prima ni congruencias. La perspectiva nueva que queda abierta para C16 es **multiplicativa**: estudiar enteros que no pueden descomponerse en factores no triviales, entender cómo los primos controlan los productos y analizar la factorización de los enteros. Ese será el siguiente nivel estructural.

N. Certificados, restricciones y auditoría algorítmica

81. Las identidades son ciertas: $-3535 + 4444 = 909$ y $24745 - 24442 = 303$. Todo divisor común divide a 909, pero esto no convierte a 909 en divisor común: $3535 = 909 \cdot 3 + 808$, luego $909 \nmid 3535$. El primer certificado sólo acota los divisores comunes.

El segundo certificado tampoco produce un divisor común: $3535 = 303 \cdot 11 + 202$. Las dos combinaciones son verdaderas, pero por sí solas no certifican el MCD. Podemos buscar una combinación menor sin ejecutar la cadena de Euclides: $8B - 5A = 17776 - 17675 = 101$.

Ahora sí, $A = 35 \cdot 101$ y $B = 22 \cdot 101$. Por tanto 101 es divisor común positivo, y cualquier divisor común divide a $8B - 5A = 101$. La propiedad universal prueba $\gcd(A, B) = 101$. Se han comprobado tanto la identidad como las dos divisibilidades. Una combinación verdadera puede producir un múltiplo del MCD; es el certificado completo el que identifica su valor.

82. Escribimos $u = 3n + 2$, de modo que $A = 4u$ y $B = 6u$. Como n es entero, $u \neq 0$: la igualdad $3n = -2$ no tiene solución entera. Así el par nunca es $(0, 0)$. El número positivo $2|u|$ divide a ambas entradas, con testigos $2u/|u|$ y $3u/|u|$, ambos enteros.

Además $B - A = 2u$. Todo divisor común divide a $2u$ y, por cambio de signo, a $2|u|$. Esto prueba la propiedad universal y da $\gcd(A, B) = 2|3n + 2|$. No necesitamos Euclides con parámetros. La identidad $3A - 2B = 0$ también es verdadera, pero no restringe los divisores comunes: todo entero no nulo divide a cero. El certificado útil produce el candidato positivo, o su opuesto, y se acompaña de la verificación de divisor común.

83. El certificado es cierto, $115 - 114 = 1$, y prueba que el MCD es uno. Multiplicar por menos siete entrega $(-35, 42)$. La familia completa es

$$(x, y) = (-35 + 19t, 42 - 23t), \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

La sustitución da menos siete. Si (x, y) es cualquier solución, $23(x + 35) = -19(y - 42)$; la coprimalidad de 23 y 19 obliga a $19 \mid (x + 35)$. Escribimos $x + 35 = 19t$ y obtenemos $y - 42 = -23t$. Así no quedan parejas fuera de la familia.

La restricción equivale a $25 \leq 19t \leq 43$, de donde $t = 2$ es el único entero posible: $t \leq 1$ da $19t \leq 19$ y $t \geq 3$ da $19t \geq 57$. La única pareja restringida es $(3, -4)$, y $69 - 76 = -7$. Una identidad ya disponible permite pasar directamente a la clasificación.

84. El lado derecho es $221 - 182 = 39$, no trece: la identidad propuesta es falsa. Aunque $221 = 17 \cdot 13$ y $91 = 7 \cdot 13$, estas dos igualdades sólo prueban que trece es divisor común.

Euclides da $221 = 2 \cdot 91 + 39$, $91 = 2 \cdot 39 + 13$, $39 = 3 \cdot 13$. Por invariancia y terminación, el MCD es trece. Hacia atrás, $13 = 91 - 2(221 - 2 \cdot 91) = -2 \cdot 221 + 5 \cdot 91$. La verificación es $-442 + 455 = 13$. Esta identidad correcta hace que todo divisor común divida a trece y completa el certificado universal. Un candidato que divide ambas entradas puede ser menor que el MCD; por ejemplo, uno también divide ambas, pero no es su MCD.

85. Si $n = 0$, el lado izquierdo es cero. Para $c = 0$ las soluciones son todas las parejas de $\mathbb{Z}^2$; bajo $x = y$, son (t, t) con $t \in \mathbb{Z}$. Para $c \neq 0$ no hay solución con ninguna de las dos condiciones. No se invoca $\gcd(0, 0)$.

Si $n \neq 0$, existe solución exactamente cuando $n \mid c$. En ese caso $q = c/n$ es entero y la ecuación fuerza $x = q$, mientras y es libre: (q, t), $t \in \mathbb{Z}$. Estas condiciones son necesarias por la igualdad $nx = c$ y suficientes por sustitución. Con $x = y$ queda sólo (q, q). El signo de n no cambia la divisibilidad; sí determina el signo del cociente. Si $n \nmid c$, no hay pareja entera.

86. Dividir la igualdad por menos catorce da $2x + 3y = -1$. La pareja $(1, -1)$ la satisface. Como $\gcd(2, 3) = 1$, la familia completa es $(1 + 3t, -1 - 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Para la exhaustividad, una solución arbitraria cumple $2(x - 1) = -3(y + 1)$, luego $3 \mid x - 1$ y se recupera ese parámetro. La sustitución verifica la ecuación original, con desplazamiento que respeta los signos.

Si $x, y \geq 0$, el miembro original es no positivo y no puede valer catorce. También la familia exigiría $t \geq 0$ y $t \leq -1$ simultáneamente. Si $x, y \leq 0$, de $1 + 3t \leq 0$ resulta $t \leq -1$, y de $-1 - 2t \leq 0$ resulta $t \geq 0$; de nuevo no hay entero permitido. Por tanto hay infinitas soluciones enteras, pero ninguna en esos dos cuadrantes. Los signos iguales de los coeficientes no justifican cambiar el signo del término independiente sin cambiar toda la igualdad.

87. Si $n = 0$, hay todas las parejas enteras para $c = 0$ y ninguna para $c \neq 0$. Con no negatividad, la primera alternativa se reduce a todas las parejas de enteros no negativos. No se define un MCD para las dos entradas cero.

Si $n \neq 0$, la igualdad es $n(x - y) = c$, de modo que es soluble exactamente cuando $n \mid c$. Sea $m = c/n \in \mathbb{Z}$. Todas las parejas son $(m + t, t)$, $t \in \mathbb{Z}$: la sustitución prueba generación y una pareja arbitraria tiene necesariamente $t = y$ y $x = m + y$, lo que prueba exhaustividad.

Para no negatividad se necesita y basta $t \geq 0$ y $t \geq -m$, es decir, $t \geq \max(0, -m)$. Este conjunto de enteros nunca es vacío y es infinito. Por tanto aquí la no negatividad no destruye la solvencia; permite desplazar ambas coordenadas hacia arriba. La conclusión vale para ambos signos de n y de c.

88. En la primera ecuación, $y = -3$ y x es libre antes de imponer restricciones. La desigualdad se convierte en $-2 \leq x - 3 \leq 2$, esto es, $1 \leq x \leq 5$. Las soluciones son $(1, -3)$, $(2, -3), (3, -3), (4, -3), (5, -3)$. Son todas porque la ecuación fuerza la segunda coordenada y la desigualdad fuerza exactamente ese intervalo de enteros para la primera.

La ecuación $0x + 0y = 27$ no tiene soluciones. En cambio $0x + 0y = 0$ no fija ninguna coordenada. Bajo la restricción, todas sus parejas se describen como $(t, k - t)$, donde $t \in \mathbb{Z}$ y $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Cada pareja tiene suma k; recíprocamente, dada una solución restringida, elegimos $t = x$ y $k = x + y$. Aquí se necesitan un parámetro libre y cinco elecciones de suma, no una familia que fije arbitrariamente una coordenada.

89. El MCD es uno: $1 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9$, y uno divide ambas entradas. Una solución particular es $(9, 0)$. Todas las soluciones enteras son $(9 + 9t, -14t)$, $t \in \mathbb{Z}$. La sustitución da 126. Restar la solución particular da $14(x - 9) = -9y$; por coprimalidad, $9 \mid x - 9$, y la misma igualdad fuerza $y = -14t$. Esto prueba exhaustividad.

No negatividad exige $9 + 9t \geq 0$ y $-14t \geq 0$, equivalentes a $t \geq -1$ y $t \leq 0$. Los únicos enteros son $-1, 0$. Obtenemos $(0, 14)$ y $(9, 0)$, que verifican $9 \cdot 14 = 126$ y $14 \cdot 9 = 126$. Las dos equivalencias sobre el parámetro prueban que no se omite ni se añade ninguna pareja.

90. Reducimos a $5x - 3y = 2$, con solución $(1, 1)$ y coeficientes coprimos. Todas las soluciones son $(1 + 3t, 1 + 5t)$, $t \in \mathbb{Z}$. La sustitución da cuatro en la ecuación original. Para probar exhaustividad, restar $(1, 1)$ da $5(x - 1) = 3(y - 1)$; por cancelación coprima, $3 \mid x - 1$, y luego $y - 1 = 5t$.

La no negatividad de ambas coordenadas equivale, para parámetros enteros, a $t \geq 0$: cualquier $t \leq -1$ hace ambas negativas, y cualquier $t \geq 0$ las hace positivas. Hay infinitas parejas. La suma es $2 + 8t$; exigir que sea a lo sumo veinte añade $8t \leq 18$, es decir, $t \leq 2$ para enteros. Quedan $t = 0, 1, 2$, con parejas $(1, 1), (4, 6), (7, 11)$. Las dos restricciones se impusieron sobre una familia ya exhaustiva, por lo que la lista también lo es.

91. La restricción obliga a $y = 1 - x$. Sustituir da $15x + 21(1 - x) = 3m$, luego $21 - 6x = 3m$ y $2x = 7 - m$. Por tanto existe una pareja entera exactamente cuando $7 - m$ es par. Escribimos esta condición como $m = 7 - 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$. En ese caso la única pareja es $(k, 1 - k)$.

La sustitución comprueba $15k + 21(1 - k) = 21 - 6k = 3(7 - 2k)$ y la suma uno. El argumento comenzó con una solución arbitraria, así que demuestra exhaustividad y unicidad bajo la restricción. Sin ella, la ecuación es soluble para todo entero m, pues $\gcd(15, 21) = 3$ y $3 \mid 3m$. El obstáculo de paridad procede de la restricción añadida, no del criterio general de existencia.

92. La familia propuesta genera soluciones, porque $6(2 + 10s) + 10(-1 - 6s) = 2$. Pero el desplazamiento $(10, -6)$ es dos veces la dirección reducida $(5, -3)$. La familia completa es $(2 + 5t, -1 - 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Para una solución arbitraria, $3(x - 2) = -5(y + 1)$ fuerza $5 \mid x - 2$, y después $y + 1 = -3t$; así la reparación es exhaustiva.

La restricción equivale a $-2 \leq 5t \leq 10$, cuyos enteros posibles son $t = 0, 1, 2$. Las parejas son $(2, -1), (7, -4), (12, -7)$. La propuesta selecciona $t = 2s$, de modo que sólo obtiene las dos con parámetros cero y dos; pierde exactamente $(7, -4)$. Esta pareja verifica $42 - 40 = 2$, pero exigiría $s = 1/2$. La falla es de exhaustividad, no de sustitución ni de solvencia.

93. Las cuatro igualdades son verdaderas: $48 - 5 = 43$, $10 + 2 = 12$, $-6 + 1 = -5$ y $2 = 2$. No es una ejecución canónica: el primer resto es negativo y el segundo paso usa divisor negativo. Sin embargo, cada identidad conserva exactamente los divisores comunes del par consecutivo, pues los cocientes son enteros. Esta cadena concreta termina en $(1, 0)$, por lo que certifica $\gcd(43, 12) = 1$.

Hacia atrás, $1 = -5 + 3 \cdot 2$, $2 = 12 + 2(-5)$ y $-5 = 43 - 4 \cdot 12$. Así $1 = 7(-5) + 3 \cdot 12 = 7 \cdot 43 - 25 \cdot 12$. Verificar $301 - 300 = 1$ confirma el certificado. La ejecución canónica sería $43 = 3 \cdot 12 + 7$, $12 = 7 + 5$, $7 = 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $2 = 2 \cdot 1$. Que esta cadena alternativa termine no prueba que cualquier elección no canónica lo haga: el descenso debe justificarse por separado.

94. Las identidades $26 = 0 \cdot 15 + 26$ y $15 = 0 \cdot 26 + 15$ son verdaderas; intercambiar entradas conserva los divisores comunes. Pero la sucesión alterna $(26, 15)$ y $(15, 26)$ indefinidamente. No hay resto cero ni descenso. La invariancia no basta para demostrar terminación.

Con división canónica: $26 = 15 + 11$, $15 = 11 + 4$, $11 = 2 \cdot 4 + 3$, $4 = 3 + 1$, $3 = 3 \cdot 1 + 0$. Los restos positivos descienden y el par terminal identifica el MCD como uno. Hacia atrás, $1 = 4 - 3 = 3 \cdot 4 - 11 = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11 = 7 \cdot 15 - 4 \cdot 26$. Verificar $105 - 104 = 1$ prueba el certificado universal. La reparación impone una regla de progreso para todas las entradas normalizadas; no consiste sólo en detener manualmente el ciclo.

95. Sustituir la segunda igualdad en la primera entrega $a = b(q + k) + s$. El cociente reparado es $q + k \in \mathbb{Z}$ y el resto s cumple $0 \leq s < b$, por lo que ésta es la división canónica; su unicidad procede del teorema de división. No se ha declarado falsa la igualdad original: se ha reparado la condición de resto.

Los pares (b, r) y (b, s) tienen los mismos divisores comunes porque $r = bk + s$ y $s = r - bk$. Además (a, b) y (b, r) los comparten. Como $b > 0$, ninguno de estos pares es $(0, 0)$, y sus MCD están definidos e iguales.

En el ejemplo, $-20 = 9(-3) + 7$, así que $k = -3$, $s = 7$ y $q + k = -6$. La división reparada es $-47 = 9(-6) + 7$, cierta y con $0 \leq 7 < 9$. Euclides sobre $(9, 7)$ da $9 = 7 + 2$, $7 = 3 \cdot 2 + 1$, $2 = 2 \cdot 1$. Por tanto $\gcd(-47, 9) = 1$. La normalización del resto conserva la aritmética y añade el descenso que faltaba.

96. Las dos primeras filas verifican sus valores. En la tercera, la operación con restos da $11 - 2 \cdot 4 = 3$, pero los coeficientes registrados dan $168 - 150 = 18$. La recurrencia correcta resta dos veces cada coeficiente de la fila anterior: $(1, -3) - 2(-1, 4) = (3, -11)$. Así $3 = 3 \cdot 56 - 11 \cdot 15 = 168 - 165$.

La cadena canónica continúa con $4 = 3 + 1$ y $3 = 3 \cdot 1$. Entonces $1 = 4 - 3 = (-1, 4) - (3, -11)$ como combinación, y se obtiene $1 = -4 \cdot 56 + 15 \cdot 15 = -224 + 225$. El MCD es uno. Otro certificado es $1 = 11 \cdot 56 - 41 \cdot 15 = 616 - 615$, cuya pareja difiere por $(15, -56)$. Esa diferencia representa cero, por lo que ambos certificados son válidos. La no unicidad de Bézout permite parejas distintas que verifican la identidad; no permite aceptar una fila que representa un valor falso. Se auditó cada resto y cada combinación por separado.

Capítulo 16

Números primos y factorización

En los dos capítulos anteriores estudiamos la divisibilidad desde dos perspectivas complementarias. Primero aprendimos a leer $a \mid b$ como una afirmación de existencia: existe un entero que actúa como testigo de que b es múltiplo de a. Después vimos que el máximo común divisor organiza todas las combinaciones lineales de dos enteros y que el algoritmo de Euclides permite calcularlo sin factorizar.

Ahora cambia la pregunta. Ya no preguntaremos principalmente qué divisores comparten dos números, sino **de qué piezas multiplicativas está construido un entero**.

Consideremos, por ejemplo,

$$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Podemos descomponer 84 de muchas maneras intermedias, pero el proceso parece terminar siempre en los mismos bloques: 2, 3 y 7. Lo mismo ocurre con

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

La afirmación de que esto no es una coincidencia exige dos teoremas diferentes. Debemos probar, primero, que toda descomposición termina efectivamente en números primos y, segundo, que no puede terminar en una colección esencialmente distinta de primos.

La idea central del capítulo será:

> **Los números primos son los bloques multiplicativos elementales de los enteros porque todo entero no nulo y no unidad se descompone, salvo una unidad de signo, en primos positivos, y el lema de Euclides obliga a que esa descomposición sea esencialmente única.**

No utilizaremos congruencias, clases residuales ni inversos modulares. La teoría de este capítulo se construirá únicamente con divisibilidad, MCD, Bézout, inducción y razonamiento sobre productos.

16.1. De los divisores comunes a los bloques multiplicativos

En C15 la pregunta decisiva para dos enteros a y b era encontrar un entero positivo que concentrara la información de todos sus divisores comunes. Esa pregunta conducía al máximo común divisor.

Para estudiar la estructura interna de un solo entero necesitamos otro tipo de análisis. Si n puede escribirse como

$$n = ab,$$

entonces a y b revelan una descomposición multiplicativa de n. Pero esa escritura puede ser poco informativa. Por ejemplo,

$$60 = 6 \cdot 10$$

y tanto 6 como 10 todavía pueden descomponerse. En cambio,

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

parece haber llegado a una etapa en la que ninguno de los factores puede seguir rompiéndose en factores positivos mayores que 1.

Esto sugiere distinguir entre dos clases de enteros positivos mayores que 1:

- aquellos que admiten una descomposición no trivial;
- aquellos que no la admiten.

La segunda clase será la de los **números primos**.

Hay aquí una diferencia metodológica importante respecto de los capítulos anteriores. Saber calcular algunas factorizaciones no demuestra que toda factorización exista ni que sea única. Por ejemplo, observar

$$12 = 2^2 \cdot 3, \qquad 18 = 2 \cdot 3^2, \qquad 45 = 3^2 \cdot 5$$

sólo proporciona ejemplos. El objetivo del capítulo es establecer un teorema universal para **todo** entero positivo mayor que 1.

Además, debemos cuidar una posible circularidad. Sería tentador demostrar propiedades de los primos usando ya la unicidad de la factorización y luego utilizar esas mismas propiedades para probar la unicidad. No lo haremos. La secuencia lógica será:

```
EXISTENCIA: PRIMOS Y COMPUESTOS + INDUCCIÓN FUERTE
UNICIDAD: BÉZOUT Y COPRIMALIDAD DE C15 → LEMA DE EUCLIDES → PRODUCTOS FINITOS
TEOREMA FUNDAMENTAL: EXISTENCIA + UNICIDAD
CONSECUENCIAS SOBRE EXPONENTES: TEOREMA FUNDAMENTAL
```

Esta dirección será esencial durante todo el capítulo.

16.2. Primos, compuestos, unidades y casos frontera

Trabajaremos primero con enteros positivos.

Un entero p se llama **primo** si

$$p > 1$$

y sus únicos divisores positivos son 1 y p.

Equivalentemente, si $d > 0$ y $d \mid p$, entonces

$$d = 1 \qquad \text{o} \qquad d = p.$$

Los primeros primos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Un entero positivo $n > 1$ se llama **compuesto** si existen enteros positivos a, b tales que

$$n = ab, \qquad 1 < a < n, \qquad 1 < b < n.$$

Por ejemplo,

$$21 = 3 \cdot 7,$$

por lo que 21 es compuesto. En cambio, si intentamos factorizar 13 como producto de dos enteros positivos, necesariamente uno de ellos debe ser 1.

Para $n > 1$, las categorías primo y compuesto son complementarias. En efecto, si n no es primo, existe un divisor positivo d de n distinto de 1 y de n. Escribiendo $n = dq$, tenemos $1 < d < n$ y también $1 < q < n$; por tanto, n es compuesto. Recíprocamente, si $n = ab$ con $1 < a, b < n$, entonces a es un divisor positivo no trivial de n, de modo que n no es primo.

Por qué 1 no es primo. El entero 1 posee un solo divisor positivo: él mismo. La definición de primo exige dos divisores positivos distintos, 1 y p, con $p > 1$. Por tanto, 1 no es primo.

Esta exclusión no es una convención ornamental. Si permitiéramos que 1 fuera primo, una factorización nunca sería única en un sentido razonable, pues podríamos escribir

$$6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1^2 \cdot 2 \cdot 3 = \cdots .$$

Por qué 0 no es primo. Todo entero no nulo divide a 0. Por tanto, 0 tiene demasiados divisores y no puede satisfacer la definición de primo. Tampoco es compuesto en el sentido que acabamos de fijar, porque la categoría de compuesto se reserva a enteros positivos mayores que 1.

Las unidades de $\mathbb{Z}$. Un entero u es una **unidad** cuando posee inverso multiplicativo entero: existe $v \in \mathbb{Z}$ tal que

$$uv = 1.$$

En los enteros esto obliga a

$$|u| = |v| = 1.$$

Por tanto, las únicas unidades de $\mathbb{Z}$ son

$$1 \quad \text{y} \quad -1.$$

Las unidades permiten cambiar el signo de una factorización sin alterar sus factores primos esenciales. Por ejemplo,

$$-30 = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

En este capítulo llamaremos **primos** únicamente a los primos positivos. Así, -5 no se llamará primo en la exposición elemental; diremos que -5 y 5 difieren por multiplicación por la unidad -1.

Esta decisión nos permitirá formular la unicidad sin ambigüedades de signo.

16.3. Irreducibles en $\mathbb{Z}$ y relación con los primos

La palabra “primo” está formulada mediante divisores. Existe otra manera de describir la misma rigidez multiplicativa en los enteros.

Diremos que un entero a es **irreducible en** $\mathbb{Z}$ si:

1. $a \neq 0$;
2. a no es una unidad;
3. siempre que
$$a = bc,$$
con $b, c \in \mathbb{Z}$, al menos uno de los factores b o c es una unidad.

Por ejemplo, 5 es irreducible. Si

$$5 = bc,$$

entonces, tomando valores absolutos,

$$5 = |b||c|.$$

Como 5 no posee divisores positivos intermedios, uno de $|b|, |c|$ debe ser 1.

En $\mathbb{Z}$, para enteros positivos mayores que 1, "primo" e "irreducible" describen exactamente los mismos números.

Proposición. Sea $p > 1$. Entonces

$$\boxed{p \text{ es primo } \iff p \text{ es irreducible en } \mathbb{Z}.}$$

Demostración. Supongamos primero que p es primo y que

$$p = ab.$$

Entonces $|a|$ es un divisor positivo de p. Como p es primo,

$$|a| = 1 \qquad \text{o} \qquad |a| = p.$$

En el primer caso a es una unidad. En el segundo, como $|a||b| = p$, necesariamente $|b| = 1$, de modo que b es una unidad. Por tanto, p es irreducible.

Recíprocamente, supongamos que p es irreducible y sea $d > 0$ un divisor de p. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p = dq.$$

Como $p > 0$ y $d > 0$, resulta $q > 0$. Por irreducibilidad, uno de d o q debe ser una unidad. Al ser positivos, esto significa que uno de ellos es 1. Si $d = 1$, obtenemos el divisor trivial inferior; si $q = 1$, entonces $d = p$. Por tanto, los únicos divisores positivos de p son 1 y p.

Luego p es primo.

Esta equivalencia es propia de la estructura de los enteros que estamos estudiando. Más adelante, cuando aparezcan otros anillos, será importante no suponer sin prueba que "primo" e "irreducible" siguen siendo conceptos equivalentes. Aquí, sin embargo, la equivalencia queda completamente demostrada.

16.4. Todo entero mayor que 1 tiene un divisor primo

Antes de demostrar que todo entero factoriza como producto de primos, necesitamos un resultado más elemental: todo entero mayor que 1 posee **al menos un** divisor primo.

Teorema. Para todo entero $n > 1$, existe un primo p tal que

$$p \mid n.$$

Demostración por inducción fuerte. Definamos la proposición $P(n)$:

el entero $n > 1$ posee un divisor primo.

Base. Para $n = 2$, el propio 2 es primo y $2 \mid 2$.

Paso inductivo fuerte. Supongamos que $P(m)$ es verdadera para todo entero m con

$$2 \leq m < n.$$

Queremos demostrar $P(n)$.

Si n es primo, entonces n es un divisor primo de sí mismo y terminamos.

Si n no es primo, como $n > 1$ debe ser compuesto. Por tanto, existen a, b tales que

$$n = ab, \qquad 1 < a < n, \qquad 1 < b < n.$$

Por la hipótesis inductiva aplicada a a, existe un primo p con

$$p \mid a.$$

Como $a \mid n$, por transitividad de la divisibilidad obtenemos

$$p \mid n.$$

Así n posee un divisor primo.

La inducción fuerte queda completada.

Qué hemos demostrado y qué no. El teorema garantiza sólo la existencia de **un** divisor primo. Todavía no hemos demostrado que podamos continuar descomponiendo hasta obtener una factorización completa, y mucho menos que esa factorización sea única.

Sin embargo, este resultado tendrá dos usos inmediatos:

- permitirá demostrar más adelante el criterio de primalidad hasta $\sqrt{n}$;
- garantizará que cualquier entero $N > 1$ construido en la prueba de infinitud de los primos posee algún divisor primo, incluso si N no es primo.

Esta distinción será crucial.

16.5. El lema de Euclides para primos

Llegamos ahora al resultado que hará posible demostrar la unicidad de la factorización.

En C14 vimos que la inferencia

$$a \mid bc \Longrightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c$$

es falsa para un divisor arbitrario. Por ejemplo,

$$6 \mid 2 \cdot 3,$$

pero

$$6 \nmid 2 \qquad \text{y} \qquad 6 \nmid 3.$$

Los primos, en cambio, sí poseen esa rigidez.

Lema de Euclides. Sea p un número primo. Si

$$p \mid ab,$$

entonces

$$\boxed{p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b.}$$

Demostración desde C15. Si $p \mid a$, la conclusión ya está satisfecha.

Supongamos entonces que

$$p \nmid a.$$

Como p es primo, sus únicos divisores positivos son 1 y p. Todo divisor común positivo de p y a debe dividir a p, así que sólo podría ser 1 o p. Pero p no divide a a por hipótesis. Por tanto,

$$\gcd(p, a) = 1.$$

C15 demostró la cancelación bajo coprimalidad:

$$\gcd(p, a) = 1, \qquad p \mid ab \Longrightarrow p \mid b.$$

Así, si p no divide a a, necesariamente divide a b. En todos los casos,

$$p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Control de dependencia. La prueba acaba de usar:

- la definición de primo;
- el MCD;
- la caracterización de coprimalidad;
- la cancelación coprima derivada de Bézout en C15.

No hemos utilizado factorización prima ni su unicidad. Esto es esencial, porque el lema de Euclides será precisamente la herramienta que usaremos para demostrar la unicidad.

Podemos resumir la nueva propiedad así:

> **Un primo no puede "aparecer" como divisor de un producto sin aparecer ya como divisor de al menos uno de sus factores.**

Esta frase será el mecanismo de comparación entre dos factorizaciones.

Nota pedagógica — La hipótesis que permite pasar del producto al factor. La prueba de Euclides tiene un punto decisivo: si p es primo y $p \nmid a$, entonces $\gcd(p, a) = 1$. Para un divisor compuesto, no dividir a a no excluye compartir con él un divisor no trivial. La cancelación coprima de C15 sigue siendo válida para cualquier divisor no nulo; lo que falla es deducir su hipótesis sólo a partir de la no divisibilidad.

Control resuelto. Tenemos $12 \mid 8 \cdot 3$, pero $12 \nmid 8$ y $12 \nmid 3$. Aquí $\gcd(12, 8) = 4$, no uno. En cambio, si $12 \mid 5b$, podemos concluir $12 \mid b$ aunque doce no sea primo: $1 = 5 \cdot 5 - 12 \cdot 2$, y multiplicar por b convierte la información sobre $5b$ en divisibilidad de b por doce. Por ejemplo, con $b = 12$, el producto es sesenta y la conclusión se verifica.

Son dos preguntas diferentes. Para garantizar la disyunción sobre cualquier producto, la primalidad resulta decisiva. Para cancelar un factor concreto dentro de una divisibilidad, basta la coprimalidad correspondiente. No debe sustituirse $\gcd(d, a) = 1$ por $\gcd(a, b) = 1$: seis divide a $2 \cdot 3$ y dos y tres son coprimos, pero seis no divide a ninguno. La hipótesis siempre debe referirse a los dos números que se pretende cancelar.

16.6. Primos que dividen productos finitos

El lema de Euclides trata un producto de dos factores. Para comparar factorizaciones necesitaremos una versión para un número arbitrario de factores.

Proposición. Sea p primo y sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Si

$$p \mid a_1 a_2 \cdots a_n,$$

entonces existe algún índice j con $1 \le j \le n$ tal que

$$p \mid a_j.$$

Demostración por inducción en n. Para $n = 1$, la conclusión es la propia hipótesis $p \mid a_1$. Para $n = 2$ es exactamente el lema de Euclides.

Supongamos el resultado verdadero para productos de n factores y consideremos

$$p \mid a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}.$$

Agrupamos los primeros n factores:

$$p \mid (a_1 \cdots a_n) a_{n+1}.$$

Por el lema de Euclides,

$$p \mid a_1 \cdots a_n \qquad \text{o} \qquad p \mid a_{n+1}.$$

En el segundo caso terminamos. En el primero, la hipótesis inductiva implica que p divide alguno de $a_1, \dots, a_n$. Por tanto, el resultado vale para $n+1$ factores.

Consecuencia para potencias. Si $m \ge 1$ y

$$p \mid a^m,$$

entonces, escribiendo

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}},$$

la proposición anterior implica

$$\boxed{p \mid a.}$$

Es importante observar la dirección. Si $p \mid a$, entonces trivialmente $p \mid a^m$. La afirmación nueva es el converso bajo la hipótesis de que el divisor p es primo.

Por ejemplo, $4 \mid 2^2$ pero $4 \nmid 2$. Esto muestra nuevamente que no podemos reemplazar “primo” por “entero mayor que 1” en estas propiedades.

16.7. Existencia de la factorización prima

Ya sabemos que todo entero $n > 1$ tiene algún divisor primo. Ahora probaremos una afirmación más fuerte: todo entero $n > 1$ puede escribirse **completamente** como producto de primos.

Teorema de existencia. Para todo entero $n > 1$, existen primos $p_1, \ldots, p_r$ tales que

$$\boxed{n = p_1 p_2 \cdots p_r.}$$

No afirmamos todavía que los p_i sean únicos.

Demostración por inducción fuerte. Sea $P(n)$ la afirmación "n puede escribirse como producto finito de primos".

Base. 2 es primo, de modo que ya es un producto de un solo primo.

Paso inductivo fuerte. Supongamos que todo entero m con

$$2 \leq m < n$$

puede escribirse como producto de primos.

Consideremos n.

Si n es primo, la factorización está terminada:

$$n = n.$$

Si n es compuesto, existen enteros a, b con

$$n = ab, \qquad 1 < a < n, \qquad 1 < b < n.$$

Por hipótesis inductiva, existen primos $p_1, \ldots, p_r$ y $q_1, \ldots, q_s$ tales que

$$a = p_1 \cdots p_r, \qquad b = q_1 \cdots q_s.$$

Multiplicando,

$$n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s,$$

que es una factorización de n en primos.

Por inducción fuerte, todo entero $n > 1$ admite una factorización prima.

Por qué el proceso no puede descender indefinidamente. La inducción fuerte formaliza una intuición de descenso: cada vez que un número compuesto se descompone como $n = ab$ con $a, b > 1$, ambos factores son estrictamente menores que n. No podemos producir una cadena infinita estrictamente decreciente de enteros positivos mayores que 1.

Así, la existencia no depende de "probar divisores hasta que funcione". Es un teorema general.

Todavía queda abierta la pregunta más delicada:

> ¿puede un mismo entero poseer dos factorizaciones en primos realmente diferentes?

16.8. Unicidad de la factorización

Supongamos que un entero $n > 1$ admite dos factorizaciones primas:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r$$

y

$$n = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

donde todos los p_i y q_j son primos.

Queremos demostrar que ambas listas contienen exactamente los mismos factores, contando repeticiones, salvo el orden.

Primer factor. Como

$$p_1 \mid n$$

y

$$n = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

se tiene

$$p_1 \mid q_1 q_2 \cdots q_s.$$

Por la versión finita del lema de Euclides, p_1 divide a alguno de los factores q_j.

Pero q_j es primo. Sus únicos divisores positivos son 1 y q_j. Como $p_1 > 1$, concluimos

$$p_1 = q_j.$$

Reordenando la segunda factorización podemos suponer $q_j = q_1$. Entonces

$$p_1 p_2 \cdots p_r = p_1 q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_1 \neq 0$, cancelamos en la igualdad de enteros y obtenemos

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Repetición del argumento. Aplicamos el mismo razonamiento a p_2. Debe coincidir con alguno de los primos restantes del lado derecho. Reordenamos y cancelamos otra vez.

El proceso continúa. Como las factorizaciones contienen un número finito de factores, no puede continuar indefinidamente.

Si una lista se agotara antes que la otra, terminaríamos con una igualdad de la forma

$$1 = q_k q_{k+1} \cdots q_s,$$

imposible porque cada $q_j > 1$. Por tanto,

$$r = s,$$

y, tras una reordenación,

$$p_i = q_i$$

para todo i.

Hemos demostrado:

Teorema de unicidad. Toda factorización de un entero $n > 1$ como producto de primos es única salvo el orden de los factores.

Dónde se usó cada hipótesis. La prueba depende de tres puntos concretos:

1. **primalidad de** p_1, para aplicar el lema de Euclides al producto;
2. **primalidad de** q_j, para pasar de $p_1 \mid q_j$ a $p_1 = q_j$;
3. **finitud de las listas**, para que la cancelación repetida termine.

Sin el lema de Euclides no dispondríamos del paso que fuerza a un primo de una factorización a aparecer en la otra.

Nota pedagógica — Qué queda después de cada cancelación. Al comparar dos listas de primos, conserva como invariante la igualdad entre los productos restantes. El lema de Euclides localiza un primo igual en la otra lista; reordenar no cambia el producto, y cancelar el factor común no nulo conserva la igualdad. Cada paso retira una entrada de cada lista, incluidas las repeticiones. No estamos cancelando factores distintos sólo porque ambos sean primos.

Control resuelto. Compara $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ con $7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$. Localiza el primer dos, colócalo delante en la segunda lista y cancela; quedan $2 \cdot 3 \cdot 7 = 7 \cdot 3 \cdot 2$. Repite con el segundo dos, luego con tres y siete. Al final queda $1 = 1$: el producto vacío se interpreta como uno. No se ha perdido la multiplicidad del dos.

Si una lista se agotara mientras la otra conserva $h \geq 1$ primos, la igualdad restante sería $1 = q_1 \cdots q_h$. Cada factor es al menos dos, así que el producto es al menos $2^h > 1$. Esta contradicción prueba que las longitudes coinciden; la finitud sólo asegura que podemos llegar a ese punto. El mismo cierre vale si la primera lista se vacía antes que la segunda o a la inversa.

La igualdad $6 \cdot 35 = 10 \cdot 21$ muestra por qué no se aplica este procedimiento a listas de factores compuestos: ningún factor de la primera lista coincide con uno de la segunda. Hay que llegar a primos antes de invocar la comparación uno a uno. La cancelación ordinaria en una igualdad requiere un factor común no nulo, mientras la localización de ese factor utiliza primalidad.

16.9. Teorema fundamental de la aritmética y forma canónica

Podemos reunir los dos resultados anteriores.

Teorema fundamental de la aritmética. Todo entero $n > 1$ puede escribirse como producto de números primos, y esa factorización es única salvo el orden de los factores.

En lugar de repetir factores, agrupamos los iguales. Si los primos distintos que aparecen son

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r,$$

podemos escribir de manera canónica

$$\boxed{n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \qquad \alpha_i \geq 1.}$$

Por ejemplo,

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

La forma canónica contiene más información que una simple lista de divisores: registra exactamente **qué primos aparecen** y **con qué multiplicidad**.

Enteros negativos. Si $n < -1$, factorizamos $|n|$ y separamos la unidad -1:

$$n = -p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

La única ambigüedad de signo queda absorbida por la unidad.

Los casos 1, -1 y 0.

- 1 no tiene factores primos; cuando sea útil puede entenderse como producto vacío.
- -1 es una unidad y tampoco posee factores primos.
- 0 no tiene factorización prima: cualquier primo divide a 0, y no existe una lista finita canónica de primos que desempeñe el papel anterior.

La unicidad de la factorización transforma desde ahora muchas preguntas multiplicativas en preguntas sobre exponentes. Éste será el siguiente paso estructural.

16.10. Divisibilidad como comparación de exponentes

Sean $a, b > 0$. Para compararlos mediante sus factorizaciones, escribimos ambos usando una misma colección de primos. Permitimos exponente 0 cuando un primo no aparece.

Así podemos representar

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p},$$

donde sólo finitos exponentes son distintos de 0.

No estamos introduciendo una nueva teoría ni una notación de valuaciones; simplemente estamos organizando las factorizaciones canónicas.

Teorema. Para $a, b > 0$,

$$\boxed{a \mid b \iff \alpha_p \leq \beta_p \quad \text{para todo primo } p.}$$

Demostración. Supongamos primero que

$$\alpha_p \leq \beta_p$$

para todo primo p. Entonces cada diferencia $\beta_p - \alpha_p$ es un entero no negativo. Definimos

$$c = \prod_p p^{\beta_p - \alpha_p}.$$

Por las leyes de los exponentes,

$$ac = \prod_p p^{\alpha_p} \prod_p p^{\beta_p - \alpha_p} = \prod_p p^{\beta_p} = b.$$

Por tanto, $a \mid b$.

Recíprocamente, supongamos que $a \mid b$. Entonces existe $c > 0$ tal que

$$b = ac.$$

Factorizamos también c:

$$c = \prod_p p^{\gamma_p}.$$

Así,

$$b = ac = \prod_p p^{\alpha_p + \gamma_p}.$$

Por unicidad de la factorización,

$$\beta_p = \alpha_p + \gamma_p$$

para todo primo p. Como $\gamma_p \geq 0$,

$$\alpha_p \leq \beta_p.$$

Ejemplo. Consideremos

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

y

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Como el exponente de 2 en 72 es 3 y en 540 es 2, no puede ocurrir

$$72 \mid 540.$$

No fue necesario efectuar una división: la comparación de exponentes ya contiene la respuesta.

16.11. MCD, MCM y coprimalidad desde la factorización

La aritmética de exponentes permite releer conceptos de C15 desde una perspectiva nueva. Sean

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p},$$

con $a, b > 0$.

MCD: tomar mínimos. Un divisor común d de a y b debe tener, para cada primo p, un exponente que no supere ni α_p ni β_p. El mayor exponente posible compatible con ambas restricciones es

$$\min(\alpha_p, \beta_p).$$

Por tanto,

$$\boxed{\gcd(a, b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}.}$$

Esta fórmula satisface exactamente la caracterización universal de C15: el número construido divide a a y a b, y cualquier divisor común tiene, primo por primo, exponentes no mayores que esos mínimos; por ello divide al número construido.

MCM: tomar máximos. Definimos el **mínimo común múltiplo** de a y b, denotado

$$\operatorname{lcm}(a,b),$$

como el menor entero positivo que es múltiplo de ambos.

Para que un número sea múltiplo de a y de b, el exponente de cada primo debe ser al menos α_p y al menos β_p. El menor exponente que satisface ambas condiciones es

$$\max(\alpha_p, \beta_p).$$

Así,

$$\boxed{\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.}$$

El número construido es múltiplo de a y de b. Además, si $m > 0$ es cualquier múltiplo común, sus exponentes primos deben ser al menos α_p y al menos β_p, y por tanto al menos $\max(\alpha_p, \beta_p)$. De aquí que $\operatorname{lcm}(a,b) \mid m$; como ambos son positivos, también $\operatorname{lcm}(a,b) \le m$. Esto justifica realmente el calificativo "mínimo".

Relación entre MCD y MCM. Para cualesquiera enteros no negativos r, s,

$$\min(r,s) + \max(r,s) = r + s.$$

Aplicando esta identidad primo por primo,

$$\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\alpha_p+\beta_p} = ab.$$

Por tanto,

$$\boxed{\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) = ab}$$

para $a, b > 0$.

Coprimalidad. También obtenemos:

$$\boxed{\gcd(a,b) = 1 \iff a \text{ y } b \text{ no comparten ningún factor primo.}}$$

En efecto, el MCD es 1 exactamente cuando

$$\min(\alpha_p, \beta_p) = 0$$

para todo primo p.

Esta descripción no reemplaza al algoritmo de Euclides. Para números grandes, factorizar puede ser mucho más difícil que calcular un MCD mediante Euclides. Lo que ganamos aquí no es necesariamente eficiencia computacional, sino una descripción estructural distinta.

16.12. Cómo reconocer un primo: la barrera $\sqrt{n}$

La definición de primo parece exigir revisar todos los divisores entre 2 y $n-1$. Podemos reducir drásticamente esa búsqueda.

Teorema. Si $n > 1$ es compuesto, entonces posee un divisor primo p tal que

$$\boxed{p \le \sqrt{n}.}$$

Demostración. Como n es compuesto, existen enteros a, b con

$$n = ab, \qquad 1 < a \leq b < n.$$

Podemos suponer $a \leq b$ intercambiando los factores si es necesario. Entonces

$$a^2 \leq ab = n,$$

de donde

$$a \leq \sqrt{n}.$$

Por el teorema de la sección 16.4, el entero $a > 1$ posee un divisor primo p. Por tanto,

$$p \leq a \leq \sqrt{n},$$

y, como $p \mid a$ y $a \mid n$,

$$p \mid n.$$

Criterio práctico. Para demostrar que un entero $n > 1$ es primo basta comprobar que ningún primo

$$p \leq \sqrt{n}$$

lo divide.

Por ejemplo, para decidir si 97 es primo observamos que

$$\sqrt{97} < 10.$$

Sólo necesitamos probar divisibilidad por los primos menores que 10:

$$2, 3, 5, 7.$$

Ninguno divide a 97, de modo que 97 es primo.

El criterio no afirma que debamos factorizar n completamente. Basta descartar divisores primos hasta la raíz cuadrada.

16.13. Existen infinitos números primos

Los primos no forman una lista finita. La demostración clásica de Euclides es un modelo notable de argumento por contradicción y construcción.

Teorema. Existen infinitos números primos.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que sólo existen finitos primos. Los enumeramos:

$$p_1, p_2, \ldots, p_k.$$

Construimos el entero

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1.$$

Como $N > 1$, la sección 16.4 garantiza que N posee algún divisor primo q.

Bajo nuestra suposición, q debe ser uno de los primos de la lista, digamos

$$q = p_j.$$

Entonces q divide el producto

$$p_1 p_2 \cdots p_k.$$

También divide a N. Por cierre de la divisibilidad bajo diferencias, tendría que dividir

$$N - p_1 p_2 \cdots p_k = 1.$$

Pero ningún primo divide a 1. Contradicción.

Por tanto, la lista de primos no puede ser finita.

El error que debemos evitar. La prueba **no** demuestra que

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$$

sea primo.

Puede ser primo o compuesto. Lo único necesario es que $N > 1$ tenga **algún divisor primo** q, y que ese divisor no pueda pertenecer a la lista inicial.

Por ejemplo, si tomamos algunos primos y construimos un número del tipo producto más uno, el resultado puede descomponerse. La fuerza del argumento no depende de la primalidad de N, sino de la existencia de un divisor primo nuevo.

Esta precisión lógica distingue la demostración correcta de una versión frecuente pero injustificada del argumento.

16.14. Potencias perfectas y consecuencias de la unicidad

La factorización única permite reconocer potencias perfectas mirando únicamente los exponentes.

Sea

$$n = \prod_p p^{\alpha_p} > 0.$$

Cuadrados perfectos. Si $n = m^2$ y

$$m = \prod_p p^{\beta_p},$$

entonces

$$n = m^2 = \prod_p p^{2\beta_p}.$$

Por unicidad,

$$\alpha_p = 2\beta_p$$

para todo primo p. Por tanto, todos los exponentes de n son pares.

Recíprocamente, si todos los exponentes α_p son pares, escribimos

$$\alpha_p = 2\beta_p$$

y obtenemos

$$n = \prod_p p^{2\beta_p} = \left(\prod_p p^{\beta_p}\right)^2.$$

Así,

$$\boxed{n \text{ es cuadrado perfecto} \iff \alpha_p \text{ es par para todo } p.}$$

Cubos y k-ésimas potencias. El mismo argumento produce

$$\boxed{n \text{ es cubo perfecto} \iff 3 \mid \alpha_p \text{ para todo } p.}$$

Más generalmente, para $k \geq 2$,

$$\boxed{n \text{ es una } k\text{-ésima potencia perfecta} \iff k \mid \alpha_p \text{ para todo primo } p.}$$

Un producto coprimo que es cuadrado. Sean $a, b > 0$. Supongamos que

$$\gcd(a, b) = 1$$

y que ab es un cuadrado perfecto.

Como a y b no comparten factores primos, los exponentes de cada primo en ab proceden enteramente de uno de los dos factores. Si todos los exponentes de ab son pares, entonces los exponentes que aparecen en a son pares y los que aparecen en b también son pares. Por tanto, a y b son cuadrados perfectos.

La coprimalidad es esencial. Por ejemplo,

$$2 \cdot 8 = 16$$

es un cuadrado perfecto, pero ni 2 ni 8 es cuadrado.

Este tipo de argumento muestra la potencia de la unicidad: una igualdad multiplicativa se convierte en una condición componente a componente sobre exponentes.

Nota pedagógica — Un certificado de potencia necesita todas las componentes. Para $N > 0$ y $k \geq 2$, comprobar que cada exponente primo de N es múltiplo de k permite construir una raíz entera positiva: se dividen los exponentes por k y se multiplican las potencias resultantes. El converso utiliza unicidad para identificar esos exponentes con los de una raíz elevada a k. La suma de los exponentes o el tamaño del número no sustituyen el control primo por primo.

Control resuelto. Para $N = 2^6 \cdot 3^9$, ambos exponentes son múltiplos de tres y $N = (2^2 \cdot 3^3)^3 = 108^3$. No es cuadrado, porque nueve es impar; seis par no compensa esa falla. Tampoco es sexta potencia, porque nueve no es múltiplo de seis. Para $N = 1$, todos los exponentes son cero y $1 = 1^k$ para cualquier $k \geq 2$.

La condición $N > 0$ fija el dominio del criterio expuesto. Para un entero negativo se deben controlar por separado el signo y los exponentes de su valor absoluto: $-64 = (-4)^3$, pero no es cuadrado de un entero, aunque 64 tenga exponente primo par. Cero tampoco tiene la factorización prima utilizada aquí, aunque $0 = 0^k$.

Al separar un producto coprimo que es cuadrado, también se exige que sus factores sean positivos. La coprimalidad evita que un primo reparta exponentes entre ellos; no controla sus signos. El ejemplo $(-1)(-1) = 1$ tiene factores coprimos y producto cuadrado, pero ninguno de esos factores es cuadrado entero. La comprobación de dominio precede a la comparación de exponentes.

16.15. Diagnóstico: qué depende de ser primo y qué depende de factorización única

A esta altura conviene separar propiedades que pueden parecer similares pero tienen fundamentos distintos.

Afirmación 1.

$$p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Es verdadera cuando p es primo. Su prueba depende de Bézout y coprimalidad, no de la factorización única.

Si eliminamos la primalidad, falla. Ya vimos:

$$6 \mid 2 \cdot 3,$$

pero 6 no divide a ninguno de los factores.

Afirmación 2.

$$p \mid a^m \Longrightarrow p \mid a.$$

También depende de que p sea primo; se obtiene aplicando repetidamente el lema de Euclides.

Afirmación 3. "Si $a \mid b$, entonces cada exponente primo de a es menor o igual que el correspondiente exponente primo de b."

Esta afirmación depende de la **unicidad de la factorización**. Antes de demostrar el teorema fundamental no teníamos derecho a comparar exponentes de esa manera.

Afirmación 4. Para $a, b > 0$, consideramos la afirmación siguiente.

"Si ab es cuadrado, entonces a y b son cuadrados."

Es falsa sin hipótesis adicionales:

$$2 \cdot 8 = 16.$$

Se vuelve verdadera si añadimos

$$\gcd(a, b) = 1.$$

La razón no es una regla aislada, sino la ausencia de primos compartidos y la paridad de los exponentes en la factorización única.

Afirmación 5. "Si $p_1, \ldots, p_k$ son primos, entonces $p_1 \cdots p_k + 1$ es primo."

Es falsa en general. En la prueba de infinitud sólo necesitamos que el número construido tenga un divisor primo que no esté en la lista.

Protocolo de diagnóstico. Ante una afirmación multiplicativa, conviene preguntar:

```
¿EL DIVISOR ES PRIMO?
        ↓
¿SE QUIERE USAR EL LEMA DE EUCLIDES?
        ↓
¿LA AFIRMACIÓN HABLA DE EXPONENTES DE FACTORES PRIMOS?
        ↓
ENTONCES DEBE HABERSE ESTABLECIDO UNICIDAD
        ↓
¿APARECE UN PRODUCTO DE FACTORES COPRIMOS?
        ↓
SEPARAR LOS PRIMOS QUE PUEDEN APARECER EN CADA FACTOR
        ↓
```

```
¿SE AFIRMA QUE PRODUCTO + 1 ES PRIMO?
        ↓
NO: SÓLO SE GARANTIZA LA EXISTENCIA DE UN DIVISOR PRIMO
```

La disciplina principal consiste en identificar **qué teorema autoriza cada paso**.

16.16. Cierre — protocolo de factorización y puente hacia congruencias

El capítulo comenzó preguntando cuáles son los bloques multiplicativos elementales de los enteros. La respuesta no es simplemente "los primos", sino una cadena de resultados que explica por qué los primos cumplen ese papel.

Primero distinguimos unidades, primos, compuestos e irreducibles. Después probamos que todo entero mayor que 1 tiene un divisor primo. A partir de Bézout y la cancelación coprima de C15 demostramos el lema de Euclides:

$$p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Luego separamos las dos mitades del teorema fundamental:

existencia de factorización y unicidad de factorización.

La cadena completa es:

```
PRIMOS Y COMPUESTOS
        ↓
UNIDADES E IRREDUCIBLES
        ↓
DIVISOR PRIMO DE TODO n>1
        ↓
BÉZOUT + COPRIMALIDAD
        ↓
LEMA DE EUCLIDES
        ↓
PRODUCTOS FINITOS
        ↓
UNICIDAD DE FACTORIZACIÓN

EXISTENCIA DE FACTORIZACIÓN: INDUCCIÓN FUERTE, EN UNA RAMA INDEPENDIENTE
EXISTENCIA + UNICIDAD
        ↓
TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA
        ↓
EXPONENTES PRIMOS
        ↓
DIVISIBILIDAD / MCD / MCM
        ↓
PRIMALIDAD HASTA sqrt(n)
        ↓
INFINITUD DE LOS PRIMOS
        ↓
POTENCIAS PERFECTAS
```

Ante un nuevo problema de esta clase, podemos aplicar el siguiente protocolo:

```
1. IDENTIFICAR SI EL ENTERO ES PRIMO, COMPUESTO O UNA UNIDAD.
2. SI SE TRATA DE UN PRODUCTO DIVISIBLE POR UN PRIMO, CONSIDERAR EL LEMA DE
↪  EUCLIDES.
3. SI APARECEN VARIOS FACTORES, EXTENDER EL LEMA POR INDUCCIÓN.
```

```
4. SI SE NECESITA FACTORIZAR TEÓRICAMENTE, SEPARAR EXISTENCIA DE UNICIDAD.
5. PARA COMPARAR DIVISIBILIDAD DESPUÉS DEL TFA, COMPARAR EXPONENTES PRIMO A PRIMO.
6. PARA MCD Y MCM, TOMAR RESPECTIVAMENTE MÍNIMOS Y MÁXIMOS DE EXPONENTES.
7. PARA PROBAR PRIMALIDAD, BASTA DESCARTAR DIVISORES PRIMOS HASTA sqrt(n).
8. EN LA PRUEBA DE INFINITUD, NO SUPONER QUE EL PRODUCTO + 1 ES PRIMO.
9. PARA POTENCIAS PERFECTAS, TRADUCIR LA CONDICIÓN A DIVISIBILIDAD DE EXPONENTES.
10. AUDITAR SI CADA PASO DEPENDE DE PRIMALIDAD, COPRIMALIDAD O UNICIDAD.
```

Hemos aprendido a describir un entero mediante sus factores primos. Pero todavía hay otra manera de organizar la aritmética: en lugar de preguntar **qué factores contiene un entero**, podemos preguntar cuándo dos enteros deben considerarse equivalentes porque dejan la misma diferencia respecto de un múltiplo fijo.

Esa pregunta conducirá al capítulo 17, donde estudiaremos **congruencias y aritmética modular**. Allí la divisibilidad reaparecerá con una forma nueva: no como descomposición multiplicativa, sino como criterio para comparar enteros dentro de clases de equivalencia.

Ejercicios

Los ejercicios están organizados para pasar de la identificación elemental de primos y compuestos a la comprensión estructural del teorema fundamental de la aritmética y sus consecuencias. En todo el banco se mantiene la convención de que "primo" significa primo positivo mayor que 1. Los ejercicios no requieren congruencias, inversos modulares ni resultados de C17.

A. Primos, compuestos, unidades e irreducibles

1. **Nivel A.** Clasifica cada entero de la lista como **unidad**, **primo**, **compuesto** o **ninguna de esas categorías** según las convenciones de C16:
$$-17, -1, 0, 1, 2, 15, 37, 49.$$
Justifica los casos -17, 0 y 1 sin limitarte a citar la lista de definiciones.
2. **Nivel A.** Determina cuáles de los siguientes enteros positivos son primos y cuáles compuestos. Para cada compuesto exhibe una factorización no trivial; para cada primo explica por qué no basta con "no haber encontrado" un divisor:
$$29, 35, 51, 67, 77, 91.$$
3. **Nivel B.** Demuestra que las únicas unidades de $\mathbb{Z}$ son 1 y -1. Parte de la ecuación
$$uv = 1$$
con $u, v \in \mathbb{Z}$ y usa valores absolutos.
4. **Nivel B.** Explica por qué 1 no debe ser primo si queremos que la factorización en primos tenga una formulación de unicidad razonable. Construye explícitamente una familia infinita de "factorizaciones" de 30 que aparecería si 1 fuese admitido como primo.
5. **Nivel C.** Sea $p > 1$ primo. Demuestra que $-p$ es irreducible en $\mathbb{Z}$. Explica por qué, bajo la convención del capítulo, esto no obliga a llamar "primo" a $-p$.
6. **Nivel C.** Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Demuestra las verdaderas y da un contraejemplo para las falsas.

a) Todo irreducible de $\mathbb{Z}$ es positivo.
b) Si a es irreducible, entonces $-a$ es irreducible.
c) Todo primo positivo es irreducible en $\mathbb{Z}$.
d) Toda unidad es irreducible.

7. **Nivel C.** Sea $n > 1$. Demuestra que son equivalentes:

- n es compuesto;
- existen enteros positivos a, b tales que $n = ab$ y $1 < a, b < n$;
- n posee un divisor positivo d con $1 < d < n$.

8. **Nivel D.** Un estudiante afirma: "un entero a es irreducible si sólo puede escribirse como $a = 1 \cdot a$". Diagnostica qué falta en esa frase cuando se trabaja en $\mathbb{Z}$. Formula una caracterización correcta que contemple signos y unidades, y úsala para analizar 7 y -7.

B. Divisores primos y descenso

9. **Nivel A.** Para cada entero, encuentra al menos un divisor primo y explica cómo verificas que el divisor elegido es efectivamente primo:
$$84, 143, 221, 391.$$
10. **Nivel B.** Demuestra directamente que si $n > 1$ es compuesto, entonces posee un divisor d con
$$1 < d < n.$$
Explica por qué este hecho es el descenso que hace posible una prueba por inducción fuerte.
11. **Nivel C.** Prueba por inducción fuerte que todo entero $n > 1$ tiene un divisor primo. Tu demostración debe separar los casos "n primo" y "n compuesto" y señalar exactamente dónde se aplica la hipótesis inductiva.
12. **Nivel C.** Da una segunda prueba del ejercicio anterior mediante **mínimo contraejemplo**: supone que existe algún entero mayor que 1 sin divisor primo, elige el menor y deriva una contradicción.
13. **Nivel C.** Sea $n > 1$ y sea $d > 1$ el menor divisor positivo de n mayor que 1. Demuestra que d es primo. No uses todavía factorización única.
14. **Nivel C.** Supón que $n = ab$ con $a, b > 1$. Demuestra que cualquier divisor primo de a es también divisor primo de n. Usa el resultado para explicar por qué factorizar parcialmente un entero compuesto siempre permite encontrar algún primo que lo divide.
15. **Nivel D.** Considera el siguiente argumento: "si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$ con $1 < a, b < n$; como $a < n$, podemos repetir indefinidamente la descomposición y eventualmente aparecerá un primo". Explica por qué "repetir indefinidamente" no es una justificación. Reescribe el argumento como una prueba válida usando inducción fuerte o buen orden.
16. **Nivel D.** Sea S un conjunto no vacío de enteros mayores que 1 cerrado hacia divisores no triviales en el siguiente sentido: si $n \in S$ es compuesto, existe un divisor $d \in S$ con $1 < d < n$. Demuestra que S contiene un primo. Identifica el principio lógico utilizado.

C. Lema de Euclides

17. **Nivel B.** Sea p primo y $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que exactamente una de las siguientes situaciones puede ocurrir:
$$p \mid a$$
o
$$\gcd(p, a) = 1.$$
Justifica el resultado usando sólo la definición de primo y el MCD de C15.
18. **Nivel C.** Demuestra el lema de Euclides a partir de la cancelación coprima de C15:
$$p \text{ primo}, \qquad p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Tu prueba no puede usar factorización prima ni el teorema fundamental de la aritmética.

19. **Nivel C.** Da un contraejemplo a cada generalización falsa:

a) si $d > 1$ y $d \mid ab$, entonces $d \mid a$ o $d \mid b$;
b) si d es compuesto y $d \mid a^2$, entonces $d \mid a$.

Explica qué propiedad especial de los primos falta.

20. **Nivel C.** Sea p primo. Si $p \mid a$ y $p \mid (a+b)$, demuestra que $p \mid b$. Después explica por qué este ejercicio usa sólo propiedades básicas de divisibilidad y no necesita el lema de Euclides.
21. **Nivel C.** Sea p primo y supón que
$$p \mid ab, \qquad p \nmid a.$$
Demuestra que $p \mid b$ escribiendo explícitamente una identidad de Bézout para p y a y multiplicándola por b.
22. **Nivel D.** Sea p primo y sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demuestra que
$$p \mid abc, \qquad p \nmid a, \qquad p \nmid b \Longrightarrow p \mid c.$$
Haz explícito en qué orden aplicas el lema de Euclides.
23. **Nivel D.** Supón que p y q son primos distintos. Demuestra que
$$p \nmid q$$
y que
$$\gcd(p, q) = 1.$$
Luego, si $pq \mid ab$ y $p \nmid b$, demuestra que $p \mid a$. ¿Puede deducirse necesariamente $q \mid a$? Justifica tu respuesta sin usar factorización única.
24. **Nivel D.** Audita la prueba falsa: "si $6 \mid ab$, entonces como $6 = 2 \cdot 3$ y $2, 3$ son primos, el lema de Euclides implica $6 \mid a$ o $6 \mid b$". Localiza exactamente el salto inválido y da un ejemplo que lo refute.

D. Productos finitos y potencias

25. **Nivel C.** Demuestra por inducción que si p es primo y
$$p \mid a_1 a_2 \cdots a_n,$$
entonces p divide al menos uno de los factores a_j.
26. **Nivel C.** Sea p primo y $m \geq 1$. Demuestra
$$p \mid a^m \Longrightarrow p \mid a.$$
Indica con precisión qué resultado previo se aplica al producto de m copias de a.
27. **Nivel C.** Sean p primo y $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestra que si
$$p \mid a^3 b^2,$$
entonces $p \mid a$ o $p \mid b$. Después explica por qué la conclusión no dice cuál de los dos factores debe ser divisible por p.
28. **Nivel D.** Sean $p_1, \ldots, p_r$ primos y sea $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que si
$$p_1 p_2 \cdots p_r \mid a$$
y los p_i son distintos, entonces cada $p_i \mid a$. ¿Necesitas el lema de Euclides para esta dirección? Justifica.
29. **Nivel D.** Sean p y q primos distintos. Demuestra que si
$$p^2 q^3 \mid a^5,$$
entonces $p \mid a$ y $q \mid a$. No uses todavía comparación sistemática de exponentes de factorización prima.

30. **Nivel D.** Sea p primo. Demuestra que si
$$p \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2,$$
entonces p divide alguno de los a_j. Tu argumento debe combinar la versión finita del lema de Euclides con el caso de potencias.
31. **Nivel D.** Decide si es verdadero o falso:
$$p \mid a^m b^n \Longrightarrow p \mid ab$$
para p primo y $m, n \geq 1$. Si es verdadero, demuéstralo sin usar el teorema fundamental de la aritmética.
32. **Nivel D.** Sea p primo y supón que $p \nmid a_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Demuestra que
$$p \nmid a_1 a_2 \cdots a_n.$$
Formula la prueba como contraposición de un teorema ya establecido.

E. Existencia y unicidad de factorización

33. **Nivel C.** Factoriza completamente en primos:
$$756, \qquad 1386, \qquad 2310.$$
Escribe cada resultado en forma canónica con primos crecientes y exponentes positivos.
34. **Nivel C.** Construye dos árboles de factorización distintos para 360 que comiencen con descomposiciones no triviales diferentes. Lleva ambos hasta primos y compara los factores finales. Explica qué parte del teorema fundamental interpreta esta coincidencia.
35. **Nivel D.** Demuestra por inducción fuerte que todo entero $n > 1$ puede escribirse como producto finito de primos. No utilices unicidad en ningún paso.
36. **Nivel D.** Da una prueba alternativa de la existencia de factorización mediante mínimo contraejemplo. Debes justificar por qué un supuesto contraejemplo mínimo no puede ser primo ni compuesto.
37. **Nivel E.** Supón
$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$$
con todos los factores primos. Demuestra que p_1 coincide con alguno de los q_j. Señala exactamente dónde se usa el lema de Euclides y dónde se usa la primalidad de q_j.
38. **Nivel E.** Completa la prueba de unicidad de la factorización: a partir del ejercicio anterior, reordena, cancela y repite el argumento. Demuestra además que una lista de factores no puede agotarse antes que la otra.
39. **Nivel D.** Explica por qué la afirmación "todo entero $n > 1$ tiene un divisor primo" no basta por sí sola para establecer el teorema fundamental de la aritmética. Distingue claramente las tres afirmaciones: existencia de un divisor primo, existencia de una factorización completa y unicidad.
40. **Nivel E.** Audita la siguiente prueba circular: "la factorización es única porque si un primo divide un producto debe dividir un factor; esto último es evidente porque en la factorización prima del producto el primo tiene que aparecer en uno de los factores". Explica la circularidad y reconstruye el orden correcto de dependencias desde C15.

F. Forma canónica y divisibilidad por exponentes

41. **Nivel B.** Escribe en forma canónica las factorizaciones de
$$900, \qquad 13860, \qquad -1260.$$
Separa explícitamente la unidad -1 en el caso negativo.

42. **Nivel C.** Sean
$$a = 2^3 3^2 5, \qquad b = 2^5 3^2 5^4 7.$$
Decide si $a \mid b$, $b \mid a$, $2^4 3^2 5 \mid b$ y $2^5 3^3 \mid b$. Justifica cada respuesta comparando exponentes.

43. **Nivel D.** Demuestra el criterio de divisibilidad por exponentes. Si
$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p},$$
demuestra que
$$a \mid b \iff \alpha_p \le \beta_p$$
para todo primo p. Identifica dónde se usa unicidad de factorización en la implicación no trivial.

44. **Nivel C.** Encuentra todos los divisores positivos de
$$72 = 2^3 3^2$$
usando únicamente las posibilidades para los exponentes de 2 y 3. Después cuenta cuántos divisores positivos tiene 72.

45. **Nivel D.** Sea
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$
Demuestra que todo divisor positivo d de n tiene la forma
$$d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}, \qquad 0 \le \beta_i \le \alpha_i.$$
Demuestra también el converso.

46. **Nivel D.** Si
$$a \mid b \qquad \text{y} \qquad b \mid a$$
para $a, b > 0$, demuestra nuevamente que $a = b$, pero esta vez usando las factorizaciones primas y la comparación de exponentes. Compara esta prueba con la de C14 basada en tamaño.

47. **Nivel D.** Sea $a > 0$. Demuestra que
$$a \mid a^m$$
para todo $m \ge 1$ mediante exponentes primos. Luego determina para qué $m \ge 1$ se cumple
$$a^m \mid a$$
cuando $a > 1$.

48. **Nivel E.** Sean $a, b, c > 0$ y supón
$$a \mid bc, \qquad \gcd(a, b) = 1.$$
Reprueba que $a \mid c$ usando factorización prima y exponentes. Después explica en qué sentido esta demostración es posterior y estructuralmente distinta de la prueba de C15 mediante Bézout.

G. MCD, MCM y factorización

49. **Nivel B.** Usando factorización prima, calcula el MCD y el MCM de cada par:
$$(360, 840), \qquad (756, 630), \qquad (1001, 1430).$$

50. **Nivel C.** Sean
$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$
Demuestra que
$$\gcd(a, b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Tu prueba debe justificar que el entero de la derecha es divisor común y que todo divisor común lo divide.

51. **Nivel C.** Define el MCM positivo mediante exponentes máximos y demuestra que
$$\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.$$
Verifica explícitamente la propiedad universal correspondiente a "múltiplo común mínimo" en términos de divisibilidad.

52. **Nivel D.** Demuestra para $a, b > 0$ que
$$\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) = ab$$
usando la identidad
$$\min(r,s) + \max(r,s) = r + s$$
para cada exponente primo.

53. **Nivel C.** Demuestra que
$$\gcd(a,b) = 1$$
si y sólo si no existe ningún primo que divida simultáneamente a a y a b, para a, $b > 0$.

54. **Nivel D.** Supón $a, b > 0$ y $\gcd(a,b) = 1$. Demuestra
$$\operatorname{lcm}(a,b) = ab.$$
Da después un ejemplo con $\gcd(a,b) > 1$ donde el producto ab no sea el MCM.

55. **Nivel D.** Si $a \mid b$, demuestra que
$$\gcd(a,b) = a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{lcm}(a,b) = b$$
para $a, b > 0$, usando exponentes. Explica cómo esta afirmación refleja el orden de divisibilidad.

56. **Nivel E.** Sean $a, b > 0$. Demuestra que todo primo que divide a ab divide a $\operatorname{lcm}(a,b)$, y que todo primo que divide al MCD divide a ambos. Reformula ambas afirmaciones en términos de exponentes y explica por qué una no es simplemente el converso de la otra.

H. Primalidad e infinitud de los primos

57. **Nivel C.** Demuestra que si $n > 1$ es compuesto, entonces existen enteros a, b con
$$n = ab, \qquad 1 < a \le b < n,$$
y deduce que $a \le \sqrt{n}$.

58. **Nivel C.** Demuestra que todo entero compuesto $n > 1$ posee un divisor primo p tal que
$$p \le \sqrt{n}.$$
Separa los dos pasos: encontrar un factor no trivial pequeño y extraer de él un divisor primo.

59. **Nivel C.** Decide si 97, 127 y 221 son primos usando únicamente el criterio de división por primos no mayores que la raíz cuadrada correspondiente. Registra qué divisores primos es necesario comprobar en cada caso.

60. **Nivel D.** Un estudiante intenta demostrar que 173 es primo probando que no es divisible por $2, 3, 5$ ni 7. Decide si el control es suficiente. Si no lo es, indica exactamente qué primos faltan comprobar y completa el diagnóstico.

61. **Nivel D.** Reconstruye la prueba de Euclides de que existen infinitos primos. Supón finita la lista $p_1, \ldots, p_k$, construye
$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1,$$
y demuestra que un divisor primo de N no puede pertenecer a la lista.

62. **Nivel D.** Explica por qué en la prueba del ejercicio anterior **no** es necesario que N sea primo. Da un ejemplo de una lista finita de primos para la cual el producto más 1 sea compuesto, y muestra que el argumento de Euclides sigue funcionando con un divisor primo nuevo.
63. **Nivel D.** Sea $p_1, \dots, p_k$ cualquier colección finita de primos distintos y sea
$$N = p_1 p_2 \cdots p_k - 1 > 1.$$
¿Puede usarse siempre N de la misma manera que el producto más 1 para producir un primo fuera de la lista? Analiza cuidadosamente y da un contraejemplo si la afirmación falla.
64. **Nivel E.** Sea $n > 1$. Supón que ningún primo $p \le \sqrt{n}$ divide a n. Demuestra directamente que n es primo por contraposición del criterio de divisor primo pequeño. Explica por qué no hace falta probar divisibilidad por números compuestos.

I. Potencias perfectas y diagnóstico

65. **Nivel C.** Demuestra que un entero positivo
$$n = \prod_p p^{\alpha_p}$$
es un cuadrado perfecto si y sólo si todos los exponentes α_p son pares.
66. **Nivel C.** Demuestra que $n > 0$ es un cubo perfecto si y sólo si todos los exponentes de su factorización prima son múltiplos de 3.
67. **Nivel D.** Generaliza los dos ejercicios anteriores: para $k \ge 2$, demuestra que $n > 0$ es una k-ésima potencia perfecta si y sólo si todos sus exponentes primos son múltiplos de k.
68. **Nivel C.** Decide cuáles de los siguientes números son cuadrados, cubos o sextas potencias perfectas, justificando mediante exponentes:
$$2^6 3^{12}, \qquad 2^4 3^6 5^2, \qquad 2^{12} 3^{18} 5^6.$$
69. **Nivel D.** Sean $a, b > 0$ con $\gcd(a, b) = 1$. Si ab es un cubo perfecto, demuestra que a y b son cubos perfectos. Indica dónde se usa la coprimalidad.
70. **Nivel D.** Sean $a, b > 0$. Da un contraejemplo a la afirmación "si ab es cuadrado, entonces a y b son cuadrados". Luego formula una hipótesis adicional suficiente y explica, mediante exponentes primos, por qué repara la afirmación.
71. **Nivel E.** En b) y c), toma $a, b > 0$; en d), toma $m \ge 1$. Audita las siguientes inferencias y clasifícalas según la herramienta que las justifica: definición de primo, lema de Euclides, unicidad de factorización o ninguna.

a) $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ o $p \mid b$ para p primo.
b) $a \mid b \Rightarrow$ cada exponente primo de a no supera al correspondiente de b.
c) ab cuadrado $\Rightarrow a, b$ cuadrados.
d) $p \mid a^m \Rightarrow p \mid a$ para p primo.

Corrige las afirmaciones falsas.

72. **Nivel E.** Un estudiante dice: "como $a^2 = b^3$, basta extraer raíz cuadrada y raíz cúbica para concluir que existe c con $a = c^3$ y $b = c^2$". Explica por qué esa frase no constituye una prueba aritmética en enteros. Formula un plan de demostración válido mediante factorización única y comparación de exponentes, sin completarlo todavía.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel E.** Demuestra rigurosamente que para $p > 1$ son equivalentes:
$$p \text{ es primo} \qquad \text{e} \qquad p \text{ es irreducible en } \mathbb{Z}.$$

Tu prueba debe tratar factorizaciones con signos y explicar el papel de las unidades ± 1.

74. **Nivel F.** Demuestra por inducción fuerte que todo entero $n > 1$ admite una factorización prima. Debes separar los casos primo y compuesto, justificar que los factores del caso compuesto son estrictamente menores que n y explicar por qué esta prueba establece **existencia**, pero no todavía **unicidad**.

75. **Nivel F.** Demuestra desde Bézout/cancelación coprima de C15 que, si p es primo,
$$p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b.$$
La prueba no puede usar factorización única. Después explica por qué el resultado falla para divisores compuestos arbitrarios y exhibe un contraejemplo.

76. **Nivel G.** Supón que
$$n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$$
son dos factorizaciones de $n > 1$ en primos. Usando exclusivamente el lema de Euclides, primalidad y cancelación en $\mathbb{Z}$, demuestra que, tras reordenar los factores, ambas listas coinciden. Debes justificar por qué ninguna lista puede agotarse antes que la otra.

77. **Nivel F.** Sean
$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$
Demuestra:
$$a \mid b \iff \alpha_p \le \beta_p \quad \text{para todo } p,$$
$$\gcd(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)},$$
$$\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.$$
Deduce
$$\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) = ab.$$
Señala en qué pasos se usa unicidad de factorización.

78. **Nivel F.** Reconstruye la demostración de Euclides de que existen infinitos números primos. En tu prueba, parte de una supuesta lista completa $p_1, \ldots, p_k$ y considera
$$N = p_1 \cdots p_k + 1.$$
Demuestra sólo lo necesario: que N posee un divisor primo que no está en la lista. Después diagnostica con precisión por qué la afirmación "N es primo" es innecesaria y, en general, falsa.

79. **Nivel G.** Sean $a, b > 0$ con
$$\gcd(a,b) = 1$$
y supón que ab es un cuadrado perfecto. Demuestra que a y b son cuadrados perfectos. Tu prueba debe usar factorización única y explicar cómo la coprimalidad impide que un mismo primo reparta exponentes impares entre ambos factores. Finalmente, da un contraejemplo cuando se elimina la hipótesis de coprimalidad.

80. **Nivel G.** Sean $a, b, m, n > 0$, con
$$\gcd(m,n) = 1$$
y
$$a^m = b^n.$$
Demuestra que existe $c > 0$ tal que
$$a = c^n, \qquad b = c^m.$$
Trabaja primo a primo: si α_p y β_p son los exponentes de p en a y b, parte de
$$m\alpha_p = n\beta_p$$

y usa la coprimalidad de m y n para demostrar que $n \mid \alpha_p$ y $m \mid \beta_p$. Construye después c y verifica las dos igualdades. Identifica exactamente dónde intervienen la unicidad de factorización y la cancelación coprima de C15.

N. Hipótesis, exponentes y certificados

Las variables son enteras y se mantienen las restricciones de dominio de cada enunciado. Los problemas no requieren aritmética modular.

81. **Nivel E.** Sea $d > 1$. Demuestra, sin factorización única, que la propiedad «para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, si $d \mid ab$, entonces $d \mid a$ o $d \mid b$» equivale a que d sea primo. En el sentido contrario, fabrica un contraejemplo a partir de cualquier descomposición no trivial de d.
82. **Nivel D.** Sean p, q primos distintos y $d = pq$. Construye una familia infinita de productos ab con $\gcd(a, b) = 1$, $d \mid ab$ y $d \nmid a, b$. Después prueba que $\gcd(d, a) = 1$, junto con $d \mid ab$, sí fuerza $d \mid b$. No uses unicidad de factorización en esta reparación.
83. **Nivel E.** Sea p primo y $k \geq 2$. Clasifica todos los pares $r, s \geq 0$ para los cuales $p^r p^s$ es una k-ésima potencia, pero ninguno de los dos factores lo es. Expresa la clasificación mediante cocientes y restos enteros y construye infinitos ejemplos para cada k.
84. **Nivel D.** Audita esta comparación: «$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 14$ son dos factorizaciones primas de longitudes distintas, luego falla la unicidad». Repara la segunda lista y compara ambas sin invocar el teorema de unicidad como argumento. Explica qué pasaría si, tras las cancelaciones legítimas, quedara una lista no vacía de primos.
85. **Nivel E.** Para $n > 1$, sea D su mayor divisor positivo estrictamente menor que n. Demuestra que n/D es primo sin usar unicidad de factorización. Incluye el caso $D = 1$ y explica por qué D mismo no tiene que ser primo.
86. **Nivel E.** Para cada entero $n \geq 2$, prueba que $N = n! + 1$ tiene un divisor primo mayor que n. No supongas que N es primo ni uses unicidad. Verifica el argumento para $n = 5$, donde N es compuesto.
87. **Nivel E.** Sea $N = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 7^2$. Determina el menor entero positivo C para el cual NC es cubo perfecto. Después clasifica todos los multiplicadores positivos con esa propiedad y construye la raíz cúbica entera de cada producto.
88. **Nivel D.** Determina todos los enteros $k \geq 2$ para los cuales $N = 2^{12} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ es una k-ésima potencia perfecta. Construye las raíces positivas correspondientes. Repite la pregunta para $N = 1$ y explica por qué exige un caso separado.
89. **Nivel E.** Sea $N = 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{15}$. Clasifica los enteros $h \geq 1$ para los cuales N^h es una duodécima potencia perfecta. Construye una raíz entera positiva para cada valor permitido y demuestra que no falta ninguno.
90. **Nivel C.** Decide si 251 y 253 son primos. Para el primero registra todas las divisiones necesarias según la barrera de la raíz cuadrada; para el segundo detén el examen cuando dispongas de un certificado suficiente. Justifica por qué ambos certificados tienen alcances distintos.
91. **Nivel D.** Se informa que el entero $N = 1000003$ tiene restos no nulos al dividirlo por $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. ¿Es una certificación completa de primalidad por el criterio de §16.12? Indica exactamente el intervalo que todavía falta examinar. Compara con el certificado $1000005 = 3 \cdot 333335$, sin decidir por otros métodos si N es primo.
92. **Nivel E.** Para $m \geq 2$, audita la inferencia «$m! + 1$ no tiene divisor primo menor o igual que m, luego es primo». Construye un contraejemplo con $m = 5$. Si se añade un certificado $m! + 1 = ab$ con $1 < a \leq b$, demuestra sin unicidad que algún divisor primo q cumple $m < q \leq \sqrt{m! + 1}$.

Soluciones razonadas

A. Primos, compuestos, unidades e irreducibles

1. Recordemos las convenciones del capítulo: las unidades de $\mathbb{Z}$ son ± 1; llamamos primo sólo a un entero **positivo** mayor que 1 cuyos únicos divisores positivos son 1 y él mismo; y llamamos compuesto sólo a un entero positivo mayor que 1 que admite una factorización no trivial.

Por tanto:

- -17: **ninguna de esas categorías**. No es unidad y, por la convención del capítulo, los primos y compuestos son positivos. Aunque -17 es irreducible en $\mathbb{Z}$, eso es otra categoría.
- -1: **unidad**.
- 0: **ninguna**. No es unidad, primo ni compuesto.
- 1: **unidad**; no es primo.
- 2: **primo**.
- 15: **compuesto**, pues $15 = 3 \cdot 5$.
- 37: **primo**. Como $\sqrt{37} < 7$, basta descartar los primos $2, 3, 5$, y ninguno divide a 37. Las divisiones que completan el descarte son $37 = 2 \cdot 18 + 1 = 3 \cdot 12 + 1 = 5 \cdot 7 + 2$; cada resto es no nulo y menor que el divisor.
- 49: **compuesto**, pues $49 = 7^2$.

En particular, 0 pertenece a la categoría «ninguna»: no es unidad, primo ni compuesto. No posee inverso multiplicativo, y las nociones de primo y compuesto se restringen aquí a enteros positivos mayores que 1.

2. Analizamos uno por uno.

Para 29, como $\sqrt{29} < 6$, sólo habría que probar los primos $2, 3, 5$. Ninguno divide a 29, así que 29 es primo. Las divisiones que completan el descarte son $29 = 2 \cdot 14 + 1 = 3 \cdot 9 + 2 = 5 \cdot 5 + 4$; cada resto es no nulo y menor que el divisor.

$$35 = 5 \cdot 7,$$

por lo que 35 es compuesto.

$$51 = 3 \cdot 17,$$

así que 51 es compuesto.

Para 67, como $\sqrt{67} < 9$, basta probar $2, 3, 5, 7$. Las divisiones

$$67 = 2 \cdot 33 + 1 = 3 \cdot 22 + 1 = 5 \cdot 13 + 2 = 7 \cdot 9 + 4$$

tienen restos positivos menores que sus respectivos divisores. Por tanto, ninguno divide a 67 y 67 es primo. Este certificado no presupone reglas de divisibilidad por las cifras.

$$77 = 7 \cdot 11, \qquad 91 = 7 \cdot 13,$$

así que ambos son compuestos.

En conclusión,

$$\boxed{29, 67 \text{ son primos;} \qquad 35, 51, 77, 91 \text{ son compuestos.}}$$

Para certificar primalidad no basta con decir “no encontré un divisor”: hay que justificar que se han descartado **todos los divisores primos que podrían existir**, lo que aquí se hace mediante la barrera $\sqrt{n}$.

3. Si u es una unidad, existe $v \in \mathbb{Z}$ tal que

$$uv = 1.$$

Tomando valores absolutos,

$$|u||v| = 1.$$

Como $|u|$ y $|v|$ son enteros no negativos, el único modo de que su producto sea 1 es

$$|u| = |v| = 1.$$

Por tanto,

$$u = 1 \quad \text{o} \quad u = -1.$$

Recíprocamente,

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad (-1)(-1) = 1,$$

así que ambos poseen inverso entero. Luego

$$\boxed{U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}.}$$

4. La unicidad de la factorización pretende identificar, salvo orden, una lista finita bien determinada de factores primos. Si 1 fuera declarado primo, podríamos insertar arbitrariamente tantos factores 1 como quisiéramos.

Por ejemplo, para todo $k \geq 0$,

$$30 = 1^k \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Así obtendríamos las "factorizaciones"

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = \cdots,$$

que tienen distinto número de factores y no se relacionan sólo por reordenación.

La condición $p > 1$ en la definición de primo elimina exactamente esta proliferación. Por eso 1 no se excluye por capricho: su exclusión es necesaria para una formulación limpia del teorema fundamental de la aritmética.

5. Sea $p > 1$ primo. Queremos probar que $-p$ es irreducible en $\mathbb{Z}$.

Supongamos

$$-p = ab, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Tomando valores absolutos,

$$p = |a||b|.$$

Como p es primo, sus únicos divisores positivos son 1 y p. Por tanto, uno de los números $|a|, |b|$ debe ser 1. En consecuencia, uno de a, b es una unidad ± 1.

Esto demuestra que $-p$ es irreducible.

Sin embargo, en este capítulo la palabra **primo** se reserva a enteros positivos mayores que 1. Por ello $-p$ es irreducible, pero no se denomina primo. Los enteros p y $-p$ son asociados: difieren por la unidad -1.

6. a) Falsa. Por ejemplo, -2 es irreducible en $\mathbb{Z}$: si $-2 = ab$, entonces $2 = |a||b|$, de modo que uno de los factores tiene valor absoluto 1. Sin embargo, -2 no es positivo.

b) Verdadera. Si a es irreducible y

$$-a = bc,$$

entonces

$$a = (-b)c.$$

Por irreducibilidad de a, uno de $-b$ o c es una unidad. Pero $-b$ es unidad si y sólo si b lo es. Por tanto, $-a$ es irreducible.

c) Verdadera. Si $p > 1$ es primo y $p = ab$, entonces $|a| \mid p$. Como p sólo tiene los divisores positivos 1 y p, uno de $|a|, |b|$ vale 1. Luego uno de a, b es unidad.

d) Falsa. Una unidad no es irreducible por definición: la irreducibilidad exige explícitamente que el elemento no sea una unidad.

7. Sea $n > 1$.

Supongamos primero que n es compuesto. Por definición existen enteros positivos a, b con

$$n = ab, \qquad 1 < a < n, \qquad 1 < b < n.$$

Así obtenemos inmediatamente la segunda condición. Además, $a \mid n$ y $1 < a < n$, de modo que n posee un divisor positivo no trivial.

Ahora supongamos que existe d con

$$1 < d < n, \qquad d \mid n.$$

Entonces $n = dq$ para algún entero positivo q. Como $d < n$ y $n = dq$, no puede ser $q = 1$; por tanto $q > 1$. También $q < n$, pues $d > 1$. De este modo,

$$n = dq, \qquad 1 < d, q < n,$$

y n es compuesto.

Así, las tres formulaciones son equivalentes.

8. La frase "a es irreducible si sólo puede escribirse como $a = 1 \cdot a$" es incompleta porque en $\mathbb{Z}$ existen dos unidades, 1 y -1, y las factorizaciones pueden contener signos.

La formulación correcta es:

> Un entero a es irreducible si $a \neq 0$, a no es una unidad y, siempre que $a = bc$ con $b, c \in \mathbb{Z}$, al menos uno de b, c es una unidad, es decir, vale ± 1.

Para 7, cualquier factorización entera satisface

$$7 = |b||c|.$$

Como 7 es primo, uno de $|b|, |c|$ es 1. Por ejemplo,

$$7 = 1 \cdot 7 = (-1)(-7).$$

Para -7 ocurre lo mismo:

$$-7 = (-1) \cdot 7 = 1 \cdot (-7),$$

y cualquier otra factorización tiene un factor de valor absoluto 1. Por tanto, tanto 7 como -7 son irreducibles.

B. Divisores primos y descenso

9. Podemos elegir los siguientes divisores primos:

$$2 \mid 84, \qquad 11 \mid 143, \qquad 13 \mid 221, \qquad 17 \mid 391.$$

En efecto,

$$84 = 2 \cdot 42, \qquad 143 = 11 \cdot 13,$$

$$221 = 13 \cdot 17, \qquad 391 = 17 \cdot 23.$$

Falta certificar que los divisores elegidos son primos. 2 es primo por definición. Para 11, basta descartar 2 y 3, pues $\sqrt{11} < 4$. Para 13, basta descartar 2 y 3, pues $\sqrt{13} < 4$. Para 17, basta descartar 2 y 3, pues $\sqrt{17} < 5$; tampoco es divisible por ninguno de ellos. Así, todos los divisores exhibidos son efectivamente primos.

10. Si $n > 1$ es compuesto, por definición existe una factorización

$$n = ab$$

con

$$1 < a < n, \qquad 1 < b < n.$$

Por tanto, a es un divisor de n que satisface

$$1 < a < n.$$

Este hecho es exactamente el descenso necesario para una inducción fuerte: cuando n es compuesto, podemos reemplazar el problema sobre n por un problema sobre un entero estrictamente menor, como a. La hipótesis inductiva puede aplicarse a a porque $2 \le a < n$.

11. Sea $P(n)$ la afirmación: "$n > 1$ posee un divisor primo". Demostraremos $P(n)$ para todo $n \ge 2$ por inducción fuerte.

Base. Para $n = 2$, el propio 2 es primo y $2 \mid 2$.

Paso inductivo. Supongamos que $P(m)$ vale para todo m con

$$2 \le m < n.$$

Consideremos n.

- Si n es primo, entonces $n \mid n$, y el propio n es el divisor primo buscado.
- Si n es compuesto, existen a, b con

  $$n = ab, \qquad 1 < a < n.$$

  Como $2 \le a < n$, la hipótesis inductiva aplicada a a proporciona un primo p tal que $p \mid a$. Como $a \mid n$, por transitividad

  $$p \mid n.$$

En ambos casos n posee un divisor primo. Por inducción fuerte, el resultado vale para todo $n > 1$.

12. Supongamos, por contradicción, que existe algún entero mayor que 1 sin divisor primo. Sea n el menor de todos ellos; el principio de buen orden garantiza su existencia.

El número n no puede ser primo, pues entonces él mismo sería un divisor primo de n. Por tanto, n es compuesto. Existen entonces a, b tales que

$$n = ab, \qquad 1 < a < n.$$

Como $a < n$ y $a > 1$, la minimalidad de n implica que a **sí** posee un divisor primo p. Así,

$$p \mid a.$$

Pero $a \mid n$, luego

$$p \mid n,$$

contradiciendo que n no tenía divisor primo.

Por tanto, no existe contraejemplo: todo entero $n > 1$ posee un divisor primo.

13. Sea $d > 1$ el menor divisor positivo de n mayor que 1. Supongamos, para obtener una contradicción, que d es compuesto.

Entonces existen enteros positivos r, s tales que

$$d = rs, \qquad 1 < r < d, \qquad 1 < s < d.$$

Como $r \mid d$ y $d \mid n$, la transitividad de la divisibilidad da

$$r \mid n.$$

Pero $r > 1$ y $r < d$, lo que contradice que d era el menor divisor positivo de n mayor que 1.

Luego d no puede ser compuesto. Como $d > 1$, debe ser primo.

14. Supongamos

$$n = ab, \qquad a, b > 1,$$

y sea p un divisor primo de a. Entonces

$$p \mid a \qquad \text{y} \qquad a \mid n.$$

Por transitividad,

$$p \mid n.$$

Así, cualquier primo que aparezca como divisor de un factor no trivial de n es automáticamente divisor de n.

Esto explica por qué una factorización parcial es suficiente para encontrar divisores primos: si logramos escribir $n = ab$ con $1 < a < n$, basta encontrar un divisor primo de a; ese mismo primo divide a n.

15. La frase "podemos repetir indefinidamente" no demuestra que el proceso termine. Precisamente hay que excluir la posibilidad de una cadena infinita de descomposiciones sin llegar a un primo.

Una formulación válida usa inducción fuerte. Sea $P(n)$ la afirmación "$n > 1$ posee un divisor primo". Suponemos $P(m)$ para todos los enteros $2 \leq m < n$.

Si n es primo, terminamos. Si es compuesto, escribimos

$$n = ab, \qquad 1 < a < n.$$

La hipótesis inductiva aplicada a a produce un primo p con $p \mid a$, y entonces $p \mid n$.

También puede usarse buen orden: un supuesto contraejemplo mínimo tendría que ser compuesto y poseer un factor no trivial menor, que por minimalidad ya tendría un divisor primo. En ambos enfoques, la terminación queda respaldada por una propiedad bien fundada de los enteros positivos, no por una repetición informal.

16. Como S es no vacío y todos sus elementos son enteros mayores que 1, el principio de buen orden garantiza que S posee un elemento mínimo; llamémoslo m.

Supongamos que m es compuesto. Por la propiedad de cierre indicada en el enunciado, existe $d \in S$ tal que

$$1 < d < m.$$

Pero esto contradice la minimalidad de m dentro de S.

Por tanto, m no es compuesto. Como $m > 1$, necesariamente es primo.

El principio lógico decisivo es el **principio de buen orden**: todo subconjunto no vacío de los enteros positivos posee un elemento mínimo.

C. Lema de Euclides

17. Sea p primo y $a \in \mathbb{Z}$.

Si $p \mid a$, entonces p es divisor común de p y a. Como todo divisor común de p y a divide a p, y los únicos divisores positivos de p son 1 y p, se obtiene

$$\gcd(p, a) = p.$$

En particular, en este caso $\gcd(p, a) \neq 1$.

Supongamos ahora que

$$p \nmid a.$$

Todo divisor común positivo d de p y a debe dividir a p. Como p es primo,

$$d = 1 \quad \text{o} \quad d = p.$$

La segunda posibilidad implicaría $p \mid a$, contra la hipótesis. Por tanto, el único divisor común positivo es 1 y

$$\gcd(p, a) = 1.$$

Así, exactamente una de las dos situaciones ocurre:

$$\boxed{p \mid a \quad \text{o} \quad \gcd(p, a) = 1.}$$

18. Supongamos que p es primo y

$$p \mid ab.$$

Si $p \mid a$, ya tenemos una de las dos conclusiones.
Supongamos entonces que

$$p \nmid a.$$

Por el ejercicio anterior,

$$\gcd(p, a) = 1.$$

La cancelación coprima demostrada en C15 afirma que

$$\gcd(p, a) = 1, \qquad p \mid ab \Longrightarrow p \mid b.$$

Por tanto,

$$\boxed{p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b.}$$

Esta demostración usa únicamente primalidad, MCD y la cancelación coprima derivada de Bézout. No utiliza factorización prima ni unicidad, lo cual es importante porque el lema de Euclides será después una herramienta para demostrar la unicidad.

19. a) Tomemos

$$d = 6, \qquad a = 2, \qquad b = 3.$$

Entonces

$$6 \mid 2 \cdot 3,$$

pero

$$6 \nmid 2, \qquad 6 \nmid 3.$$

Por tanto, la generalización es falsa para divisores compuestos arbitrarios.
b) Tomemos

$$d = 4, \qquad a = 2.$$

Entonces

$$4 \mid 2^2,$$

pero

$$4 \nmid 2.$$

Lo que falta en ambos casos es la rigidez multiplicativa de un **primo**. El lema de Euclides garantiza que un primo que divide un producto debe dividir alguno de sus factores; un número compuesto puede repartir sus factores primos entre factores diferentes del producto.

20. De

$$p \mid a$$

y

$$p \mid (a+b)$$

se sigue que p divide cualquier combinación lineal entera de a y $a+b$. En particular,

$$p \mid [(a+b)-a] = b.$$

Así,

$$\boxed{p \mid b.}$$

La primalidad de p no fue necesaria: el mismo argumento vale para cualquier divisor no nulo d. Sólo usamos el cierre elemental de la divisibilidad bajo diferencias, no el lema de Euclides.

21. Como p es primo y $p \nmid a$, tenemos

$$\gcd(p, a) = 1.$$

Por Bézout existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$px + ay = 1.$$

Multiplicamos por b:

$$pbx + aby = b.$$

Por hipótesis,

$$p \mid ab,$$

de modo que $p \mid aby$. Evidentemente también

$$p \mid pbx.$$

Por cierre bajo sumas,

$$p \mid (pbx + aby) = b.$$

Por tanto,

$$\boxed{p \mid b.}$$

Esta es la forma explícita de la prueba de cancelación coprima aplicada al primo p.

22. Partimos de

$$p \mid abc.$$

Aplicamos el lema de Euclides al producto

$$a \cdot (bc).$$

Entonces

$$p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid bc.$$

Como $p \nmid a$, necesariamente

$$p \mid bc.$$

Aplicamos ahora el lema de Euclides al producto $b \cdot c$:

$$p \mid b \quad \text{o} \quad p \mid c.$$

Como $p \nmid b$, queda

$$\boxed{p \mid c.}$$

El orden es, por tanto, primero separar a del producto bc y después separar b de c.

23. Sean p y q primos distintos. Si $p \mid q$, como q es primo y $p > 1$, necesariamente tendríamos

$$p = q,$$

contradicción. Por tanto,

$$\boxed{p \nmid q.}$$

Todo divisor común positivo de p y q divide a p, así que sólo puede ser 1 o p. Como $p \nmid q$, la segunda posibilidad queda descartada. Luego

$$\boxed{\gcd(p, q) = 1.}$$

Supongamos ahora

$$pq \mid ab$$

y $p \nmid b$. Por transitividad,

$$p \mid ab.$$

El lema de Euclides da

$$p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b.$$

Como $p \nmid b$,

$$\boxed{p \mid a.}$$

No podemos deducir necesariamente $q \mid a$. Por ejemplo, tomando

$$p = 2, \qquad q = 3, \qquad a = 2, \qquad b = 3,$$

tenemos $6 \mid ab$ y $2 \nmid 3$, pero $3 \nmid 2$.

24. El salto inválido consiste en suponer que, porque 2 y 3 son primos y ambos dividen al producto ab, necesariamente ambos deben dividir **el mismo** factor.

El lema de Euclides sólo permite concluir por separado:

$$2 \mid a \quad \text{o} \quad 2 \mid b,$$

y

$$3 \mid a \quad \text{o} \quad 3 \mid b.$$

Es perfectamente posible que 2 divida a a y 3 divida a b.

El contraejemplo más simple es

$$a = 2, \qquad b = 3.$$

Entonces

$$6 \mid ab,$$

pero

$$6 \nmid a, \qquad 6 \nmid b.$$

Por tanto, el lema de Euclides no se puede aplicar al número compuesto 6 como si fuera primo.

D. Productos finitos y potencias

25. Demostramos por inducción sobre n que, si p es primo y

$$p \mid a_1 a_2 \cdots a_n,$$

entonces p divide alguno de los factores.

Para $n = 1$, la conclusión $p \mid a_1$ coincide con la hipótesis. Para $n = 2$, esto es exactamente el lema de Euclides.

Supongamos el resultado válido para productos de n factores y consideremos

$$p \mid a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}.$$

Agrupamos:

$$p \mid (a_1 \cdots a_n) a_{n+1}.$$

Por el lema de Euclides,

$$p \mid a_1 \cdots a_n \quad \text{o} \quad p \mid a_{n+1}.$$

En el segundo caso terminamos. En el primero, la hipótesis inductiva garantiza que p divide alguno de $a_1, \ldots, a_n$.

Por inducción, el resultado vale para todo producto finito.

26. Escribimos

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}}.$$

Si

$$p \mid a^m,$$

la versión finita del lema de Euclides implica que p divide al menos uno de los m factores del producto. Pero todos esos factores son iguales a a. Por tanto,

$$\boxed{p \mid a.}$$

El resultado previo utilizado es precisamente: un primo que divide un producto finito divide al menos uno de sus factores.

27. De

$$p \mid a^3 b^2$$

aplicamos el lema de Euclides al producto $a^3 \cdot b^2$:

$$p \mid a^3 \quad \text{o} \quad p \mid b^2.$$

En el primer caso, la consecuencia para potencias da $p \mid a$; en el segundo, da $p \mid b$. Por tanto,

$$\boxed{p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b.}$$

La conclusión es disyuntiva: la información $p \mid a^3 b^2$ no determina cuál de los dos factores contiene a p. Incluso puede ocurrir que p divida a ambos.

28. Si

$$p_1 p_2 \cdots p_r \mid a,$$

entonces para cada i se cumple

$$p_i \mid p_1 p_2 \cdots p_r.$$

Por transitividad de la divisibilidad,

$$p_i \mid a.$$

Así,

$$\boxed{p_i \mid a \quad \text{para todo } i.}$$

No necesitamos el lema de Euclides para esta dirección. Tampoco necesitamos que los p_i sean distintos ni primos: si un producto divide a a, cualquiera de sus factores divide al producto y, por transitividad, divide a a.

29. De

$$p^2q^3 \mid a^5$$

se sigue por transitividad que

$$p \mid a^5 \qquad \text{y} \qquad q \mid a^5.$$

Como p y q son primos, la propiedad de las potencias da

$$p \mid a \qquad \text{y} \qquad q \mid a.$$

Por tanto,

$$\boxed{p \mid a \text{ y } q \mid a.}$$

No fue necesario comparar exponentes de una factorización prima de a; bastó usar transitividad y el lema de Euclides aplicado a potencias.

30. La hipótesis es

$$p \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2.$$

Por la versión finita del lema de Euclides, existe algún j tal que

$$p \mid a_j^2.$$

Como p es primo, la propiedad de las potencias implica

$$p \mid a_j.$$

Por tanto, p divide al menos uno de los enteros $a_1, \ldots, a_n$.

31. La afirmación es verdadera.
Supongamos

$$p \mid a^m b^n.$$

Por el lema de Euclides,

$$p \mid a^m \quad \text{o} \quad p \mid b^n.$$

La propiedad de potencias da

$$p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b.$$

En cualquiera de los dos casos, p divide al producto ab. Luego

$$\boxed{p \mid a^m b^n \Longrightarrow p \mid ab.}$$

No se utilizó el teorema fundamental de la aritmética.

32. El teorema para productos finitos afirma:

$$p \mid a_1 a_2 \cdots a_n \Longrightarrow \exists j \; p \mid a_j.$$

Su contraposición es

$$(p \nmid a_j \text{ para todo } j) \Longrightarrow p \nmid a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Ésta es exactamente la afirmación solicitada. Por tanto, si p no divide a ninguno de los factores, no puede dividir su producto.

E. Existencia y unicidad de factorización

33. Factorizamos cada número.
Para 756:

$$756 = 4 \cdot 189 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Para 1386:

$$1386 = 2 \cdot 693 = 2 \cdot 3^2 \cdot 77 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Para 2310:

$$2310 = 231 \cdot 10 = (3 \cdot 7 \cdot 11)(2 \cdot 5).$$

Así, en forma canónica,

$$\boxed{756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7,}$$

$$\boxed{1386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11,}$$

$$\boxed{2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.}$$

34. Podemos iniciar dos árboles distintos para 360.
Primer árbol:

$$360 = 36 \cdot 10 = (6 \cdot 6)(2 \cdot 5) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 5).$$

Así,

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Segundo árbol:

$$360 = 45 \cdot 8 = (5 \cdot 9)(2 \cdot 4) = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Nuevamente,

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Los pasos intermedios son diferentes, pero la colección final de factores primos, contando multiplicidades, coincide. Esta coincidencia es precisamente lo que interpreta la **unicidad** del teorema fundamental de la aritmética.

35. Sea $P(n)$ la afirmación "$n > 1$ puede escribirse como producto finito de primos". Demostramos $P(n)$ por inducción fuerte.

Base. 2 es primo, de modo que ya es producto de un solo primo.

Paso inductivo. Supongamos que $P(m)$ vale para todo entero m con

$$2 \leq m < n.$$

Consideremos n.

Si n es primo, entonces

$$n = n$$

es ya una factorización prima.

Si n es compuesto, existen a, b con

$$n = ab, \qquad 1 < a < n, \qquad 1 < b < n.$$

Por la hipótesis inductiva,

$$a = p_1 \cdots p_r, \qquad b = q_1 \cdots q_s,$$

con todos los p_i, q_j primos. Entonces

$$n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s,$$

que es una factorización completa de n en primos.

La prueba establece sólo **existencia**. En ningún punto comparamos dos factorizaciones distintas, por lo que todavía no se ha demostrado unicidad.

36. Supongamos que existen enteros mayores que 1 que no admiten factorización prima, y sea n el menor de ellos.

El número n no puede ser primo, porque entonces él mismo sería una factorización de un solo factor primo.

Tampoco puede ser compuesto. Si lo fuera, escribiríamos

$$n = ab, \qquad 1 < a, b < n.$$

Como a y b son menores que el contraejemplo mínimo n, ambos sí admiten factorización prima:

$$a = p_1 \cdots p_r, \qquad b = q_1 \cdots q_s.$$

Multiplicando,

$$n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s,$$

contradicción.

Por tanto, no existe tal contraejemplo mínimo, y todo entero mayor que 1 admite factorización prima.

37. Tenemos

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

Como p_1 divide al producto del lado izquierdo, también divide a n, y por la segunda expresión de n,

$$p_1 \mid q_1 q_2 \cdots q_s.$$

La versión finita del lema de Euclides implica que existe algún j tal que

$$p_1 \mid q_j.$$

Aquí se usa el **lema de Euclides**.

Ahora usamos que q_j es primo. Sus únicos divisores positivos son 1 y q_j. Como $p_1 > 1$ y $p_1 \mid q_j$,

$$p_1 = q_j.$$

Aquí se usa la **primalidad de** q_j.

Así, cada primer factor primo de una factorización debe aparecer también en la otra.

38. Partimos de

$$p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

Por el ejercicio anterior, $p_1 = q_j$ para algún j. Reordenamos la segunda lista y suponemos, sin pérdida de generalidad,

$$p_1 = q_1.$$

Entonces

$$p_1 p_2 \cdots p_r = p_1 q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_1 \neq 0$, cancelamos en la igualdad de enteros:

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Repetimos el argumento. Cada p_i debe coincidir con uno de los primos restantes de la segunda lista; reordenamos y cancelamos.

No puede agotarse una lista antes que la otra. Si, por ejemplo, después de cancelar todos los p_i quedaran factores $q_k, \ldots, q_s$, obtendríamos

$$1 = q_k q_{k+1} \cdots q_s.$$

Pero cada $q_j > 1$, así que el producto del lado derecho es mayor que 1, contradicción.

Por tanto,

$$r = s,$$

y, tras una reordenación,

$$p_i = q_i$$

para todo i. La factorización prima es única salvo el orden de los factores.

39. Las tres afirmaciones son lógicamente distintas.

1. **Existencia de un divisor primo:** para cada $n > 1$ existe al menos un primo p con $p \mid n$.
2. **Existencia de una factorización completa:** cada $n > 1$ puede escribirse como producto finito de primos.
3. **Unicidad:** dos productos de primos que representan el mismo entero contienen los mismos factores con las mismas multiplicidades, salvo orden.

La primera afirmación sólo garantiza un primer paso. Para llegar a una factorización completa hay que demostrar que el proceso de descomposición termina; esto se hace mediante inducción fuerte o buen orden.

Incluso una vez probada la existencia de una factorización, todavía podría, en principio, haber dos colecciones distintas de primos cuyo producto fuera el mismo. La unicidad exige un argumento adicional basado en el lema de Euclides y cancelación.

Por eso "todo número tiene un divisor primo" no basta para establecer el teorema fundamental de la aritmética.

40. La prueba propuesta es circular porque pretende justificar la unicidad mediante la afirmación

$$p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b,$$

pero luego justifica esa afirmación diciendo que, en la **factorización prima única** del producto, p debe aparecer en uno de los factores. Es decir, utiliza precisamente la unicidad que pretende demostrar.

El orden correcto de dependencias es:

$$\text{Bézout y coprimalidad de C15} \Longrightarrow \text{cancelación coprima}$$

$$\Longrightarrow \text{lema de Euclides para primos}$$

$$\Longrightarrow \text{lema para productos finitos}$$

$$\Longrightarrow \text{unicidad de la factorización prima.}$$

Por separado, la existencia de factorización se prueba mediante inducción fuerte y no necesita el lema de Euclides. Sólo después de tener existencia y unicidad podemos hablar legítimamente de "los exponentes" de la factorización prima de un entero.

F. Forma canónica y divisibilidad por exponentes

41. Para 900,

$$900 = 9 \cdot 100 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2,$$

así que

$$\boxed{900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2.}$$

Para 13860,

$$13860 = 10 \cdot 1386 = (2 \cdot 5)(2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11),$$

de donde

$$\boxed{13860 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.}$$

Finalmente,

$$1260 = 126 \cdot 10 = (2 \cdot 3^2 \cdot 7)(2 \cdot 5),$$

por lo que

$$\boxed{-1260 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.}$$

La unidad -1 se separa de los factores primos positivos.

42. Tenemos

$$a = 2^3 3^2 5, \qquad b = 2^5 3^2 5^4 7.$$

Para $a \mid b$ comparamos exponentes:

$$3 \leq 5, \qquad 2 \leq 2, \qquad 1 \leq 4,$$

y el exponente de 7 en a es $0 \leq 1$. Por tanto,

$$\boxed{a \mid b.}$$

En cambio $b \nmid a$, pues el exponente de 2 en b es $5 > 3$.
Para

$$2^4 3^2 5,$$

los exponentes $4, 2, 1$ no superan a los correspondientes de b, luego

$$\boxed{2^4 3^2 5 \mid b.}$$

Finalmente,

$$2^5 3^3 \nmid b,$$

porque el exponente de 3 requerido es 3, mientras que en b sólo aparece 3^2.

43. Escribamos

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Supongamos primero que

$$\alpha_p \leq \beta_p$$

para todo primo p. Entonces cada diferencia $\beta_p - \alpha_p$ es no negativa. Definimos

$$c = \prod_p p^{\beta_p - \alpha_p}.$$

Sólo finitos exponentes son no nulos. Por las leyes de exponentes,

$$ac = \prod_p p^{\alpha_p + \beta_p - \alpha_p} = \prod_p p^{\beta_p} = b.$$

Por tanto, $a \mid b$.

Recíprocamente, supongamos $a \mid b$. Existe $c > 0$ con

$$b = ac.$$

Factorizamos

$$c = \prod_p p^{\gamma_p}.$$

Entonces

$$b = ac = \prod_p p^{\alpha_p + \gamma_p}.$$

Por **unicidad de la factorización prima**,

$$\beta_p = \alpha_p + \gamma_p$$

para todo p. Como $\gamma_p \geq 0$,

$$\alpha_p \leq \beta_p.$$

Así,

$$\boxed{a \mid b \iff \alpha_p \leq \beta_p \text{ para todo primo } p.}$$

44. Como

$$72 = 2^3 3^2,$$

todo divisor positivo tiene la forma

$$2^i 3^j, \qquad 0 \leq i \leq 3, \qquad 0 \leq j \leq 2.$$

Los divisores son

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Hay 4 posibilidades para i y 3 para j, de modo que el número total de divisores positivos es

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Por tanto, 72 tiene exactamente 12 divisores positivos.

45. Sea

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

y sea $d > 0$ un divisor de n. Por el criterio de divisibilidad mediante exponentes, el exponente de cada primo en d no puede superar al exponente correspondiente en n. Además, ningún primo que no aparezca en n puede aparecer con exponente positivo en d.

Por tanto,

$$d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}, \qquad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i.$$

Recíprocamente, si elegimos enteros β_i con

$$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i,$$

definimos

$$c = p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r-\beta_r}.$$

Entonces

$$dc = n,$$

de modo que $d \mid n$. Queda demostrado el criterio en ambas direcciones.

46. Escribamos

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

De $a \mid b$ obtenemos

$$\alpha_p \leq \beta_p$$

para todo primo p. De $b \mid a$ obtenemos

$$\beta_p \leq \alpha_p.$$

Por tanto,

$$\alpha_p = \beta_p$$

para todo p. Por unicidad de la factorización,

$$\boxed{a = b.}$$

En C14 la misma conclusión se obtenía mediante la propiedad de tamaño: $a \mid b$ implicaba $a \leq b$ y $b \mid a$ implicaba $b \leq a$. La prueba actual es distinta: traduce la divisibilidad en una comparación componente a componente de exponentes primos.

47. Sea

$$a = \prod_p p^{\alpha_p} > 0.$$

Entonces

$$a^m = \prod_p p^{m\alpha_p}.$$

Como $m \geq 1$,

$$\alpha_p \leq m\alpha_p$$

para todo primo p. Por el criterio de exponentes,

$$\boxed{a \mid a^m.}$$

Ahora supongamos $a > 1$. Entonces existe al menos un primo p con $\alpha_p > 0$. Para que

$$a^m \mid a$$

se necesitaría

$$m\alpha_p \leq \alpha_p.$$

Como $\alpha_p > 0$, esto implica $m \le 1$. Junto con $m \ge 1$, resulta

$$\boxed{m = 1.}$$

48. Escribamos

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}, \qquad c = \prod_p p^{\gamma_p}.$$

La condición

$$\gcd(a, b) = 1$$

significa que

$$\min(\alpha_p, \beta_p) = 0$$

para todo primo p.
Como $a \mid bc$,

$$\alpha_p \le \beta_p + \gamma_p$$

para todo p.
Si $\alpha_p > 0$, la coprimalidad obliga a $\beta_p = 0$. Entonces

$$\alpha_p \le \gamma_p.$$

Si $\alpha_p = 0$, la misma desigualdad es trivial. Por tanto,

$$\alpha_p \le \gamma_p$$

para todo p, y el criterio de divisibilidad da

$$\boxed{a \mid c.}$$

Esta prueba es posterior a la de C15: utiliza la factorización prima única y compara exponentes. La prueba de C15, en cambio, obtenía la cancelación coprima directamente de una identidad de Bézout, sin usar aún teoría de factorización.

G. MCD, MCM y factorización

49. Primero,

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Tomando mínimos y máximos de exponentes,

$$\gcd(360, 840) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120,$$

$$\operatorname{lcm}(360, 840) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Para el segundo par,

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7,$$

$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Luego

$$\gcd(756, 630) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126,$$

$$\operatorname{lcm}(756, 630) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780.$$

Finalmente,

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

$$1430 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13.$$

Por tanto,

$$\gcd(1001, 1430) = 11 \cdot 13 = 143,$$

$$\operatorname{lcm}(1001, 1430) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 10010.$$

50. Sea

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p},$$

y definamos

$$d = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Como

$$\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \alpha_p$$

y

$$\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \beta_p,$$

el criterio de divisibilidad por exponentes da

$$d \mid a, \qquad d \mid b.$$

Así, d es divisor común.
Sea ahora $c > 0$ cualquier divisor común de a y b, con

$$c = \prod_p p^{\gamma_p}.$$

Como $c \mid a$ y $c \mid b$,

$$\gamma_p \leq \alpha_p \qquad \text{y} \qquad \gamma_p \leq \beta_p.$$

Por tanto,

$$\gamma_p \leq \min(\alpha_p, \beta_p).$$

De nuevo por el criterio de exponentes,

$$c \mid d.$$

Si un divisor común es negativo, aplicamos lo anterior a $|c|$ y cambiamos el signo del testigo; por tanto también divide a d. Así d satisface la caracterización universal del MCD y

$$\boxed{\gcd(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}.}$$

51. Definamos

$$m = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.$$

Como

$$\alpha_p \le \max(\alpha_p, \beta_p),$$

se tiene $a \mid m$. Del mismo modo, $b \mid m$. Por tanto, m es múltiplo común.
Sea $M > 0$ cualquier múltiplo común de a y b, y escribamos

$$M = \prod_p p^{\mu_p}.$$

De $a \mid M$ y $b \mid M$ obtenemos

$$\alpha_p \le \mu_p, \qquad \beta_p \le \mu_p.$$

Luego

$$\max(\alpha_p, \beta_p) \le \mu_p.$$

Por tanto,

$$m \mid M.$$

En particular, como $m, M > 0$, también $m \le M$. Así m es el mínimo común múltiplo y

$$\boxed{\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.}$$

52. Usamos las fórmulas

$$\gcd(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)},$$

$$\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.$$

Multiplicando,

$$\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)+\max(\alpha_p,\beta_p)}.$$

Para enteros no negativos r, s,

$$\min(r,s) + \max(r,s) = r + s.$$

Aplicando esto primo por primo,

$$\gcd(a,b)\,\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\alpha_p+\beta_p}.$$

Pero

$$\prod_p p^{\alpha_p+\beta_p} = \left(\prod_p p^{\alpha_p}\right)\left(\prod_p p^{\beta_p}\right) = ab.$$

Por tanto,

$$\boxed{\gcd(a,b)\,\operatorname{lcm}(a,b) = ab.}$$

53. Supongamos primero

$$\gcd(a,b) = 1.$$

Si existiera un primo p que dividiera a ambos, entonces p sería un divisor común positivo mayor que 1. Por la propiedad universal del MCD,

$$p \mid \gcd(a,b) = 1,$$

imposible. Por tanto, ningún primo divide simultáneamente a a y a b.

Recíprocamente, supongamos que no existe ningún primo que divida a ambos. Si $\gcd(a, b) > 1$, entonces el MCD, por ser un entero mayor que 1, posee un divisor primo p. Como

$$p \mid \gcd(a,b),$$

y el MCD divide a a y a b, tendríamos

$$p \mid a, \qquad p \mid b,$$

contradicción.

Luego

$$\boxed{\gcd(a,b) = 1 \iff a \text{ y } b \text{ no comparten ningún factor primo.}}$$

54. Si $\gcd(a,b) = 1$, entonces para cada primo p no pueden ser simultáneamente positivos α_p y β_p. Por tanto,

$$\max(\alpha_p, \beta_p) = \alpha_p + \beta_p.$$

Así,

$$\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\alpha_p+\beta_p} = ab.$$

Luego

$$\boxed{\gcd(a,b) = 1 \Longrightarrow \operatorname{lcm}(a,b) = ab.}$$

Si la coprimalidad falla, el producto suele repetir factores comunes. Por ejemplo,

$$a = 6, \qquad b = 15.$$

Entonces

$$\gcd(6, 15) = 3,$$

pero

$$\operatorname{lcm}(6, 15) = 30 \neq 90 = 6 \cdot 15.$$

55. Si $a \mid b$, entonces

$$\alpha_p \leq \beta_p$$

para todo primo p. En consecuencia,

$$\min(\alpha_p, \beta_p) = \alpha_p,$$

y

$$\max(\alpha_p, \beta_p) = \beta_p.$$

Por las fórmulas del MCD y del MCM,

$$\gcd(a, b) = \prod_p p^{\alpha_p} = a,$$
$$\operatorname{lcm}(a, b) = \prod_p p^{\beta_p} = b.$$

Así,

$$\boxed{a \mid b \Longrightarrow \gcd(a, b) = a, \quad \operatorname{lcm}(a, b) = b.}$$

Esto refleja el orden de divisibilidad: cuando a está por debajo de b en ese orden, el mayor divisor común es precisamente a y el menor múltiplo común es precisamente b.

56. Supongamos que un primo p divide a ab. Entonces el exponente de p en ab es

$$\alpha_p + \beta_p > 0.$$

Por tanto, al menos uno de α_p, β_p es positivo, y entonces

$$\max(\alpha_p, \beta_p) > 0.$$

Así p divide al MCM:

$$\boxed{p \mid ab \Longrightarrow p \mid \operatorname{lcm}(a, b).}$$

Ahora supongamos

$$p \mid \gcd(a, b).$$

Entonces

$$\min(\alpha_p, \beta_p) > 0,$$

por lo que ambos exponentes son positivos. Así,

$$\boxed{p \mid a \text{ y } p \mid b.}$$

La primera afirmación se expresa mediante un **máximo** de exponentes; la segunda, mediante un **mínimo**. No son una el converso literal de la otra. El converso de la primera

sería $p \mid \operatorname{lcm}(a,b) \Rightarrow p \mid ab$, mientras que el converso de la segunda sería $p \mid a$ y $p \mid b \Rightarrow p \mid \gcd(a,b)$.

H. Primalidad e infinitud de los primos

57. Si $n > 1$ es compuesto, existen enteros $a, b > 1$ tales que

$$n = ab.$$

Intercambiando los factores si es necesario, podemos suponer

$$a \leq b.$$

Como ambos son mayores que 1 y su producto es n,

$$1 < a \leq b < n.$$

De $a \leq b$ obtenemos

$$a^2 \leq ab = n.$$

Como $a > 0$,

$$\boxed{a \leq \sqrt{n}.}$$

Así todo compuesto posee un factor no trivial no mayor que su raíz cuadrada.

58. Sea $n > 1$ compuesto. Por el ejercicio anterior existen a, b con

$$n = ab, \qquad 1 < a \leq \sqrt{n}.$$

Como $a > 1$, el teorema de existencia de divisores primos garantiza un primo p tal que

$$p \mid a.$$

Como $p \leq a$,

$$p \leq \sqrt{n}.$$

Además, $a \mid n$, así que por transitividad

$$p \mid n.$$

Por tanto,

$$\boxed{n \text{ compuesto} \Longrightarrow \exists p \text{ primo} : p \mid n,\ p \leq \sqrt{n}.}$$

Los dos pasos son distintos: primero encontramos un factor no trivial pequeño y después extraemos de él un divisor primo.

59. Para 97,

$$\sqrt{97} < 10.$$

Sólo hay que comprobar $2, 3, 5, 7$. Ninguno divide a 97. Las divisiones que completan el descarte son $97 = 2 \cdot 48 + 1 = 3 \cdot 32 + 1 = 5 \cdot 19 + 2 = 7 \cdot 13 + 6$; cada resto es no nulo y menor que el divisor. Por tanto,

$$\boxed{97 \text{ es primo.}}$$

Para 127,

$$\sqrt{127} < 12.$$

Debemos comprobar $2, 3, 5, 7, 11$. 127 no es divisible por ninguno: en particular,

$$127 = 7 \cdot 18 + 1, \qquad 127 = 11 \cdot 11 + 6.$$

Luego

$$\boxed{127 \text{ es primo.}}$$

Las divisiones que completan el descarte son $127 = 2 \cdot 63 + 1 = 3 \cdot 42 + 1 = 5 \cdot 25 + 2$; cada resto es no nulo y menor que el divisor.

Para 221,

$$\sqrt{221} < 15.$$

Probamos $2, 3, 5, 7, 11, 13$. Encontramos

$$221 = 13 \cdot 17.$$

Por tanto,

$$\boxed{221 \text{ es compuesto.}}$$

60. Tenemos

$$\sqrt{173} \approx 13.15.$$

Por tanto, para certificar primalidad hay que descartar todos los primos no mayores que $\sqrt{173}$:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

El estudiante sólo revisó $2, 3, 5, 7$, así que su control no es suficiente.

Completamos:

$$173 = 11 \cdot 15 + 8,$$

y

$$173 = 13 \cdot 13 + 4.$$

Así, ni 11 ni 13 dividen a 173. Las divisiones que completan el descarte son $173 = 2 \cdot 86 + 1 = 3 \cdot 57 + 2 = 5 \cdot 34 + 3 = 7 \cdot 24 + 5$; cada resto es no nulo y menor que el divisor. Como tampoco lo hacen $2, 3, 5, 7$, no existe divisor primo no mayor que $\sqrt{173}$. Por el criterio de primalidad,

$\boxed{173 \text{ es primo.}}$

61. Supongamos, por contradicción, que sólo existen finitos números primos:

$$p_1, p_2, \ldots, p_k.$$

Construimos

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1.$$

Como $N > 1$, posee algún divisor primo q.
Si la lista fuera completa, q tendría que coincidir con algún p_j. Entonces

$$q \mid p_1 p_2 \cdots p_k$$

y también

$$q \mid N.$$

Por cierre de la divisibilidad bajo diferencias,

$$q \mid (N - p_1 p_2 \cdots p_k) = 1.$$

Esto es imposible porque $q > 1$.
Por tanto, q no pertenece a la supuesta lista completa. Contradicción. Luego

$\boxed{\text{existen infinitos números primos.}}$

62. En la prueba de Euclides sólo se necesita que

$$N = p_1 \cdots p_k + 1 > 1$$

tenga **algún divisor primo** q. No necesitamos que N sea primo.
Un ejemplo clásico es

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031.$$

Este número es compuesto:

$$30031 = 59 \cdot 509.$$

Sin embargo, ni 59 ni 509 pertenece a la lista

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

En general, cualquier divisor primo q de N no puede coincidir con ninguno de los p_j, porque si $q = p_j$, entonces dividiría tanto al producto $p_1 \cdots p_k$ como a N, y por tanto dividiría a su diferencia 1.

Así, la prueba funciona aunque N sea compuesto.

63. Sí: bajo la hipótesis explícita

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k - 1 > 1,$$

el mismo mecanismo produce un primo fuera de la colección.

Como $N > 1$, existe un primo q tal que

$$q \mid N.$$

Si q coincidiera con alguno de los p_j, entonces q dividiría al producto

$$P = p_1 p_2 \cdots p_k$$

y también a

$$N = P - 1.$$

Por tanto,

$$q \mid P - (P - 1) = 1,$$

imposible.

Así, cualquier divisor primo de N queda fuera de la colección inicial.

La condición $N > 1$ es esencial. Por ejemplo, con la colección formada sólo por 2 se obtiene $2 - 1 = 1$, que no tiene divisor primo. Pero ese caso está excluido por el enunciado.

64. Demostramos la afirmación por contraposición.

El criterio ya establecido dice:

$$n \text{ compuesto} \Longrightarrow \exists p \text{ primo}, \quad p \le \sqrt{n}, \quad p \mid n.$$

Su contraposición es

$$(\text{ningún primo } p \le \sqrt{n} \text{ divide a } n) \Longrightarrow n \text{ no es compuesto.}$$

Como $n > 1$, si no es compuesto debe ser primo. Por tanto,

$$\boxed{n \text{ es primo.}}$$

No hace falta probar divisibilidad por números compuestos: si un compuesto dividiera a n, alguno de sus divisores primos también dividiría a n. El control sobre los primos ya captura todas las posibles obstrucciones.

I. Potencias perfectas y diagnóstico

65. Sea

$$n = \prod_p p^{\alpha_p} > 0.$$

Supongamos primero que n es un cuadrado perfecto. Entonces existe $m > 0$ tal que

$$n = m^2.$$

Escribimos

$$m = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Entonces

$$n = m^2 = \prod_p p^{2\beta_p}.$$

Por unicidad de la factorización prima,

$$\alpha_p = 2\beta_p$$

para todo primo p. Por tanto, todos los exponentes α_p son pares.
Recíprocamente, supongamos que cada α_p es par. Escribimos

$$\alpha_p = 2\beta_p$$

con $\beta_p \geq 0$. Entonces

$$n = \prod_p p^{2\beta_p} = \left(\prod_p p^{\beta_p}\right)^2.$$

Así n es un cuadrado perfecto.
Por tanto,

$$\boxed{n \text{ es cuadrado perfecto } \iff \alpha_p \text{ es par para todo } p.}$$

66. Sea

$$n = \prod_p p^{\alpha_p} > 0.$$

Si n es un cubo perfecto, existe $m > 0$ con

$$n = m^3.$$

Escribiendo

$$m = \prod_p p^{\beta_p},$$

obtenemos

$$n = \prod_p p^{3\beta_p}.$$

Por unicidad,

$$\alpha_p = 3\beta_p,$$

de modo que

$$3 \mid \alpha_p$$

para todo primo p.
Recíprocamente, si cada α_p es múltiplo de 3, escribimos

$$\alpha_p = 3\beta_p$$

y entonces

$$n = \prod_p p^{3\beta_p} = \left(\prod_p p^{\beta_p} \right)^3 .$$

Luego

$$\boxed{n \text{ es cubo perfecto } \iff 3 \mid \alpha_p \text{ para todo } p.}$$

67. Sea $k \geq 2$ y

$$n = \prod_p p^{\alpha_p} > 0.$$

Si n es una k-ésima potencia perfecta, existe $m > 0$ tal que

$$n = m^k.$$

Escribiendo

$$m = \prod_p p^{\beta_p},$$

se obtiene

$$n = \prod_p p^{k\beta_p}.$$

Por unicidad de factorización,

$$\alpha_p = k\beta_p,$$

y por tanto

$$k \mid \alpha_p$$

para todo primo p.
Recíprocamente, si

$$k \mid \alpha_p$$

para todo p, escribimos

$$\alpha_p = k\beta_p.$$

Entonces

$$n = \prod_p p^{k\beta_p} = \left(\prod_p p^{\beta_p} \right)^k .$$

Así,

$$\boxed{n \text{ es una } k\text{-ésima potencia perfecta } \iff k \mid \alpha_p \text{ para todo primo } p.}$$

68. Consideremos

$$N_1 = 2^6 3^{12}.$$

Los exponentes 6 y 12 son pares, múltiplos de 3 y múltiplos de 6. Por tanto, N_1 es cuadrado, cubo y sexta potencia perfecta.

Ahora

$$N_2 = 2^4 3^6 5^2.$$

Todos los exponentes son pares, así que N_2 es cuadrado. Pero 4 y 2 no son múltiplos de 3, de modo que no es cubo. Tampoco todos son múltiplos de 6, así que no es sexta potencia.

Finalmente,

$$N_3 = 2^{12} 3^{18} 5^6.$$

Los exponentes $12, 18, 6$ son todos múltiplos de 6. En particular son pares y múltiplos de 3. Por tanto, N_3 es cuadrado, cubo y sexta potencia perfecta.

En resumen:

	cuadrado	cubo	sexta potencia
N_1	sí	sí	sí
N_2	sí	no	no
N_3	sí	sí	sí

69. Escribamos

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Como

$$\gcd(a, b) = 1,$$

para cada primo p se cumple

$$\text{mín}(\alpha_p, \beta_p) = 0.$$

Es decir, un primo no puede aparecer con exponente positivo en ambos factores.

Como ab es un cubo perfecto,

$$3 \mid (\alpha_p + \beta_p)$$

para todo primo p.

Pero, por coprimalidad, para cada p uno de los exponentes α_p, β_p es 0. Por tanto, si $\alpha_p > 0$, entonces $\beta_p = 0$ y

$$3 \mid \alpha_p.$$

Análogamente, si $\beta_p > 0$, entonces

$$3 \mid \beta_p.$$

Así todos los exponentes de a son múltiplos de 3 y todos los exponentes de b también. Por el criterio de potencias perfectas,

$$\boxed{a \text{ y } b \text{ son cubos perfectos.}}$$

La coprimalidad se usa exactamente para impedir que un exponente total múltiplo de 3 se reparta entre los dos factores.

70. La afirmación sin hipótesis adicionales es falsa. Por ejemplo,

$$2 \cdot 8 = 16 = 4^2,$$

pero ni 2 ni 8 es cuadrado perfecto.

Una hipótesis suficiente es

$$\gcd(a, b) = 1.$$

En efecto, escribimos

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Si ab es cuadrado, entonces

$$\alpha_p + \beta_p$$

es par para todo primo p.

La coprimalidad implica que, para cada p, al menos uno de α_p, β_p es 0. Por tanto, el exponente no nulo, si existe, debe ser él mismo par. Así todos los exponentes de a y todos los de b son pares.

En consecuencia,

$$\boxed{\gcd(a, b) = 1,\ ab \text{ cuadrado} \Longrightarrow a, b \text{ cuadrados.}}$$

71. a)

$$p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b$$

para p primo es exactamente el **lema de Euclides**. La primalidad es la hipótesis que permite aplicarlo.

b) La afirmación

$$a \mid b \Longrightarrow \alpha_p \leq \beta_p$$

para todos los exponentes primos depende de la **unicidad de la factorización**. Sin unicidad no podríamos identificar de manera bien definida esos exponentes.

c) La afirmación

$$ab \text{ cuadrado} \Longrightarrow a, b \text{ cuadrados}$$

es falsa. Un contraejemplo es

$$2 \cdot 8 = 16.$$

Se corrige añadiendo, por ejemplo,

$$\gcd(a, b) = 1.$$

Entonces la conclusión sí se obtiene mediante unicidad de factorización y paridad de exponentes.

d)

$$p \mid a^m \Longrightarrow p \mid a$$

para p primo se deduce del **lema de Euclides**, aplicado al producto de m copias de a.

Así, la herramienta dominante es: lema de Euclides en a) y d), unicidad de factorización en b), y ninguna en c) tal como está formulada porque es falsa.

72. La frase "extraemos raíz cuadrada y raíz cúbica" no es una demostración aritmética porque presupone, sin justificarlo, que esas raíces son enteras y que la igualdad fuerza una parametrización común.

El plan correcto usa factorización única y separa primero los casos de dominio. Si $a = 0$, la igualdad fuerza $b = 0$ y se elige $c = 0$. Si $a \neq 0$, entonces $b^3 = a^2 > 0$, de modo que $b > 0$. Definimos $A = |a| > 0$ y $\varepsilon \in \{1, -1\}$ por $a = \varepsilon A$.

Escribimos

$$A = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Entonces

$$a^2 = b^3$$

implica, por unicidad de la factorización,

$$2\alpha_p = 3\beta_p$$

para todo primo p.

Como

$$\gcd(2, 3) = 1,$$

la igualdad anterior obliga a

$$3 \mid \alpha_p \qquad \text{y} \qquad 2 \mid \beta_p.$$

El siguiente paso sería escribir

$$\alpha_p = 3\gamma_p, \qquad \beta_p = 2\gamma_p$$

para una misma familia de exponentes γ_p, construir

$$C = \prod_p p^{\gamma_p},$$

y verificar que $A = C^3$ y $b = C^2$. Finalmente se elige $c = \varepsilon C$: como $\varepsilon^3 = \varepsilon$ y $\varepsilon^2 = 1$, quedan $a = c^3$ y $b = c^2$. Éstas son las verificaciones que completarían el plan; no se ha supuesto positividad de a en la consigna.

Ése es el argumento aritmético que debe sustituir la extracción informal de raíces.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Sea $p > 1$. Probaremos

$$p \text{ es primo } \iff p \text{ es irreducible en } \mathbb{Z}.$$

Primo implica irreducible. Supongamos que p es primo y que

$$p = ab, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Tomamos valores absolutos:

$$p = |a||b|.$$

Como $|a|$ es un divisor positivo de p y p es primo,

$$|a| = 1 \quad \text{o} \quad |a| = p.$$

Si $|a| = 1$, entonces

$$a = \pm 1,$$

y a es una unidad.
Si $|a| = p$, entonces de

$$p = |a||b| = p|b|$$

se sigue

$$|b| = 1,$$

de modo que $b = \pm 1$ es una unidad.

En cualquier factorización $p = ab$, al menos uno de los factores es una unidad. Como además $p \neq 0$ y p no es unidad porque $p > 1$, concluimos que p es irreducible.

Irreducible implica primo. Supongamos ahora que p es irreducible y sea $d > 0$ un divisor de p. Entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p = dq.$$

Como $p > 0$ y $d > 0$, necesariamente $q > 0$.

Por irreducibilidad, uno de los factores d o q debe ser una unidad. Pero ambos son positivos, así que la única unidad positiva posible es 1.

- Si $d = 1$, tenemos el divisor trivial inferior.
- Si $q = 1$, entonces $d = p$.

Por tanto, los únicos divisores positivos de p son

$$1 \quad \text{y} \quad p.$$

Luego p es primo.

El papel de las unidades ± 1 es esencial en la dirección primo $\Rightarrow$ irreducible: las factorizaciones con signos, como

$$p = (-1)(-p),$$

son perfectamente legítimas en $\mathbb{Z}$ y deben ser consideradas triviales porque -1 es una unidad.

Concluimos

$$\boxed{p \text{ primo} \iff p \text{ irreducible en } \mathbb{Z}.}$$

74. Sea $P(n)$ la afirmación:

todo entero $n > 1$ puede escribirse como producto finito de números primos.

Demostraremos $P(n)$ por inducción fuerte sobre n.

Base. Para $n = 2$, el número 2 es primo. Por tanto,

$$2 = 2$$

es ya una factorización prima.

Paso inductivo. Fijemos $n > 2$ y supongamos que $P(m)$ es verdadera para todo entero m con

$$2 \leq m < n.$$

Debemos demostrar $P(n)$.

Hay dos casos.

Caso 1: n es primo. Entonces

$$n = n$$

es un producto de un solo primo, y terminamos.

Caso 2: n es compuesto. Por definición existen enteros positivos a, b tales que

$$n = ab,$$

con

$$1 < a < n, \qquad 1 < b < n.$$

Estas desigualdades son el punto que habilita la inducción fuerte: ambos factores están estrictamente por debajo de n.

Por la hipótesis inductiva existen primos

$$p_1, \ldots, p_r$$

y

$$q_1, \ldots, q_s$$

tales que

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r,$$

$$b = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

Multiplicando,

$$n = ab = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s.$$

Así n también es producto finito de primos.

Por inducción fuerte, todo entero $n > 1$ admite una factorización prima.

Qué se ha probado. La prueba anterior demuestra **existencia**: garantiza que al menos una factorización prima existe para cada $n > 1$.

No demuestra **unicidad**, porque nunca compara dos posibles factorizaciones de un mismo entero. Para esa segunda parte hace falta un mecanismo adicional: el lema de Euclides, que permitirá forzar que un primo presente en una factorización también aparezca en la otra.

75. Sea p primo y supongamos

$$p \mid ab.$$

Queremos demostrar

$$p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b.$$

Si $p \mid a$, ya hemos terminado.

Supongamos entonces

$$p \nmid a.$$

Como p es primo, sus únicos divisores positivos son 1 y p. Todo divisor común positivo de p y a debe dividir a p. Pero p no divide a a, de modo que el MCD no puede ser p. Por tanto,

$$\gcd(p, a) = 1.$$

Por Bézout existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$px + ay = 1.$$

Multiplicamos por b:

$$pbx + aby = b.$$

Como

$$p \mid pbx$$

y, por hipótesis,

$$p \mid ab,$$

también

$$p \mid aby.$$

Por cierre bajo sumas,

$$p \mid (pbx + aby) = b.$$

Así, si p no divide a a, necesariamente divide a b. En todos los casos,

$$\boxed{p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b.}$$

Esta prueba no usa factorización única. Parte exclusivamente de primalidad y de Bézout/cancelación coprima de C15.

La afirmación falla para un divisor compuesto arbitrario. Por ejemplo,

$$6 \mid 2 \cdot 3,$$

pero

$$6 \nmid 2, \qquad 6 \nmid 3.$$

El número compuesto 6 puede "repartir" sus factores primos entre factores distintos del producto.

76. Supongamos que $n > 1$ admite dos factorizaciones en primos:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

Demostraremos que ambas listas coinciden salvo orden.

Paso 1: localizar p_1 en la segunda factorización. Como

$$p_1 \mid n$$

y

$$n = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

tenemos

$$p_1 \mid q_1 q_2 \cdots q_s.$$

La versión finita del lema de Euclides implica que existe algún índice j tal que

$$p_1 \mid q_j.$$

Pero q_j es primo. Como $p_1 > 1$, el único modo de que p_1 divida a q_j es

$$p_1 = q_j.$$

Reordenamos la segunda factorización y suponemos

$$p_1 = q_1.$$

Paso 2: cancelar. La igualdad inicial se convierte en

$$p_1 p_2 \cdots p_r = p_1 q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_1 \neq 0$, cancelamos en $\mathbb{Z}$:

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Paso 3: repetir. Aplicamos el mismo argumento a p_2. Debe coincidir con uno de los primos restantes del lado derecho. Reordenamos y cancelamos de nuevo.

Repitiendo finitamente, hacemos corresponder uno a uno los factores de ambas listas.

Paso 4: demostrar que las longitudes coinciden. Supongamos, por ejemplo, que $r < s$. Después de cancelar $p_1, \ldots, p_r$, obtendríamos

$$1 = q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_s.$$

Pero cada $q_j > 1$, de modo que

$$q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_s > 1,$$

contradicción.

Del mismo modo, $s < r$ es imposible. Por tanto,

$$r = s.$$

Tras una reordenación,

$$p_i = q_i$$

para todo i.

Concluimos que la factorización prima es única salvo el orden de los factores.

Los únicos ingredientes sustantivos usados fueron:

- el lema de Euclides para localizar un factor primo dentro de un producto;
- la primalidad del factor encontrado para convertir divisibilidad en igualdad;
- la cancelación ordinaria en $\mathbb{Z}$;
- la finitud de ambas listas.

77. Sean

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Sólo finitos exponentes son distintos de 0.

Divisibilidad. Supongamos primero

$$\alpha_p \le \beta_p$$

para todo p. Definimos

$$c = \prod_p p^{\beta_p - \alpha_p}.$$

Entonces

$$ac = \prod_p p^{\alpha_p} \prod_p p^{\beta_p - \alpha_p} = \prod_p p^{\beta_p} = b.$$

Por tanto,

$$a \mid b.$$

Recíprocamente, si $a \mid b$, existe $c > 0$ con $b = ac$. Escribimos

$$c = \prod_p p^{\gamma_p}.$$

Entonces

$$b = ac = \prod_p p^{\alpha_p + \gamma_p}.$$

Por **unicidad de la factorización prima**,

$$\beta_p = \alpha_p + \gamma_p,$$

y por tanto

$$\alpha_p \le \beta_p.$$

Así,

$$\boxed{a \mid b \iff \alpha_p \leq \beta_p \text{ para todo } p.}$$

MCD. Definamos

$$d = \prod_p p^{\text{mín}(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Como los mínimos no superan a ninguno de los exponentes originales,

$$d \mid a, \qquad d \mid b.$$

Si

$$e = \prod_p p^{\varepsilon_p}$$

es cualquier divisor común, entonces

$$\varepsilon_p \leq \alpha_p, \qquad \varepsilon_p \leq \beta_p,$$

por lo que

$$\varepsilon_p \leq \text{mín}(\alpha_p, \beta_p).$$

Luego $e \mid d$. Así,

$$\boxed{\gcd(a, b) = \prod_p p^{\text{mín}(\alpha_p, \beta_p)}.}$$

MCM. Definimos

$$m = \prod_p p^{\text{máx}(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Como

$$\alpha_p, \beta_p \leq \text{máx}(\alpha_p, \beta_p),$$

tenemos

$$a \mid m, \qquad b \mid m.$$

Sea

$$M = \prod_p p^{\mu_p}$$

cualquier múltiplo común. Entonces

$$\alpha_p \leq \mu_p, \qquad \beta_p \leq \mu_p,$$

así que

$$\text{máx}(\alpha_p, \beta_p) \leq \mu_p.$$

Por consiguiente,

$$m \mid M.$$

Así,

$$\boxed{\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}.}$$

Producto MCD–MCM. Para enteros no negativos r, s,

$$\min(r,s) + \max(r,s) = r + s.$$

Aplicando primo por primo,

$$\begin{aligned}\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) &= \prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)+\max(\alpha_p,\beta_p)} \\ &= \prod_p p^{\alpha_p+\beta_p} = ab.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) = ab.}$$

La unicidad de factorización interviene al identificar los exponentes de un producto con las sumas de exponentes y al garantizar que las representaciones $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ están bien definidas de manera única.

78. Supongamos, por contradicción, que existen sólo finitos primos. Los enumeramos como

$$p_1, p_2, \ldots, p_k.$$

Formamos

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1.$$

Como $N > 1$, el teorema de la sección 16.4 garantiza que existe algún primo q tal que

$$q \mid N.$$

No necesitamos saber si N es primo o compuesto.

Supongamos que q perteneciera a la lista. Entonces, para algún j,

$$q = p_j.$$

En ese caso,

$$q \mid p_1 p_2 \cdots p_k.$$

Además, por construcción,

$$q \mid N.$$

Por tanto, q divide la diferencia:

$$q \mid (N - p_1 p_2 \cdots p_k).$$

Pero

$$N - p_1 p_2 \cdots p_k = 1.$$

Así,

$$q \mid 1,$$

imposible porque $q > 1$.

Por consiguiente, el divisor primo q de N no está en la lista inicial. Esto contradice que la lista contenía todos los primos.

Luego existen infinitos números primos.

La afirmación

$$N \text{ es primo}$$

no se necesita en ningún paso. Además, es falsa en general. Por ejemplo,

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509.$$

El argumento sigue funcionando porque basta con que N tenga **algún divisor primo nuevo**.

79. Sean $a, b > 0$ con

$$\gcd(a, b) = 1$$

y supongamos que

$$ab$$

es un cuadrado perfecto.

Escribamos las factorizaciones primas

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Entonces

$$ab = \prod_p p^{\alpha_p + \beta_p}.$$

Como ab es cuadrado perfecto, el criterio de la sección 16.14 implica

$$\alpha_p + \beta_p$$

es un entero par para todo primo p.

Ahora usamos la coprimalidad. La condición

$$\gcd(a, b) = 1$$

es equivalente a

$$\min(\alpha_p, \beta_p) = 0$$

para todo primo p. Así, para cada p, al menos uno de los dos exponentes es 0.

- Si $\alpha_p > 0$, entonces $\beta_p = 0$. Como $\alpha_p + \beta_p = \alpha_p$ es par, α_p es par.
- Si $\beta_p > 0$, entonces $\alpha_p = 0$. Como $\alpha_p + \beta_p = \beta_p$ es par, β_p es par.

Por tanto, todos los exponentes primos de a son pares y todos los exponentes primos de b también.

Existen entonces enteros no negativos r_p, s_p tales que

$$\alpha_p = 2r_p, \qquad \beta_p = 2s_p.$$

Definimos

$$x = \prod_p p^{r_p}, \qquad y = \prod_p p^{s_p}.$$

Entonces

$$a = x^2, \qquad b = y^2.$$

Así,

$$\boxed{a \text{ y } b \text{ son cuadrados perfectos.}}$$

La coprimalidad es indispensable. Si la eliminamos, un mismo primo puede aportar un exponente impar a cada factor y producir un exponente total par. Por ejemplo,

$$2 \cdot 8 = 16 = 4^2,$$

pero ni 2 ni 8 es cuadrado perfecto. Aquí el primo 2 aparece con exponentes 1 y 3, ambos impares, cuya suma es 4.

80. Sean

$$a, b, m, n > 0,$$

con

$$\gcd(m, n) = 1$$

y

$$a^m = b^n.$$

Queremos demostrar que existe $c > 0$ tal que

$$a = c^n, \qquad b = c^m.$$

1. Comparar exponentes primo a primo. Escribimos las factorizaciones canónicas

$$a = \prod_p p^{\alpha_p}, \qquad b = \prod_p p^{\beta_p}.$$

Entonces

$$a^m = \prod_p p^{m\alpha_p},$$

y

$$b^n = \prod_p p^{n\beta_p}.$$

Como

$$a^m = b^n,$$

la unicidad de la factorización prima obliga a que, para cada primo p,

$$\boxed{m\alpha_p = n\beta_p.}$$

Éste es el punto exacto donde interviene el teorema fundamental de la aritmética.

2. Usar la coprimalidad de m y n. De

$$m\alpha_p = n\beta_p$$

se sigue

$$n \mid m\alpha_p.$$

Como

$$\gcd(m, n) = 1,$$

la cancelación coprima de C15 da

$$\boxed{n \mid \alpha_p.}$$

Por tanto existe $\gamma_p \geq 0$ tal que

$$\alpha_p = n\gamma_p.$$

Análogamente,

$$m \mid n\beta_p.$$

Como $\gcd(m, n) = 1$,

$$\boxed{m \mid \beta_p.}$$

Existe entonces $\delta_p \geq 0$ tal que

$$\beta_p = m\delta_p.$$

Sustituyendo en

$$m\alpha_p = n\beta_p,$$

obtenemos

$$m(n\gamma_p) = n(m\delta_p).$$

Como $mn > 0$, cancelamos:

$$\gamma_p = \delta_p.$$

Llamemos a este exponente común simplemente γ_p. Así,

$$\alpha_p = n\gamma_p, \qquad \beta_p = m\gamma_p.$$

3. Construir el entero común. Definimos

$$c = \prod_p p^{\gamma_p}.$$

Este producto es finito porque sólo finitos primos aparecen en a o en b.
Entonces

$$c^n = \prod_p p^{n\gamma_p} = \prod_p p^{\alpha_p} = a.$$

Del mismo modo,

$$c^m = \prod_p p^{m\gamma_p} = \prod_p p^{\beta_p} = b.$$

Por tanto,

$$\boxed{a = c^n, \qquad b = c^m.}$$

Dependencias exactas. La prueba usa dos herramientas distintas:

1. **Unicidad de factorización**, para pasar de la igualdad global
$$a^m = b^n$$
a las igualdades locales
$$m\alpha_p = n\beta_p$$
para cada primo p.
2. **Cancelación coprima de C15**, para deducir de
$$n \mid m\alpha_p, \qquad \gcd(m, n) = 1$$
que
$$n \mid \alpha_p,$$
y simétricamente $m \mid \beta_p$.

El resultado muestra cómo una ecuación entre potencias se convierte, gracias al teorema fundamental de la aritmética, en un sistema independiente de ecuaciones lineales entre exponentes primos.

N. Hipótesis, exponentes y certificados

81. Si d es primo, la propiedad es el lema de Euclides, ya demostrado desde Bézout. Recíprocamente, supongamos que la propiedad vale y que d no es primo. Como $d > 1$, es compuesto: $d = uv$ con $1 < u, v < d$. Tomamos $a = u$, $b = v$. Entonces $d \mid ab$ con testigo uno, pero $d \nmid u$ y $d \nmid v$: una igualdad $u = dt$ con $u > 0$ exigiría $t \geq 1$ y, por tanto, $u \geq d$, contradicción. Lo mismo sucede con v.

Esto contradice la propiedad universal. Por tanto d es primo. La fabricación funciona incluso si $u = v$, como en $d = 9 = 3 \cdot 3$. No se presupone una factorización única ni que los factores elegidos sean coprimos. La propiedad sobre todos los productos caracteriza al divisor; un producto particular no bastaría para ello.

82. Para cada entero $r \geq 1$, tomamos $a = p^r$ y $b = q$. El número $d = pq$ divide a $ab = p^r q$ con testigo p^{r-1}. Si q dividiera a p^r, el lema de Euclides para potencias daría $q \mid p$, imposible por ser primos distintos. Como todo divisor común positivo de p^r y q es uno o q, resulta $\gcd(a, b) = 1$.

No ocurre $d \mid a$: implicaría $q \mid p^r$. Tampoco $d \mid b = q$, porque $d = pq > q > 0$. Las primeras coordenadas p^r son distintas, así que obtenemos infinitos ejemplos. La coprimalidad entre los factores del producto no permite cancelar el divisor completo.

Para reparar la inferencia, suponemos $\gcd(d, a) = 1$. Bézout da $dx + ay = 1$ con $x, y \in \mathbb{Z}$. Multiplicar por b entrega $dbx + aby = b$. Ambos términos del lado izquierdo son divisibles por d, el segundo por la hipótesis $d \mid ab$. Luego $d \mid b$. Esta reparación se deduce de C15 y no requiere que d sea primo.

83. El producto es p^{r+s}, por lo que es una k-ésima potencia exactamente cuando $k \mid r + s$. Cada factor lo es exactamente cuando su exponente es múltiplo de k, incluido el exponente cero. Dividimos $r = ku + i$ y $s = kv + j$, con $u, v \geq 0$ y $0 \leq i, j < k$.

Para que ninguno sea potencia necesitamos $i, j \neq 0$. Entonces $2 \leq i + j \leq 2k - 2$; el único múltiplo de k posible en ese intervalo es k. Por tanto la clasificación completa es

$$r = ku + i, \qquad s = kv + k - i, \qquad u, v \geq 0, \quad 1 \leq i \leq k - 1.$$

Recíprocamente, esas expresiones dan exponentes no divisibles por k y suma $k(u+v+1)$, así que el producto es $(p^{u+v+1})^k$. La división entera de una pareja arbitraria probó exhaustividad. Fijando $i = 1$, $v = 0$ y variando u se obtienen infinitos ejemplos. Comparten el primo p, de modo que falla precisamente la coprimalidad que permite separar las potencias de un producto.

84. La igualdad es cierta: ambos productos valen 84. La segunda lista no es una factorización prima porque $14 = 2 \cdot 7$ es compuesto. Sustituir ese factor produce $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$. Reordenamos para localizar un dos y cancelarlo frente al primero de la lista izquierda; queda $2 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \cdot 2 \cdot 7$. Reordenamos otra vez y cancelamos el segundo dos; queda $3 \cdot 7 = 3 \cdot 7$. Cancelamos tres y después siete, y obtenemos $1 = 1$.

Estas operaciones sólo usan identidades concretas, reordenación y cancelación de factores comunes no nulos. Cada primo de la lista reparada queda emparejado, contando repeticiones. No se usó la unicidad como premisa. En la comparación general, el lema de Euclides permite localizar cada primo en la lista contraria. Si al vaciar un lado quedaran $h \geq 1$ primos en el otro, su producto sería al menos $2^h > 1$, incompatible con la igualdad restante. Una longitud distinta de listas no primas no contradice el teorema.

85. El conjunto de divisores positivos propios de n es no vacío, porque contiene uno, y es finito, porque está contenido en $\{1, \ldots, n-1\}$. Por eso existe D. El cociente $q = n/D$ es un entero positivo mayor que uno.

Si q fuera compuesto, escribiríamos $q = uv$ con $1 < u, v < q$. Entonces $n = (Du)v$, de modo que Du sería divisor de n. Además $Du > D$, porque $u > 1$, y $Du < n$, porque $v > 1$. Esto contradice la elección de D. Por tanto q es primo. Sólo se usó la definición de compuesto y maximalidad entre divisores.

Si $D = 1$, la conclusión dice que n mismo es primo. Recíprocamente, si n es primo, su único divisor positivo propio es uno. El número D no necesita ser primo: para $n = 36$, el mayor divisor propio es dieciocho, pues $36/D$ es entero al menos dos y obliga a $D \leq 18$; dieciocho efectivamente divide a 36. Aquí el cociente es dos y $D = 18$ es compuesto.

86. Como $N > 1$, la existencia de un divisor primo de §16.4 proporciona q primo con $q \mid N$. Si $q \leq n$, el entero positivo q aparece entre los factores $1, 2, \ldots, n$; por ello $q \mid n!$.

Entonces divide también la diferencia $N - n! = 1$, imposible para un primo mayor que uno. Luego $q > n$.

Este razonamiento se aplica a cualquier divisor primo de N, no sólo a uno seleccionado. No requiere factorizar completamente N, ni conocer unicidad, ni declarar primo a N. Para $n = 5$, $N = 120 + 1 = 121 = 11 \cdot 11$ es compuesto. Once es primo: los únicos primos no mayores que su raíz son dos y tres, que no lo dividen. Tenemos $11 > 5$ y $11 \mid 121$, como exige el argumento. El factorial organiza todos los posibles divisores primos pequeños; la diferencia uno los descarta simultáneamente.

87. Escribimos C en factores primos. Para que NC sea cubo, el exponente de dos en C debe tener forma $2 + 3u$, el de tres forma $1 + 3v$ y el de siete forma $1 + 3w$, con $u, v, w \geq 0$. Todo otro primo sólo puede aparecer en C con exponente múltiplo de tres. Estas condiciones proceden de exigir que $7 + \beta_2$, $5 + \beta_3$, $2 + \beta_7$ y los exponentes restantes sean múltiplos de tres.

Por tanto todos los multiplicadores, y sólo ellos, son

$$C = 2^2 \cdot 3 \cdot 7\, t^3 = 84t^3, \qquad t \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

La forma se obtiene reuniendo los exponentes excedentes divididos por tres; su necesidad demuestra exhaustividad. Recíprocamente, $NC = 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^3 t^3 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7\, t)^3 = (504t)^3$. Así cada candidato funciona. Como $t \geq 1$, $C \geq 84$, con igualdad para $t = 1$. El menor multiplicador es 84, y la raíz positiva de cada producto es $504t$. La minimalidad queda probada, no sólo exhibida.

88. El criterio de exponentes exige que k divida simultáneamente a doce, dieciocho y treinta. Sus divisores comunes positivos son los divisores de seis: $1, 2, 3, 6$. Se puede comprobar sin una búsqueda abierta: cualquier divisor común divide $18 - 12 = 6$, y cualquier divisor de seis divide las tres entradas. Con $k \geq 2$, quedan exactamente $2, 3, 6$.

Las raíces positivas construidas son, respectivamente, $2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{15}$, $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{10}$ y $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$. Elevar cada una al exponente correspondiente recupera N por las leyes de potencias. No existen otros exponentes porque ya clasificamos todos los divisores comunes.

Para uno, todos los exponentes primos son cero y cualquier entero $k \geq 2$ divide a cero. Por ello $1 = 1^k$ para todos esos k. No debemos buscar un mayor exponente finito ni aplicar la lista anterior: no hay exponentes positivos que limiten k.

89. Los exponentes de N^h son $6h, 9h, 15h$. Se necesita y basta que doce divida a los tres. Si esto ocurre, doce divide a la diferencia $9h - 6h = 3h$, por lo que $3h = 12t$ para algún entero y cancelar tres da $h = 4t$. Como $h \geq 1$, $t \geq 1$.

Recíprocamente, con $h = 4t$, los exponentes son $24t, 36t, 60t$, todos divisibles por doce. La raíz positiva es $R = 2^{2t} \cdot 3^{3t} \cdot 5^{5t}$, y $R^{12} = N^{4t}$. Por tanto la clasificación exhaustiva es $h = 4t$, $t \in \mathbb{Z}_{>0}$. La necesidad empezó con un exponente arbitrario que cumple la condición, y la construcción prueba suficiencia. Probar solamente los primeros valores de h no establecería esta familia completa.

90. Como $15^2 = 225 < 251 < 256 = 16^2$, todos los primos no mayores que su raíz son 2, $3, 5, 7, 11, 13$. Las divisiones son

$$251 = 2 \cdot 125 + 1 = 3 \cdot 83 + 2 = 5 \cdot 50 + 1,$$

$$251 = 7 \cdot 35 + 6 = 11 \cdot 22 + 9 = 13 \cdot 19 + 4.$$

Los restos no nulos descartan todos los posibles divisores primos pequeños; por §16.12, 251 es primo. La lista de primos hasta quince es completa: los otros enteros entre dos y quince son compuestos, como se comprueba con factores dos, tres, cinco o siete.

Para 253 basta la identidad $253 = 11 \cdot 23$, cuyos factores son positivos mayores que uno y menores que 253. Esto ya certifica composición; ni siquiera hace falta probar que ambos factores sean primos. La primalidad requiere descartar exhaustivamente los divisores que podrían existir. La composición requiere un único testigo no trivial. No encontrar un divisor en unos pocos intentos no equivale al primer certificado.

91. Los controles informados descartan esos ocho primos, pero no completan el criterio. Tenemos $1000^2 = 1000000 < 1000003 < 1002001 = 1001^2$, de modo que deben descartarse todos los primos no mayores que mil. Los que aún faltan son exactamente los primos p con $19 < p \leq 1000$, empezando por 23. Por ejemplo, comprobar 23 también es necesario dentro de este método, y descartar sólo ese primo adicional seguiría sin cerrar el certificado.

No se concluye de este examen incompleto que N sea compuesto: la ausencia de una prueba no determina el resultado. El problema pide evaluar el alcance del certificado, y con la información dada la primalidad queda sin certificar por el criterio elegido.

Para 1000005, la igualdad $3 \cdot 333335 = 1000005$ exhibe dos factores positivos no triviales. Por tanto es compuesto y no requiere descartar más divisores. Ambos números son del mismo orden de tamaño, pero las obligaciones de prueba son distintas. Un factor hallado cierra composición; para este certificado de primalidad hace falta cubrir la lista completa hasta la barrera.

92. La primera afirmación es cierta: si un primo $p \leq m$ dividiera a $m! + 1$, también dividiría a $m!$ y a su diferencia uno. El salto hacia primalidad es inválido porque la barrera necesaria es $\sqrt{m! + 1}$, que puede superar a m. Con $m = 5$, $5! + 1 = 121 = 11^2$ no tiene divisor primo no mayor que cinco, pero es compuesto.

Si se conoce $m! + 1 = ab$ con $1 < a \leq b$, entonces $a^2 \leq ab = m! + 1$. Por §16.4, a tiene un divisor primo q. Así $q \leq a \leq \sqrt{m! + 1}$ y $q \mid m! + 1$. El argumento de la diferencia uno prueba además que $q > m$. Por tanto $m < q \leq \sqrt{m! + 1}$.

El resultado combina un certificado de composición con la exclusión simultánea de divisores pequeños. No usa una factorización única ni presupone que el cofactor sea primo. En el contraejemplo, $q = 11$ cumple $5 < 11 \leq \sqrt{121} = 11$: la desigualdad de la barrera permite igualdad y no debe sustituirse por una desigualdad estricta.

Capítulo 17

Congruencias y aritmética modular

En los capítulos anteriores aprendimos a mirar los enteros mediante divisibilidad, máximo común divisor, factorización y combinaciones lineales. Ahora introduciremos una manera distinta de comparar enteros: en lugar de preguntar si son iguales, preguntaremos si **dejan el mismo resto al dividir por un entero fijo**.

Por ejemplo, al dividir por 5 los números

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22$$

dejan todos resto 2. Desde el punto de vista de los restos módulo 5, esos enteros se comportan como una sola clase.

La afirmación

$$17 \equiv 2 \pmod 5$$

no significa que $17 = 2$. Significa que su diferencia es múltiplo de 5:

$$5 \mid (17 - 2).$$

Esta pequeña modificación del concepto de igualdad produce una estructura sorprendentemente rica. La congruencia será una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$; sus clases podrán sumarse y multiplicarse; aparecerán inversos cuando exista coprimalidad; las ecuaciones lineales se convertirán en congruencias lineales; y, finalmente, el Teorema Chino del Resto permitirá reconstruir un entero a partir de varios restos compatibles.

La idea central del capítulo será:

> **La congruencia transforma una condición de divisibilidad en una relación de equivalencia compatible con suma y producto. Al pasar de enteros a clases residuales obtenemos una aritmética finita en la que la posibilidad de cancelar o invertir está gobernada exactamente por la coprimalidad.**

Trabajaremos siempre con un módulo $n \geq 2$, salvo indicación expresa.

17.1. Cuando los enteros se observan a través de un módulo

En la aritmética usual, dos enteros distintos permanecen distintos. Sin embargo, muchos problemas no dependen del valor exacto de un entero, sino únicamente de su resto al dividir por cierto número fijo.

Si dividimos cualquier entero a por 5, el algoritmo de división de C15 produce enteros únicos q y r tales que

$$a = 5q + r, \qquad 0 \leq r < 5.$$

Por tanto, sólo existen cinco restos posibles:

$$0, 1, 2, 3, 4.$$

Todo entero pertenece exactamente a una de las cinco familias

$$\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots,$$

$$\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots,$$

$$\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots,$$

$$\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots,$$

$$\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots.$$

Los miembros de cada fila difieren entre sí en múltiplos de 5.

Esta observación sugiere una relación. Diremos que dos enteros son equivalentes respecto del módulo 5 cuando su diferencia es divisible por 5. Así, por ejemplo,

$$23 - 8 = 15,$$

de modo que 23 y 8 serán equivalentes módulo 5.

La misma idea funciona para cualquier módulo $n \geq 2$. No estamos "cambiando" los enteros. Estamos eligiendo deliberadamente ignorar toda información excepto aquella que permanece visible al dividir por n.

Esta perspectiva es útil porque muchas propiedades aritméticas son periódicas. Por ejemplo, si un entero es par depende sólo de su resto módulo 2; si un entero es múltiplo de 3 depende sólo de su resto módulo 3; y el último dígito de un entero depende sólo de su resto módulo 10.

El paso importante será convertir esta intuición en una definición precisa y, después, demostrar que esa definición es compatible con las operaciones aritméticas.

17.2. Definición de congruencia y equivalencias básicas

Sea $n \geq 2$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\boxed{a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b).}$$

Leemos $a \equiv b \pmod{n}$ como "a es congruente con b módulo n".

Por ejemplo,

$$37 \equiv 7 \pmod{10}$$

porque

$$10 \mid (37 - 7) = 30.$$

También

$$-8 \equiv 4 \pmod{6}$$

porque

$$6 \mid (-8 - 4) = -12.$$

La definición puede escribirse de una segunda manera. Por divisibilidad,

$$n \mid (a-b)$$

si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a - b = kn.$$

Equivalentemente,

$$\boxed{a \equiv b \pmod{n} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \ a = b + kn.}$$

Esta forma permite ver que dos enteros congruentes difieren exactamente en un número entero de módulos.

Congruencia y resto canónico

La tercera caracterización conecta la congruencia con el algoritmo de división.

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$. Entonces

$$a \equiv b \pmod{n}$$

si y sólo si a y b dejan el mismo resto al dividir por n.

Demostración. Por el algoritmo de división existen enteros q_1, q_2 y restos r_1, r_2 con

$$a = nq_1 + r_1, \qquad b = nq_2 + r_2,$$

$$0 \leq r_1, r_2 < n.$$

Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $n \mid (a-b)$. Pero

$$a - b = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

Por tanto $n \mid (r_1 - r_2)$. Como

$$-(n-1) \leq r_1 - r_2 \leq n - 1,$$

el único múltiplo de n posible es 0. Luego $r_1 = r_2$.

Recíprocamente, si $r_1 = r_2$, entonces

$$a - b = n(q_1 - q_2),$$

y por tanto $n \mid (a-b)$. Así,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Esto demuestra la equivalencia. $\square$

Por ejemplo,

$$-17 = 5(-4) + 3,$$

así que el resto canónico de -17 módulo 5 es 3. En consecuencia,

$$-17 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Conviene distinguir cuidadosamente dos usos del lenguaje:

- $a \equiv b \pmod{n}$ es una **relación** entre dos enteros;

- “el resto de a módulo n” es el único entero $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ que representa la clase de a.

17.3. Congruencia como relación de equivalencia

En C8 estudiamos relaciones reflexivas, simétricas y transitivas. La congruencia módulo n proporciona ahora un ejemplo aritmético fundamental.

Teorema. Para todo $n \geq 2$, la relación

$$a \sim b \iff a \equiv b \pmod{n}$$

es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Demostración. Verificamos las tres propiedades.

Reflexividad. Para todo $a \in \mathbb{Z}$,

$$a - a = 0,$$

y $n \mid 0$. Por tanto

$$a \equiv a \pmod{n}.$$

Simetría. Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces

$$n \mid (a - b).$$

Como $b - a = -(a - b)$, también

$$n \mid (b - a).$$

Luego

$$b \equiv a \pmod{n}.$$

Transitividad. Si

$$a \equiv b \pmod{n}$$

y

$$b \equiv c \pmod{n},$$

entonces

$$n \mid (a - b)$$

y

$$n \mid (b - c).$$

Por cierre de los múltiplos bajo suma,

$$n \mid [(a - b) + (b - c)] = a - c.$$

Por tanto

$$a \equiv c \pmod{n}.$$

La congruencia módulo n es, pues, una relación de equivalencia. □

Este resultado no es sólo terminológico. Toda relación de equivalencia particiona el conjunto sobre el que está definida. Por tanto, $\mathbb{Z}$ queda dividido en clases disjuntas de enteros congruentes entre sí.

Para módulo 4, por ejemplo, aparecen cuatro clases:

$$\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots,$$

$$\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots,$$

$$\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots,$$

$$\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots.$$

Desde este punto de vista, la aritmética modular no comienza con reglas de cálculo. Comienza con una **partición de $\mathbb{Z}$ producida por una relación de equivalencia**.

17.4. Clases residuales y representantes canónicos

Para $a \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$, definimos la **clase residual de a módulo n** por

$$[a]_n = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \pmod{n}\}.$$

Por ejemplo,

$$[2]_5 = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}.$$

La notación no privilegia realmente al número 2. Como $7 \equiv 2 \pmod 5$,

$$[7]_5 = [2]_5.$$

Esto es un caso particular de una propiedad general.

Teorema. Para $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{[a]_n = [b]_n \iff a \equiv b \pmod{n}.}$$

Demostración. Si $a \equiv b \pmod n$, sea $x \in [a]_n$. Entonces

$$x \equiv a \pmod{n}.$$

Como $a \equiv b \pmod n$, por transitividad

$$x \equiv b \pmod{n},$$

de modo que $x \in [b]_n$. Así $[a]_n \subseteq [b]_n$. El argumento simétrico da la inclusión contraria.

Recíprocamente, si $[a]_n = [b]_n$, como $a \in [a]_n$, se tiene $a \in [b]_n$. Por definición,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

□

Representantes canónicos

Cada clase tiene infinitos representantes, pero el algoritmo de división selecciona uno de manera canónica.

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe un único r con

$$0 \leq r < n$$

tal que

$$a \equiv r \pmod{n}.$$

Ese r es precisamente el resto de dividir a por n.

Por ejemplo, módulo 7:

$$-23 = 7(-4) + 5,$$

luego

$$[-23]_7 = [5]_7.$$

Por tanto, las clases distintas módulo n son exactamente

$$[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n.$$

Además son distintas dos a dos. En efecto, si

$$[r]_n = [s]_n$$

con $0 \leq r, s < n$, entonces $r \equiv s \pmod{n}$, de modo que $n \mid (r - s)$. Pero $|r - s| < n$, por lo que necesariamente $r = s$.

Así, aunque cada clase contiene infinitos enteros, el conjunto de clases tiene exactamente n elementos.

17.5. El cociente elemental $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Definimos

$$\boxed{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}.}$$

Este conjunto no debe confundirse con $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Sus elementos son **clases de equivalencia**, cada una de las cuales contiene infinitos enteros. Los números $0, 1, \ldots, n-1$ sirven únicamente como representantes canónicos de esas clases.

Por ejemplo,

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}.$$

El paso de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puede interpretarse como un proceso de identificación: enteros distintos se consideran iguales cuando su diferencia es múltiplo de n.

Sistemas completos de residuos

Un conjunto de n enteros

$$\{r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}\}$$

se llama **sistema completo de residuos módulo** n si contiene exactamente un representante de cada clase módulo n.

El sistema canónico es

$$\{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Pero no es el único. Por ejemplo,

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

es un sistema completo de residuos módulo 5.

Para verificarlo basta observar que sus restos canónicos son

$$3, 4, 0, 1, 2,$$

que recorren todas las clases exactamente una vez.

La idea de sistema completo de residuos será útil más adelante: multiplicar todos los representantes por un número coprimo con n volverá a producir un sistema completo de residuos. Esa afirmación será otra cara de la invertibilidad modular.

Nota pedagógica — Tres objetos que la notación no debe confundir. Un entero a, su clase $[a]_n$ y el resto canónico r son objetos diferentes. El entero pertenece a su clase; el resto también pertenece a ella. La igualdad $[a]_n = [r]_n$ identifica dos conjuntos, mientras $a \equiv r \pmod{n}$ compara dos enteros. Ninguna de esas afirmaciones exige $a = r$.

Control resuelto. Con módulo seis, $-19 = 6(-4) + 5$. El resto es cinco y $[-19]_6 = [5]_6 = [11]_6$, aunque esos tres representantes no son iguales. La clase es el conjunto $\{5 + 6t : t \in \mathbb{Z}\}$; el conjunto cociente tiene seis clases, no seis enteros. La elección de un representante por clase permite hacer tablas finitas, pero no cambia los elementos del cociente en números ordinarios.

Un sistema completo de residuos sólo exige una elección por cada clase. Por ejemplo, $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ es completo módulo seis porque sus restos son $3, 4, 5, 0, 1, 2$. En cambio, seis enteros distintos pueden representar una sola clase: $\{5, 11, 17, 23, 29, 35\}$. Antes de contar clases, reduce los representantes y comprueba cuáles se identifican.

17.6. Compatibilidad con suma, resta, producto y potencias

La congruencia sería poco útil si no respetara las operaciones aritméticas. El siguiente resultado es la base del cálculo modular.

Teorema. Si

$$a \equiv a' \pmod{n}$$

y

$$b \equiv b' \pmod{n},$$

entonces

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n},$$

$$a - b \equiv a' - b' \pmod{n},$$

y

$$ab \equiv a'b' \pmod{n}.$$

Demostración. Existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a - a' = rn, \qquad b - b' = sn.$$

Para la suma,

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') = (r + s)n.$$

Por tanto

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n}.$$

La resta se trata de manera análoga.
Para el producto,

$$ab - a'b' = a(b - b') + b'(a - a').$$

Sustituyendo,

$$ab - a'b' = a(sn) + b'(rn) = n(as + b'r),$$

por lo que

$$ab \equiv a'b' \pmod{n}.$$

□

Potencias

Si

$$a \equiv b \pmod{n},$$

entonces para todo entero $k \geq 1$,

$$\boxed{a^k \equiv b^k \pmod{n}.}$$

La afirmación se obtiene aplicando repetidamente la compatibilidad con el producto, o por inducción.

Reducir antes de calcular

Supongamos que queremos hallar el resto de

$$38^4 + 27^3$$

módulo 5. Como

$$38 \equiv 3 \pmod{5}, \qquad 27 \equiv 2 \pmod{5},$$

se sigue que

$$38^4 + 27^3 \equiv 3^4 + 2^3 = 81 + 8 = 89 \equiv 4 \pmod 5.$$

No fue necesario calcular las potencias originales. Podemos reducir **antes**, **durante** y **después** de las operaciones porque la congruencia es compatible con suma y producto.

Este principio convierte muchos cálculos enormes en operaciones con representantes pequeños.

17.7. Operaciones sobre clases y el problema de la buena definición

Queremos ahora sumar y multiplicar directamente clases residuales. La definición natural es

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n,$$

$$[a]_n[b]_n = [ab]_n.$$

Sin embargo, hay una dificultad lógica. Una misma clase tiene muchos representantes. Por ejemplo,

$$[2]_5 = [7]_5.$$

Si usamos 2 o 7 para calcular, ¿obtenemos realmente la misma clase final?

Ésta es la cuestión de la **buena definición**.

Teorema. Las operaciones anteriores no dependen de los representantes elegidos.

Demostración. Supongamos

$$[a]_n = [a']_n, \qquad [b]_n = [b']_n.$$

Por el criterio de igualdad de clases,

$$a \equiv a' \pmod n, \qquad b \equiv b' \pmod n.$$

Por compatibilidad,

$$a + b \equiv a' + b' \pmod n,$$

y

$$ab \equiv a'b' \pmod n.$$

Luego

$$[a+b]_n = [a'+b']_n$$

y

$$[ab]_n = [a'b']_n.$$

Por tanto las operaciones están bien definidas. □

Un pequeño laboratorio: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

En $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tenemos, por ejemplo,

$$[3]_4 + [3]_4 = [6]_4 = [2]_4,$$

$$[3]_4[3]_4 = [9]_4 = [1]_4.$$

También

$$[2]_4[2]_4 = [4]_4 = [0]_4.$$

Esta última igualdad anuncia una diferencia importante respecto de la aritmética de enteros: en el mundo de las clases módulo 4 pueden aparecer productos de clases no nulas que dan la clase cero.

No desarrollaremos todavía la teoría general de anillos. Pero sí registraremos el fenómeno, porque explica por qué la cancelación puede fallar.

Nota pedagógica — Una regla debe sobrevivir al cambio de representante. Para una regla $[a]_n \mapsto [f(a)]_n$, la obligación es universal: si $a' = a + nt$, se debe demostrar que $n \mid f(a') - f(a)$ para todo entero t. Una sola pareja favorable no prueba buena definición. En cambio, una pareja de representantes de la misma clase que produzca clases distintas refuta la regla.

Control resuelto sobre las mismas entradas. Módulo cinco, $[2]_5 = [7]_5$. La regla $[a]_5 \mapsto [a^2]_5$ produce $[4]_5$ usando dos y $[49]_5 = [4]_5$ usando siete. Para representantes arbitrarios, $(a + 5t)^2 - a^2 = 5(2at + 5t^2)$; la regla está bien definida.

La regla propuesta $[a]_5 \mapsto [|a|]_5$ falla: $[2]_5 = [-3]_5$, pero $[|2|]_5 = [2]_5$ y $[|-3|]_5 = [3]_5$ son distintas. No es una función sobre clases si se permite cualquier representante. Podemos definir otra regla eligiendo primero el resto canónico; ésa sí tiene un valor determinado porque el resto es único, pero la elección debe formar parte de la definición y no se puede reemplazar por un representante arbitrario.

El criterio también se aplica a propiedades: «este representante es positivo» no depende sólo de la clase, pues una misma clase tiene representantes de ambos signos. Ser una expresión familiar en los enteros no basta para que descienda al cociente.

17.8. Cancelación: por qué puede fallar y cuándo se recupera

En los enteros, si $c \neq 0$ y

$$ca = cb,$$

podemos cancelar c y concluir $a = b$.

Para congruencias, la afirmación análoga no es siempre verdadera.

Por ejemplo,

$$2 \cdot 1 \equiv 2 \cdot 3 \pmod 4$$

porque

$$2 \equiv 6 \pmod 4.$$

Sin embargo,

$$1 \not\equiv 3 \pmod 4.$$

Por tanto no podemos cancelar el factor 2 módulo 4.

La razón es aritmética: 2 y 4 no son coprimos.

Teorema de cancelación modular. Si

$$\gcd(c, n) = 1$$

y

$$ca \equiv cb \pmod{n},$$

entonces

$$\boxed{a \equiv b \pmod{n}.}$$

Demostración. De

$$ca \equiv cb \pmod{n}$$

obtenemos

$$n \mid c(a - b).$$

Como

$$\gcd(c, n) = 1,$$

la cancelación coprima demostrada en C15 implica

$$n \mid (a - b).$$

Por tanto

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

□

La hipótesis no es decorativa. Si c comparte un factor con el módulo, puede colapsar clases distintas.

Por ejemplo, módulo 6,

$$2[1]_6 = [2]_6, \qquad 2[4]_6 = [8]_6 = [2]_6,$$

pero

$$[1]_6 \neq [4]_6.$$

Así, antes de cancelar un factor en una congruencia debemos verificar su coprimalidad con el módulo.

17.9. Inversos modulares y coprimalidad

Sea $a \in \mathbb{Z}$. Decimos que a posee un **inverso módulo** n si existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que

$$au \equiv 1 \pmod{n}.$$

En términos de clases,

$$[a]_n[u]_n = [1]_n.$$

El criterio de existencia es exactamente la coprimalidad.

Teorema. Para $n \geq 2$,

$$\boxed{a \text{ es invertible módulo } n \iff \gcd(a, n) = 1.}$$

Demostración. Supongamos primero que

$$\gcd(a, n) = 1.$$

Por Bézout existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que

$$au + nv = 1.$$

Entonces

$$au - 1 = -nv,$$

por lo que

$$n \mid (au - 1).$$

Así,

$$au \equiv 1 \pmod{n}.$$

Por tanto u es un inverso de a módulo n.

Recíprocamente, supongamos que existe u con

$$au \equiv 1 \pmod{n}.$$

Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$au - 1 = kn,$$

o equivalentemente,

$$au - kn = 1.$$

Hemos escrito 1 como combinación lineal de a y n. Por el criterio de Bézout de C15,

$$\gcd(a, n) = 1.$$

□

Unicidad del inverso como clase

Si u y v son ambos inversos de a módulo n, entonces

$$au \equiv 1 \pmod{n}, \qquad av \equiv 1 \pmod{n}.$$

Por tanto

$$au \equiv av \pmod{n}.$$

Como la existencia de inverso implica $\gcd(a, n) = 1$, podemos cancelar a y obtener

$$u \equiv v \pmod{n}.$$

El inverso es, pues, único **como clase módulo** n.

17.10. Cómo calcular un inverso: Bézout vuelve a aparecer

El teorema anterior es constructivo. Para calcular un inverso de a módulo n basta encontrar coeficientes de Bézout para a y n.

Consideremos el inverso de 17 módulo 43.

Aplicamos Euclides:

$$43 = 2 \cdot 17 + 9,$$

$$17 = 1 \cdot 9 + 8,$$

$$9 = 1 \cdot 8 + 1.$$

Sustituyendo hacia atrás,

$$1 = 9 - 8,$$

$$1 = 9 - (17 - 9) = 2 \cdot 9 - 17,$$

$$1 = 2(43 - 2 \cdot 17) - 17,$$

por tanto

$$1 = 2 \cdot 43 - 5 \cdot 17.$$

Reduciendo módulo 43,

$$-5 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{43}.$$

Así, un inverso de 17 módulo 43 es -5, o equivalentemente su representante canónico 38:

$$17^{-1} \equiv 38 \pmod{43}.$$

La notación 17^{-1} en este contexto no significa el racional $1/17$. Significa **la clase multiplicativa inversa de** $[17]_{43}$.

Protocolo de cálculo

Para hallar el inverso de a módulo n:

1. calcular $d = \gcd(a, n)$;
2. si $d \neq 1$, concluir que el inverso no existe;
3. si $d = 1$, usar Euclides extendido para hallar
$$au + nv = 1;$$
4. reducir u módulo n.

Por ejemplo, 14 no posee inverso módulo 35 porque

$$\gcd(14, 35) = 7 \neq 1.$$

No hace falta buscar candidatos.

17.11. Congruencias lineales como ecuaciones diofánticas disfrazadas

Consideremos una congruencia lineal

$$ax \equiv b \pmod{n}.$$

Por definición,

$$n \mid (ax - b).$$

Por tanto existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ax - b = ny.$$

Equivalentemente,

$$\boxed{ax - ny = b.}$$

Así, resolver una congruencia lineal es resolver una ecuación diofántica lineal en dos variables y después leer sólo la coordenada x módulo n.

Esta traducción permite importar directamente el criterio de C15.

Sea

$$d = \gcd(a, n).$$

La ecuación

$$ax - ny = b$$

tiene solución entera si y sólo si

$$d \mid b.$$

Por tanto obtenemos:

Teorema de solvencia.

$$\boxed{ax \equiv b \pmod{n} \text{ tiene solución } \iff \gcd(a, n) \mid b.}$$

Necesidad

Si x es solución, entonces existe y con

$$ax - ny = b.$$

Todo divisor común de a y n divide el lado izquierdo, y en particular

$$\gcd(a, n) \mid b.$$

Suficiencia

Si

$$d = \gcd(a, n)$$

y $d \mid b$, el teorema de C15 garantiza que

$$ax - ny = b$$

tiene solución entera. La coordenada x satisface entonces

$$ax \equiv b \pmod{n}.$$

Por ejemplo,

$$18x \equiv 12 \pmod{30}$$

es soluble porque

$$\gcd(18, 30) = 6$$

y

$$6 \mid 12.$$

En cambio,

$$18x \equiv 7 \pmod{30}$$

no tiene solución porque $6 \nmid 7$.

17.12. Clasificación y número de soluciones de $ax \equiv b \pmod{n}$

El criterio anterior decide si existen soluciones. Ahora queremos describirlas todas. Sea

$$d = \gcd(a, n)$$

y supongamos

$$d \mid b.$$

Escribimos

$$a = da_1, \qquad b = db_1, \qquad n = dn_1.$$

Entonces

$$\gcd(a_1, n_1) = 1.$$

La congruencia original

$$da_1 x \equiv db_1 \pmod{dn_1}$$

si $d < n$, es equivalente a

$$\boxed{a_1 x \equiv b_1 \pmod{n_1}.}$$

Si $d = n$, entonces $n \mid a$. En ese caso la congruencia original es equivalente a

$$0 \equiv b \pmod{n}.$$

Por tanto, si es soluble, necesariamente $n \mid b$ y **todas** las n clases módulo n son soluciones. Esto coincide con la afirmación general de que hay exactamente $d = n$ soluciones.

Supongamos ahora $d < n$. Entonces $n_1 = n/d \geq 2$. Como a_1 es coprimo con n_1, posee inverso. Por tanto existe una única clase solución módulo n_1:

$$x \equiv x_0 \pmod{n_1}.$$

Al volver a mirar soluciones módulo $n = dn_1$, esa única clase módulo n_1 se descompone en exactamente d clases módulo n:

$$\boxed{x \equiv x_0 + k\frac{n}{d} \pmod{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, d-1.}$$

Por qué son soluciones

Como

$$x = x_0 + kn_1,$$

se tiene

$$a_1 x \equiv a_1 x_0 \equiv b_1 \pmod{n_1}.$$

Luego cada una satisface la congruencia reducida y, por tanto, la original.

Por qué son distintas módulo n

Si para $0 \leq k < \ell \leq d-1$ tuviéramos

$$x_0 + kn_1 \equiv x_0 + \ell n_1 \pmod{dn_1},$$

entonces

$$dn_1 \mid (\ell - k)n_1,$$

por lo que

$$d \mid (\ell - k).$$

Pero

$$0 < \ell - k < d,$$

imposible.

Por qué no hay otras

Toda solución de la congruencia original satisface la reducida, luego es congruente con x_0 módulo n_1. Por tanto tiene la forma

$$x = x_0 + tn_1.$$

El valor de t módulo d determina exactamente una de las d clases anteriores.

Concluimos:

Teorema completo de la congruencia lineal. Si

$$d = \gcd(a, n),$$

entonces:

- si $d \nmid b$, no hay soluciones;
- si $d \mid b$, hay exactamente d clases solución módulo n.

Ejemplo

Resolvamos

$$18x \equiv 12 \pmod{30}.$$

Tenemos $d = 6$. Dividimos por 6:

$$3x \equiv 2 \pmod{5}.$$

Como

$$3^{-1} \equiv 2 \pmod{5},$$

obtenemos

$$x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Al levantar a módulo 30 aparecen seis clases:

$$x \equiv 4, 9, 14, 19, 24, 29 \pmod{30}.$$

Nota pedagógica — Existencia, clases y representantes se cuentan por separado. El certificado $d = \gcd(a, n) \mid b$ decide existencia. Una solución particular permite construir la familia, pero la exhaustividad exige partir de una solución arbitraria. Finalmente, contar clases módulo n no equivale a contar los representantes enteros de esas clases, que son infinitos.

Control resuelto. Para $8x \equiv 12 \pmod{20}$, el MCD es cuatro y divide a doce. La condición de divisibilidad $20 \mid 8x - 12$ equivale a $5 \mid 2x - 3$, y multiplicar por el inverso tres de dos módulo cinco da $x \equiv 4 \pmod{5}$. Todas las soluciones enteras son $x = 4 + 5t$, $t \in \mathbb{Z}$. Módulo veinte, reducir t módulo cuatro da exactamente $[4], [9], [14], [19]$. Son distintas porque una diferencia $5(j - k)$ es divisible por veinte sólo si cuatro divide a $j - k$.

Cambiar doce por diez hace imposible la congruencia: cuatro no divide a diez. Si el coeficiente es múltiplo del módulo, se vuelve necesario tratar el caso directamente. Por ejemplo, $40x \equiv 20 \pmod{20}$ lo cumple todo entero, y hay veinte clases solución; $40x \equiv 1 \pmod{20}$ no tiene ninguna. No hace falta introducir un módulo reducido igual a uno.

Para imponer después un intervalo o una segunda condición, trabaja con la familia completa y demuestra que cada restricción equivale a una condición sobre su parámetro. La lista de clases y la lista finita de representantes permitidos responden preguntas diferentes.

17.13. Sistemas de congruencias y el problema de compatibilidad

Una congruencia individual prescribe un resto. Un sistema de congruencias prescribe varios restos simultáneamente.

Por ejemplo,

$$x \equiv 2 \pmod 3,$$

$$x \equiv 3 \pmod 5.$$

Buscamos un entero que deje resto 2 al dividir por 3 y resto 3 al dividir por 5.

Una manera elemental de explorar el problema consiste en listar números congruentes con 2 módulo 3:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots$$

y observar que

$$8 \equiv 3 \pmod 5.$$

Por tanto $x = 8$ es una solución.

Pero la pregunta estructural es más profunda:

1. ¿cuándo existe una solución?
2. si existe, ¿es única en algún sentido modular?
3. ¿cómo construirla sin tanteo?

Para módulos coprimos, el Teorema Chino del Resto responde completamente estas preguntas.

Antes de demostrarlo, conviene observar la cuestión de compatibilidad cuando los módulos comparten factores. Por ejemplo,

$$x \equiv 0 \pmod 2, \qquad x \equiv 1 \pmod 4$$

no puede tener solución: la segunda congruencia obliga a que x sea impar, mientras la primera obliga a que sea par.

En cambio,

$$x \equiv 1 \pmod 2, \qquad x \equiv 3 \pmod 4$$

sí es compatible.

La coprimalidad elimina automáticamente este tipo de conflicto, y por eso será la hipótesis principal del teorema que sigue.

17.14. Teorema Chino del Resto para dos módulos coprimos

Teorema Chino del Resto. Sean $m, n \geq 2$ con

$$\gcd(m, n) = 1.$$

Entonces para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$, el sistema

$$x \equiv a \pmod m,$$

$$x \equiv b \pmod{n}$$

tiene solución. Además, cualesquiera dos soluciones son congruentes módulo mn.

Existencia constructiva

Como

$$\gcd(m, n) = 1,$$

por Bézout existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$rm + sn = 1.$$

Queremos construir un término que sea 1 módulo m y 0 módulo n, y otro que sea 0 módulo m y 1 módulo n.

De

$$rm + sn = 1$$

se sigue:

$$sn \equiv 1 \pmod{m}, \qquad sn \equiv 0 \pmod{n},$$

mientras

$$rm \equiv 0 \pmod{m}, \qquad rm \equiv 1 \pmod{n}.$$

Por tanto la construcción correcta es

$$\boxed{x_0 = a(sn) + b(rm).}$$

Entonces

$$x_0 \equiv a \pmod{m}$$

y

$$x_0 \equiv b \pmod{n}.$$

Así existe una solución.

Unicidad módulo mn

Sean x e y dos soluciones. Entonces

$$x \equiv y \pmod{m}$$

y

$$x \equiv y \pmod{n}.$$

Por tanto

$$m \mid (x - y)$$

y

$$n \mid (x - y).$$

Como m y n son coprimos,

$$mn \mid (x - y).$$

Luego

$$x \equiv y \pmod{mn}.$$

La solución es única como clase módulo mn. □

Ejemplo

Resolvamos

$$x \equiv 2 \pmod 3, \qquad x \equiv 3 \pmod 5.$$

Una identidad de Bézout es

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1.$$

Así podemos tomar

$$r = 2, \qquad s = -1,$$

con

$$rm + sn = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 1.$$

La construcción da

$$x_0 = 2(-1)(5) + 3(2)(3) = 8.$$

Por tanto

$$\boxed{x \equiv 8 \pmod{15}.}$$

Nota pedagógica — Construir una solución y cerrar la unicidad. La fórmula de Bézout produce un testigo para el sistema. La unicidad empieza después, comparando dos soluciones arbitrarias. Con módulos coprimos m, n, su diferencia es múltiplo de ambos; escribirla como mk y usar cancelación coprima obliga a $n \mid k$, de modo que es múltiplo de mn.

Control resuelto. Para $x \equiv 1 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 5$, usamos $5 - 4 = 1$. Los términos selectores son cinco, que vale uno módulo cuatro y cero módulo cinco, y menos cuatro, que vale cero módulo cuatro y uno módulo cinco. El testigo es $x_0 = 1 \cdot 5 + 2(-4) = -3$. Cumple ambos residuos. Si x es otra solución, $x+3$ es múltiplo de cuatro y de cinco; por coprimalidad, es múltiplo de veinte. Por tanto todas las soluciones son $-3 + 20t$, $t \in \mathbb{Z}$, o la clase $[17]_{20}$.

Diecisiete y menos tres son enteros distintos que representan la misma solución modular. La construcción no privilegia un entero único; cualquier múltiplo del producto puede añadirse.

Cuando los módulos no son coprimos, no se conserva automáticamente el producto como módulo de unicidad. El sistema $x \equiv 1 \pmod 4$, $x \equiv 3 \pmod 6$ tiene todas sus soluciones $9 + 12t$. Nueve y veintiuno son soluciones, pero no son congruentes módulo veinticuatro. El MCM doce es el período correcto. Antes de reconstruir, revisa compatibilidad; después, prueba el módulo exacto de la familia.

17.15. CRT finito, reconstrucción y diagnóstico de errores

El Teorema Chino del Resto se extiende a cualquier familia finita de módulos dos a dos coprimos.

Sean

$$n_1, n_2, \dots, n_r \geq 2$$

dos a dos coprimos y sea

$$N = n_1 n_2 \cdots n_r.$$

Para residuos $a_1, \dots, a_r$, el sistema

$$x \equiv a_i \pmod{n_i}, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

tiene una solución única módulo N.

Construcción directa

Definimos

$$N_i = \frac{N}{n_i}.$$

Como los módulos son dos a dos coprimos,

$$\gcd(N_i, n_i) = 1.$$

Para justificarlo, si ese MCD fuera mayor que uno tendría un divisor primo p. El lema de Euclides para el producto N_i obligaría a que p dividiera algún n_j, $j \neq i$, además de n_i, contradiciendo la coprimalidad de ese par. Si la familia tiene un solo módulo, $N_i = 1$ y el MCD vale uno directamente.

Por tanto existe u_i tal que

$$N_i u_i \equiv 1 \pmod{n_i}.$$

Entonces

$$\boxed{x_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i N_i u_i}$$

satisface todas las congruencias. En efecto, módulo n_j, todos los términos con $i \neq j$ son divisibles por n_j, mientras

$$N_j u_j \equiv 1 \pmod{n_j}.$$

Por tanto

$$x_0 \equiv a_j \pmod{n_j}.$$

La unicidad se demuestra inductivamente como en el caso de dos módulos. El argumento primo anterior también prueba que n_k es coprimo con $n_1 \cdots n_{k-1}$. Si ese producto divide a $x - y$, escribimos $x - y = (n_1 \cdots n_{k-1})t$; como n_k divide a la diferencia, la cancelación coprima obliga a $n_k \mid t$. Por tanto $n_1 \cdots n_k$ divide a $x - y$. Empezando con $n_1 \mid x - y$, la inducción da

$$N \mid (x - y).$$

Ejemplo de reconstrucción

Consideremos

$$x \equiv 1 \pmod 3,$$

$$x \equiv 2 \pmod 5,$$

$$x \equiv 3 \pmod 7.$$

Aquí

$$N = 105.$$

Tenemos

$$N_1 = 35, \qquad N_2 = 21, \qquad N_3 = 15.$$

Elegimos inversos:

$$35 \equiv 2 \pmod 3, \qquad 2^{-1} \equiv 2 \pmod 3,$$

así $u_1 = 2$;

$$21 \equiv 1 \pmod 5,$$

así $u_2 = 1$;

$$15 \equiv 1 \pmod 7,$$

así $u_3 = 1$.
Entonces

$$x_0 = 1 \cdot 35 \cdot 2 + 2 \cdot 21 \cdot 1 + 3 \cdot 15 \cdot 1 = 157.$$

Reduciendo módulo 105,

$$\boxed{x \equiv 52 \pmod{105}.}$$

Diagnóstico de errores frecuentes

La aritmética modular exige distinguir cuidadosamente varias afirmaciones.
Error 1: cancelar sin coprimalidad. De

$$ca \equiv cb \pmod n$$

no puede concluirse en general que $a \equiv b \pmod n$.
Error 2: suponer que todo número no nulo tiene inverso. Una clase $[a]_n$ es invertible exactamente cuando

$$\gcd(a, n) = 1.$$

Error 3: confundir existencia con unicidad. Una congruencia lineal puede tener varias clases solución módulo n; cuando $d = \gcd(a, n)$ divide a b, hay exactamente d.

Error 4: interpretar la unicidad del CRT como igualdad de enteros. La solución es única **módulo el producto**, no como entero ordinario.

Error 5: multiplicar módulos no coprimos sin analizar compatibilidad. La forma principal del CRT de este capítulo exige coprimalidad. La versión general requiere una condición adicional y queda principalmente para el bloque avanzado.

17.16. Cierre del Bloque D — del resto al cociente

Los cuatro capítulos del Bloque D han construido una primera teoría algebraica coherente dentro de $\mathbb{Z}$.

En C14 partimos de la relación

$$a \mid b.$$

En C15 descubrimos que el máximo común divisor puede recuperarse como combinación lineal y que Bézout controla la coprimalidad y las ecuaciones diofánticas lineales.

En C16 vimos que los primos son los bloques multiplicativos elementales de los enteros y que la factorización es esencialmente única.

C17 ha agregado una nueva operación conceptual: **identificar enteros distintos cuando su diferencia es múltiplo de un módulo fijo**.

La cadena completa puede resumirse así:

```
DIVISIBILIDAD
     ↓
MCD / EUCLIDES / BÉZOUT
     ↓
PRIMOS / FACTORIZACIÓN
     ↓
CONGRUENCIA
     ↓
CLASES RESIDUALES
     ↓
OPERACIONES BIEN DEFINIDAS
     ↓
COPRIMALIDAD ↔ INVERSIBILIDAD
     ↓
CONGRUENCIAS LINEALES
     ↓
CRT
```

Protocolo para problemas modulares. Ante un problema de congruencias conviene preguntar, en este orden:

1. **¿Cuál es el módulo?** Fijar con claridad $n \geq 2$.
2. **¿Qué significa la congruencia?** Traducir a divisibilidad cuando sea necesario.
3. **¿Puedo reducir los números?** Reemplazar representantes por otros más simples.
4. **¿Estoy intentando cancelar?** Verificar coprimalidad antes de hacerlo.
5. **¿Necesito un inverso?** Calcular $\gcd(a, n)$ y usar Bézout si vale 1.
6. **¿Es una congruencia lineal?** Calcular $d = \gcd(a, n)$ y comprobar si $d \mid b$.
7. **¿Cuántas soluciones debe haber?** Si es soluble, exactamente d clases módulo n.
8. **¿Es un sistema de congruencias?** Verificar coprimalidad o compatibilidad antes de aplicar CRT.
9. **¿Qué significa unicidad?** Precisar siempre el módulo respecto del cual la solución es única.

El objeto

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

es el primer ejemplo sustancial de este libro en el que una relación de equivalencia produce un nuevo universo matemático sobre el cual las operaciones descienden correctamente. En capítulos y tomos posteriores esta idea reaparecerá de forma mucho más general: clases laterales, cocientes, ideales, anillos cociente y homomorfismos.

Por ahora basta conservar la intuición esencial:

> **pasar al cociente significa decidir qué diferencias dejan de importar y demostrar que las operaciones que queremos realizar respetan esa decisión.**

Con ello queda cerrado el Bloque D y estamos preparados para continuar el desarrollo algebraico con ecuaciones, orden, polinomios y nuevas estructuras.

Ejercicios

Los ejercicios están organizados para pasar de la lectura elemental de restos a la comprensión estructural de las clases residuales, la inversibilidad, las congruencias lineales y el Teorema Chino del Resto. Salvo indicación expresa, todos los módulos satisfacen $n \geq 2$. "Resolver módulo n" significa determinar clases de soluciones módulo n, no enumerar infinitamente todos sus representantes enteros.

A. Definición, restos y congruencias básicas

1. **Nivel A.** Decide cuáles de las siguientes congruencias son verdaderas y justifica cada respuesta directamente mediante divisibilidad de la diferencia:

$$37 \equiv 7 \pmod{10}, \qquad -11 \equiv 4 \pmod{5}, \qquad 26 \equiv 5 \pmod{7}, \qquad 41 \equiv -1 \pmod{6}.$$

2. **Nivel A.** Encuentra el representante canónico de cada entero en el módulo indicado:

$$-23 \pmod{7}, \qquad 58 \pmod{9}, \qquad -101 \pmod{12}, \qquad 250 \pmod{17}.$$

   En cada caso escribe también la división con resto correspondiente.

3. **Nivel B.** Sea $n \geq 2$. Demuestra que

$$a \equiv b \pmod{n}$$

   si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = b + kn.$$

   Explica por qué esta formulación y la definición $n \mid (a-b)$ expresan exactamente la misma información.

4. **Nivel B.** Demuestra que dos enteros a y b son congruentes módulo n si y sólo si dejan el mismo resto al dividir por n. Debes usar la unicidad del resto del algoritmo de división.

5. **Nivel B.** Determina todos los enteros $r \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ tales que

$$r \equiv 137 \pmod{12}.$$

   Después explica por qué existe exactamente uno.

6. **Nivel C.** Decide si cada afirmación es verdadera o falsa. Demuestra las verdaderas y da un contraejemplo para las falsas.

a) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a - b$ es múltiplo de n.
b) Si $a - b < n$, entonces $a \not\equiv b \pmod{n}$.
c) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a \equiv b \pmod{d}$ para todo divisor positivo d de n con $d \geq 2$.

d) Si $a \equiv b \pmod{d}$ y $d \mid n$, entonces $a \equiv b \pmod{n}$.

7. **Nivel C.** Sea $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que existe un único $r \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que
$$a \equiv r \pmod{n}.$$
Distingue claramente la existencia de la unicidad.

8. **Nivel C.** Un estudiante escribe:
$$-17 \equiv -2 \pmod{5}$$
y concluye que "el resto de -17 al dividir por 5 es -2". Diagnostica el error. Explica la diferencia entre un representante cualquiera de una clase y su representante canónico.

B. Relación de equivalencia y clases residuales

9. **Nivel B.** Para un módulo fijo $n \geq 2$, demuestra directamente desde la definición que la congruencia módulo n es reflexiva.

10. **Nivel B.** Demuestra directamente que la congruencia módulo n es simétrica y señala qué propiedad de la divisibilidad se usa al pasar de $a - b$ a $b - a$.

11. **Nivel B.** Demuestra directamente que la congruencia módulo n es transitiva. Tu prueba debe escribir explícitamente
$$a - c = (a - b) + (b - c).$$

12. **Nivel C.** Describe por extensión las clases
$$[0]_4, \quad [1]_4, \quad [2]_4, \quad [3]_4$$
mostrando al menos cinco representantes positivos y cinco negativos de cada una. Explica por qué no existe una quinta clase distinta módulo 4.

13. **Nivel C.** Demuestra que
$$[a]_n = [b]_n \iff a \equiv b \pmod{n}.$$
En la implicación de izquierda a derecha usa el hecho de que $a \in [a]_n$.

14. **Nivel C.** Decide cuáles de las siguientes igualdades de clases son verdaderas:
$$[17]_6 = [5]_6, \qquad [-8]_6 = [4]_6, \qquad [21]_8 = [5]_8, \qquad [-15]_7 = [6]_7.$$
Justifica cada respuesta sin listar todos los elementos de las clases.

15. **Nivel D.** Demuestra que las clases
$$[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n$$
son distintas dos a dos y que su unión es $\mathbb{Z}$. Concluye que forman una partición de $\mathbb{Z}$.

16. **Nivel D.** Sea $R = \{2, 7, 12, 17, 22\}$. Decide si R es un sistema completo de residuos módulo 5. Si no lo es, explica exactamente qué condición falla. Construye después dos sistemas completos de residuos módulo 5 que no sean $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

C. Operaciones compatibles y potencias

17. **Nivel B.** Supón
$$a \equiv b \pmod{n}, \qquad c \equiv d \pmod{n}.$$
Demuestra
$$a + c \equiv b + d \pmod{n}.$$

18. **Nivel B.** Bajo las mismas hipótesis del ejercicio anterior, demuestra
$$a - c \equiv b - d \pmod{n}.$$

19. **Nivel C.** Supón
$$a \equiv b \pmod{n}, \qquad c \equiv d \pmod{n}.$$
Demuestra
$$ac \equiv bd \pmod{n}.$$
Hazlo escribiendo $a = b + rn$ y $c = d + sn$.
20. **Nivel C.** Demuestra por inducción que
$$a \equiv b \pmod{n} \Longrightarrow a^m \equiv b^m \pmod{n}$$
para todo entero $m \geq 1$.
21. **Nivel B.** Calcula reduciendo antes de operar:

a) $47 + 89$ módulo 11;
b) $123 \cdot 77$ módulo 13;
c) $(-38)^2$ módulo 9;
d) $17^4 + 8^3$ módulo 5.

En cada caso muestra al menos una reducción intermedia.

22. **Nivel C.** Demuestra que si
$$a \equiv b \pmod{n},$$
entonces para todo polinomio
$$P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r$$
con coeficientes enteros se cumple
$$P(a) \equiv P(b) \pmod{n}.$$
No uses teoría de anillos.
23. **Nivel C.** Usa congruencias para determinar el último dígito de
$$7^{2026}.$$
Debes justificar la periodicidad que utilices mediante cálculos de potencias módulo 10, sin invocar teoremas posteriores.
24. **Nivel D.** Demuestra que para todo entero m,
$$m(m+1)$$
es congruente con 0 módulo 2. Después demuestra que
$$m(m+1)(m+2)$$
es congruente con 0 módulo 3. Formula ambas pruebas usando clases residuales posibles, no factorización prima.

D. Buena definición, aritmética de clases y cancelación

25. **Nivel C.** Sean
$$[a]_n = [a']_n, \qquad [b]_n = [b']_n.$$
Demuestra que
$$[a+b]_n = [a'+b']_n.$$
Explica por qué esto prueba que la suma de clases
$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$$
está bien definida.
26. **Nivel C.** Demuestra análogamente que
$$[ab]_n = [a'b']_n$$
y concluye que el producto de clases no depende de los representantes elegidos.

27. **Nivel B.** Construye las tablas de suma y multiplicación de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Identifica en la tabla de multiplicación dos clases no nulas cuyo producto sea $[0]_4$.
28. **Nivel C.** En $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, calcula
$$[4]_6 + [5]_6, \qquad [4]_6[5]_6, \qquad [5]_6^2, \qquad ([2]_6 + [5]_6)[4]_6.$$
Reduce cada resultado a representante canónico.
29. **Nivel C.** Da un contraejemplo explícito a la regla de cancelación ingenua
$$ac \equiv bc \pmod{n} \Longrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$
Tu ejemplo debe tener $a \not\equiv b \pmod{n}$ y $c \not\equiv 0 \pmod{n}$.
30. **Nivel D.** Demuestra que si
$$\gcd(c, n) = 1$$
y
$$ac \equiv bc \pmod{n},$$
entonces
$$a \equiv b \pmod{n}.$$
La prueba debe traducir primero la congruencia a
$$n \mid c(a - b)$$
y usar la cancelación coprima de C15.
31. **Nivel D.** Supón que $d = \gcd(c, n) > 1$. Demuestra que la multiplicación por $[c]_n$ no puede ser inyectiva en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ exhibiendo dos clases distintas que tengan la misma imagen. Sugerencia: compara $[0]_n$ y $[n/d]_n$.
32. **Nivel D.** Audita la siguiente "prueba":
$$18x \equiv 18y \pmod{30} \Longrightarrow x \equiv y \pmod{30}.$$
Localiza la operación inválida. Determina la conclusión más fuerte que sí puede deducirse de la congruencia original y justifícala.

E. Inversos modulares y Bézout

33. **Nivel B.** Decide cuáles de las clases
$$[2]_7, \quad [3]_8, \quad [4]_9, \quad [6]_{15}, \quad [11]_{12}$$
son invertibles en sus respectivos módulos. Justifica cada respuesta mediante el MCD.
34. **Nivel C.** Demuestra que si $\gcd(a, n) = 1$, entonces a posee inverso módulo n. Parte de una identidad de Bézout
$$au + nv = 1.$$
35. **Nivel C.** Demuestra la recíproca: si existe u tal que
$$au \equiv 1 \pmod{n},$$
entonces
$$\gcd(a, n) = 1.$$
Traduce la congruencia a una combinación lineal entera igual a 1.
36. **Nivel C.** Usa Euclides extendido para calcular el inverso de:

a) 17 módulo 43;
b) 23 módulo 64;
c) 37 módulo 101.

Verifica cada inverso por multiplicación.

37. **Nivel C.** Demuestra que un inverso modular, si existe, es único como clase módulo n. Es decir, si
$$au \equiv 1 \pmod{n}$$
y
$$av \equiv 1 \pmod{n},$$
entonces
$$u \equiv v \pmod{n}.$$
38. **Nivel D.** Sea a invertible módulo n. Demuestra que la congruencia
$$ax \equiv b \pmod{n}$$
tiene una única solución módulo n, y exprésala en términos de un inverso a^{-1}.
39. **Nivel D.** Determina todos los enteros $a \in \{0, 1, \ldots, 19\}$ que poseen inverso módulo 20. Para cada uno calcula un inverso y explica por qué no necesitas probar los enteros restantes por búsqueda exhaustiva de productos.
40. **Nivel D.** Un estudiante afirma: "si $a \not\equiv 0 \pmod{n}$, entonces a tiene inverso módulo n". Refuta la afirmación con el menor módulo compuesto que te resulte conveniente y formula el criterio correcto.

F. Congruencias lineales: existencia

41. **Nivel C.** Traduce cada congruencia a una ecuación diofántica lineal equivalente:

a) $7x \equiv 3 \pmod{12}$;
b) $18x \equiv 6 \pmod{30}$;
c) $14x \equiv 5 \pmod{21}$.

No resuelvas todavía las ecuaciones.

42. **Nivel D.** Sea $d = \gcd(a, n)$. Demuestra la necesidad del criterio de solvencia:
$$ax \equiv b \pmod{n} \Longrightarrow d \mid b.$$
43. **Nivel D.** Demuestra la suficiencia:
$$d = \gcd(a, n), \qquad d \mid b \Longrightarrow ax \equiv b \pmod{n}$$
tiene solución. Usa el criterio diofántico de C15.
44. **Nivel C.** Sin hallar las soluciones, decide cuáles de las siguientes congruencias son solubles:

a) $12x \equiv 8 \pmod{20}$;
b) $12x \equiv 7 \pmod{20}$;
c) $21x \equiv 14 \pmod{35}$;
d) $18x \equiv 15 \pmod{42}$.

En cada caso exhibe $d = \gcd(a, n)$ y prueba o refuta $d \mid b$.

45. **Nivel C.** Resuelve
$$7x \equiv 5 \pmod{12}$$
usando un inverso modular. Verifica la solución sustituyendo un representante.
46. **Nivel D.** Reduce correctamente
$$18x \equiv 12 \pmod{30}$$
dividiendo por el MCD pertinente. Explica por qué no es correcto simplemente "dividir ambos lados por 6" y conservar el módulo 30.

47. **Nivel D.** Sea
$$d = \gcd(a, n), \qquad a = da_1, \qquad n = dn_1.$$
Demuestra que
$$\gcd(a_1, n_1) = 1.$$
Si $d < n$, explica por qué este hecho convierte la congruencia reducida en un problema con coeficiente invertible módulo n_1. Señala qué ocurre en el caso extremo $d = n$.
48. **Nivel D.** Encuentra todos los enteros b con $0 \le b < 36$ para los cuales
$$24x \equiv b \pmod{36}$$
tiene solución. Describe el conjunto de valores obtenidos mediante una condición de divisibilidad y comprueba tu respuesta contando cuántos hay.

G. Clasificación y conteo de soluciones

49. **Nivel D.** Resuelve completamente
$$12x \equiv 8 \pmod{20}.$$
Determina todas las clases solución módulo 20 y verifica que su número coincide con $\gcd(12, 20)$.
50. **Nivel D.** Resuelve completamente
$$18x \equiv 6 \pmod{30}.$$
Debes mostrar: MCD, reducción, solución del problema reducido y levantamiento a todas las clases módulo 30.
51. **Nivel D.** Resuelve completamente
$$21x \equiv 14 \pmod{35}$$
y explica por qué aparecen exactamente siete clases solución módulo 35.
52. **Nivel D.** Determina todas las soluciones de
$$15x \equiv 0 \pmod{45}.$$
Interpreta la respuesta como un caso del teorema general y no como una búsqueda por prueba y error.
53. **Nivel E.** Sea $d = \gcd(a, n)$, supón $d \mid b$ y además $d < n$. Si x_0 es una solución del problema reducido módulo n/d, demuestra que
$$x_k = x_0 + k\frac{n}{d}, \qquad k = 0, \dots, d-1,$$
produce d soluciones módulo n.
54. **Nivel E.** Bajo las hipótesis del ejercicio anterior, demuestra que las d clases
$$[x_0 + k(n/d)]_n$$
son distintas dos a dos.
55. **Nivel E.** Completa la prueba de exhaustividad: demuestra que toda solución de
$$ax \equiv b \pmod{n}$$
es congruente módulo n con una de las d clases del ejercicio 53.
56. **Nivel E.** Analiza separadamente los casos extremos de
$$ax \equiv b \pmod{n}:$$

a) $\gcd(a, n) = 1$;
b) $n \mid a$.

Determina, según b, cuántas soluciones módulo n puede haber en cada caso y relaciona la respuesta con el teorema general.

H. Sistemas y Teorema Chino del Resto

57. **Nivel C.** Resuelve el sistema
$$x \equiv 2 \pmod 3, \qquad x \equiv 3 \pmod 5,$$
y expresa la respuesta como una única clase módulo 15. Verifica el resultado en ambas congruencias.

58. **Nivel D.** Resuelve
$$x \equiv 4 \pmod 7, \qquad x \equiv 5 \pmod 9,$$
construyendo una solución mediante un inverso modular. Expresa la solución final módulo 63.

59. **Nivel D.** Sean $\gcd(m, n) = 1$ y
$$rm + sn = 1.$$
Demuestra que
$$x = a(sn) + b(rm)$$
satisface
$$x \equiv a \pmod m, \qquad x \equiv b \pmod n.$$

60. **Nivel D.** Demuestra la unicidad en el CRT para dos módulos coprimos: si x e y satisfacen el mismo sistema módulo m y módulo n, demuestra
$$x \equiv y \pmod{mn}.$$
Señala dónde usas $\gcd(m, n) = 1$.

61. **Nivel D.** Resuelve
$$x \equiv 1 \pmod 4, \qquad x \equiv 2 \pmod 9, \qquad x \equiv 3 \pmod 5.$$
Expresa la respuesta como una clase módulo 180 y verifica los tres residuos.

62. **Nivel E.** Explica por qué el sistema
$$x \equiv 1 \pmod 6, \qquad x \equiv 2 \pmod 9$$
no puede resolverse aplicando directamente el CRT coprimo. Decide, sin usar todavía el teorema general del ejercicio 79, si el sistema tiene solución y justifica tu decisión a partir de los residuos módulo $\gcd(6, 9)$.

63. **Nivel E.** Encuentra el menor entero positivo x que satisface
$$x \equiv 2 \pmod 5, \qquad x \equiv 4 \pmod 7, \qquad x \equiv 6 \pmod{11}.$$
Después describe todos los enteros que satisfacen el sistema.

64. **Nivel E.** Sean n_1, n_2, n_3 dos a dos coprimos. Demuestra el caso de tres módulos del CRT aplicando dos veces el caso de dos módulos. Justifica que
$$\gcd(n_1 n_2, n_3) = 1.$$

I. Síntesis estructural y diagnóstico

65. **Nivel D.** Decide si cada afirmación es verdadera o falsa. Demuestra las verdaderas y refuta las falsas.

a) Toda clase no nula módulo n es invertible.
b) Si $a \equiv b \pmod n$, entonces $a^2 \equiv b^2 \pmod n$.
c) Si $ac \equiv bc \pmod n$ y $c \not\equiv 0 \pmod n$, entonces $a \equiv b \pmod n$.
d) Si $\gcd(a, n) = 1$, entonces $ax \equiv b \pmod n$ tiene exactamente una solución módulo n.

66. **Nivel D.** Un estudiante resuelve
$$6x \equiv 9 \pmod{15}$$
"dividiendo por 3" y obtiene
$$2x \equiv 3 \pmod{15}.$$
Explica por qué la reducción es incorrecta, realiza la reducción correcta y determina todas las soluciones módulo 15.

67. **Nivel E.** Demuestra que si a es invertible módulo n, entonces las clases
$$[0]_n, [a]_n, [2a]_n, \ldots, [(n-1)a]_n$$
son todas distintas. Concluye que los enteros
$$0, a, 2a, \ldots, (n-1)a$$
forman un sistema completo de residuos módulo n.

68. **Nivel E.** Demuestra la recíproca del ejercicio anterior: si
$$[0]_n, [a]_n, \ldots, [(n-1)a]_n$$
son todas distintas, entonces $\gcd(a, n) = 1$.

69. **Nivel E.** Sea $n \geq 2$. Describe exactamente cuáles clases $[a]_n$ satisfacen
$$[a]_n^2 = [a]_n$$
para $n = 6$. Después explica por qué hallar esas clases es un problema distinto de hallar inversos.

70. **Nivel E.** Compara los sistemas
$$x \equiv 1 \pmod{4}, \quad x \equiv 3 \pmod{6}$$
y
$$x \equiv 1 \pmod{4}, \quad x \equiv 2 \pmod{6}.$$
Decide cuál es soluble, determina su solución módulo el MCM de los módulos y explica la compatibilidad o incompatibilidad a través del MCD.

71. **Nivel E.** Explica rigurosamente por qué las expresiones
$$[a]_n + [b]_n$$
y
$$[a]_n[b]_n$$
requieren una prueba de buena definición, mientras que las expresiones
$$a + b, \qquad ab$$
en $\mathbb{Z}$ no plantean ese problema de representantes.

72. **Nivel E.** Construye un diagrama de dependencias lógico, acompañado de una explicación escrita, que conecte:
$$n \mid (a-b), \quad a \equiv b \pmod{n}, \quad [a]_n,$$
$$\gcd(a, n) = 1, \quad a^{-1} \pmod{n}, \quad ax \equiv b \pmod{n}, \quad \textit{CRT}.$$
Tu explicación debe indicar qué resultados proceden de C8, C14 y C15.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. **Nivel F.** Sea $n \geq 2$. Demuestra desde la definición que $\equiv \pmod{n}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$ y prueba rigurosamente que
$$[a]_n = [b]_n \iff a \equiv b \pmod{n}.$$
Deduce que las n clases
$$[0]_n, \ldots, [n-1]_n$$
forman una partición de $\mathbb{Z}$. Debes justificar tanto que cubren todo $\mathbb{Z}$ como que dos clases distintas son disjuntas.
74. **Nivel F.** Supón
$$a \equiv a' \pmod{n}, \qquad b \equiv b' \pmod{n}.$$
Demuestra
$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n}, \qquad ab \equiv a'b' \pmod{n},$$
y usa estas implicaciones para justificar completamente que
$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n, \qquad [a]_n[b]_n = [ab]_n$$
definen operaciones independientes de los representantes elegidos.
75. **Nivel G.** Sea $c \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$. Demuestra la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:
76. $\gcd(c, n) = 1$;
77. c posee inverso módulo n;
78. para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, si
$$ca \equiv cb \pmod{n},$$
entonces
$$a \equiv b \pmod{n};$$
79. las clases
$$[0]_n, [c]_n, [2c]_n, \ldots, [(n-1)c]_n$$
son todas distintas.

Tu prueba debe cerrar el ciclo completo de implicaciones sin usar teoría de grupos.

76. **Nivel G.** Sea
$$d = \gcd(a, n).$$
Demuestra que
$$ax \equiv b \pmod{n}$$
tiene solución si y sólo si
$$d \mid b.$$
En el caso soluble, demuestra además que existen exactamente d clases solución módulo n. Si $d < n$, descríbelas a partir de una solución x_0 del problema reducido módulo n/d; si $d = n$, trata el caso separadamente. La prueba debe establecer existencia, distinción y exhaustividad.
77. **Nivel G.** Resuelve completamente
$$84x \equiv 30 \pmod{138}$$
usando Euclides extendido como algoritmo modular. Tu solución deberá incluir:
78. cálculo de $d = \gcd(84, 138)$;
79. certificado de solvencia;
80. reducción de la congruencia;
81. construcción de un inverso mediante Bézout;
82. obtención de una clase base de soluciones;
83. levantamiento a las d soluciones módulo 138;

84. demostración de que no existen otras.
85. **Nivel G.** Sean $m, n \geq 2$ con
$$\gcd(m, n) = 1.$$
Demuestra que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$ el sistema
$$x \equiv a \pmod{m}, \qquad x \equiv b \pmod{n}$$
tiene solución y que ésta es única módulo mn. La prueba debe producir explícitamente una solución usando una identidad de Bézout o inversos modulares y tratar existencia y unicidad por separado.
86. **Nivel G.** Sean $m, n \geq 2$ y
$$d = \gcd(m, n).$$
Demuestra que el sistema
$$x \equiv a \pmod{m}, \qquad x \equiv b \pmod{n}$$
tiene solución si y sólo si
$$d \mid (a - b).$$
Cuando existe solución, demuestra que es única módulo
$$\operatorname{lcm}(m, n).$$
Cuando $d \geq 2$, la condición equivale a $a \equiv b \pmod{d}$; si $d = 1$, es automática y no se usa aritmética módulo uno. No invoques una versión general del CRT sin demostrar la parte necesaria.
87. **Nivel G.** Sean $n_1, \ldots, n_r \geq 2$ dos a dos coprimos y
$$N = n_1 \cdots n_r.$$
Demuestra que cada clase módulo N determina exactamente una r-tupla
$$([x]_{n_1}, \ldots, [x]_{n_r}),$$
y que toda r-tupla posible de clases residuales procede de una única clase módulo N. Explica por qué este resultado puede interpretarse como una descomposición de información residual, sin utilizar todavía lenguaje de isomorfismos de anillos. —

N. Reglas sobre clases, reconstrucción y compatibilidad

Todos los parámetros son enteros y se respetan los módulos al menos dos. Las condiciones reducidas con divisor uno se expresan directamente por divisibilidad.

81. **Nivel E.** Para $n, m \geq 2$ y $k, c \in \mathbb{Z}$, determina cuándo la regla $[a]_n \mapsto [ka + c]_m$ está bien definida. Aplica tu criterio a $[a]_6 \mapsto [2a + 1]_4$ y $[a]_6 \mapsto [a]_4$, y proporciona un contraejemplo para la regla que falle.
82. **Nivel E.** Clasifica los módulos $n \geq 2$ para los cuales $[a]_n \mapsto [|a|]_n$ está bien definida. Compara con la regla $[a]_n \mapsto [a^2]_n$ en esos mismos módulos.
83. **Nivel D.** Módulo seis, se proponen las reglas $F([a]_6) = [\lfloor a/6 \rfloor]_2$ y $G([a]_6) = [r(a)]_2$, donde $r(a)$ es el resto canónico al dividir por seis. Decide cuáles definen funciones sobre clases, incluyendo representantes negativos. Si una falla, explica por qué imponer un representante canónico cambia la definición.
84. **Nivel E.** Sean $d, n \geq 2$. Determina cuándo la frase «d divide al representante a» define una propiedad de la clase $[a]_n$. Prueba el criterio en ambos sentidos y contrasta $d = 3, n = 12$ con $d = 8, n = 12$.
85. **Nivel E.** Para $c \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ y $d = \gcd(c, n)$, demuestra la equivalencia $ca \equiv cb \pmod{n} \iff (n/d) \mid (a - b)$. Incluye $c = 0$ y explica cuándo puedes expresar el resultado como congruencia con módulo al menos dos. Exhibe todas las clases que colapsan con $[0]_n$.

86. **Nivel D.** En los enteros, $a^2 = b^2$ obliga a $a = b$ o $a = -b$. Módulo ocho, determina todas las clases $[a]_8$ con $a^2 \equiv 1 \pmod 8$ y decide si todas son $[1]_8$ o $[-1]_8$. Relaciona el diagnóstico con $(a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod 8$.
87. **Nivel D.** Compara las conclusiones de $6x = 6y$, $6x \equiv 6y \pmod{35}$ y $6x \equiv 6y \pmod{42}$. En cada caso determina exactamente la información sobre $x - y$ y muestra por qué no puedes transferir la conclusión del primer caso a los otros.
88. **Nivel E.** Sea $H([x]_n) = [cx + t]_n$ con $n \geq 2$. Demuestra que es una permutación de las clases exactamente cuando $\gcd(c, n) = 1$. Si $d = \gcd(c, n) > 1$, clasifica las imágenes posibles y cuenta sus preimágenes. Aplica el resultado a $H([x]_{18}) = [6x + 5]_{18}$.
89. **Nivel D.** Usa el certificado $(-14) \cdot 2 + 35 \cdot 1 = 7$ para reconstruir todas las soluciones de $-14x \equiv 21 \pmod{35}$, tanto como enteros como clases. Determina además los representantes con $-7 \leq x \leq 7$ y justifica exhaustividad.
90. **Nivel D.** Para resolver $11x \equiv -3 \pmod{25}$ se dispone de $1 = -9 \cdot 11 + 4 \cdot 25$ y de $1 = 16 \cdot 11 - 7 \cdot 25$. Reconstruye desde ambos certificados la familia completa de soluciones de $11x - 25y = -3$. Explica cómo dos soluciones particulares distintas producen la misma familia.
91. **Nivel E.** Para cada $m \in \mathbb{Z}$, usa $1 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5$ para resolver completamente $20x \equiv 10m \pmod{50}$. Describe todos los enteros y todas las clases módulo cincuenta, y demuestra que el número de clases no depende de m.
92. **Nivel E.** Reconstruye todos los enteros que cumplen $12x \equiv 6 \pmod{18}$ y $7x \equiv 4 \pmod{10}$. Cuenta después las clases solución módulo noventa. Justifica por qué el menor período positivo de la familia no es noventa.
93. **Nivel D.** Determina todos los enteros x con $x \equiv -3 \pmod 8$ y $x \equiv 4 \pmod 9$. Obtén un testigo mediante $9 - 8 = 1$, prueba la unicidad con el módulo pertinente y encuentra todas las soluciones en $[-100, 100]$.
94. **Nivel E.** Clasifica los $b \in \{0, \dots, 17\}$ para los cuales existe x con $x \equiv 5 \pmod{12}$ y $x \equiv b \pmod{18}$. Para cada valor permitido, reconstruye todas las soluciones y determina su menor período positivo, sin aplicar el CRT coprimo a doce y dieciocho.
95. **Nivel E.** Sean $n = km$ con $m, k \geq 2$. Clasifica cuándo $x \equiv a \pmod m$, $x \equiv b \pmod n$ es soluble y reconstruye todas las soluciones sin introducir congruencias módulo uno. Aplica el resultado a $m = 8, n = 24, a = 3$ y todos los restos $0 \leq b < 24$.
96. **Nivel E.** Determina los $b \in \{0, \dots, 14\}$ para los cuales es soluble el sistema $x \equiv 1 \pmod 6$, $x \equiv 3 \pmod{10}$, $x \equiv b \pmod{15}$. Reconstruye todas las soluciones. Explica por qué $b = 8$ supera un control de compatibilidad pero falla otro, y por qué no se aplica directamente el CRT dos a dos coprimo.

Soluciones razonadas

A. Definición, restos y congruencias básicas

1. Las cuatro congruencias son verdaderas. En efecto,

$$37 - 7 = 30 = 3 \cdot 10,$$

$$-11 - 4 = -15 = (-3) \cdot 5,$$

$$26 - 5 = 21 = 3 \cdot 7,$$

y

$$41 - (-1) = 42 = 7 \cdot 6.$$

En cada caso el módulo divide la diferencia, que es exactamente la definición de congruencia.

2. Aplicamos el algoritmo de división con resto no negativo.

$$-23 = 7(-4) + 5,$$

por lo que el representante canónico es 5 módulo 7.

$$58 = 9 \cdot 6 + 4,$$

así que el representante canónico es 4 módulo 9.

$$-101 = 12(-9) + 7,$$

por lo que el representante canónico es 7 módulo 12.
Finalmente,

$$250 = 17 \cdot 14 + 12,$$

así que el representante canónico es 12 módulo 17.

3. Por definición,

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a-b).$$

La divisibilidad $n \mid (a-b)$ significa que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a - b = kn.$$

Sumando b a ambos lados,

$$a = b + kn.$$

Recíprocamente, si $a = b + kn$, entonces $a - b = kn$, de modo que $n \mid (a-b)$ y por tanto $a \equiv b \pmod{n}$. Las dos formulaciones expresan la misma condición: la diferencia entre a y b es un múltiplo entero del módulo.

4. Por el algoritmo de división existen únicos $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ y $r_1, r_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ tales que

$$a = nq_1 + r_1, \qquad b = nq_2 + r_2.$$

Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $n \mid (a-b)$. Pero

$$a - b = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2),$$

de donde $n \mid (r_1 - r_2)$. Como $|r_1 - r_2| < n$, el único múltiplo de n posible es 0. Luego $r_1 = r_2$.

Recíprocamente, si $r_1 = r_2$, entonces

$$a - b = n(q_1 - q_2),$$

así que $n \mid (a-b)$ y $a \equiv b \pmod{n}$. Por la unicidad del resto, compartir resto y ser congruentes módulo n son condiciones equivalentes.

5. Dividimos 137 por 12:

$$137 = 12 \cdot 11 + 5.$$

Por tanto,

$$137 \equiv 5 \pmod{12}.$$

El único $r \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ buscado es

$$\boxed{r = 5}.$$

La unicidad se debe al algoritmo de división: cada entero posee exactamente un resto en ese intervalo.

6. a) Verdadera. Es la definición:

$$a \equiv b \pmod{n} \Longrightarrow n \mid (a - b).$$

b) Falsa. Basta tomar $a = b$. Entonces $a - b = 0 < n$, pero

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

c) Verdadera. Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $n \mid (a - b)$. Si además $d \mid n$, por transitividad de la divisibilidad se tiene $d \mid (a - b)$, y por tanto

$$a \equiv b \pmod{d}.$$

d) Falsa. Tomemos $d = 2$, $n = 4$, $a = 2$ y $b = 0$. Entonces

$$2 \equiv 0 \pmod{2},$$

pero

$$2 \not\equiv 0 \pmod{4}.$$

La congruencia respecto de un divisor del módulo es, en general, una condición más débil.

7. Existencia. Por el algoritmo de división existen $q \in \mathbb{Z}$ y r con $0 \leq r < n$ tales que

$$a = nq + r.$$

Así,

$$a - r = nq,$$

de modo que $a \equiv r \pmod{n}$.

Unicidad. Supongamos que $r, s \in \{0, \ldots, n-1\}$ satisfacen

$$a \equiv r \pmod{n}, \qquad a \equiv s \pmod{n}.$$

Por simetría y transitividad,

$$r \equiv s \pmod{n},$$

por lo que $n \mid (r - s)$. Pero $|r - s| < n$. Luego $r - s = 0$ y $r = s$.

8. La congruencia escrita por el estudiante es correcta:

$$-17 - (-2) = -15,$$

y $5 \mid -15$. Por tanto,

$$-17 \equiv -2 \pmod{5}.$$

El error está en llamar a -2 **el resto**. El resto canónico debe pertenecer a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Como

$$-17 = 5(-4) + 3,$$

el resto canónico es 3. Además,

$$-2 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Así, -2 es un representante de la misma clase, pero 3 es su representante canónico.

B. Relación de equivalencia y clases residuales

9. Para todo $a \in \mathbb{Z}$,

$$a - a = 0.$$

Como $n \mid 0$, por definición

$$a \equiv a \pmod{n}.$$

Por tanto, la congruencia módulo n es reflexiva.

10. Si

$$a \equiv b \pmod{n},$$

entonces $n \mid (a - b)$. Existe $k \in \mathbb{Z}$ con

$$a - b = kn.$$

Multiplicando por -1,

$$b - a = (-k)n,$$

de modo que $n \mid (b - a)$. Por tanto,

$$b \equiv a \pmod{n}.$$

La propiedad usada es que si un entero divide a otro, también divide a su opuesto.

11. Supongamos

$$a \equiv b \pmod{n}, \qquad b \equiv c \pmod{n}.$$

Entonces

$$n \mid (a-b) \qquad \text{y} \qquad n \mid (b-c).$$

Como los múltiplos de n son cerrados bajo suma,

$$n \mid [(a-b)+(b-c)].$$

Pero

$$a - c = (a-b)+(b-c).$$

Por tanto $n \mid (a-c)$ y

$$a \equiv c \pmod{n}.$$

12. Podemos escribir, por ejemplo,

$$[0]_4 = \{\ldots, -20, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots\},$$

$$[1]_4 = \{\ldots, -19, -15, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots\},$$

$$[2]_4 = \{\ldots, -18, -14, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots\},$$

$$[3]_4 = \{\ldots, -17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, \ldots\}.$$

No existe una quinta clase distinta porque todo entero, al dividirse por 4, tiene exactamente uno de los restos $0, 1, 2, 3$. Por tanto pertenece a exactamente una de esas cuatro clases.

13. Supongamos primero que

$$[a]_n = [b]_n.$$

Como $a \in [a]_n$, también $a \in [b]_n$. Por definición de clase,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Recíprocamente, supongamos $a \equiv b \pmod{n}$. Si $x \in [a]_n$, entonces $x \equiv a \pmod{n}$. Por transitividad,

$$x \equiv b \pmod{n},$$

de modo que $x \in [b]_n$. Así $[a]_n \subseteq [b]_n$. Por simetría del argumento, $[b]_n \subseteq [a]_n$. Luego

$$[a]_n = [b]_n.$$

14. Todas las igualdades son verdaderas:

$$17 - 5 = 12 = 2 \cdot 6,$$

por lo que $[17]_6 = [5]_6$;

$$-8 - 4 = -12 = (-2) \cdot 6,$$

así que $[-8]_6 = [4]_6$;

$$21 - 5 = 16 = 2 \cdot 8,$$

por lo que $[21]_8 = [5]_8$;
y

$$-15 - 6 = -21 = (-3) \cdot 7,$$

así que $[-15]_7 = [6]_7$.

15. Primero probamos que las clases son distintas dos a dos. Si

$$[r]_n = [s]_n, \qquad 0 \leq r, s < n,$$

entonces $r \equiv s \pmod{n}$, así que $n \mid (r - s)$. Como $|r - s| < n$, necesariamente $r = s$.
Ahora sea $a \in \mathbb{Z}$. Por el algoritmo de división existe un único $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ con

$$a \equiv r \pmod{n}.$$

Por tanto $a \in [r]_n$, y la unión de las n clases es todo $\mathbb{Z}$.
Finalmente, si dos clases tuvieran un elemento común x, tendríamos

$$x \equiv r \pmod{n}, \qquad x \equiv s \pmod{n},$$

y por simetría y transitividad $r \equiv s \pmod{n}$. Entonces $r = s$. Por tanto dos clases distintas son disjuntas. Las clases forman, pues, una partición de $\mathbb{Z}$.

16. Todos los elementos de

$$R = \{2, 7, 12, 17, 22\}$$

son congruentes con 2 módulo 5. Por tanto R representa cinco veces la misma clase y no contiene representantes de las otras cuatro. No es un sistema completo de residuos.
Dos ejemplos válidos son

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

y

$$\{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

En el primer conjunto los restos canónicos son $3, 4, 0, 1, 2$; en el segundo son $0, 1, 2, 3, 4$. En ambos casos aparece exactamente una vez cada clase módulo 5.

C. Operaciones compatibles y potencias

17. De

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{y} \qquad c \equiv d \pmod{n}$$

se sigue que $n \mid (a-b)$ y $n \mid (c-d)$. Entonces

$$(a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d)$$

es múltiplo de n. Por tanto

$$a+c \equiv b+d \pmod{n}.$$

18. Bajo las mismas hipótesis,

$$(a-c)-(b-d) = (a-b)-(c-d).$$

Como n divide tanto $a-b$ como $c-d$, divide también su diferencia. Luego

$$a-c \equiv b-d \pmod{n}.$$

19. Escribamos

$$a = b+rn, \qquad c = d+sn$$

para ciertos $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$ac = (b+rn)(d+sn) = bd + bsn + drn + rsn^2.$$

Por tanto

$$ac - bd = n(bs + dr + rsn),$$

de modo que $n \mid (ac-bd)$. Así,

$$ac \equiv bd \pmod{n}.$$

20. Procedemos por inducción sobre $m \geq 1$.
Para $m = 1$, la afirmación es exactamente la hipótesis

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Supongamos ahora que

$$a^m \equiv b^m \pmod{n}.$$

Como también $a \equiv b \pmod{n}$, la compatibilidad con el producto da

$$a^{m+1} = a^m a \equiv b^m b = b^{m+1} \pmod{n}.$$

Por inducción, la afirmación vale para todo $m \geq 1$.

21. a) Módulo 11,

$$47 \equiv 3, \qquad 89 \equiv 1.$$

Luego

$$47 + 89 \equiv 3 + 1 \equiv \boxed{4} \pmod{11}.$$

b) Módulo 13,

$$123 \equiv 6, \qquad 77 \equiv 12 \equiv -1.$$

Por tanto

$$123 \cdot 77 \equiv 6(-1) = -6 \equiv \boxed{7} \pmod{13}.$$

c) Módulo 9,

$$-38 \equiv 7,$$

así que

$$(-38)^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv \boxed{4} \pmod{9}.$$

d) Módulo 5,

$$17 \equiv 2, \qquad 8 \equiv 3.$$

Entonces

$$17^4 + 8^3 \equiv 2^4 + 3^3 = 16 + 27 = 43 \equiv \boxed{3} \pmod{5}.$$

22. Si $a \equiv b \pmod{n}$, por el ejercicio 20,

$$a^j \equiv b^j \pmod{n}$$

para todo $j \geq 1$. Multiplicar una congruencia por el entero c_j conserva la congruencia, de modo que

$$c_j a^j \equiv c_j b^j \pmod{n}$$

para $j \geq 1$. El término constante c_0 es idéntico en ambos polinomios. Sumando obtenemos

$$c_0 + c_1 a + \cdots + c_r a^r \equiv c_0 + c_1 b + \cdots + c_r b^r \pmod{n}.$$

Es decir,

$$P(a) \equiv P(b) \pmod{n}.$$

Sólo se usaron las reglas elementales de congruencia para suma y producto.

23. Calculamos las primeras potencias módulo 10:

$$7^1 \equiv 7,$$

$$7^2 = 49 \equiv 9,$$

$$7^3 \equiv 9 \cdot 7 = 63 \equiv 3,$$

$$7^4 \equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Al multiplicar otra vez por 7, la sucesión de residuos vuelve a comenzar, por lo que el ciclo tiene longitud 4:

$$7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \ldots$$

Como

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2,$$

tenemos

$$7^{2026} \equiv 7^2 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Por tanto, el último dígito es

$$\boxed{9}.$$

24. Módulo 2, todo entero es congruente con 0 o con 1.

- Si $m \equiv 0 \pmod 2$, entonces $m(m+1) \equiv 0$.
- Si $m \equiv 1 \pmod 2$, entonces $m+1 \equiv 0 \pmod 2$, y de nuevo $m(m+1) \equiv 0$.

Así,

$$m(m+1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Módulo 3, todo entero es congruente con 0, 1 o 2.

- Si $m \equiv 0$, el primer factor es 0.
- Si $m \equiv 1$, entonces $m+2 \equiv 0$.
- Si $m \equiv 2$, entonces $m+1 \equiv 0$.

En todos los casos uno de los tres factores es congruente con 0 módulo 3. Por tanto

$$m(m+1)(m+2) \equiv 0 \pmod{3}.$$

D. Buena definición, aritmética de clases y cancelación

25. De

$$[a]_n = [a']_n, \qquad [b]_n = [b']_n$$

se obtiene

$$a \equiv a' \pmod{n}, \qquad b \equiv b' \pmod{n}.$$

Por compatibilidad con la suma,

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n}.$$

Luego

$$[a + b]_n = [a' + b']_n.$$

Esto demuestra que, si sustituimos cualquiera de las clases iniciales por otro representante, la clase final no cambia. Por tanto la definición

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$

está bien definida.

26. De nuevo,

$$a \equiv a' \pmod{n}, \qquad b \equiv b' \pmod{n}.$$

La compatibilidad con el producto da

$$ab \equiv a'b' \pmod{n},$$

y por tanto

$$[ab]_n = [a'b']_n.$$

Así, el producto de clases

$$[a]_n[b]_n = [ab]_n$$

no depende de los representantes elegidos.

27. La tabla de suma en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ es

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$

La tabla de multiplicación es

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[0]$	$[2]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

En particular,

$$[2]_4[2]_4 = [0]_4,$$

aunque $[2]_4 \neq [0]_4$. Esto muestra que pueden existir clases no nulas cuyo producto sea cero.

28. Reducimos siempre módulo 6:

$$[4]_6 + [5]_6 = [9]_6 = [3]_6,$$

$$[4]_6[5]_6 = [20]_6 = [2]_6,$$

$$[5]_6^2 = [25]_6 = [1]_6.$$

Además,

$$([2]_6 + [5]_6)[4]_6 = [7]_6[4]_6 = [1]_6[4]_6 = [4]_6.$$

29. Tomemos módulo 6:

$$a = 1, \qquad b = 4, \qquad c = 2.$$

Entonces $c \not\equiv 0 \pmod 6$ y

$$ac = 2, \qquad bc = 8 \equiv 2 \pmod 6.$$

Por tanto

$$ac \equiv bc \pmod 6,$$

pero

$$1 \not\equiv 4 \pmod 6.$$

Así, la cancelación puede fallar incluso cuando el factor cancelado no es la clase cero.

30. De

$$ac \equiv bc \pmod n$$

obtenemos

$$n \mid (ac - bc) = c(a - b).$$

Como

$$\gcd(c, n) = 1,$$

la cancelación coprima de C15 implica

$$n \mid (a - b).$$

Por tanto

$$a \equiv b \pmod n.$$

La hipótesis de coprimalidad es exactamente la que permite cancelar el factor c dentro de una afirmación de divisibilidad.

31. Sea

$$d = \gcd(c, n) > 1.$$

Las clases

$$[0]_n \qquad \text{y} \qquad \left[\frac{n}{d}\right]_n$$

son distintas, porque

$$0 < \frac{n}{d} < n.$$

Sin embargo,

$$c\frac{n}{d} = \frac{c}{d}\, n,$$

que es múltiplo de n ya que $d \mid c$. Por tanto

$$[c]_n[0]_n = [0]_n$$

y

$$[c]_n \left[\frac{n}{d}\right]_n = [0]_n.$$

Dos clases distintas tienen la misma imagen; la multiplicación por $[c]_n$ no es inyectiva.

32. La inferencia inválida consiste en cancelar 18 sin comprobar que sea coprimo con 30. En efecto,

$$\gcd(18, 30) = 6 \neq 1.$$

La congruencia original equivale a

$$30 \mid 18(x - y).$$

Dividiendo la relación de divisibilidad por 6 obtenemos

$$5 \mid 3(x - y).$$

Como $\gcd(3, 5) = 1$, ahora sí podemos cancelar 3 y concluir

$$5 \mid (x - y).$$

Por tanto, la conclusión correcta es

$$\boxed{x \equiv y \pmod 5}.$$

No puede concluirse congruencia módulo 30: por ejemplo, $x = 0$ y $y = 5$ satisfacen $18x \equiv 18y \pmod{30}$, pero no son congruentes módulo 30.

E. Inversos modulares y Bézout

33. Una clase $[a]_n$ es invertible exactamente cuando $\gcd(a, n) = 1$.

$$\gcd(2, 7) = 1,$$

por lo que $[2]_7$ es invertible.

$$\gcd(3, 8) = 1,$$

por lo que $[3]_8$ es invertible.

$$\gcd(4, 9) = 1,$$

por lo que $[4]_9$ es invertible.

$$\gcd(6, 15) = 3,$$

por lo que $[6]_{15}$ no es invertible.
Finalmente,

$$\gcd(11, 12) = 1,$$

así que $[11]_{12}$ sí es invertible.

34. Si

$$\gcd(a, n) = 1,$$

Bézout garantiza la existencia de $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que

$$au + nv = 1.$$

Reduciendo módulo n desaparece el término nv y queda

$$au \equiv 1 \pmod{n}.$$

Por tanto $[u]_n$ es un inverso de $[a]_n$.

35. Si

$$au \equiv 1 \pmod{n},$$

entonces $n \mid (au - 1)$. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$au - 1 = kn,$$

o equivalentemente

$$au - kn = 1.$$

Todo divisor común de a y n divide el miembro izquierdo y, por tanto, divide a 1. Luego el único divisor común positivo es 1:

$$\gcd(a, n) = 1.$$

36. a) Inverso de 17 **módulo** 43**.**
El algoritmo de Euclides da

$$43 = 2 \cdot 17 + 9,$$

$$17 = 9 + 8,$$

$$9 = 8 + 1.$$

Sustituyendo hacia atrás,

$$1 = 9 - 8 = 2 \cdot 9 - 17 = 2 \cdot 43 - 5 \cdot 17.$$

Por tanto

$$17^{-1} \equiv -5 \equiv \boxed{38} \pmod{43}.$$

Verificación: $17 \cdot 38 = 646 = 43 \cdot 15 + 1$.
b) Inverso de 23 **módulo** 64**.**

$$64 = 2 \cdot 23 + 18,$$

$$23 = 18 + 5,$$

$$18 = 3 \cdot 5 + 3,$$

$$5 = 3 + 2,$$

$$3 = 2 + 1.$$

La sustitución hacia atrás produce

$$1 = 9 \cdot 64 - 25 \cdot 23.$$

Así,

$$23^{-1} \equiv -25 \equiv \boxed{39} \pmod{64}.$$

Verificación: $23 \cdot 39 = 897 = 64 \cdot 14 + 1$.
c) Inverso de 37 **módulo** 101**.**

$$101 = 2 \cdot 37 + 27,$$

$$37 = 27 + 10,$$

$$27 = 2 \cdot 10 + 7,$$

$$10 = 7 + 3,$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Sustituyendo,

$$1 = 11 \cdot 101 - 30 \cdot 37.$$

Luego

$$37^{-1} \equiv -30 \equiv \boxed{71} \pmod{101}.$$

Verificación: $37 \cdot 71 = 2627 = 101 \cdot 26 + 1$.

37. Si $au \equiv 1 \pmod{n}$ y $av \equiv 1 \pmod{n}$, al restar obtenemos

$$a(u - v) \equiv 0 \pmod{n}.$$

La existencia de un inverso implica $\gcd(a, n) = 1$. Por cancelación coprima,

$$u - v \equiv 0 \pmod{n}.$$

Por tanto

$$\boxed{u \equiv v \pmod{n}}.$$

El inverso puede tener muchos representantes enteros, pero determina una única clase módulo n.

38. Sea a^{-1} un inverso de a módulo n. Multiplicando

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

por a^{-1} obtenemos

$$x \equiv a^{-1}b \pmod{n}.$$

Por tanto existe la solución

$$\boxed{x \equiv a^{-1}b \pmod{n}}.$$

Si x e y fueran dos soluciones, entonces $ax \equiv ay \pmod{n}$. Como $\gcd(a, n) = 1$, podemos cancelar a y obtener $x \equiv y \pmod{n}$. La solución es única como clase.

39. Los residuos invertibles módulo 20 son exactamente los coprimos con 20:

$$1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.$$

Un inverso para cada uno es:

$$1^{-1} \equiv 1, \qquad 3^{-1} \equiv 7, \qquad 7^{-1} \equiv 3, \qquad 9^{-1} \equiv 9,$$

$$11^{-1} \equiv 11, \qquad 13^{-1} \equiv 17, \qquad 17^{-1} \equiv 13, \qquad 19^{-1} \equiv 19 \pmod{20}.$$

Por ejemplo, $3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{20}$ y $13 \cdot 17 = 221 \equiv 1 \pmod{20}$.

No es necesario ensayar productos para los demás residuos: el criterio

$$[a]_{20} \text{ invertible} \iff \gcd(a, 20) = 1$$

decide el problema completamente.

40. Módulo 4, la clase $[2]_4$ es no nula, pero no tiene inverso. En efecto,

$$\gcd(2,4) = 2 \neq 1.$$

También puede verse directamente: los productos de 2 por residuos módulo 4 son sólo 0 o 2, nunca 1.

Por tanto, la condición $a \not\equiv 0 \pmod{n}$ no basta. El criterio correcto es

$$\boxed{a \text{ es invertible módulo } n \iff \gcd(a,n) = 1.}$$

F. Congruencias lineales: existencia

41. Usamos

$$ax \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (ax - b).$$

Por tanto existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax - b = ny$, es decir,

$$ax - ny = b.$$

Así, las tres congruencias son equivalentes a:

a)

$$7x - 12y = 3.$$

b)

$$18x - 30y = 6.$$

c)

$$14x - 21y = 5.$$

En cada caso la variable auxiliar y registra cuántos módulos separan ax de b.

42. Supongamos

$$ax \equiv b \pmod{n}.$$

Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ax - b = kn,$$

o bien

$$b = ax - kn.$$

Sea

$$d = \gcd(a,n).$$

Como $d \mid a$ y $d \mid n$, se tiene $d \mid ax$ y $d \mid kn$. Por tanto d divide su diferencia:

$$d \mid b.$$

Esto prueba la necesidad.

43. Supongamos

$$d = \gcd(a, n) \qquad \text{y} \qquad d \mid b.$$

La congruencia

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

es equivalente a pedir enteros x, y tales que

$$ax - ny = b.$$

Los coeficientes son a y $-n$, cuyo MCD es también d. Por el criterio de ecuaciones diofánticas lineales de C15, la ecuación

$$ax + (-n)y = b$$

tiene solución entera precisamente porque $d \mid b$.

Por tanto existe x con

$$ax \equiv b \pmod{n}.$$

44. Aplicamos el criterio

$$ax \equiv b \pmod{n} \text{ soluble} \iff \gcd(a, n) \mid b.$$

a)

$$\gcd(12, 20) = 4,$$

y $4 \mid 8$. Es soluble.

b)

$$\gcd(12, 20) = 4,$$

pero $4 \nmid 7$. No es soluble.

c)

$$\gcd(21, 35) = 7,$$

y $7 \mid 14$. Es soluble.

d)

$$\gcd(18, 42) = 6,$$

pero $6 \nmid 15$. No es soluble.

45. Queremos resolver

$$7x \equiv 5 \pmod{12}.$$

Como

$$7 \cdot 7 = 49 \equiv 1 \pmod{12},$$

el inverso de 7 módulo 12 es 7. Multiplicamos por él:

$$x \equiv 7 \cdot 5 = 35 \equiv 11 \pmod{12}.$$

Por tanto,

$$\boxed{x \equiv 11 \pmod{12}}.$$

Verificación:

$$7 \cdot 11 = 77 \equiv 5 \pmod{12}.$$

46. Tenemos

$$\gcd(18, 30) = 6,$$

y $6 \mid 12$. Partimos de

$$18x \equiv 12 \pmod{30},$$

que significa

$$30 \mid 18x - 12 = 6(3x - 2).$$

Esto es equivalente a

$$5 \mid 3x - 2,$$

o sea,

$$3x \equiv 2 \pmod{5}.$$

El inverso de 3 módulo 5 es 2, así que

$$x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Como clases módulo 30, esto produce

$$\boxed{x \equiv 4, 9, 14, 19, 24, 29 \pmod{30}}.$$

No es correcto dividir por 6 y conservar el módulo 30, porque al factorizar

$$30 \mid 6(3x - 2)$$

la condición equivalente es $5 \mid (3x - 2)$: el módulo también se reduce por el mismo factor.

47. Sea

$$d = \gcd(a, n), \qquad a = da_1, \qquad n = dn_1.$$

Por Bézout existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que

$$au + nv = d.$$

Sustituyendo $a = da_1$ y $n = dn_1$,

$$da_1 u + dn_1 v = d.$$

Dividiendo por $d > 0$,

$$a_1 u + n_1 v = 1.$$

Por el criterio de Bézout,

$$\gcd(a_1, n_1) = 1.$$

Si $d < n$, entonces $n_1 = n/d \geq 2$, y en la congruencia reducida el coeficiente a_1 es invertible módulo n_1. Si $d = n$, entonces $n_1 = 1$; bajo la convención de este capítulo no hablamos de aritmética módulo 1, y ese caso se trata separadamente: la congruencia original es soluble exactamente cuando $n \mid b$, y entonces todas las clases módulo n son soluciones.

48. Calculamos

$$\gcd(24, 36) = 12.$$

Por el criterio de solvencia,

$$24x \equiv b \pmod{36}$$

tiene solución si y sólo si

$$12 \mid b.$$

Entre 0 y 35 los múltiplos de 12 son

$$\boxed{0, 12, 24}.$$

Hay exactamente tres. Esto coincide con que en un intervalo completo de 36 enteros aparecen $36/12 = 3$ múltiplos de 12.

G. Clasificación y conteo de soluciones

49. Tenemos

$$d = \gcd(12, 20) = 4.$$

Como $4 \mid 8$, la congruencia es soluble. Dividimos coeficiente, término independiente y módulo por 4:

$$3x \equiv 2 \pmod{5}.$$

El inverso de 3 módulo 5 es 2, de modo que

$$x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Al levantar esta clase al módulo 20, obtenemos

$$x = 4 + 5k, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Por tanto las soluciones módulo 20 son

$$\boxed{[4]_{20}, [9]_{20}, [14]_{20}, [19]_{20}}.$$

Hay exactamente $4 = d$ soluciones.

50. Calculamos

$$\gcd(18, 30) = 6.$$

Como $6 \mid 6$, dividimos por 6:

$$3x \equiv 1 \pmod 5.$$

El inverso de 3 módulo 5 es 2, así que

$$x \equiv 2 \pmod 5.$$

Al levantar al módulo 30 aparecen las seis clases

$$x = 2 + 5k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Es decir,

$$\boxed{x \equiv 2, 7, 12, 17, 22, 27 \pmod{30}}.$$

Hay exactamente $6 = \gcd(18, 30)$ soluciones.

51. Tenemos

$$\gcd(21, 35) = 7.$$

Como $7 \mid 14$, reducimos:

$$3x \equiv 2 \pmod 5.$$

El inverso de 3 módulo 5 es 2, por lo que

$$x \equiv 4 \pmod 5.$$

Al levantar al módulo 35:

$$x = 4 + 5k, \qquad k = 0, 1, \ldots, 6.$$

Las siete soluciones son

$$\boxed{x \equiv 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34 \pmod{35}}.$$

Aparecen exactamente siete porque $d = \gcd(21, 35) = 7$.

52. Aquí

$$d = \gcd(15, 45) = 15.$$

Como $15 \mid 0$, el teorema general garantiza exactamente 15 soluciones módulo 45. Dividimos por 15:

$$x \equiv 0 \pmod 3.$$

Por tanto, las soluciones son exactamente las clases representadas por los múltiplos de 3:

$$\boxed{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42}$$

módulo 45.

53. Escribamos

$$a = da_1, \qquad b = db_1, \qquad n = dn_1,$$

con $n_1 = n/d$. La congruencia reducida es

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{n_1}.$$

Supongamos que x_0 es una solución. Para

$$x_k = x_0 + kn_1, \qquad k = 0, \ldots, d-1,$$

tenemos

$$x_k \equiv x_0 \pmod{n_1}.$$

Por tanto

$$a_1 x_k \equiv a_1 x_0 \equiv b_1 \pmod{n_1}.$$

Esto significa que $n_1 \mid (a_1 x_k - b_1)$. Multiplicando por d,

$$n \mid (ax_k - b),$$

y así

$$ax_k \equiv b \pmod{n}.$$

Los d valores propuestos producen, por tanto, soluciones del problema original.

54. Supongamos que para $0 \le j, k \le d-1$,

$$x_0 + j\frac{n}{d} \equiv x_0 + k\frac{n}{d} \pmod{n}.$$

Restando,

$$n \mid (j-k)\frac{n}{d}.$$

Como $n = d(n/d)$, esto equivale a

$$d \mid (j-k).$$

Pero

$$|j-k| \leq d-1.$$

El único múltiplo de d en ese intervalo es 0, así que $j = k$. Las d clases son distintas dos a dos.

55. Sea x cualquier solución de

$$ax \equiv b \pmod{n}.$$

Con la notación

$$a = da_1, \qquad b = db_1, \qquad n = dn_1,$$

la congruencia se reduce a

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{n_1}.$$

Como

$$\gcd(a_1, n_1) = 1,$$

esta congruencia reducida tiene una única solución módulo n_1. Si x_0 es una de ellas, entonces

$$x \equiv x_0 \pmod{n_1}.$$

Así,

$$x = x_0 + tn_1$$

para algún $t \in \mathbb{Z}$. Por división entera por $d > 0$, existen únicos $q \in \mathbb{Z}$ y $k \in \{0, \ldots, d-1\}$ tales que $t = dq + k$. Si $d = 1$, esto da directamente $k = 0$, sin introducir congruencias módulo uno. Entonces

$$x \equiv x_0 + kn_1 \pmod{n}.$$

Por tanto toda solución pertenece a una de las d clases construidas en el ejercicio 53. Esto prueba la exhaustividad.

56. a) Caso $\gcd(a, n) = 1$**.**
Aquí $d = 1$. Como $1 \mid b$ para todo entero b, la congruencia

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

siempre es soluble. El teorema general dice que hay exactamente una clase solución módulo n. Equivalentemente, a es invertible y

$$x \equiv a^{-1}b \pmod{n}.$$

b) Caso $n \mid a$**.**
Entonces

$$\gcd(a, n) = n.$$

El criterio de solvencia exige

$$n \mid b.$$

Si $n \nmid b$, no hay soluciones. Si $n \mid b$, entonces

$$a \equiv 0 \pmod{n}, \qquad b \equiv 0 \pmod{n},$$

y la congruencia se convierte en

$$0 \cdot x \equiv 0 \pmod{n},$$

que satisface toda clase $[x]_n$. Hay exactamente n soluciones módulo n, de acuerdo con $d = n$.

H. Sistemas y Teorema Chino del Resto

57. Los enteros congruentes con 2 módulo 3 son, entre otros,

$$2, 5, 8, 11, 14, \ldots$$

De ellos, $8 \equiv 3 \pmod{5}$. Por tanto

$$\boxed{x \equiv 8 \pmod{15}}.$$

Verificación:

$$8 \equiv 2 \pmod{3}, \qquad 8 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Como $\gcd(3, 5) = 1$, el CRT garantiza unicidad módulo 15.

58. Escribimos

$$x = 4 + 7t.$$

La segunda congruencia exige

$$4 + 7t \equiv 5 \pmod{9},$$

o sea,

$$7t \equiv 1 \pmod{9}.$$

Como

$$7 \cdot 4 = 28 \equiv 1 \pmod{9},$$

tenemos

$$t \equiv 4 \pmod{9}.$$

Entonces

$$x = 4 + 7 \cdot 4 = 32$$

es una solución. Como 7 y 9 son coprimos,

$$\boxed{x \equiv 32 \pmod{63}}.$$

Verificación:

$$32 \equiv 4 \pmod{7}, \qquad 32 \equiv 5 \pmod{9}.$$

59. Sea

$$rm + sn = 1$$

y definamos

$$x = a(sn) + b(rm).$$

Módulo m tenemos

$$rm \equiv 0 \pmod{m}$$

y, de la identidad de Bézout,

$$sn \equiv 1 \pmod{m}.$$

Por tanto

$$x \equiv a \cdot 1 + b \cdot 0 \equiv a \pmod{m}.$$

Análogamente, módulo n,

$$sn \equiv 0 \pmod{n}, \qquad rm \equiv 1 \pmod{n},$$

por lo que

$$x \equiv b \pmod{n}.$$

La fórmula construye explícitamente una solución del sistema.

60. Supongamos que x e y satisfacen el mismo sistema. Entonces

$$x \equiv y \pmod{m}$$

y

$$x \equiv y \pmod{n}.$$

Así,

$$m \mid (x - y) \qquad \text{y} \qquad n \mid (x - y).$$

Escribamos

$$x - y = mk.$$

Como $n \mid mk$ y $\gcd(m, n) = 1$, la cancelación coprima de C15 da

$$n \mid k.$$

Luego $k = nq$ para algún q, y

$$x - y = mnq.$$

Por tanto

$$\boxed{x \equiv y \pmod{mn}}.$$

La coprimalidad se usa exactamente al pasar de $n \mid mk$ a $n \mid k$.

61. Primero resolvemos

$$x \equiv 1 \pmod 4, \qquad x \equiv 2 \pmod 9.$$

Escribimos $x = 1 + 4t$. Entonces

$$1 + 4t \equiv 2 \pmod 9,$$

de modo que

$$4t \equiv 1 \pmod 9.$$

Como $4^{-1} \equiv 7 \pmod 9$,

$$t \equiv 7 \pmod 9.$$

Así,

$$x \equiv 29 \pmod{36}.$$

Ahora escribimos $x = 29 + 36s$ y exigimos

$$29 + 36s \equiv 3 \pmod 5.$$

Reduciendo,

$$4 + s \equiv 3 \pmod 5,$$

por lo que

$$s \equiv 4 \pmod 5.$$

Tomando $s = 4$ obtenemos

$$x = 29 + 144 = 173.$$

Como $4, 9, 5$ son dos a dos coprimos,

$$\boxed{x \equiv 173 \pmod{180}}.$$

Verificación:

$$173 \equiv 1 \pmod 4, \qquad 173 \equiv 2 \pmod 9, \qquad 173 \equiv 3 \pmod 5.$$

62. No podemos aplicar directamente el CRT coprimo porque

$$\gcd(6, 9) = 3 \neq 1.$$

Si existiera una solución, de

$$x \equiv 1 \pmod 6$$

se seguiría

$$x \equiv 1 \pmod 3,$$

mientras que de

$$x \equiv 2 \pmod 9$$

se seguiría

$$x \equiv 2 \pmod 3.$$

Eso es imposible. Por tanto el sistema no tiene solución.
La incompatibilidad ya se detecta al comparar los residuos módulo el MCD 3.

63. Partimos de

$$x \equiv 2 \pmod 5,$$

así que escribimos

$$x = 2 + 5a.$$

Imponemos la segunda congruencia:

$$2 + 5a \equiv 4 \pmod 7,$$

de donde

$$5a \equiv 2 \pmod 7.$$

Como $5^{-1} \equiv 3 \pmod 7$,

$$a \equiv 6 \pmod 7.$$

Así,

$$x \equiv 32 \pmod{35}.$$

Escribimos ahora

$$x = 32 + 35b.$$

Módulo 11:

$$32 + 35b \equiv 6,$$

es decir,

$$10 + 2b \equiv 6 \pmod{11}.$$

Luego

$$2b \equiv 7 \pmod{11}.$$

Como $2^{-1} \equiv 6 \pmod{11}$,

$$b \equiv 42 \equiv 9 \pmod{11}.$$

Tomando $b = 9$,

$$x = 32 + 35 \cdot 9 = 347.$$

El producto de los módulos es

$$5 \cdot 7 \cdot 11 = 385,$$

por lo que

$$\boxed{x \equiv 347 \pmod{385}}.$$

El menor entero positivo es 347, y todos los enteros solución son

$$\boxed{x = 347 + 385k, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

64. Como

$$\gcd(n_1, n_2) = 1,$$

el CRT para dos módulos permite combinar las dos primeras congruencias en una única congruencia

$$x \equiv a \pmod{n_1 n_2}.$$

Necesitamos ahora comprobar

$$\gcd(n_1 n_2, n_3) = 1.$$

Si un primo p dividiera a $n_1 n_2$ y a n_3, por el lema de Euclides dividiría a n_1 o a n_2. Eso contradice que n_3 sea coprimo con ambos. Por tanto el MCD es 1.

Aplicamos de nuevo el CRT, ahora a los módulos $n_1 n_2$ y n_3. Obtenemos una solución, única módulo

$$(n_1 n_2) n_3 = n_1 n_2 n_3.$$

Esto demuestra el caso de tres módulos.

I. Síntesis estructural y diagnóstico

65. a) Falsa. Módulo 6, la clase $[2]_6$ es no nula pero

$$\gcd(2, 6) = 2,$$

así que no es invertible.

b) Verdadera. La compatibilidad con potencias da directamente

$$a \equiv b \pmod{n} \Longrightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{n}.$$

c) Falsa. Módulo 6,

$$1 \cdot 2 \equiv 4 \cdot 2 \pmod{6},$$

pues $2 \equiv 8 \pmod{6}$, y $2 \not\equiv 0 \pmod{6}$. Sin embargo,

$$1 \not\equiv 4 \pmod{6}.$$

d) Verdadera. Si $\gcd(a, n) = 1$, entonces a es invertible módulo n, y

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

tiene la única solución

$$x \equiv a^{-1} b \pmod{n}.$$

66. La congruencia es

$$6x \equiv 9 \pmod{15}.$$

Como

$$\gcd(6, 15) = 3,$$

y $3 \mid 9$, dividimos correctamente coeficiente, término independiente y módulo por 3:

$$2x \equiv 3 \pmod{5}.$$

No es equivalente mantener el módulo 15 después de dividir, porque

$$15 \mid 3(2x - 3)$$

es equivalente a

$$5 \mid (2x - 3),$$

no a $15 \mid (2x - 3)$.
El inverso de 2 módulo 5 es 3, de modo que

$$x \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Levantando al módulo 15 obtenemos las tres soluciones

$$\boxed{x \equiv 4, 9, 14 \pmod{15}}.$$

67. Supongamos que a es invertible módulo n. Consideremos dos índices

$$0 \leq i, j < n$$

y supongamos

$$[ia]_n = [ja]_n.$$

Entonces

$$ia \equiv ja \pmod{n}.$$

Como a es invertible, $\gcd(a, n) = 1$, y podemos cancelar a:

$$i \equiv j \pmod{n}.$$

Pero i y j son representantes canónicos entre 0 y $n - 1$, así que $i = j$.
Por tanto las n clases

$$[0]_n, [a]_n, \ldots, [(n-1)a]_n$$

son distintas. Como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contiene exactamente n clases, los enteros

$$0, a, 2a, \ldots, (n-1)a$$

representan cada clase exactamente una vez y forman un sistema completo de residuos módulo n.

68. Supongamos que

$$[0]_n, [a]_n, \ldots, [(n-1)a]_n$$

son todas distintas. Queremos probar

$$\gcd(a, n) = 1.$$

Procedemos por contradicción. Si

$$d = \gcd(a, n) > 1,$$

entonces

$$1 \leq \frac{n}{d} < n.$$

Además,

$$a\frac{n}{d} = \frac{a}{d}\, n,$$

que es múltiplo de n. Por tanto

$$\left[\frac{n}{d}a\right]_n = [0]_n.$$

Esto identifica dos términos de la lista correspondientes a índices distintos, contradiciendo la hipótesis. Luego

$$\boxed{\gcd(a, n) = 1}.$$

69. Buscamos las clases $[a]_6$ tales que

$$a^2 \equiv a \pmod 6.$$

Probamos los seis representantes canónicos:

$$0^2 \equiv 0, \qquad 1^2 \equiv 1,$$

$$2^2 = 4 \not\equiv 2,$$

$$3^2 = 9 \equiv 3,$$

$$4^2 = 16 \equiv 4,$$

$$5^2 = 25 \equiv 1 \not\equiv 5 \pmod 6.$$

Por tanto las clases buscadas son

$$\boxed{[0]_6, [1]_6, [3]_6, [4]_6}.$$

Éste es un problema distinto de la invertibilidad. Una clase idempotente satisface $e^2 = e$; una clase invertible debe admitir u con $eu = 1$. Por ejemplo, $[3]_6$ y $[4]_6$ son idempotentes, pero no son invertibles porque

$$\gcd(3, 6) = 3, \qquad \gcd(4, 6) = 2.$$

70. Para el primer sistema,

$$x \equiv 1 \pmod 4, \qquad x \equiv 3 \pmod 6,$$

los módulos tienen

$$\gcd(4,6) = 2.$$

Los residuos son compatibles módulo 2 porque

$$1 \equiv 3 \pmod 2.$$

Resolvemos: escribimos $x = 1 + 4t$ y exigimos

$$1 + 4t \equiv 3 \pmod 6.$$

Entonces

$$4t \equiv 2 \pmod 6.$$

Dividiendo por 2 correctamente,

$$2t \equiv 1 \pmod 3,$$

de donde $t \equiv 2 \pmod 3$. Tomando $t = 2$ obtenemos $x = 9$. Como

$$\operatorname{lcm}(4,6) = 12,$$

la solución es

$$\boxed{x \equiv 9 \pmod{12}}.$$

Para el segundo sistema,

$$x \equiv 1 \pmod 4, \qquad x \equiv 2 \pmod 6,$$

los residuos no son compatibles módulo 2:

$$1 \not\equiv 2 \pmod 2.$$

Por tanto no hay solución.

71. En $\mathbb{Z}$, los símbolos a y b designan enteros concretos. Una vez fijados esos enteros, $a + b$ y ab tienen valores unívocamente determinados.

En cambio, $[a]_n$ no es un entero concreto, sino una clase con infinitos representantes. Si

$$[a]_n = [a']_n \qquad \text{y} \qquad [b]_n = [b']_n,$$

podemos intentar calcular usando a, b o usando a', b'. Para que

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$

y

$$[a]_n[b]_n = [ab]_n$$

sean verdaderas **definiciones de operaciones sobre clases**, hay que probar que ambos caminos producen la misma clase final:

$$[a+b]_n = [a'+b']_n,$$

$$[ab]_n = [a'b']_n.$$

Esa independencia del representante es precisamente la buena definición.

72. Una cadena lógica posible es

```
C14: divisibilidad
n | (a-b)
      ↓ definición
C17: a ≡ b (mod n)
      ↓ C8: relación de equivalencia
[a]_n y partición de Z
      ↓ compatibilidad con + y ·
Z/nZ con operaciones bien definidas
      ↓ C15: MCD + Bézout
 gcd(a,n)=1 ⇔ a posee inverso módulo n
      ↓
 cancelación e inversos
      ↓
 ax ≡ b (mod n)
      ↓ traducción diofántica de C15
 criterio gcd(a,n) | b y clasificación
      ↓
 sistemas de congruencias
      ↓ Bézout + coprimalidad
 CRT
```

La primera flecha usa la divisibilidad desarrollada en C14. El paso de congruencia a clases usa la teoría de relaciones de equivalencia de C8. La caracterización de inversos y la cancelación dependen del MCD y de Bézout de C15. Finalmente, la congruencia lineal se convierte en una ecuación diofántica lineal de C15, y el CRT vuelve a usar Bézout para construir soluciones cuando los módulos son coprimos.

M. Problemas avanzados tipo prueba

73. Fijemos $n \geq 2$ y definamos

$$a \sim b \iff a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a-b).$$

Reflexividad. Como $a - a = 0$ y $n \mid 0$,

$$a \sim a.$$

Simetría. Si $n \mid (a-b)$, entonces también

$$n \mid -(a-b) = b - a,$$

por lo que $b \sim a$.

Transitividad. Si $n \mid (a-b)$ y $n \mid (b-c)$, entonces

$$n \mid [(a-b) + (b-c)] = a - c,$$

así que $a \sim c$.

Por tanto la congruencia módulo n es una relación de equivalencia.

Ahora probamos

$$[a]_n = [b]_n \iff a \equiv b \pmod{n}.$$

Si las clases son iguales, $a \in [a]_n = [b]_n$, de modo que $a \equiv b \pmod{n}$.

Recíprocamente, si $a \equiv b \pmod{n}$ y $x \in [a]_n$, entonces $x \equiv a \pmod{n}$. Por transitividad,

$$x \equiv b \pmod{n},$$

así que $x \in [b]_n$. Esto da $[a]_n \subseteq [b]_n$; por simetría se obtiene la inclusión contraria.

Para la partición, el algoritmo de división garantiza que todo $x \in \mathbb{Z}$ posee un único resto

$$r \in \{0, \dots, n-1\}$$

tal que $x \equiv r \pmod{n}$. Por tanto cada entero pertenece a alguna de las clases

$$[0]_n, \dots, [n-1]_n.$$

Si dos de ellas, $[r]_n$ y $[s]_n$, tuvieran un elemento común x, entonces

$$x \equiv r \pmod{n}, \qquad x \equiv s \pmod{n},$$

y por simetría y transitividad $r \equiv s \pmod{n}$. Como $0 \le r, s < n$, se sigue $r = s$. Luego dos clases distintas son disjuntas.

Así, las n clases cubren $\mathbb{Z}$ y son disjuntas dos a dos: forman una partición.

74. De

$$a \equiv a' \pmod{n}, \qquad b \equiv b' \pmod{n}$$

se sigue

$$n \mid (a - a'), \qquad n \mid (b - b').$$

Para la suma,

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b'),$$

por lo que

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n}.$$

Para el producto usamos

$$ab - a'b' = a(b - b') + b'(a - a').$$

Ambos sumandos del lado derecho son múltiplos de n, así que

$$ab \equiv a'b' \pmod{n}.$$

Ahora supongamos que elegimos representantes distintos de las mismas clases:

$$[a]_n = [a']_n, \qquad [b]_n = [b']_n.$$

Entonces las congruencias anteriores implican

$$[a + b]_n = [a' + b']_n$$

y

$$[ab]_n = [a'b']_n.$$

Por tanto las reglas

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n,$$

$$[a]_n[b]_n = [ab]_n$$

son independientes de los representantes y definen operaciones genuinas sobre las clases residuales.

75. Probaremos el ciclo

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (1).$$

(1) ⇒ (2)**.** Si

$$\gcd(c, n) = 1,$$

Bézout da enteros u, v tales que

$$cu + nv = 1.$$

Reduciendo módulo n,

$$cu \equiv 1 \pmod{n},$$

así que c posee inverso módulo n.

(2) ⇒ (3)**.** Supongamos que u es un inverso de c y que

$$ca \equiv cb \pmod{n}.$$

Multiplicando por u,

$$uca \equiv ucb \pmod{n}.$$

Como $uc \equiv 1 \pmod{n}$,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

(3) ⇒ (4)**.** Supongamos

$$[ic]_n = [jc]_n$$

para $0 \leq i, j < n$. Entonces

$$ic \equiv jc \pmod{n}.$$

Por 3,

$$i \equiv j \pmod{n}.$$

Como ambos son representantes canónicos, $i = j$. Por tanto las n clases de la lista son distintas.

(4) ⇒ (1)**.** Supongamos, por contradicción, que

$$d = \gcd(c, n) > 1.$$

Entonces $k = n/d$ satisface $1 \leq k < n$, pero

$$kc = \frac{n}{d}c = \frac{c}{d}n,$$

que es múltiplo de n. Así,

$$[kc]_n = [0]_n,$$

contradiciendo que las clases de la lista sean todas distintas. Por tanto $d = 1$.

Las cuatro afirmaciones son equivalentes, sin haber usado teoría de grupos.

76. Sea

$$d = \gcd(a, n).$$

Probaremos primero el criterio de existencia.

Si

$$ax \equiv b \pmod{n},$$

entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = ax - kn.$$

Como $d \mid a$ y $d \mid n$, se sigue $d \mid b$.

Recíprocamente, si $d \mid b$, la ecuación diofántica

$$ax - ny = b$$

tiene solución porque el MCD de a y n divide a b. Por tanto la congruencia tiene solución. Así,

$$ax \equiv b \pmod{n} \text{ es soluble} \iff d \mid b.$$

Supongamos ahora que $d \mid b$.

Si $d = n$, entonces $n \mid a$ y $n \mid b$, de modo que

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

se reduce a $0 \equiv 0 \pmod{n}$. Por tanto las $n = d$ clases módulo n son soluciones, y no hay nada más que clasificar.

Supongamos desde ahora $d < n$ y escribamos

$$a = da_1, \qquad b = db_1, \qquad n = dn_1.$$

Entonces $n_1 = n/d \geq 2$ y

$$\gcd(a_1, n_1) = 1.$$

El problema se reduce a

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{n_1}.$$

Como a_1 es invertible módulo n_1, existe una única clase solución x_0 módulo n_1.

Definimos

$$x_k = x_0 + kn_1, \qquad k = 0, \ldots, d-1.$$

Existencia. Como $x_k \equiv x_0 \pmod{n_1}$,

$$a_1 x_k \equiv b_1 \pmod{n_1}.$$

Multiplicando la correspondiente divisibilidad por d obtenemos

$$ax_k \equiv b \pmod{n}.$$

Distinción. Si $x_j \equiv x_k \pmod{n}$, entonces

$$n \mid (j-k)n_1.$$

Como $n = dn_1$, resulta $d \mid (j-k)$. Pero $|j-k| < d$, luego $j = k$.

Exhaustividad. Si x es cualquier solución original, al dividir por d satisface la congruencia reducida, por lo que

$$x \equiv x_0 \pmod{n_1}.$$

Así $x = x_0 + tn_1$ para algún t. Dividiendo t por el entero positivo d, escribimos $t = dq + k$, con $0 \le k < d$. Entonces $x = x_0 + kn_1 + qn$, y por tanto su clase es $[x_k]_n$. El resto k es único; si $d = 1$, es cero y no se introduce congruencia módulo uno.

En conclusión, cuando $d \mid b$ existen exactamente d soluciones módulo n:

$$\boxed{x \equiv x_0 + k\frac{n}{d} \pmod{n}, \qquad k = 0, \ldots, d-1.}$$

77. Queremos resolver

$$84x \equiv 30 \pmod{138}.$$

1. Cálculo del MCD.

El algoritmo de Euclides da

$$138 = 84 + 54,$$

$$84 = 54 + 30,$$

$$54 = 30 + 24,$$

$$30 = 24 + 6,$$

$$24 = 4 \cdot 6.$$

Por tanto

$$\boxed{d = \gcd(84, 138) = 6}.$$

2. Certificado de solvencia.

Como

$$6 \mid 30,$$

la congruencia es soluble.

3. Reducción.

Dividimos por 6:

$$14x \equiv 5 \pmod{23}.$$

4. Inverso mediante Bézout.
Tenemos

$$23 = 14 + 9,$$

$$14 = 9 + 5,$$

$$9 = 5 + 4,$$

$$5 = 4 + 1.$$

Sustituyendo hacia atrás,

$$1 = 5 - 4 = 2 \cdot 5 - 9 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9 = 5 \cdot 14 - 3 \cdot 23.$$

Luego

$$14^{-1} \equiv 5 \pmod{23}.$$

5. Clase base.
Multiplicamos por 5:

$$x \equiv 25 \equiv 2 \pmod{23}.$$

6. Levantamiento a módulo 138**.**
Como $d = 6$ y $138/6 = 23$, las soluciones son

$$x = 2 + 23k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Por tanto

$$\boxed{x \equiv 2, 25, 48, 71, 94, 117 \pmod{138}}.$$

7. Exhaustividad.
Toda solución del problema original reduce a una solución de

$$14x \equiv 5 \pmod{23}.$$

Esta congruencia reducida tiene una única clase solución módulo 23, porque 14 es invertible. Por tanto toda solución original satisface $x \equiv 2 \pmod{23}$, y al pasar a módulo 138 sólo aparecen las seis clases anteriores. No existen otras.

78. Supongamos

$$\gcd(m, n) = 1.$$

Por Bézout existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$rm + sn = 1.$$

Definamos

$$x_0 = a(sn) + b(rm).$$

Existencia. Módulo m,

$$rm \equiv 0, \qquad sn \equiv 1,$$

por lo que

$$x_0 \equiv a \pmod{m}.$$

Módulo n,

$$sn \equiv 0, \qquad rm \equiv 1,$$

de modo que

$$x_0 \equiv b \pmod{n}.$$

Así existe una solución explícita.

Unicidad. Si x e y satisfacen el sistema, entonces

$$m \mid (x - y) \qquad \text{y} \qquad n \mid (x - y).$$

Escribamos $x - y = mk$. Como $n \mid mk$ y $\gcd(m, n) = 1$, la cancelación coprima da $n \mid k$. Por tanto $k = nq$ y

$$x - y = mnq.$$

Luego

$$x \equiv y \pmod{mn}.$$

El sistema tiene, por tanto, una solución única módulo mn.

79. Sea

$$d = \gcd(m, n).$$

Necesidad. Supongamos que x satisface

$$x \equiv a \pmod{m}, \qquad x \equiv b \pmod{n}.$$

Entonces existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que

$$x - a = mu, \qquad x - b = nv.$$

Restando,

$$b - a = mu - nv.$$

Como $d \mid m$ y $d \mid n$,

$$d \mid (b-a),$$

por lo que

$$d \mid (a-b).$$

Si $d = 1$, la divisibilidad se cumple siempre; para $d \geq 2$ puede expresarse como congruencia módulo d.

Suficiencia. Supongamos ahora

$$d \mid (a-b).$$

Entonces $d \mid (b-a)$. Escribamos

$$m = dm_1, \qquad n = dn_1,$$

con

$$\gcd(m_1, n_1) = 1.$$

Buscamos una solución de la forma

$$x = a + mt.$$

La segunda congruencia exige

$$a + mt \equiv b \pmod{n},$$

o sea,

$$mt \equiv b - a \pmod{n}.$$

Dividiendo por d, la condición equivale a la ecuación diofántica

$$m_1 t - n_1 s = \frac{b-a}{d}$$

para algún $s \in \mathbb{Z}$. Como

$$\gcd(m_1, n_1) = 1,$$

el criterio de C15 garantiza una solución entera (t, s), incluso en el caso extremo $n_1 = 1$. Por tanto existe $x = a + mt$ que satisface ambas congruencias.

Hemos probado

$$\boxed{\text{el sistema es soluble } \iff d \mid (a-b).}$$

Unicidad. Si x e y son dos soluciones, entonces

$$m \mid (x-y), \qquad n \mid (x-y).$$

Escribimos $x - y = mq = dm_1 q$. Como $n = dn_1$ divide a $dm_1 q$, se tiene

$$n_1 \mid m_1 q.$$

La coprimalidad $\gcd(m_1, n_1) = 1$ implica

$$n_1 \mid q.$$

Por tanto $q = n_1 s$ y

$$x - y = m n_1 s = \frac{mn}{d} s.$$

Pero

$$\operatorname{lcm}(m, n) = \frac{mn}{d}.$$

Así,

$$\boxed{x \equiv y \pmod{\operatorname{lcm}(m, n)}}.$$

Además, sumar un múltiplo del MCM conserva ambas congruencias, de modo que ése es exactamente el módulo natural de unicidad.

80. Sea

$$N = n_1 \cdots n_r,$$

donde los módulos son dos a dos coprimos. Consideremos la regla que a una clase $[x]_N$ asigna la tupla

$$([x]_{n_1}, \ldots, [x]_{n_r}).$$

Buena definición. Si

$$[x]_N = [y]_N,$$

entonces $N \mid (x - y)$. Como cada n_i divide a N,

$$n_i \mid (x - y)$$

para todo i. Luego

$$[x]_{n_i} = [y]_{n_i}$$

para cada componente. La tupla no depende del representante de $[x]_N$.

Unicidad de la clase que produce una tupla. Supongamos que x e y producen la misma tupla. Entonces

$$n_i \mid (x - y)$$

para todo i. Como los n_i son dos a dos coprimos, su producto divide a $x - y$. Esto puede demostrarse inductivamente usando la cancelación coprima: si $n_1 \cdots n_{k-1} \mid (x - y)$ y $n_k \mid (x - y)$, la coprimalidad de n_k con el producto anterior implica

$$n_1 \cdots n_k \mid (x - y).$$

Al final,

$$N \mid (x - y),$$

por lo que

$$[x]_N = [y]_N.$$

Existencia para toda tupla. Sea dada una tupla arbitraria

$$([a_1]_{n_1}, \ldots, [a_r]_{n_r}).$$

Para cada i definimos

$$N_i = \frac{N}{n_i}.$$

La coprimalidad dos a dos implica

$$\gcd(N_i, n_i) = 1,$$

por lo que existe u_i tal que

$$N_i u_i \equiv 1 \pmod{n_i}.$$

Definimos

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i N_i u_i.$$

Fijemos j. Si $i \neq j$, entonces $n_j \mid N_i$, de modo que el término $a_i N_i u_i$ es 0 módulo n_j. El término con $i = j$ satisface

$$a_j N_j u_j \equiv a_j \pmod{n_j}.$$

Por tanto

$$x \equiv a_j \pmod{n_j}$$

para todo j. La tupla dada procede de la clase $[x]_N$.

Así, cada clase módulo N determina exactamente una tupla de clases residuales y toda tupla posible procede de exactamente una clase módulo N.

Conceptualmente, el resultado dice que la información de un entero módulo el producto N puede separarse completamente en sus residuos respecto de los factores coprimos y reconstruirse sin pérdida a partir de ellos. Ésta es una descomposición de información residual; no necesitamos todavía formularla en lenguaje de isomorfismos de anillos.

N. Reglas sobre clases, reconstrucción y compatibilidad

81. Si $a' = a + nt$, la diferencia de salidas es $k(a' - a) = knt$. Por tanto $m \mid kn$ garantiza que las salidas representan la misma clase para todos t, y la regla queda bien definida. Recíprocamente, cero y n representan la misma clase de entrada; sus salidas difieren en kn, así que la buena definición exige $m \mid kn$. Éste es el criterio necesario y suficiente; el término c desaparece en la diferencia.

En la primera regla, $4 \mid 2 \cdot 6 = 12$, luego funciona. Por ejemplo, cero y seis producen uno y trece, congruentes módulo cuatro. En la segunda, cuatro no divide a seis: $[0]_6 = [6]_6$, pero $[0]_4 \neq [6]_4 = [2]_4$. La buena definición entre módulos distintos no exige necesariamente que el módulo de salida divida al de entrada; el coeficiente puede compensar la diferencia.

82. Los enteros uno y $1-n$ son congruentes módulo n. Sus valores absolutos son uno y $n-1$, cuya diferencia es $n-2$. Si la regla es válida, $n \mid (n-2)$ y, por diferencia, $n \mid 2$. Con $n \geq 2$, necesariamente $n = 2$. Si $n > 2$, esos mismos representantes proporcionan un contraejemplo.

Para $n = 2$, $|a| - a$ es cero si $a \geq 0$ y es $-2a$ si $a < 0$; siempre es múltiplo de dos. Así $|a| \equiv a \pmod 2$. Si $a \equiv b \pmod 2$, entonces $|a| \equiv |b| \pmod 2$, de modo que la regla es válida. La clasificación es exhaustiva.

La regla del cuadrado funciona para todo $n \geq 2$: si $a' = a + nt$, $(a')^2 - a^2 = nt(2a + nt)$ es múltiplo de n. No se puede trasladar sin prueba al valor absoluto la independencia que sí tiene el cuadrado.

83. En la división $a = 6q + r$, $0 \leq r < 6$, el cociente es $q = \lfloor a/6 \rfloor$. Cero y seis representan la misma clase módulo seis, pero sus cocientes son cero y uno, que representan clases distintas módulo dos. Por tanto F no está bien definida. También $-1 = 6(-1) + 5$ y $5 = 6 \cdot 0 + 5$ dan cocientes menos uno y cero, otra falla con representante negativo.

La regla G sí funciona: representantes congruentes módulo seis tienen el mismo resto canónico, luego el mismo resto módulo dos. En particular, menos uno y cinco dan ambos $[5]_2 = [1]_2$. Esto es un argumento universal apoyado en la unicidad del resto.

Si primero se elige el representante canónico $r \in \{0, \ldots, 5\}$ y después se aplica F, su cociente por seis es siempre cero. Esa nueva regla es la función constante $[0]_2$. No coincide con la propuesta original para representantes arbitrarios: al usar seis, la propuesta devolvía $[1]_2$. La selección canónica debe aparecer expresamente.

84. Si $d \mid n$ y $a' = a + nt$, de $d \mid a$ se deduce $d \mid a'$. El argumento inverso usa $a = a' - nt$. Por tanto la verdad de $d \mid a$ no cambia de representante y define una propiedad de la clase.

Recíprocamente, si es una propiedad de clases, cero y n deben recibir el mismo valor de verdad. Como $d \mid 0$, debe cumplirse $d \mid n$. Éste es el criterio completo.

Con $d = 3, n = 12$, funciona: sumar un múltiplo de doce conserva la divisibilidad por tres. Con $d = 8, n = 12$, falla: cero y doce pertenecen a la misma clase módulo doce, pero ocho divide a cero y no divide a doce. Tener un MCD no trivial entre d y n no basta; se necesita la divisibilidad completa del módulo por d.

85. Escribimos $c = dc_1$, $n = dn_1$, con $n_1 = n/d > 0$ y $\gcd(c_1, n_1) = 1$. La congruencia equivale a $dn_1 \mid dc_1(a-b)$, es decir, $n_1 \mid c_1(a-b)$. Por cancelación coprima, esto equivale a $n_1 \mid (a-b)$. El converso también se verifica directamente multiplicando el testigo por c_1.

Si $d < n$, $n_1 \geq 2$ y escribimos $a \equiv b \pmod{n_1}$. Si $d = n$, $n_1 = 1$ y la divisibilidad se cumple para todos los enteros; no introducimos congruencias módulo uno. En particular, $c = 0$ da $d = n$ y todas las clases tienen la misma imagen cero.

Tomando $b = 0$, las clases que van a cero son exactamente $[jn_1]_n$, $j = 0, \ldots, d-1$. Son distintas porque $n \mid (j-k)n_1$ equivale a $d \mid j-k$. Toda solución entera $a = n_1 t$ pertenece a una de ellas al escribir $t = dq + j$, $0 \leq j < d$, por división entera. Para $d = 1$ el único resto es cero, sin congruencia módulo uno. Por tanto son todas y hay exactamente d.

86. En los enteros, $(a-b)(a+b) = 0$ fuerza que uno de los factores sea cero, porque un producto de dos enteros no nulos no puede valer cero. Módulo ocho, esa propiedad no está disponible.

Examinamos los ocho restos canónicos. Los cuadrados de $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ tienen restos $0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1$, respectivamente. Por tanto las soluciones son $[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8$, y todas las soluciones enteras son los enteros impares. La lista es exhaustiva porque cada entero tiene uno de esos ocho restos y el cuadrado respeta la congruencia.

Las clases $[3]_8$ y $[5]_8$ son distintas de $[1]_8$ y $[-1]_8 = [7]_8$. Para $a = 3$, el producto $(a-1)(a+1) = 2 \cdot 4 = 8$ es congruente con cero, aunque ninguno de los factores lo sea. No se puede

concluir que un factor es cero ni cancelar dos módulo ocho, pues $\gcd(2,8)=2$. La factorización algebraica sigue siendo válida; falla la inferencia adicional sobre el producto.

87. En la igualdad entera, seis es no nulo y se cancela: $x-y=0$, luego $x=y$. En módulo 35, $\gcd(6,35)=1$, y la cancelación modular da $35 \mid x-y$. El converso es inmediato; por tanto la información exacta es $x \equiv y \pmod{35}$. No fuerza igualdad: $x=0, y=35$ es un ejemplo.

En módulo 42, $42 \mid 6(x-y)$ equivale a $7 \mid x-y$. Por tanto la conclusión exacta es $x \equiv y \pmod 7$. El converso se verifica escribiendo $x-y=7t$, que da $6(x-y)=42t$. No implica congruencia módulo 42: cero y siete satisfacen la hipótesis y pertenecen a clases distintas módulo 42.

En términos de clases, multiplicar por $[6]_{35}$ es inyectivo, mientras que módulo 42 identifica las seis clases $[y+7j]_{42}$, $j=0,\dots,5$, con la misma imagen. Igualdad de enteros, igualdad de clases y divisibilidad por el módulo reducido tienen conclusiones distintas.

88. La regla está bien definida porque cambiar x en un múltiplo de n cambia $cx+t$ en otro múltiplo de n. La clase $[b]_n$ tiene preimagen exactamente cuando $cx \equiv b-t \pmod n$ es soluble. El criterio lineal dice que esto sucede si y sólo si $d \mid b-t$, y en tal caso hay exactamente d clases preimagen.

Las imágenes son las n/d clases representadas por $t+dj$, $j=0,\dots,n/d-1$. Son distintas: si $n \mid d(j-k)$, entonces $n/d \mid j-k$, y el intervalo obliga a $j=k$. Si $d=1$, todo destino tiene una única preimagen, así que la regla es una permutación. Si $d>1$, hay menos de n imágenes y cada una tiene d preimágenes, por lo que no es una permutación. Esto incluye $d=n$, que produce una función constante.

En el ejemplo, $d=6$ y las imágenes son $[5],[11],[17]$ módulo 18. Para cinco, la condición es $x \equiv 0 \pmod 3$, con restos $0,3,6,9,12,15$; para once, $x \equiv 1 \pmod 3$, con $1,4,7,10,13,16$; para diecisiete, $x \equiv 2 \pmod 3$, con $2,5,8,11,14,17$. Las tres listas cubren todas las dieciocho entradas.

89. El certificado es cierto: menos veintiocho más treinta y cinco es siete. Como siete divide a ambas entradas, el MCD es siete. Multiplicar la identidad por tres da $(-14)\cdot 6 + 35\cdot 3 = 21$, de donde $x_0=6$ es solución.

La condición $35 \mid -14x-21$ equivale a $5 \mid -2x-3$, y ésta a $x \equiv 1 \pmod 5$, pues el inverso de menos dos módulo cinco es dos. Todas las soluciones enteras son $x=1+5t$, $t \in \mathbb{Z}$. La equivalencia prueba exhaustividad y la sustitución verifica $-14(1+5t)-21=-35-70t$.

Módulo 35 hay siete clases: $[1],[6],[11],[16],[21],[26],[31]$. Reducir t módulo siete las obtiene todas y sus diferencias muestran que son distintas. En el intervalo dado, $-7 \le 1+5t \le 7$ equivale a $-8 \le 5t \le 6$, y los únicos enteros son $t=-1,0,1$. Los representantes permitidos son menos cuatro, uno y seis. No son una lista completa de clases módulo 35; responden a la restricción adicional.

90. Ambas identidades valen uno: $-99+100=1$ y $176-175=1$. Al multiplicar la primera por menos tres, $-3 = 27\cdot 11 - 12\cdot 25$, obtenemos $(x_0,y_0)=(27,12)$. La segunda entrega $-3=-48\cdot 11+21\cdot 25$, luego $(x_1,y_1)=(-48,-21)$.

Las familias son $(27+25t, 12+11t)$ y $(-48+25s,-21+11s)$, con parámetros enteros. Sustituir cualquiera verifica la ecuación. Si (x,y) es una solución arbitraria, restar la primera da $11(x-27)=25(y-12)$. Como el certificado prueba coprimalidad, $25 \mid x-27$ y luego $y-12=11t$. Esto prueba exhaustividad.

Las dos familias coinciden mediante $s=t+3$: sus coordenadas se vuelven iguales. También se puede usar la pareja $(2,1)$, obtenida en la primera familia con $t=-1$, y escribir $(2+25u, 1+11u)$. La congruencia tiene una sola clase $[2]_{25}$, pero la ecuación diofántica tiene infinitas parejas enteras. La libertad de Bézout cambia el punto de partida, no el conjunto de soluciones.

91. El MCD de veinte y cincuenta es diez, que divide a $10m$ para cualquier entero m. La congruencia equivale a $5 \mid 2x - m$, es decir, $2x \equiv m \pmod 5$. El certificado muestra que tres es inverso de dos módulo cinco, luego todas las soluciones enteras son $x = 3m + 5t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Para cualquier solución, multiplicar la congruencia reducida por tres obliga a $x \equiv 3m \pmod 5$, así que la familia es exhaustiva. Recíprocamente, $20(3m + 5t) - 10m = 50m + 100t$ es múltiplo de cincuenta.

Las clases son $[3m + 5j]_{50}$, $j = 0, \ldots, 9$. Si dos coinciden, cincuenta divide a $5(j - k)$, luego diez divide a $j - k$ y el intervalo obliga a $j = k$. Toda solución entera pertenece a una de ellas al dividir su parámetro por diez. Hay exactamente diez clases para cada m, aunque sus representantes cambien. El certificado reducido funciona también cuando m es cero o negativo.

92. La primera congruencia se reduce por el MCD seis a $2x \equiv 1 \pmod 3$, luego $x \equiv 2 \pmod 3$. La segunda tiene coeficiente invertible: $7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \pmod{10}$, y da $x \equiv 12 \equiv 2 \pmod{10}$. Por tanto $x - 2$ es múltiplo de tres y diez. Como son coprimos, es múltiplo de treinta. Todas las soluciones son $x = 2 + 30t$, $t \in \mathbb{Z}$.

La construcción verifica ambas congruencias: $12(2 + 30t) - 6 = 18 + 360t$ es múltiplo de dieciocho y $7(2 + 30t) - 4 = 10 + 210t$ es múltiplo de diez. La deducción desde una solución arbitraria prueba exhaustividad.

Módulo noventa, reducir t módulo tres entrega exactamente $[2], [32], [62]$. Son distintas. Treinta es el menor período positivo de la familia: si un desplazamiento $T > 0$ conserva todas sus soluciones, en particular convierte dos en otra solución, de modo que $T = 30t$ con $t \geq 1$. Noventa también es un período, pero no el menor. El período correcto procede de los módulos reducidos, no del producto de los módulos originales.

93. La identidad proporciona los selectores nueve y menos ocho. El testigo es $x_0 = (-3) \cdot 9 + 4(-8) = -59$. Éste satisface $-59 + 3 = -56 = 8(-7)$ y $-59 - 4 = -63 = 9(-7)$.

Si x es otra solución, $x + 59$ es divisible por ocho y nueve. Escribimos $x + 59 = 8k$; de $9 \mid 8k$ y coprimalidad se sigue $9 \mid k$, luego $x + 59$ es múltiplo de 72. Recíprocamente, sumar $72t$ conserva ambas congruencias. Así todas las soluciones son $-59 + 72t$, $t \in \mathbb{Z}$, o $13 + 72u$ con $u \in \mathbb{Z}$.

En el intervalo, $-100 \leq 13 + 72u \leq 100$ equivale a $-113 \leq 72u \leq 87$, cuyos parámetros enteros son $u = -1, 0, 1$. Las soluciones son menos cincuenta y nueve, trece y ochenta y cinco. La unicidad es de la clase módulo 72; la existencia de tres enteros en el intervalo no la contradice.

94. Escribimos $x = 5 + 12t$. La segunda condición equivale a $18 \mid 5 + 12t - b$. Como seis divide a doce y dieciocho, se necesita $6 \mid b - 5$. En el intervalo dado, los valores son $b = 5, 11, 17$, que escribimos $b = 5 + 6s$ con $s = 0, 1, 2$.

Para esos valores, la condición se reduce a $3 \mid 2t - s$, de donde $t \equiv 2s \pmod 3$. Por tanto todas las soluciones son $x = 5 + 24s + 36u$, $u \in \mathbb{Z}$. La sustitución verifica ambos residuos y las equivalencias anteriores prueban exhaustividad. Los restos canónicos módulo 36 son cinco, veintinueve y diecisiete, respectivamente.

El menor período positivo es 36. Una diferencia entre dos soluciones es múltiplo de doce y dieciocho; escribirla como $12k$ obliga a $3 \mid 2k$, luego $3 \mid k$, así que es múltiplo de 36. Treinta y seis sí conserva ambas condiciones. El producto 216 también conserva los residuos, pero no expresa la única clase natural: cada familia contiene seis clases módulo 216. La compatibilidad se decidió antes de construir.

95. Si $x \equiv b \pmod n$, entonces $x = b + nt = b + kmt$ y, por tanto, $x \equiv b \pmod m$. La primera condición requiere $m \mid b - a$. Esta condición es necesaria y también suficiente: si se cumple, todo entero $b + nt$ satisface ambas congruencias. Ésa es la familia completa, porque la segunda condición ya obliga a esa forma.

El menor período positivo es n: cualquier desplazamiento entre soluciones es múltiplo de n, y n conserva ambas condiciones. No se divide un módulo hasta uno ni se busca un inverso en ese módulo; la inclusión de divisibilidades resuelve directamente el caso.

En el ejemplo, $8 \mid b-3$ y $0 \le b < 24$ permiten exactamente $b = 3, 11, 19$. Para cada valor, todas las soluciones son $b + 24t$, $t \in \mathbb{Z}$. Los otros restos son incompatibles. Compartir factores no implica imposibilidad; aquí el módulo mayor determina el conjunto completo si sus datos respetan el módulo menor.

96. De la primera condición, $x = 1 + 6t$. La segunda exige $6t \equiv 2 \pmod{10}$, equivalente a $3t \equiv 1 \pmod{5}$. Como tres tiene inverso dos, $t = 2 + 5u$ y $x = 13 + 30u$, $u \in \mathbb{Z}$. Toda pareja de las dos primeras condiciones queda descrita así, y la sustitución confirma ambas.

Estos enteros tienen resto trece módulo quince. Por tanto, en el intervalo indicado, sólo $b = 13$ permite la tercera condición. Para ese valor, todas las soluciones siguen siendo $13 + 30u$. Treinta es el menor período positivo, porque las diferencias entre soluciones ya son exactamente múltiplos de treinta; sumar treinta conserva los tres residuos.

El valor ocho es congruente con tres módulo cinco, de modo que supera el control entre módulos diez y quince. Pero ocho no es congruente con uno módulo tres, así que falla el control entre seis y quince. Los módulos tienen MCD dos, tres y cinco por pares; no son dos a dos coprimos y el CRT de producto no se puede aplicar sin analizar los datos. La reconstrucción directa establece suficiencia para trece y descarta exhaustivamente los otros catorce valores.

Capítulo 18

Potencias, exponentes racionales y radicales

Hasta ahora hemos insistido en una disciplina básica: **una transformación algebraica no se justifica porque "se vea bien", sino porque una propiedad permite hacerla bajo ciertas hipótesis**. En este capítulo esa disciplina se vuelve imprescindible.

Considere tres expresiones familiares:

$$2^3, \qquad 2^{-3}, \qquad 2^{3/2}.$$

La primera puede interpretarse directamente como un producto repetido. Las otras dos no. Si intentáramos leer un exponente negativo como "multiplicar un número negativo de veces", o un exponente fraccionario como "multiplicar una fracción de veces", perderíamos el significado de la operación.

Por tanto, extender la noción de potencia exige una idea distinta: **queremos definir nuevos exponentes de manera que las leyes algebraicas ya conocidas continúen siendo coherentes**.

Pero esa extensión tiene un precio. Las nuevas expresiones traen consigo restricciones:

- una potencia con exponente negativo exige una base no nula;
- una raíz de índice par exige, en los reales, un radicando no negativo;
- un exponente racional puede cambiar de significado si se ignora la forma reducida de la fracción;
- una simplificación puede ocultar restricciones que pertenecían a la expresión original.

El capítulo girará alrededor de una idea:

> **Una ley algebraica incluye las condiciones bajo las cuales tiene sentido. La fluidez no consiste en mover símbolos con rapidez, sino en transformar expresiones sin perder su dominio ni su significado.**

Trabajaremos en $\mathbb{R}$ salvo indicación expresa. Usaremos como hecho fundacional la existencia de raíces reales: para $a \geq 0$ y $n \geq 2$ existe una única raíz n-ésima no negativa de a; si n es impar, todo real posee una única raíz n-ésima real. La demostración de este hecho a partir de la completitud de $\mathbb{R}$ pertenece al análisis y no será reconstruida aquí.

18.1. Las leyes no vienen antes que el dominio

Una misma cadena simbólica puede ser correcta para ciertos valores e incorrecta para otros. Por eso, antes de transformar una expresión, conviene hacer una pregunta que a menudo se omite:

> **¿Para qué valores están definidas todas las expresiones que aparecen en la cadena?**

Considere

$$\sqrt{x^2} = x.$$

Para $x = 5$ la igualdad es verdadera. Para $x = -5$ no lo es, porque

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq -5.$$

La forma correcta para todo real será

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

El error no está en una operación aritmética complicada. Está en haber usado una regla sin examinar el signo de la cantidad que sale de una raíz principal.

Observe ahora

$$\frac{x^3}{x^3} = 1.$$

La simplificación es correcta cuando $x \neq 0$. Pero la expresión original no está definida en $x = 0$. Por tanto no debemos convertir la igualdad en una afirmación universal sobre todos los reales sin conservar la condición

$$x \neq 0.$$

Un tercer ejemplo muestra otro tipo de peligro. La identidad

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$$

es válida en $\mathbb{R}$ para $a, b \geq 0$. No es una regla que pueda extenderse sin condiciones a cualesquiera números reales. Si $a = b = -1$, el lado izquierdo es

$$\sqrt{(-1)(-1)} = 1,$$

mientras que las dos raíces del lado derecho no son reales.

Estos ejemplos sugieren una rutina que utilizaremos a lo largo del capítulo:

```
EXPRESIÓN
   ↓
DOMINIO
   ↓
REGLA PROPUESTA
   ↓
HIPÓTESIS DE LA REGLA
   ↓
TRANSFORMACIÓN
   ↓
DOMINIO CONSERVADO
```

No siempre será necesario escribir esta cadena completa. La meta es que se vuelva parte del modo de leer una expresión.

Una distinción útil: cálculo y validez. Dos preguntas diferentes pueden aparecer ante una transformación:

1. **¿El cálculo está ejecutado correctamente?**
2. **¿La transformación estaba permitida en el dominio considerado?**

Por ejemplo, en

$$\frac{x^{-2}}{x^{-5}} = x^3$$

el cálculo de exponentes es correcto, pero ambas potencias negativas exigen $x \neq 0$. Es decir, la forma final x^3 está definida en 0, pero la expresión original no.

La simplificación no autoriza a ampliar silenciosamente el dominio.

Micropráctica de lectura. Antes de calcular, decida qué condición mínima debe acompañar a cada expresión:

$$a^{-4}, \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \sqrt[4]{y}, \qquad \frac{z^2}{z}.$$

La tarea no es todavía simplificar. Es **leer la estructura**.

Control razonado. a^{-4} exige $a \neq 0$ por el recíproco; $1/\sqrt{x}$ exige $x > 0$, porque la raíz debe existir y no anularse; $\sqrt[4]{y}$ exige $y \geq 0$; z^2/z exige $z \neq 0$, aunque después se simplifique a z.

18.2. Potencias enteras no negativas y estructura del exponente

Comencemos en el dominio donde la interpretación es directa.

Para $a \in \mathbb{R}$ y un entero positivo n, definimos

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}.$$

En particular,

$$a^1 = a.$$

Aquí el exponente n cuenta el número de factores iguales a a. Esa lectura permite demostrar las primeras leyes sin apelar a una tabla memorizada.

Producto de potencias de igual base. Si m, n son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

La razón es simplemente que el primer factor contiene m copias de a y el segundo contiene n copias. Al multiplicarlos obtenemos $m + n$ copias.

Por ejemplo,

$$a^3 a^4 = (aaa)(aaaa) = a^7.$$

Potencia de una potencia. Si m, n son enteros positivos,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Ahora el exponente exterior indica cuántas veces repetimos el bloque a^m. Cada bloque aporta m factores, y hay n bloques. En total aparecen mn factores.

Potencia de un producto. Para $a, b \in \mathbb{R}$ y $n > 0$ entero,

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

En efecto,

$$(ab)^n = (ab)(ab) \cdots (ab),$$

y por asociatividad y conmutatividad podemos reagrupar las n copias de a y las n copias de b.

El signo forma parte de la base. Una dificultad elemental, pero persistente, es confundir

$$(-a)^n$$

con

$$-a^n.$$

Los paréntesis determinan la base. Por ejemplo,

$$(-2)^4 = 16,$$

mientras que

$$-2^4 = -(2^4) = -16.$$

Para una base negativa, la paridad del exponente controla el signo:

- si n es par, $(-a)^n = a^n$;
- si n es impar, $(-a)^n = -a^n$.

No es una convención adicional. Es consecuencia del número de factores negativos.

Leer antes de operar. Considere

$$(-x^2)^3.$$

La base es $-x^2$, no $-x$. Por tanto

$$(-x^2)^3 = -(x^2)^3 = -x^6.$$

En cambio,

$$(-x)^{2\cdot 3} = (-x)^6 = x^6.$$

Una diferencia pequeña en la estructura produce resultados distintos.

Micropráctica de autoexplicación. Explique verbalmente por qué los exponentes se **suman** en $a^m a^n$ y se **multiplican** en $(a^m)^n$. Una explicación correcta debe referirse a la cantidad de factores, no sólo citar la fórmula.

Control razonado. En $a^m a^n$ se concatenan dos listas con m y n factores: hay $m+n$ en total. En $(a^m)^n$ se repite n veces una lista de m factores: hay mn. Para exponentes positivos esto sigue del producto repetido; los exponentes cero y negativos se tratarán mediante la extensión de la definición.

18.3. Exponente cero y exponentes negativos: extender conservando leyes

La interpretación como producto repetido sólo explica exponentes positivos. Para introducir 0 y los enteros negativos, buscaremos definiciones que mantengan coherentes las leyes anteriores.

¿Qué debería significar a^0? Suponga $a \neq 0$. Si queremos conservar la regla del cociente, deberíamos tener

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Pero, como $a^m \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^m} = 1.$$

Esto motiva la definición

$$\boxed{a^0 = 1 \qquad (a \neq 0).}$$

El exponente cero no significa "multiplicar cero veces" en el mismo sentido elemental del producto repetido. Es una **extensión algebraicamente coherente** de la potencia.

En este capítulo no definiremos 0^0. Diferentes áreas de las matemáticas emplean convenciones contextuales cuando resulta útil, pero aquí no necesitamos imponer ninguna.

¿Qué debería significar a^{-n}? Sea $n > 0$ y $a \neq 0$. Si queremos que

$$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1,$$

entonces a^{-n} debe ser el inverso multiplicativo de a^n. Definimos

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0).}$$

Por ejemplo,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

El signo del exponente **no** indica el signo del número. Así,

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8},$$

pero

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}.$$

Por qué la base no puede ser cero. La expresión

$$0^{-1}$$

exigiría, por definición,

$$0^{-1} = \frac{1}{0},$$

que no existe en $\mathbb{R}$. La restricción $a \neq 0$ no es decorativa: forma parte de la definición.

Una consecuencia útil. Si $a \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n.$$

En efecto,

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{1/a^n} = a^n.$$

La idea de exponente negativo como inverso permite leer expresiones complejas con mayor claridad. Por ejemplo,

$$\frac{x^{-2}y^3}{x^4y^{-1}}$$

puede analizarse por base:

$$x^{-2-4}y^{3-(-1)} = x^{-6}y^4 = \frac{y^4}{x^6},$$

siempre con

$$x \neq 0, \qquad y \neq 0,$$

porque la expresión original contiene potencias negativas de ambas bases.

18.4. Leyes de exponentes enteros con hipótesis explícitas

Una vez definidos los exponentes cero y negativos, podemos reunir las leyes en un dominio uniforme.

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Demostración. Para la ley del producto de igual base, los exponentes positivos concatenan factores; un exponente cero aporta uno. Si $m \geq 0$ y $n = -k < 0$, se tiene $a^m a^{-k} = a^m/a^k$: cancelar factores da a^{m-k} si $m \geq k$ y $1/a^{k-m} = a^{m-k}$ si $m < k$. El caso con los signos intercambiados usa conmutatividad. Si ambos son negativos, $a^{-j}a^{-k} = 1/(a^j a^k) = a^{-(j+k)}$. Esto cubre todos los pares de enteros y demuestra la primera ley.

En particular $a^n a^{-n} = 1$, así que $1/a^n = a^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. El cociente se convierte en $a^m a^{-n} = a^{m-n}$. Para la potencia de potencia, si $n > 0$ el producto de n copias de a^m tiene exponente mn por la primera ley; si $n = 0$ ambos lados valen uno; si $n = -k < 0$, se obtiene $1/(a^m)^k = 1/a^{mk} = a^{-mk}$. La potencia de un producto se demuestra reagrupando factores para $n > 0$, vale uno para $n = 0$ y para $n = -k$ se sigue de $1/(ab)^k = 1/(a^k b^k) = a^{-k}b^{-k}$.

Finalmente se aplica esa ley al producto $a(1/b)$; la ley de potencia de potencia da $(1/b)^n = (b^{-1})^n = b^{-n} = 1/b^n$. Queda demostrada también la ley del cociente. □

La hipótesis $a, b \neq 0$ permite enunciar todas las leyes de una sola vez incluso cuando aparecen exponentes negativos. En casos particulares con exponentes no negativos puede existir un dominio más amplio.

Ejemplo: una cadena con control de dominio. Suponga $x, y \neq 0$. Entonces

$$\frac{(x^{-2}y^3)^2}{x^{-1}y^4} = \frac{x^{-4}y^6}{x^{-1}y^4} = x^{-3}y^2 = \frac{y^2}{x^3}.$$

Cada igualdad usa una ley concreta:

1. potencia de un producto;
2. potencia de una potencia;
3. cociente de potencias de igual base;
4. definición de exponente negativo.

La forma final aislada está definida para $x \neq 0$ aunque ya no muestre ninguna potencia negativa. La cadena conserva las dos restricciones originales, $x \neq 0$ e $y \neq 0$; no se reincorpora $y = 0$ por haber desaparecido su potencia negativa.

Lo que las leyes no dicen. Las leyes de exponentes gobiernan productos, cocientes y potencias de potencias. No permiten distribuir un exponente sobre una suma:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

en general.

Por ejemplo,

$$(1 + 1)^2 = 4,$$

pero

$$1^2 + 1^2 = 2.$$

Tampoco existe una ley que permita "cancelar exponentes" atravesando una suma. El tipo de operación importa.

Estrés de hipótesis. Considere la igualdad

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3.$$

Es correcta para $x \neq 0$. En $x = 0$ el lado derecho tiene sentido, pero el izquierdo no. La forma simplificada tiene un dominio mayor que la forma original.

Una transformación algebraica puede producir una expresión más simple **sin convertirla en la misma función sobre un dominio mayor**.

18.5. Raíz n-ésima y paridad del índice

Las potencias permiten avanzar desde una base hacia un resultado. Las raíces plantean la pregunta inversa: dado un resultado, ¿qué base produjo ese valor al elevarla a cierta potencia?

La respuesta depende decisivamente de si el índice es par o impar.

Raíz principal de índice par. Sea $n \geq 2$ par y $a \geq 0$. Definimos $\sqrt[n]{a}$ como el único número real **no negativo** b tal que

$$b^n = a.$$

Por ejemplo,

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

porque $2 \geq 0$ y $2^4 = 16$.

Aunque también $(-2)^4 = 16$, el símbolo $\sqrt[4]{16}$ no representa "las dos raíces". Representa la raíz principal no negativa.

Raíz de índice impar. Sea $n \geq 3$ impar y $a \in \mathbb{R}$. Existe un único real b tal que

$$b^n = a.$$

Definimos ese número como $\sqrt[n]{a}$.

Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

porque

$$(-2)^3 = -8.$$

A diferencia de los índices pares, los índices impares admiten radicandos negativos en $\mathbb{R}$.

Raíz principal no es conjunto de soluciones. La notación

$$\sqrt{9} = 3$$

nombra un solo número: la raíz cuadrada principal de 9.

En cambio, la ecuación

$$x^2 = 9$$

tiene dos soluciones, $x = 3$ y $x = -3$.

No escribiremos

$$\sqrt{9} = \pm 3.$$

Esa escritura confunde una función de raíz principal con un conjunto de soluciones de una ecuación. La resolución sistemática de ecuaciones quedará para C21.

Paridad y dominio. Compare:

$$\sqrt[4]{-16}$$

y

$$\sqrt[3]{-27}.$$

La primera expresión no representa un número real; la segunda vale -3.

El índice no es un detalle tipográfico. Determina qué radicandos son admisibles.

18.6. Por qué $\sqrt{a^2} = |a|$

Una de las identidades más importantes de este capítulo es

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.}$$

La presencia del valor absoluto no es una corrección artificial. Se sigue directamente de la definición de raíz principal.

Demostración por casos. Sea $a \in \mathbb{R}$.

Si $a \geq 0$, entonces a es no negativo y

$$a^2 = a^2.$$

Por unicidad de la raíz cuadrada principal,

$$\sqrt{a^2} = a = |a|.$$

Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y

$$(-a)^2 = a^2.$$

Como $-a$ es no negativo, es la raíz cuadrada principal de a^2. Por tanto

$$\sqrt{a^2} = -a = |a|.$$

En ambos casos,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

□

Consecuencia inmediata. No podemos simplificar

$$\sqrt{(x-3)^2}$$

como $x - 3$ sin conocer el signo de $x - 3$. La forma válida para todo real es

$$\boxed{\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|.}$$

Generalización. Para $n \geq 2$ entero y $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ par}, \\ a, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Si n es par, la raíz principal debe ser no negativa; por eso aparece $|a|$. Si n es impar, la potencia a^n conserva el signo de a, y la raíz impar recupera exactamente a.

Ejemplos.

$$\sqrt{x^2y^4} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^4} = |x|\,y^2,$$

si utilizamos la regla del producto en un contexto donde ambos radicandos son no negativos. Observe que $y^2 \geq 0$, de modo que

$$\sqrt{y^4} = |y^2| = y^2.$$

También

$$\sqrt[4]{x^8} = x^2,$$

porque

$$\sqrt[4]{x^8} = |x^2| = x^2.$$

La pregunta correcta no es "¿puedo cancelar la raíz con la potencia?", sino "¿qué información sobre el signo debe conservar la raíz principal?".

Nota pedagógica — Una longitud no conserva la orientación. Sobre la recta real, a registra posición y signo; $|a|$ registra distancia al origen. Al pasar de a a a^2, las posiciones a y $-a$ se identifican. La raíz cuadrada principal recupera la longitud, pues por definición debe ser no negativa. No dispone de la información necesaria para elegir la posición original.

Control resuelto. Los desplazamientos tres y menos tres tienen el mismo cuadrado, nueve. La raíz principal devuelve tres en ambos casos. Para un punto x y una referencia c, $\sqrt{(x-c)^2} = |x-c|$ mide la distancia a c; vale $x-c$ si $x \geq c$ y $c-x$ si $x < c$. Con $c = 2$, los puntos cinco y menos uno están a distancia tres, aunque sus desplazamientos respecto de dos tengan signos opuestos.

La misma lectura controla una extracción algebraica. $\sqrt{u^2v^4} = |uv^2| = |u|v^2$ para todos u, $v \in \mathbb{R}$. Si $v = 0$, el resultado es cero sea cual sea el signo de u. Si $v \neq 0$, suprimir el valor absoluto de u exige $u \geq 0$. Antes de escribir una condición «necesaria», revisa si otro factor puede anular todo el producto.

Para recuperar esta idea, vuelve a la definición de raíz principal en §18.5 y verifica las dos condiciones del candidato: no negatividad y potencia correcta. La igualdad de cuadrados, sin la condición de signo, no identifica una raíz principal.

18.7. Exponentes racionales sobre bases positivas

Queremos ahora dar sentido a expresiones como

$$a^{1/2}, \qquad a^{2/3}, \qquad a^{-5/4}.$$

La guía será la misma de antes: extender la notación conservando las leyes de exponentes.

Sea $a > 0$ y sea

$$r = \frac{m}{n}$$

un número racional escrito en términos mínimos, con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ positivo. Si $n = 1$, se conserva la potencia entera ya definida; en las fórmulas de esta sección se entiende $\sqrt[1]{a} = a$.

Definimos

$$\boxed{a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.}$$

Cuando $m > 0$, también podemos escribir

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Por ejemplo,

$$8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Y

$$16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

Exponentes racionales negativos. Si $a > 0$ y $m > 0$, definimos

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}.$$

Por ejemplo,

$$9^{-3/2} = \frac{1}{9^{3/2}} = \frac{1}{(\sqrt{9})^3} = \frac{1}{27}.$$

Las leyes se conservan en bases positivas. Para $a, b > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$, las leyes familiares continúan siendo válidas:

$$a^r a^s = a^{r+s},$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(a^r)^s = a^{rs},$$

$$(ab)^r = a^r b^r,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Demostración de independencia y leyes. Primero, si $m/n = p/q$ con $n, q > 0$, los candidatos positivos $u = (\sqrt[n]{a})^m$ y $v = (\sqrt[q]{a})^p$ satisfacen $u^{nq} = a^{mq}$ y $v^{nq} = a^{pn}$. Las potencias enteras ya están justificadas; como $mq = np$, la unicidad de la raíz positiva da $u = v$. Así se puede usar una fracción no reducida en bases positivas sin cambiar el valor.

Para $r = m/n$, $s = p/q$, sea $w = \sqrt[nq]{a} > 0$. La unicidad da $\sqrt[n]{a} = w^q$ y $\sqrt[q]{a} = w^n$, por lo que $a^r a^s = w^{mq} w^{pn} = w^{mq+pn} = a^{r+s}$. Además $a^s a^{-s} = a^0 = 1$, y el cociente resulta de multiplicar por a^{-s}.

Para la potencia de potencia, pon $b = a^{m/n}$ y $u = b^{p/q}$. Se tiene $b^n = a^m$, $u^q = b^p$ y por tanto $u^{nq} = a^{mp}$. El candidato positivo $v = a^{mp/(nq)}$ tiene la misma potencia nq, de modo que $u = v$ por unicidad. Esto incluye numeradores cero y negativos, pues todas las bases son positivas.

Finalmente, $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ es positivo y su potencia n vale ab; por unicidad es $\sqrt[n]{ab}$. Elevar esta igualdad al entero m prueba $(ab)^{m/n} = a^{m/n} b^{m/n}$. Con b reemplazado por $1/b$ y $(b^{-1})^r = b^{-r} = 1/b^r$, se obtiene la ley del cociente. El índice uno sólo usa la identidad. $\square$

La condición de positividad evita los problemas de dominio y representación que aparecerán en la sección siguiente.

Dos representaciones del mismo objeto. Para $a > 0$,

$$a^{3/5}$$

y

$$\sqrt[5]{a^3}$$

representan el mismo número. La elección de una u otra forma puede depender de la tarea.

Por ejemplo, para combinar potencias con exponentes distintos suele ser útil la notación exponencial:

$$a^{1/2}a^{1/3} = a^{3/6}a^{2/6} = a^{5/6}.$$

En cambio, si el objetivo es reconocer una raíz concreta, puede ser más informativo escribir

$$a^{1/3} = \sqrt[3]{a}.$$

La equivalencia de formas no elimina la necesidad de elegir estratégicamente.

18.8. Bases cero y negativas: el borde donde las reglas dejan de ser automáticas

La teoría de exponentes racionales es especialmente limpia para bases positivas. En 0 y en las bases negativas aparecen fronteras que debemos examinar explícitamente.

Base cero. Si $r > 0$ es racional, definimos

$$0^r = 0$$

cuando la expresión radical correspondiente tiene sentido; en esta situación el valor siempre es 0.

Pero si $r < 0$, la definición exigiría un recíproco de 0 y por tanto la expresión no está definida.

Así,

$$0^{3/2} = 0,$$

mientras que

$$0^{-3/2}$$

no está definido.

Como ya acordamos,

$$0^0$$

no recibe un valor en este capítulo.

Bases negativas y fracciones reducidas. Sea $a < 0$ y

$$r = \frac{m}{n}$$

escrito en términos mínimos, con $n > 0$.

- Si n es impar, podemos definir $a^{m/n}$ mediante la raíz impar real.
- Si n es par, $a^{m/n}$ no es un número real.

Por ejemplo,

$$(-8)^{1/3} = -2,$$

$$(-8)^{2/3} = (-2)^2 = 4,$$

pero

$$(-8)^{1/2}$$

no es real.

Por qué debemos reducir primero el exponente. Considere

$$(-8)^{2/6}.$$

Como número racional,

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Nuestra definición debe depender del número racional, no de una escritura accidental. Por tanto

$$(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3} = -2.$$

Si, en cambio, se intentara usar directamente la representación $2/6$ como

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2,$$

obtendríamos otro valor. Esta contradicción muestra por qué **no podemos definir exponentes racionales con bases negativas a partir de cualquier representación no reducida de la fracción**.

Una ley que deja de ser automática. Para bases positivas tenemos

$$(a^r)^s = a^{rs}.$$

Con bases negativas, esta ley no puede utilizarse indiscriminadamente.

Observe:

$$(-8)^{2/3} = 4.$$

Luego

$$\left((-8)^{2/3}\right)^{3/2} = 4^{3/2} = 8.$$

Pero si combináramos formalmente los exponentes sin examinar el dominio,

$$(-8)^{(2/3)(3/2)} = (-8)^1 = -8.$$

Los resultados difieren. La regla que era segura para bases positivas no sobrevivió sin condiciones.

La lección es más importante que este ejemplo particular:

> **Cuando una extensión algebraica depende del dominio, una manipulación formal puede cruzar una frontera donde la ley deja de ser válida.**

Nota pedagógica — El racional se mantiene; la receta radical puede cambiar. Para $a > 0$, la independencia de escritura se prueba comparando raíces positivas. Si $m/n = p/q$ con denominadores positivos, los candidatos $(\sqrt[n]{a})^m$ y $(\sqrt[q]{a})^p$ son positivos y, por las leyes enteras, sus potencias nq valen a^{mq} y a^{pn}. Esos valores son iguales porque $mq = np$. La unicidad de la raíz positiva obliga a que los candidatos coincidan, incluso con numeradores negativos. El índice uno se interpreta como la identidad.

Para $a < 0$, primero se determina el denominador de la fracción reducida. Una escritura con denominador par no vuelve irreal una potencia que ya está definida; lo que puede dejar de servir es una receta radical construida a partir de esa escritura.

Control resuelto. Como $-2/3 = -4/6 = -6/9$, las tres escrituras de $(-8)^r$ nombran el mismo valor, $1/4$. La receta $\sqrt[6]{(-8)^{-4}}$ también produce $1/4$, pero eso no demuestra que las recetas con denominador par funcionen siempre: para $r = -1/3 = -2/6$, la potencia es $-1/2$ y $\sqrt[6]{(-8)^{-2}} = 1/2$. En el primer caso se conservó el valor porque el resultado era positivo; en el segundo se perdió el signo. La receta $(\sqrt[6]{-8})^{-2}$ ni siquiera existe en los reales.

Una comprobación numérica puede revelar el error, pero la decisión general se toma antes de calcular: reduce el exponente, comprueba existencia y registra el signo dado por el numerador. Después decide qué expresión radical conserva esos datos. Si falla ese paso, recupera §18.5 para la paridad del índice y §18.3 para los exponentes negativos.

18.9. Simplificar radicales: extraer estructura, no "sacar números"

Simplificar un radical significa reconocer dentro del radicando potencias perfectas compatibles con el índice.

Por ejemplo,

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

No hemos "sacado el 36". Hemos usado que $36 = 6^2$ y que, para factores no negativos,

$$\sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36}\sqrt{2}.$$

Un ejemplo algebraico con signo. Considere

$$\sqrt{18x^2}.$$

Como

$$18x^2 = 9 \cdot 2 \cdot x^2,$$

obtenemos

$$\sqrt{18x^2} = 3\sqrt{2}\,|x|.$$

La forma

$$3x\sqrt{2}$$

sólo sería válida bajo la hipótesis adicional $x \geq 0$.

Índice impar. Para raíces impares no aparece el valor absoluto al extraer una potencia del mismo índice. Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{(-27)\cdot 2} = -3\sqrt[3]{2}.$$

También

$$\sqrt[3]{x^3y^4} = xy\sqrt[3]{y}.$$

Aquí x puede ser positivo, negativo o cero.

Incorporar factores al radical. La operación inversa también requiere atención al signo. Si $c \geq 0$, entonces

$$c\sqrt{a} = \sqrt{c^2 a}$$

cuando las expresiones están definidas.

Pero si $c < 0$, la igualdad anterior no puede ser correcta porque el lado derecho es no negativo y el izquierdo es negativo cuando $a > 0$.

Para índices pares, introducir un factor dentro de una raíz exige controlar el signo del factor exterior. Para índices impares, la situación es más flexible porque la raíz conserva el signo.

Estrategia de simplificación. Una rutina útil es:

```
1. IDENTIFICAR EL ÍNDICE.
2. FACTORIZAR EL RADICANDO EN POTENCIAS PERFECTAS Y RESTO.
3. EXTRAER LAS POTENCIAS COMPLETAS.
4. SI EL ÍNDICE ES PAR, CONTROLAR VALORES ABSOLUTOS.
5. VERIFICAR QUE EL DOMINIO ORIGINAL SIGUE REGISTRADO.
```

No siempre conviene factorizar completamente un número. Conviene factorizar lo suficiente para hacer visibles las potencias compatibles con el índice.

18.10. Producto y cociente de radicales

Las reglas de producto y cociente de radicales son útiles, pero deben formularse con el dominio incluido.

Raíz cuadrada de un producto. Si $a, b \geq 0$, entonces

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}.}$$

Por ejemplo,

$$\sqrt{12}\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6.$$

Podríamos también simplificar primero $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y obtener

$$2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6.$$

Dos rutas válidas pueden tener distinta longitud.

Raíz cuadrada de un cociente. Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

La condición $b > 0$ combina dos necesidades: la fracción original exige $b \neq 0$ y la raíz cuadrada del denominador exige $b \geq 0$.

Justificación de las reglas radicales. Para el producto cuadrático, el candidato $c = \sqrt{a}\sqrt{b}$ es no negativo y $c^2 = ab$, por las leyes enteras. La unicidad de la raíz principal da $c = \sqrt{ab}$. Para el cociente, $c = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ existe y es no negativo cuando $a \geq 0$, $b > 0$; además $c^2 = a/b$. La misma unicidad prueba la fórmula.

Este argumento vale para cualquier índice par $n \geq 2$: se verifica no negatividad y potencia n correcta. Para índice impar $n \geq 3$, el producto $c = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ satisface $c^n = ab$ para cualesquiera reales a, b; la unicidad de la raíz impar basta, sin condición de signo. Para el cociente con $b \neq 0$, la raíz del denominador es no nula y el candidato tiene potencia n igual a a/b. Quedan así justificadas también las reglas impares enunciadas abajo. Estas pruebas admiten radicandos cero donde el denominador no se anule.

Por qué no debemos borrar las hipótesis. La igualdad

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

no es una identidad universal en los reales. Si $a = b = -1$, entonces $ab = 1$ y el lado izquierdo es real, pero las raíces del lado derecho no lo son.

Una fórmula puede ser algebraicamente familiar y aun así tener un dominio más estrecho que las expresiones que aparecen por separado.

Índices impares. Para n impar y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}.$$

Y si $b \neq 0$,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Las raíces impares no exigen no negatividad del radicando.

Una advertencia estructural. Producto y suma son operaciones distintas. De

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

no se sigue ninguna regla del tipo

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

La sección siguiente analizará esta diferencia.

18.11. Sumar radicales exige reconocer términos semejantes

Los radicales pueden sumarse cuando, después de simplificar, comparten la misma parte radical.

Por ejemplo,

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

La última igualdad no usa una "ley de raíces". Usa la propiedad distributiva:

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2+3)\sqrt{2}.$$

Radicales semejantes. Expresiones como

$$3\sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad -7\sqrt{5}$$

son semejantes respecto de su parte radical y pueden combinarse:

$$3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -4\sqrt{5}.$$

En cambio,

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

no puede reducirse mediante una combinación lineal inmediata porque las partes radicales son distintas.

La falsa distribución sobre la suma. No existe en general la identidad

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Basta un contraejemplo:

$$\sqrt{9+16} = 5,$$

mientras que

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

La confusión suele venir de transportar una regla válida para productos hacia una suma, sin reconocer que las operaciones son diferentes.

Simplificar antes de decidir. Considere

$$\sqrt{12} + \sqrt{27}.$$

A primera vista las raíces son distintas. Pero

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \qquad \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

y por tanto

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3}.$$

La semejanza estaba oculta por la forma original.

Esta es una primera muestra de **foresight algebraico**: antes de ejecutar una operación, preguntarse qué forma hará visible la estructura útil.

18.12. Racionalización: cambiar de forma con un objetivo

Racionalizar significa transformar una expresión para eliminar ciertos radicales de un denominador —o, en contextos específicos, de un numerador— sin cambiar su valor en el dominio considerado.

La técnica es útil. Pero no debemos convertirla en un mandato sin propósito.

Denominador monomial. Si $a > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

La operación multiplica por una forma de 1. No cambia el valor.

Conjugados. Cuando el denominador tiene la forma

$$u - v$$

con radicales cuadráticos, puede ser útil multiplicar por el conjugado $u + v$. La razón es la identidad

$$(u - v)(u + v) = u^2 - v^2,$$

que se obtiene directamente de la distributividad.

Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}, \qquad x \geq 0.$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

El denominador se convierte en

$$(x + 1) - x = 1.$$

Por tanto

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}, \qquad x \geq 0.}$$

Aquí la racionalización produce una simplificación notable.

Pero no siempre racionalizar mejora la forma. Compare

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

con

$$\frac{\sqrt{x}}{x}.$$

Ambas formas son equivalentes para $x > 0$. Dependiendo del problema, una puede ser más útil que la otra.

Si el objetivo es reconocer una potencia,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

puede ser la representación más informativa. Si el objetivo es eliminar radicales del denominador en una expresión numérica, la forma racionalizada puede ser preferible.

La pregunta madura no es "¿ya racionalicé?", sino:

> **¿Qué forma revela mejor la estructura que necesito para el siguiente paso?**

18.13. Elegir entre notación radical y exponente racional

Una misma cantidad puede escribirse de maneras distintas. La fluidez algebraica incluye saber **cambiar de representación con una razón**.

Para $a > 0$:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

Ninguna de las dos notaciones es universalmente superior.

Cuando conviene el exponente racional. Considere

$$\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}, \qquad x > 0.$$

En notación radical los índices son distintos. En notación exponencial,

$$\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x} = x^{1/2}x^{1/3} = x^{5/6}.$$

La suma de exponentes se vuelve visible inmediatamente.

Otro ejemplo:

$$\frac{x^{3/2}x^{-1/3}}{x^{1/6}} = x^{3/2-1/3-1/6} = x^1 = x,$$

para $x > 0$.

Cuando conviene la notación radical. Considere

$$16^{3/4}.$$

Escribir

$$\left(\sqrt[4]{16}\right)^3$$

hace visible una evaluación inmediata:

$$2^3 = 8.$$

También, al estudiar dominio, una expresión como

$$\sqrt[4]{x-2}$$

hace visible de inmediato que el radicando debe ser no negativo. La forma

$$(x-2)^{1/4}$$

representa lo mismo en los reales, pero puede ocultar al lector inexperto la restricción.

Criterios de elección. Antes de cambiar de forma, pregunte:

- ¿necesito combinar exponentes?
- ¿necesito ver una raíz concreta?
- ¿necesito hacer visible el dominio?
- ¿necesito comparar términos semejantes?
- ¿necesito racionalizar?

El cambio de representación es una decisión matemática, no un gesto tipográfico.

Micropráctica estratégica. Sin efectuar toda la simplificación, decida qué representación usaría primero en cada caso:

$$\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[6]{x},$$

$$81^{3/4},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}},$$

$$\sqrt{12}+\sqrt{27}.$$

La respuesta debe incluir una razón.

Control razonado. En $\sqrt[3]{x^2}\sqrt[6]{x}$ convienen exponentes para sumar $2/3 + 1/6 = 5/6$, con dominio $x \geq 0$; si $x = 0$, ambos factores valen cero y se verifica directamente. Para $81^{3/4}$ conviene la raíz cuarta de 81, que es tres, y luego su cubo: 27. Para $1/\sqrt{x+2}$, la forma radical revela $x > -2$; una racionalización sólo se justifica si sirve a una tarea posterior. Para $\sqrt{12}+\sqrt{27}$ conviene extraer cuadrados: $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

18.14. Dominios de expresiones con varias restricciones

En expresiones reales de varias capas, el dominio se obtiene **intersectando todas las condiciones necesarias**.

No basta revisar la última operación. Debemos inspeccionar cada componente.

Radical de índice par y denominador. Considere

$$E(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}.$$

La raíz exige

$$x - 1 \geq 0,$$

mientras que el denominador exige

$$x \neq 3.$$

Por tanto el dominio es

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1,\ x \neq 3\}.$$

No hemos resuelto una ecuación. Hemos leído las condiciones de existencia de la expresión.

Radical en el denominador. Considere

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

No basta exigir $x + 2 \geq 0$. Como la raíz aparece además en un denominador, debe ser distinta de cero. Por tanto

$$x + 2 > 0,$$

y el dominio es

$$x > -2.$$

Varias restricciones simultáneas. Considere

$$G(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}\,(x-2)}.$$

Las condiciones son:

- $x + 4 \geq 0$ por la raíz del numerador;
- $x \geq 0$ por $\sqrt{x}$;
- $\sqrt{x} \neq 0$, luego $x \neq 0$;
- $x \neq 2$ por el segundo factor del denominador.

La intersección se reduce a

$$x > 0, \qquad x \neq 2.$$

Simplificar sin ampliar el dominio. Considere

$$H(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}.$$

La raíz existe para todo real, pero el denominador exige $x \neq 1$. Además,

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

Por tanto

$$H(x) = \frac{|x-1|}{x-1}, \qquad x \neq 1.$$

No podemos cancelar el numerador con el denominador porque $|x-1|$ no es igual a $x-1$ para todos los valores del dominio.

Este ejemplo reúne tres hilos del libro:

```
DOMINIO
+
VALOR ABSOLUTO
+
TRANSFORMACIÓN JUSTIFICADA
```

Nota pedagógica — Restricciones por capas y recuperación. Las restricciones de una expresión se acumulan; ninguna simplificación posterior las borra. Conviene registrar de qué operación procede cada una para no confundir una raíz existente con un denominador admisible.

Control resuelto. Considera

$$J(x) = \frac{\sqrt{4-\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)(x-9)}.$$

Capa	Condición	Qué se recupera si hay duda
Raíz interior	$x \geq 0$	§18.5: raíz cuadrada real
Raíz exterior	$4-\sqrt{x} \geq 0$	§18.14: leer el radicando completo
Primer factor del denominador	$\sqrt{x} \neq 1$	§18.5: raíz principal y potencia correcta
Segundo factor del denominador	$x \neq 9$	§18.1: no división por cero

Con $x \geq 0$, la segunda condición equivale a $x \leq 16$: para números no negativos, comparar sus cuadrados conserva el orden, pues $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$ tiene el signo de $v-u$ cuando $v+u > 0$, y el caso ambos cero se comprueba directamente. Además, $\sqrt{x} = 1$ equivale a $x = 1$ por la definición de raíz principal. Por tanto el dominio exacto es $[0, 16] \setminus \{1, 9\}$. Los extremos cero y dieciséis están permitidos; los puntos uno y nueve se excluyen aunque las raíces existan.

La verificación tiene dos direcciones. Cada punto del conjunto declarado satisface todas las capas, así que la expresión existe allí. Un punto exterior incumple alguna capa, así que no puede añadirse. Esta doble revisión evita que una lista de condiciones necesarias se confunda con una descripción suficiente del dominio.

18.15. Laboratorio P3 — el primer paso inválido

Una cadena algebraica incorrecta puede contener varios pasos posteriores formalmente correctos. Por eso, para diagnosticarla, no basta señalar que "el resultado está mal". Hay que localizar **el primer paso que dejó de estar justificado**.

Usaremos este protocolo:

```
1. LEER LA CADENA COMPLETA.
2. MARCAR EL PRIMER PASO NO JUSTIFICADO.
3. NOMBRAR LA REGLA QUE SE INTENTÓ USAR.
4. IDENTIFICAR LA HIPÓTESIS QUE FALTA O LA REGLA FALSA.
5. REPARAR DESDE ESE PUNTO.
6. CONSERVAR EL DOMINIO ORIGINAL.
```

Diagnóstico 1 — valor absoluto perdido. Supongamos que alguien escribe

$$\sqrt{(x-4)^2} = x - 4.$$

El primer paso ya es inválido como identidad universal. La regla correcta es

$$\sqrt{u^2} = |u|.$$

Por tanto

$$\sqrt{(x-4)^2} = |x-4|.$$

La forma $x-4$ sólo sería válida bajo una hipótesis adicional que garantizara $x-4 \geq 0$.

Diagnóstico 2 — exponente racional no reducido. Cadena propuesta:

$$(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

El primer paso es inválido bajo nuestra definición para bases negativas: el exponente racional debe interpretarse como número racional en forma reducida. Como

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

la reparación comienza con

$$(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3} = -2.$$

Diagnóstico 3 — raíz distribuida sobre una suma. Cadena propuesta:

$$\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 3.$$

No existe una ley de distribución de la raíz sobre la suma. Un contraejemplo basta para destruir la identidad. Con $x = 7$:

$$\sqrt{7+9} = 4,$$

mientras que

$$\sqrt{7} + 3 \neq 4.$$

Diagnóstico 4 — simplificación correcta, dominio olvidado. Cadena propuesta:

$$\frac{x^{-2}}{x^{-5}} = x^3.$$

El cálculo es correcto, pero si la conclusión se declara "para todo real x", el razonamiento es inválido. La expresión original requiere $x \neq 0$.

La reparación es

$$\frac{x^{-2}}{x^{-5}} = x^3, \qquad x \neq 0.$$

Diagnóstico 5 — producto de radicales fuera de dominio. Cadena propuesta:

$$\sqrt{(-2)(-8)} = \sqrt{-2}\sqrt{-8}.$$

El lado izquierdo está definido en $\mathbb{R}$ y vale 4. El lado derecho no está definido en $\mathbb{R}$. La regla del producto para raíces cuadradas se aplicó sin las hipótesis $a, b \geq 0$.

Diagnóstico 6 — una ley válida en bases positivas usada en una base negativa. Cadena propuesta:

$$\left((-8)^{2/3}\right)^{3/2} = (-8)^{(2/3)(3/2)} = -8.$$

El primer paso utiliza sin control la ley $(a^r)^s = a^{rs}$ en un contexto donde la base inicial es negativa. El lado izquierdo vale

$$4^{3/2} = 8,$$

y por tanto la igualdad propuesta es falsa.

Qué debe aprenderse del laboratorio. Estos errores no son todos del mismo tipo:

- algunos pierden una condición de signo;
- otros usan una regla falsa;
- otros usan una regla válida fuera de su dominio;
- otros simplifican correctamente pero olvidan el dominio original;
- otros confunden una representación de un racional con el racional mismo.

Diagnosticar exige reconocer **qué clase de error ocurrió**.

18.16. Cierre — protocolo de potencias y radicales

El capítulo comenzó con una pregunta: ¿cómo extender la potencia sin convertir las leyes de exponentes en reglas ciegas?

La respuesta puede resumirse en un protocolo reutilizable.

```
1. ¿CUÁL ES EL DOMINIO REAL DE LA EXPRESIÓN?

2. ¿EL EXPONENTE ES ENTERO O RACIONAL?

3. SI EL EXPONENTE ES CERO O NEGATIVO:
   ¿LA BASE ES NO NULA?

4. SI EL EXPONENTE ES RACIONAL:
   ¿ESTÁ ESCRITO EN TÉRMINOS MÍNIMOS?
   ¿LA BASE ES POSITIVA, CERO O NEGATIVA?
```

```
5. SI HAY UN RADICAL:
   ¿EL ÍNDICE ES PAR O IMPAR?
   ¿SE TRATA DE UNA RAÍZ PRINCIPAL?

6. SI SALE UNA POTENCIA DE UNA RAÍZ PAR:
   ¿DEBE APARECER UN VALOR ABSOLUTO?

7. ¿QUÉ LEY SE ESTÁ USANDO Y CUÁLES SON SUS HIPÓTESIS?

8. ¿CONVIENE MÁS LA NOTACIÓN RADICAL O LA EXPONENCIAL?

9. SI SE RACIONALIZA:
   ¿QUÉ OBJETIVO CUMPLE EL CAMBIO DE FORMA?

10. ¿LA FORMA FINAL CONSERVA EXPLÍCITAMENTE EL DOMINIO ORIGINAL?
```

Red conceptual del capítulo. Las ideas principales no forman una lista aislada. Se encadenan:

```
POTENCIA ENTERA POSITIVA
        ↓
LEYES DERIVADAS
        ↓
EXTENSIÓN A 0 Y ENTEROS NEGATIVOS
        ↓
INVERSOS / NO NULIDAD
        ↓
RAÍZ n-ÉSIMA
        ↓
PARIDAD / RAÍZ PRINCIPAL
        ↓
√(a²)=|a|
        ↓
EXPONENTE RACIONAL
        ↓
DOMINIO DE LA BASE
        ↓
RADICAL ↔ POTENCIA RACIONAL
        ↓
SIMPLIFICACIÓN / PRODUCTO / COCIENTE
        ↓
RADICALES SEMEJANTES
        ↓
RACIONALIZACIÓN
        ↓
ELECCIÓN ESTRATÉGICA DE FORMA
        ↓
DIAGNÓSTICO DEL PRIMER PASO INVÁLIDO
```

Qué debe poder hacer ahora el lector. Al terminar este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- explicar de dónde provienen las leyes de exponentes, en lugar de recitarlas como un catálogo;
- distinguir exponentes positivos, cero, negativos y racionales por su definición;
- declarar las restricciones de no nulidad necesarias;

- distinguir raíz principal de conjunto de soluciones;
- usar la paridad del índice para determinar el dominio real de un radical;
- justificar por qué $\sqrt{a^2} = |a|$;
- convertir entre radicales y exponentes racionales;
- tratar con cuidado bases cero y negativas;
- simplificar y combinar radicales sin perder signos ni dominios;
- racionalizar cuando la transformación tiene un propósito;
- elegir entre representaciones equivalentes según la tarea;
- intersectar varias restricciones de dominio;
- encontrar el primer paso inválido de una cadena y repararlo.

Hacia el capítulo 19. En C18 hemos aprendido a reconocer potencias perfectas y a cambiar de forma sin perder información. El paso siguiente será ampliar esa capacidad a expresiones polinómicas completas.

Allí aparecerá una nueva pregunta:

> **¿Cómo reconocer que una expresión aparentemente complicada es en realidad la expansión —o la factorización— de una estructura más simple?**

Ese será el problema de **identidades, productos notables y factorización**.

Ejercicios

El banco está organizado por **función cognitiva**, no sólo por dificultad. Los ejercicios A–B construyen lectura y fluidez; C–D exigen justificación y diagnóstico; E–F obligan a elegir estrategias y transferir ideas; G reúne problemas largos de síntesis. Salvo indicación expresa, se trabaja en $\mathbb{R}$ y toda simplificación debe conservar el dominio de la expresión original.

A. Reconocimiento y lectura estructural (1–10)

1. **Nivel A.** Para cada expresión, determina su dominio real y explica en una frase qué restricción lo produce:
   a^{-3}, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ y $\sqrt[5]{a^{-2}}$.
2. **Nivel A.** Sea $n \geq 1$ un entero. Sin desarrollar potencias, decide cuáles de las siguientes expresiones son iguales para todo real x y cuáles dependen de la paridad del exponente:
   $(-x)^4$, $-x^4$, $(-x)^5$, $-x^5$, $(-x)^{2n}$ y $(-x)^{2n+1}$.
3. **Nivel A.** Distingue entre raíz principal y conjunto de soluciones. Indica cuáles afirmaciones son correctas:
   (a) $\sqrt{49} = 7$;

   (b) $\sqrt{49} = \pm 7$;

   (c) la ecuación $t^2 = 49$ tiene dos soluciones reales;

   (d) $\sqrt[3]{-27} = -3$;

   (e) la raíz cuarta principal de 16 es 2.
4. **Nivel A.** Reduce primero cada exponente racional y decide si la potencia tiene valor real:
   $(-16)^{2/4}$, $(-8)^{2/6}$, $(-32)^{6/15}$, $(-27)^{-4/6}$ y $(-1)^{15/21}$.
   No calcules todavía los valores salvo cuando sea necesario para justificar la decisión.

5. **Nivel A.** Para cada ley, escribe las condiciones de la formulación indicada para que el enunciado sea correcto en el contexto real de este capítulo. En (b), toma $m, n \in \mathbb{Z}$ y formula una condición uniforme sobre la base; en (e), usa la teoría sistemática sobre bases positivas, sin afirmar que esa condición sea mínima para cada exponente particular:
   (a) $a^{-n} = 1/a^n$;

   (b) $a^m/a^n = a^{m-n}$;

   (c) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;

   (d) $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$;

   (e) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ cuando se usa sistemáticamente la teoría de exponentes racionales.
6. **Nivel A.** Determina el dominio real de cada expresión, sin simplificarla:
   (a) $\sqrt{x-3}$;

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

   (c) $(x-2)^{-4}$;

   (d) $\sqrt[4]{(x+5)(x-1)}$;

   (e) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-7}$.
7. **Nivel A.** Empareja cada expresión con una representación equivalente bajo las hipótesis indicadas:
   $a^{3/2}$, $a^{2/3}$, $a^{-1/4}$, $\sqrt[5]{a^7}$,
   con
   $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$, $a\sqrt{a}$, $(\sqrt[3]{a})^2$, $a\sqrt[5]{a^2}$.
   Declara las condiciones sobre a que estás usando.
8. **Nivel A.** Clasifica cada transformación como `válida`, `válida con hipótesis adicionales` o `falsa en general`:
   (a) $\sqrt{x^2} = x$;

   (b) $\sqrt{x^2} = |x|$;

   (c) $\sqrt{x+4} = \sqrt{x} + 2$;

   (d) $x^{-3} = 1/x^3$;

   (e) $\sqrt{12x^2} = 2|x|\sqrt{3}$.
9. **Nivel A.** Sea $a > 0$. Determina el signo de $(-a)^n$ según n sea par o impar, y después compara esa información con el signo de $-a^n$. Explica por qué los paréntesis cambian el objeto que se eleva a potencia.
10. **Nivel A.** Para cada tarea, indica qué representación parece más informativa antes de efectuar cálculos: radical o exponente racional.

(a) multiplicar $\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a}$;

(b) reconocer términos semejantes en $3\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$;

(c) elevar $(a^{2/5})^{15}$ con $a > 0$;

(d) estudiar el signo de $\sqrt{x^2}$;

(e) comparar $a^{3/4}a^{5/4}$ con una potencia entera.

B. Fluidez técnica (11–26)

11. **Nivel B.** Simplifica y escribe el resultado con exponentes positivos:

$$\frac{x^{-3}y^{5}}{x^{2}y^{-4}}, \qquad x, y \neq 0.$$

12. **Nivel B.** Simplifica completamente:

$$\frac{(a^{-2}b^{3})^{3}(a^{4}b^{-1})^{2}}{a^{-1}b^{5}}, \qquad a, b \neq 0.$$

13. **Nivel B.** Simplifica:

$$\left(\frac{3x^{-2}y^{3}}{2x^{4}y^{-1}}\right)^{-2}, \qquad x, y \neq 0.$$

14. **Nivel B.** Evalúa exactamente:

$$2^{-4}, \qquad 16^{-3/4}, \qquad 27^{2/3}, \qquad 81^{-1/2}, \qquad 32^{3/5}.$$

15. **Nivel B.** Simplifica los radicales numéricos:

$$\sqrt{288}, \qquad \sqrt[3]{432}, \qquad \sqrt[4]{1296 \cdot 5}, \qquad \sqrt[5]{96}.$$

16. **Nivel B.** Simplifica para variables reales:

$$\sqrt{72x^{6}y^{4}}.$$

La respuesta debe ser válida sin suponer signos positivos para x e y.

17. **Nivel B.** Simplifica para todo real t:

$$\sqrt[3]{54t^{7}}, \qquad \sqrt[4]{48t^{8}}, \qquad \sqrt{200t^{10}}.$$

18. **Nivel B.** Simplifica usando las leyes de producto y cociente con sus condiciones:

$$\sqrt{18}\sqrt{8}, \qquad \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}, \qquad \sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{18}, \qquad \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}.$$

19. **Nivel B.** Reduce y combina términos semejantes:

$$5\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{48}.$$

20. **Nivel B.** Simplifica:

$$2\sqrt{18x^{2}} + 3\sqrt{8x^{2}} - \sqrt{50x^{2}}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

21. **Nivel B.** Racionaliza el denominador y simplifica:

$$\frac{7}{3\sqrt{5}}, \qquad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \qquad \frac{5}{\sqrt[3]{4}}.$$

22. **Nivel B.** Racionaliza usando conjugados:

$$\frac{1}{3+\sqrt{5}}, \qquad \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

23. **Nivel B.** Convierte a exponentes racionales y simplifica, suponiendo $a, b > 0$:

$$\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[6]{a^5}, \qquad \frac{\sqrt[4]{b^7}}{\sqrt{b}}.$$

24. **Nivel B.** Evalúa en $\mathbb{R}$:

$$(-27)^{2/3}, \qquad (-32)^{3/5}, \qquad (-8)^{-2/3}, \qquad (-243)^{1/5}.$$

25. **Nivel B.** Determina el dominio real y luego simplifica sin ampliarlo:

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}.$$

26. **Nivel B.** Para $a, b > 0$, simplifica por completo:

$$\frac{a^{7/6} b^{-5/4}\,\sqrt[3]{a^2 b^3}}{a^{-1/2} b^{1/4} \sqrt{a}}.$$

Da la respuesta final con exponentes positivos.

C. Justificación y reconstrucción (27–38)

27. **Nivel C.** Justifica, a partir de la ley del cociente para potencias positivas, por qué la definición coherente de a^0 debe ser 1 cuando $a \neq 0$. Señala exactamente dónde se usa la hipótesis de no nulidad.
28. **Nivel C.** Deriva la definición

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

para $a \neq 0$ y $n > 0$, suponiendo que se desea conservar $a^m a^n = a^{m+n}$.

29. **Nivel C.** Demuestra la ley

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

para exponentes enteros m, n y base $a \neq 0$. Organiza la prueba por casos según los signos de m y n.

30. **Nivel C.** Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

La prueba debe usar la definición de raíz cuadrada principal, no una regla memorizada.

31. **Nivel C.** Sea $n \geq 2$. Justifica

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & n \text{ par}, \\ x, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

para todo real x para el cual la expresión tenga sentido.

32. **Nivel C.** Demuestra que si $a, b \geq 0$, entonces

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Tu argumento debe verificar dos cosas: no negatividad y cuadrado correcto.

33. **Nivel C.** Da un contraejemplo numérico que destruya cada afirmación:

(a) $\sqrt{u+v} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$;

(b) $(u+v)^2 = u^2 + v^2$;

(c) $\sqrt{u^2} = u$ para todo real u.

Después explica por qué un solo contraejemplo basta lógicamente.

34. **Nivel C.** Sea $a > 0$ y $m/n = p/q$ dos fracciones reducidas o no reducidas con denominadores positivos. Explica por qué una definición correcta de a^r no puede depender de la forma fraccionaria elegida para representar el mismo racional. Señala qué propiedad de las raíces hace plausible esa independencia.

35. **Nivel C.** Para $a > 0$, justifica que

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

No te limites a citar la definición: verifica que ambas expresiones representan la misma raíz positiva apropiada.

36. **Nivel C.** Para $a > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$, explica por qué la ley

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

es estable en este dominio. Contrasta tu argumento con lo que puede fallar cuando la base es negativa.

37. **Nivel C.** Sea $u, v \in \mathbb{R}$ y supón que $u + \sqrt{v}$ y $u - \sqrt{v}$ están definidos y son no nulos. Justifica algebraicamente por qué multiplicar por

$$\frac{u - \sqrt{v}}{u - \sqrt{v}}$$

conserva el valor de una fracción y explica qué falla si el conjugado fuese cero.

38. **Nivel C.** Considera una expresión $E(x)$ y una forma simplificada $S(x)$ obtenida mediante transformaciones válidas en el dominio D de E. Explica por qué no se sigue que E y S tengan el mismo dominio como expresiones aisladas. Ilustra tu explicación con

$$E(x) = \frac{x^2}{x}, \qquad S(x) = x.$$

D. Diagnóstico del primer paso inválido (39–50)

39. **Nivel D.** Un estudiante escribe

$$\sqrt{(x-7)^2} = x - 7.$$

Localiza el primer paso conceptual incorrecto, nombra la regla correcta y repara la expresión para todo real x.

40. **Nivel D.** Diagnostica:

$$\sqrt{x+16} = \sqrt{x} + 4.$$

Encuentra el primer paso no justificado, ofrece un contraejemplo y formula una versión verdadera relacionada con producto o cociente de radicales.

41. **Nivel D.** Un estudiante afirma:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3.$$

Explica por qué ninguna ley de exponentes autoriza esta distribución sobre una suma. Usa C13 para mostrar qué términos faltan.

42. **Nivel D.** Analiza la cadena

$$\frac{x^5}{x^5} = x^0 = 1.$$

¿Es incorrecta? ¿Para qué valores es válida? Explica por qué no permite concluir que $0^0 = 1$ en este capítulo.

43. **Nivel D.** Diagnostica la afirmación

$$(-3)^{-2} = -\frac{1}{9}.$$

Identifica qué se ha confundido entre signo de la base y signo del exponente.

44. **Nivel D.** Un estudiante simplifica

$$\frac{x^4}{x} = x^3$$

y luego dice que ambas expresiones son iguales para todo $x \in \mathbb{R}$. Separa el cálculo correcto del error de dominio y formula la igualdad con su restricción exacta.

45. **Nivel D.** Repara la cadena

$$(-64)^{2/6} = \sqrt[6]{(-64)^2} = \sqrt[6]{4096} = 4.$$

Debes localizar el primer paso incompatible con la política de exponentes racionales para bases negativas.

46. **Nivel D.** Analiza

$$\left((-27)^{2/3}\right)^{3/2} = (-27)^1 = -27.$$

Calcula el lado izquierdo por una ruta válida, identifica la ley aplicada fuera de su dominio rector y explica la discrepancia.

47. **Nivel D.** Diagnostica:

$$\sqrt{(-3)(-12)} = \sqrt{-3}\sqrt{-12} = 6.$$

¿En qué paso sale la cadena de $\mathbb{R}$? ¿Cuál es el valor correcto del lado izquierdo?

48. **Nivel D.** Un estudiante escribe

$$\sqrt{x^4y^2} = x^2y.$$

Determina qué parte es siempre correcta y qué parte depende del signo de y. Da la forma válida para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

49. **Nivel D.** Al racionalizar

$$\frac{1}{1+\sqrt{1}},$$

alguien multiplica por $(1-\sqrt{1})/(1-\sqrt{1})$. Explica por qué ese procedimiento es inválido aunque "use el conjugado", y simplifica la expresión original por una ruta legítima.

50. **Nivel D.** Localiza el primer paso inválido y repara desde allí:

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \qquad (x \neq 1).$$

Describe además el comportamiento correcto de la expresión según el signo de $x-1$, sin resolver ninguna ecuación.

E. Estrategia y elección de representación (51–60)

51. **Nivel E.** Supón $a > 0$. Para simplificar

$$\sqrt[3]{a^5}\,\sqrt[6]{a},$$

compara dos estrategias: mantener radicales o pasar a exponentes racionales. Ejecuta ambas y explica cuál revela más rápido la estructura.

52. **Nivel E.** Antes de calcular

$$4\sqrt{18} - 3\sqrt{8} + \sqrt{50},$$

decide qué operación debe realizarse primero para saber si existen términos semejantes. Justifica por qué sumar coeficientes de inmediato sería una mala estrategia.

53. **Nivel E.** Considera

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}.$$

Produce una forma racionalizada y la forma original. Explica en qué tipo de tarea podría ser más útil cada una y por qué ninguna es universalmente "la forma correcta".

54. **Nivel E.** Para estudiar

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x^{-2}\sqrt{x+3}},$$

diseña un orden de trabajo que minimice errores: dominio, tratamiento del exponente negativo, combinación de factores y forma final. No empieces por simplificar.

55. **Nivel E.** Construye un contraejemplo pequeño para refutar

$$\sqrt{u^2+v^2} = |u| + |v|.$$

Después explica cómo elegiste los valores para que el cálculo fuese inmediato.

56. **Nivel E.** Para $a > 0$, simplifica

$$\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a}}$$

por dos rutas: usando exponentes racionales y usando un índice común de radicales. Compara la longitud y transparencia de ambas rutas.

57. **Nivel E.** Decide la mejor representación para simplificar

$$\frac{(x^{3/4})^2\sqrt{x}}{x^{1/2}}, \qquad x > 0.$$

Explica por qué mezclar notaciones sin un plan puede ocultar cancelaciones.

58. **Nivel E.** La expresión

$$\sqrt{72(x-1)^6}$$

puede simplificarse de varias maneras. Elige una ruta que mantenga visible el problema de signo y explica en qué momento debe aparecer un valor absoluto.

59. **Nivel E.** Racionaliza

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2}$$

y luego decide cuál de las dos formas —original o racionalizada— usarías para:
(a) estimar numéricamente el valor;
(b) sumar la expresión con $\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}$;
(c) estudiar sólo su dominio.

60. **Nivel E.** Considera

$$\frac{\sqrt{50x^4}}{x\sqrt{2}}.$$

Diseña la ruta de simplificación más segura para $x \neq 0$, de modo que el resultado no pierda información de signo. Explica por qué cancelar “un x” antes de tratar $\sqrt{x^4}$ puede inducir razonamientos poco claros.

F. Transferencia acumulativa (61–72)

61. **Nivel F.** Determina el dominio real de

$$\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{x-1}}$$

interpretando $x^{-1/2}$ mediante exponentes racionales. Después reescribe la expresión usando sólo radicales, sin ampliar el dominio.

62. **Nivel F.** Simplifica preservando exactamente el dominio original:

$$\frac{(x-3)^{-2}\sqrt{(x-3)^4}}{x+1}.$$

Indica por separado la forma simplificada y las restricciones heredadas.

63. **Nivel F.** Usa el teorema del binomio de C13 para expandir $(u+v)^2$ y explica por qué esa expansión confirma que

$$\sqrt{u^2+2uv+v^2} = |u+v|,$$

pero no autoriza la identidad $\sqrt{u^2+v^2} = |u|+|v|$.

64. **Nivel F.** Simplifica, conservando el dominio original,

$$\sqrt{\frac{(a-b)^4}{(a+b)^2}}$$

bajo la condición $a+b \neq 0$. La respuesta debe tratar correctamente el valor absoluto.

65. **Nivel F.** Determina el dominio y simplifica:

$$\frac{x^{3/2}}{x^{-1/2}\sqrt{x+2}}.$$

Trabaja en el dominio real sistemático para exponentes racionales y explica qué restricciones desaparecen visualmente en la forma final.

66. **Nivel F.** Sean

$$E(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \qquad F(x) = \frac{|x|}{x}, \qquad G(x) = 1.$$

Compara sus dominios y determina qué pares representan la misma función en su dominio común. Explica por qué la igualdad simbólica no puede separarse del dominio.

67. **Nivel F.** Simplifica

$$\sqrt{(t-3)^2}\,\sqrt{(t+3)^2}$$

para todo real t. Da una forma con valores absolutos y explica por qué sustituirla por $(t-3)(t+3)$ exigiría información adicional de signo.

68. **Nivel F.** Racionaliza y conserva las restricciones:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}}.$$

Determina primero el dominio de la expresión original y verifica que el factor conjugado usado no se anula allí.

69. **Nivel F.** Determina el dominio de

$$\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

razonando de afuera hacia adentro y de adentro hacia afuera. Compara ambos recorridos y explica por qué este ejercicio no requiere una teoría especial de radicales anidados.

70. **Nivel F.** Para $c > 0$, clasifica cuándo

$$(-c)^{p/q}$$

es real si p/q está reducido y $q > 0$. Indica además el signo del resultado según la paridad de p cuando q es impar.

71. **Nivel F.** Simplifica para $x > 0$:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}\, x^{-5/6}}{\sqrt[6]{x^{-1}}}.$$

Resuelve primero con exponentes racionales y después traduce el resultado final a notación radical.

72. **Nivel F.** Considera

$$\frac{\sqrt{18x^6}}{x^2} \cdot \frac{x^{-1}}{\sqrt{2}}, \qquad x \neq 0.$$

Simplifica sin perder información de signo y explica qué parte del razonamiento depende de $\sqrt{x^2} = |x|$.

G. Síntesis avanzada (73–80)

73. **Nivel G.** Sea

$$E(x) = \frac{x^{-3/2}\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-1)}.$$

(a) Determina primero el dominio real.

(b) Simplifica por una ruta basada en exponentes racionales.

(c) Simplifica por una ruta que mantenga radicales el mayor tiempo posible.

(d) Racionaliza sólo si mejora la forma para una tarea explícita.

(e) Compara ambas rutas y explica en qué pasos el dominio original debe mantenerse aunque ya no sea visible.

74. **Nivel G.** Sea $n \geq 2$ par y $a, b \in \mathbb{R}$. Analiza

$$\sqrt[n]{a^{2n}b^n}.$$

Produce una fórmula válida para todos los valores para los que la expresión está definida. Justifica cuidadosamente qué factores salen con valor absoluto, qué ocurre con el signo de b y cómo cambia la respuesta si el índice n se reemplaza por un índice impar.

75. **Nivel G.** Para $a > 0$, simplifica

$$P(a) = \frac{\sqrt[3]{a^5}\sqrt[4]{a^3}}{a^{7/12}}$$

de dos maneras completas:
(i) sólo mediante exponentes racionales;
(ii) convirtiendo primero a un radical de índice común.
Compara las dos soluciones según longitud, transparencia y facilidad para verificar el dominio.

76. **Nivel G.** Un estudiante propone la siguiente cadena:

$$(-64)^{4/6} = \left((-64)^{1/6}\right)^4 = \left(\sqrt[6]{-64}\right)^4 = (-2)^4 = 16 = \left((-64)^{2/3}\right) = \left(\sqrt[3]{(-64)^2}\right) = 16.$$

Analiza la cadena línea por línea. Localiza el **primer** paso inválido, explica por qué los pasos posteriores no reparan el razonamiento aunque el resultado final coincida con el valor correcto, y reconstruye una cadena válida desde la fracción reducida.

77. **Nivel G.** Racionaliza completamente

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Agrupa primero $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ como una unidad y usa un conjugado para reducir el denominador a un solo radical; después completa la racionalización. Verifica cada multiplicador y explica por qué ninguno de los denominadores introducidos es cero.

78. **Nivel G.** Estudia las tres expresiones

$$E(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \qquad F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}, \qquad G(x) = \frac{x^2}{|x|^2}.$$

(a) Determina sus dominios originales.

(b) Simplifica cada una sin ampliar el dominio.

(c) Decide cuáles son iguales como funciones.

(d) Explica por qué obtener la forma final 1 en algún caso no autoriza a insertar $x = 0$.

(e) Formula la lección general sobre dominio como invariante de una cadena de transformaciones.

79. **Nivel G.** Fija $c > 0$ y estudia la familia

$$(-c)^r, \qquad r \in \mathbb{Q}.$$

Escribe $r = p/q$ en términos mínimos con $q > 0$ y:

(a) clasifica exactamente cuándo la potencia es real;

(b) determina su signo cuando existe;

(c) compara $(-c)^{2/3}$, $((-c)^{2/3})^{3/2}$ y $(-c)^{(2/3)(3/2)}$;

(d) explica por qué la ley $(a^r)^s = a^{rs}$ se adopta sistemáticamente sobre bases positivas y no se transporta sin control a toda base negativa.

80. **Nivel G.** Realiza una auditoría MA-PED completa de

$$Q(x) = \frac{\sqrt{72x^6}\, x^{-1/2}}{\sqrt{x+2}\,(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})}.$$

Tu solución deberá contener, en este orden:

1. lectura estructural de la expresión;

2. dominio real original;

3. elección y justificación de una representación;

4. simplificación de potencias y radicales;

5. tratamiento explícito de cualquier valor absoluto;

6. racionalización sólo si cumple un objetivo;

7. forma final con dominio conservado;

8. verificación de que ninguna transformación introdujo una ampliación silenciosa del dominio.

No resuelvas ecuaciones asociadas: el problema es exclusivamente de **expresiones, dominio y transformaciones justificadas**.

H. Convenciones, leyes y construcción de dominios (81–96)

81. **Nivel D.** Sea $a < 0$. Compara $a^{5/3}$, $a^{10/6}$, $\sqrt[3]{a^5}$, $\sqrt[6]{a^{10}}$ y $(\sqrt[6]{a})^{10}$. Determina cuáles existen en los reales, cuáles representan el mismo valor y qué información pierde una receta que dé un valor distinto.
82. **Nivel C.** Sea $a < 0$ y $m/n \neq 0$ una fracción reducida con $n > 0$ impar. Clasifica el valor de $(a^{m/n})^{n/m}$ según la paridad de m, incluyendo $m < 0$. Compara con $a^{(m/n)(n/m)}$.
83. **Nivel C.** Sea A el conjunto de racionales cuya fracción reducida tiene denominador impar. Demuestra que una fracción con denominador impar siempre representa un elemento de A y que todo elemento de A admite también una escritura con denominador par. Determina si A se conserva al sumar, multiplicar y tomar recíprocos de elementos no nulos. Relaciona las conclusiones con una base negativa fija.
84. **Nivel C.** Sea $a < 0$ y sean $r = p/q$, $s = u/v$ fracciones reducidas con $q, v > 0$ impares. Decide si $a^r a^s = a^{r+s}$ sigue siendo válida. Justifica la independencia de la escritura elegida para $r + s$, incluyendo $r + s = 0$ y exponentes negativos.
85. **Nivel F.** Compara los dominios de $(ab)^{2/3}$ y $a^{2/3}b^{2/3}$ para $a, b \in \mathbb{R}$, y decide si son iguales donde existen. Contrasta con los dominios de $\sqrt{ab}$ y $\sqrt{a}\sqrt{b}$. Da un caso que distinga ambos tipos de ley.
86. **Nivel C.** Determina exactamente para qué $a, b \in \mathbb{R}$ la igualdad $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ es una igualdad de números reales. Demuestra ambas direcciones y explica por qué refutar una identidad universal no excluye todos los casos particulares.
87. **Nivel D.** Sea $n \geq 3$ impar. Compara los dominios y valores de $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[2n]{a^2}$. Decide cuándo se puede aumentar el índice multiplicándolo por dos a la vez que se eleva el radicando al cuadrado. Formula una reparación que valga para todo real a.
88. **Nivel F.** Compara los dominios naturales de $\sqrt{a/b}$ y $\sqrt{a}/\sqrt{b}$. Describe todos los casos en los que sólo existe la primera y expresa su valor mediante raíces de números no negativos en esos casos.
89. **Nivel E.** Determina el dominio y simplifica $R(t) = (\sqrt[4]{t} - \sqrt[6]{t})/(\sqrt[12]{t} - 1)$. Elige una representación que haga visible una cancelación y explica si la forma final puede usarse en $t = 1$.
90. **Nivel E.** Para $t \geq 0$, estudia $L(t) = \sqrt{t+9} - \sqrt{t+4}$. Obtén una forma que permita demostrar $0 < L(t) \leq 1$ sin aproximaciones decimales y determina cuándo se alcanza la cota superior. Explica qué aporta la representación elegida.

91. **Nivel F.** Sea $P(x,y) = \sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{y^4}$ para reales x, y. Busca una representación que permita decidir cómo cambia P al reemplazar (x,y) por $(\lambda x, \lambda y)$, con λ real. Demuestra la fórmula obtenida, incluyendo signos y ceros.
92. **Nivel E.** Para $x > 0$, sea $P(x) = \sqrt[4]{x^3}\,\sqrt[6]{x^5}$. Determina el menor entero positivo N para el que existe un entero M con $P(x)^N = x^M$ para todo $x > 0$. Determina también todos los pares (N, M) posibles.
93. **Nivel F.** Sean $a < b$ y $a < c < b$. Construye una expresión real usando raíces y un cociente cuyo dominio natural sea exactamente $[a,b] \setminus \{c\}$. Justifica que no faltan puntos ni se admiten otros; compara una forma con dos raíces y una con una sola.
94. **Nivel F.** Sea $F = \{c_1, \dots, c_k\}$ un conjunto finito de reales distintos. Construye una expresión cuyo dominio natural sea $\mathbb{R} \setminus F$ y cuyo valor sea uno en todo su dominio. Incluye el caso $F = \varnothing$ y explica por qué simplificarla no restituye los puntos excluidos.
95. **Nivel F.** Sean $a < b$ y $F \subset (a,b)$ finito. Construye una expresión de raíces y cocientes con dominio natural exactamente $(a,b] \setminus F$. Haz que su valor se simplifique a $\sqrt{b-x}/\sqrt{x-a}$ dentro de ese dominio. Explica la diferencia entre los dos extremos.
96. **Nivel F.** Sean $a < b$. Construye una expresión cuyo dominio natural sea $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Decide si separar una raíz de producto en dos raíces conserva ese dominio. Da fórmulas válidas para el valor en cada una de las dos regiones.

Cierre del banco

Los ejercicios 73–80 constituyen el bloque avanzado. Ninguno requiere teoría posterior a C18: incluso cuando aparecen expresiones largas, conjugados sucesivos, parámetros o radicales anidados, la dificultad procede de **coordinar dominio, representación, leyes de exponentes, raíz principal, valor absoluto y diagnóstico**, no de introducir una teoría nueva.

Las soluciones razonadas forman parte de este capítulo bajo `FULL_SOLUTION_PROTOCOL`.

Soluciones razonadas

Las soluciones siguen `FULL_SOLUTION_PROTOCOL`: no se limitan a registrar un resultado, sino que hacen visible la lectura del dominio, la regla utilizada, la estrategia y el cierre cuando esas capas son matemáticamente relevantes. En los ejercicios de diagnóstico se identifica el **primer** paso inválido antes de reconstruir la cadena.

A. Reconocimiento y lectura estructural

1. El dominio se obtiene leyendo cada operación antes de simplificar.

- a^{-3} exige $a \neq 0$, porque $a^{-3} = 1/a^3$.
- $\sqrt[4]{a}$ exige $a \geq 0$.
- $\sqrt[3]{a}$ está definida para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ exige $\sqrt{a}$ real y no nula; por tanto $a > 0$.
- $\sqrt[5]{a^{-2}}$ exige primero a^{-2}, de modo que $a \neq 0$. La raíz quinta no añade restricciones.

Así, los dominios son, respectivamente,

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad [0,\infty), \qquad \mathbb{R}, \qquad (0,\infty), \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Los paréntesis determinan cuál es la base.

Para todo real x,

$$(-x)^4 = x^4$$

porque aparecen cuatro factores negativos. En cambio,

$$-x^4 = -(x^4),$$

que sólo coincide con x^4 cuando $x = 0$.

También

$$(-x)^5 = -x^5.$$

Para el entero $n \geq 1$ del enunciado,

$$(-x)^{2n} = x^{2n}, \qquad (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}.$$

La paridad del exponente controla el signo de una base negativa.

3.

(a) Es correcta:

$$\sqrt{49} = 7,$$

porque el símbolo $\sqrt{\ }$ designa la raíz cuadrada principal, que es no negativa.

(b) Es falsa:

$$\sqrt{49} \neq \pm 7.$$

El símbolo radical nombra un solo número.

(c) Es correcta: la ecuación

$$t^2 = 49$$

tiene dos soluciones,

$$t = 7, \qquad t = -7.$$

(d) Es correcta:

$$\sqrt[3]{-27} = -3.$$

(e) La formulación correcta es que la **raíz cuarta principal** de 16 es 2:

$$\sqrt[4]{16} = 2.$$

La ecuación $t^4 = 16$ tiene dos soluciones reales, $t = \pm 2$.

4. Primero reducimos cada exponente.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

de modo que

$$(-16)^{2/4} = (-16)^{1/2},$$

que no es real.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

por lo que $(-8)^{2/6}$ sí es real: el denominador reducido es impar.

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5},$$

así que $(-32)^{6/15}$ es real.

$$-\frac{4}{6} = -\frac{2}{3},$$

de modo que $(-27)^{-4/6}$ es real; la base además es no nula.

Finalmente,

$$\frac{15}{21} = \frac{5}{7},$$

y $(-1)^{15/21}$ es real.

La clasificación es:

$$\text{no real}, \quad \text{real}, \quad \text{real}, \quad \text{real}, \quad \text{real}.$$

5. Las hipótesis forman parte de las leyes.

(a)
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
requiere $a \neq 0$ y $n > 0$ entero.

(b) En la formulación uniforme para exponentes enteros,
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
requiere $a \neq 0$.

(c)
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$
se usa en $\mathbb{R}$ bajo
$$a \geq 0, \qquad b \geq 0.$$

(d)
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
requiere
$$a \geq 0, \qquad b > 0.$$

(e) Para la teoría sistemática de exponentes racionales usamos
$$a > 0,$$
con m/n interpretado como racional y $n > 0$. Esta elección mantiene estables las leyes sin ambigüedades de dominio.

6. Leemos cada restricción por separado.

(a)
$$\sqrt{x-3}$$
exige
$$x - 3 \geq 0,$$
luego
$$x \geq 3.$$

(b)
$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$
exige además que la raíz del denominador no sea cero:
$$x + 1 > 0,$$
luego
$$x > -1.$$

(c)
$$(x-2)^{-4}$$
exige
$$x \neq 2.$$

(d)
$$\sqrt[4]{(x+5)(x-1)}$$
exige
$$(x+5)(x-1) \geq 0.$$
El producto es no negativo fuera del intervalo entre sus ceros:
$$x \leq -5 \quad \text{o} \quad x \geq 1.$$

(e)
$$\frac{\sqrt{x+2}}{x-7}$$
exige
$$x \geq -2, \qquad x \neq 7.$$

7. Bajo la convención común $a > 0$:
$$a^{3/2} = a\sqrt{a},$$
$$a^{2/3} = (\sqrt[3]{a})^2,$$
$$a^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}},$$
y
$$\sqrt[5]{a^7} = \sqrt[5]{a^5 a^2} = a\sqrt[5]{a^2}.$$
Las correspondencias son, por tanto,
$$a^{3/2} \leftrightarrow a\sqrt{a},$$
$$a^{2/3} \leftrightarrow (\sqrt[3]{a})^2,$$
$$a^{-1/4} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{a}},$$
$$\sqrt[5]{a^7} \leftrightarrow a\sqrt[5]{a^2}.$$
La última identidad, por tratarse de una raíz impar, se extiende de hecho a todo $a \in \mathbb{R}$.

8.

(a)
$$\sqrt{x^2} = x$$
es falsa en general. Es válida bajo la hipótesis adicional $x \geq 0$.

(b)
$$\sqrt{x^2} = |x|$$
es válida para todo real x.

(c)
$$\sqrt{x+4} = \sqrt{x} + 2$$
es falsa en general. Por ejemplo, con $x = 5$:
$$3 \neq \sqrt{5} + 2.$$

(d)
$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$
es válida con la hipótesis
$$x \neq 0.$$

(e)
$$\sqrt{12x^2} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot x^2} = 2\sqrt{3}\,|x|$$
es válida para todo real x.

9. Sea $a > 0$.

Si n es par,
$$(-a)^n = a^n > 0.$$
Si n es impar,
$$(-a)^n = -a^n < 0.$$
En cambio,
$$-a^n$$
significa primero calcular a^n y después cambiar el signo; por tanto siempre es negativo.

La diferencia es estructural:
$$(-a)^n$$
eleva una **base negativa**, mientras que
$$-a^n$$
aplica un signo menos a una potencia cuya base es a.

10.

(a) Para
$$\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[3]{a}$$
conviene mantener radicales de igual índice o pasar a exponentes; ambas formas revelan de inmediato
$$a^{2/3}a^{1/3} = a.$$

(b) En
$$3\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$$
conviene la notación radical, porque simplificar los radicandos revela términos semejantes.

(c) Para
$$(a^{2/5})^{15}$$
conviene la notación exponencial:
$$a^{(2/5)15} = a^6.$$

(d) Para estudiar
$$\sqrt{x^2},$$
la notación radical hace visible la raíz principal y conduce a
$$|x|.$$

(e) En
$$a^{3/4}a^{5/4}$$
la notación exponencial es claramente superior:
$$a^{3/4+5/4} = a^2.$$

B. Fluidez técnica

11. Usamos la regla del cociente por base:

$$\frac{x^{-3}y^5}{x^2y^{-4}} = x^{-3-2}y^{5-(-4)} = x^{-5}y^9.$$

Con exponentes positivos:

$$\boxed{\frac{y^9}{x^5}}, \qquad x, y \neq 0.$$

12. Primero elevamos cada factor:

$$(a^{-2}b^3)^3 = a^{-6}b^9,$$
$$(a^4b^{-1})^2 = a^8b^{-2}.$$

El numerador es

$$a^2b^7.$$

Dividiendo por $a^{-1}b^5$:

$$a^{2-(-1)}b^{7-5} = a^3b^2.$$

Por tanto,

$$\boxed{a^3b^2}, \qquad a, b \neq 0.$$

13. Dentro del paréntesis:

$$\frac{3x^{-2}y^3}{2x^4y^{-1}} = \frac{3}{2}x^{-6}y^4.$$

Al elevar a -2:

$$\left(\frac{3}{2}x^{-6}y^4\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^{12}y^{-8}.$$

Así,

$$\boxed{\frac{4x^{12}}{9y^8}}, \qquad x, y \neq 0.$$

14. Calculamos uno a uno:

$$2^{-4} = \frac{1}{16},$$
$$16^{-3/4} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{8},$$
$$27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 9,$$
$$81^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9},$$
$$32^{3/5} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8.$$

15. Extraemos potencias perfectas compatibles con cada índice:

$$\sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = 12\sqrt{2},$$
$$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{216 \cdot 2} = 6\sqrt[3]{2},$$
$$\sqrt[4]{1296 \cdot 5} = 6\sqrt[4]{5},$$

porque $1296 = 6^4$, y

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}.$$

16. Factorizamos:

$$72x^6y^4 = 36 \cdot 2 \cdot x^6y^4.$$

Entonces

$$\sqrt{72x^6y^4} = 6\sqrt{2}\,\sqrt{x^6}\sqrt{y^4}.$$

Como

$$\sqrt{x^6} = |x^3| = |x|^3$$

y

$$\sqrt{y^4} = y^2,$$

obtenemos

$$\boxed{6|x|^3y^2\sqrt{2}}.$$

17. Para la raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{54t^7} = \sqrt[3]{27t^6 \cdot 2t} = 3t^2\sqrt[3]{2t}.$$

Para la raíz cuarta:

$$\sqrt[4]{48t^8} = \sqrt[4]{16(t^2)^4 \cdot 3} = 2t^2\sqrt[4]{3}.$$

Para la raíz cuadrada:

$$\sqrt{200t^{10}} = \sqrt{100 \cdot 2 \cdot (t^5)^2} = 10|t|^5\sqrt{2}.$$

18. Aplicamos las leyes correspondientes:

$$\sqrt{18}\sqrt{8} = \sqrt{144} = 12,$$
$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{25} = 5,$$
$$\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{216} = 6,$$

y

$$\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{125} = 5.$$

19. Simplificamos antes de sumar:

$$5\sqrt{12} = 10\sqrt{3},$$
$$-3\sqrt{27} = -9\sqrt{3},$$
$$2\sqrt{75} = 10\sqrt{3},$$
$$-\sqrt{48} = -4\sqrt{3}.$$

Por tanto

$$(10 - 9 + 10 - 4)\sqrt{3} = \boxed{7\sqrt{3}}.$$

20. Para todo real x:

$$\sqrt{18x^2} = 3|x|\sqrt{2},$$
$$\sqrt{8x^2} = 2|x|\sqrt{2},$$
$$\sqrt{50x^2} = 5|x|\sqrt{2}.$$

Así,

$$2(3|x|\sqrt{2}) + 3(2|x|\sqrt{2}) - 5|x|\sqrt{2} = \boxed{7|x|\sqrt{2}}.$$

21. Primer caso:

$$\frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15}.$$

Segundo:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Tercero:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \boxed{\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}}.$$

22. Usamos conjugados.

$$\frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5} = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \boxed{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}}.$$

Finalmente,

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \boxed{1+\sqrt{2}}.$$

23. Con $a, b > 0$:

$$\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{a^5} = a^{2/3}a^{5/6} = a^{4/6+5/6} = a^{3/2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{a\sqrt{a}}.$$

Y

$$\frac{\sqrt[4]{b^7}}{\sqrt{b}} = b^{7/4-1/2} = b^{7/4-2/4} = b^{5/4}.$$

Así,

$$\boxed{b\sqrt[4]{b}}.$$

24. Como los denominadores reducidos son impares:

$$(-27)^{2/3} = (\sqrt[3]{-27})^2 = (-3)^2 = 9,$$
$$(-32)^{3/5} = (\sqrt[5]{-32})^3 = (-2)^3 = -8,$$
$$(-8)^{-2/3} = \frac{1}{(-8)^{2/3}} = \frac{1}{4},$$

y

$$(-243)^{1/5} = -3.$$

25. La expresión original exige

$$x \neq 2.$$

Además,

$$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|.$$

Por tanto

$$\boxed{\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \frac{|x-2|}{x-2}, \qquad x \neq 2.}$$

Equivalentemente,

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} 1, & x > 2, \\ -1, & x < 2. \end{cases}$$

26. Pasamos los radicales a exponentes:

$$\sqrt[3]{a^2b^3} = a^{2/3}b, \qquad \sqrt{a} = a^{1/2}.$$

Entonces

$$\frac{a^{7/6}b^{-5/4}a^{2/3}b}{a^{-1/2}b^{1/4}a^{1/2}}.$$

Para a:

$$\frac{7}{6} + \frac{2}{3} = \frac{11}{6},$$

y el denominador aporta exponente total 0.

Para b:

$$-\frac{5}{4} + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Así,

$$\boxed{\frac{a^{11/6}}{b^{1/2}}}, \qquad a, b > 0.$$

C. Justificación y reconstrucción

27. Queremos conservar la regla del cociente. Para $a \neq 0$ y $m > 0$:

$$\frac{a^m}{a^m} = 1.$$

Si la ley

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$$

continúa siendo válida, entonces

$$a^{m-m} = a^0.$$

Por tanto necesariamente

$$a^0 = 1.$$

La hipótesis $a \neq 0$ se usa exactamente al formar el cociente a^m/a^m. Si $a = 0$, ese cociente sería $0/0$ y no está definido. De aquí no se obtiene ningún valor para 0^0.

28. Deseamos preservar

$$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1.$$

Con $a \neq 0$, a^n posee inverso multiplicativo. Por tanto el único valor posible para a^{-n} que mantiene la ley es

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

La condición $a \neq 0$ es indispensable: si $a = 0$, la definición exigiría dividir por cero.

29. Definimos para $k > 0$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}, \qquad a^0 = 1,$$

con $a \neq 0$.

Hay tres configuraciones esenciales.

1. $m, n \geq 0$**.** La ley ya fue demostrada por producto repetido:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

2. Uno es no negativo y el otro negativo. Escribamos $n = -q$ con $q > 0$:

$$a^m a^{-q} = \frac{a^m}{a^q}.$$

Si $m \geq q$, el cociente vale $a^{m-q} = a^{m+n}$. Si $m < q$,

$$\frac{a^m}{a^q} = \frac{1}{a^{q-m}} = a^{m-q} = a^{m+n}.$$

3. Ambos son negativos. Si $m = -p$ y $n = -q$,

$$a^m a^n = \frac{1}{a^p}\frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{m+n}.$$

Así, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$,

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}.$$

30. Sea $x \in \mathbb{R}$. El número $|x|$ satisface dos propiedades:

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x|^2 = x^2$.

La raíz cuadrada principal de x^2 es, por definición, el único número no negativo cuyo cuadrado es x^2. Como $|x|$ cumple exactamente esas condiciones,

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}.$$

El argumento usa la **unicidad de la raíz principal**; no es una cancelación formal entre el cuadrado y la raíz.

31. Si n es par, $|x| \geq 0$ y

$$|x|^n = x^n.$$

La raíz n-ésima principal de x^n debe ser no negativa, de modo que

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

Si n es impar, la función $t \mapsto t^n$ conserva el signo y cada real tiene una única raíz n-ésima real. Como

$$x^n = x^n,$$

esa raíz es precisamente x:

$$\sqrt[n]{x^n} = x.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & n \text{ par}, \\ x, & n \text{ impar}. \end{cases}}$$

32. Sea

$$c = \sqrt{a}\,\sqrt{b}.$$

Como $a, b \geq 0$, ambas raíces son no negativas, luego

$$c \geq 0.$$

Además,

$$c^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Por definición, $\sqrt{ab}$ es el único número no negativo cuyo cuadrado es ab. Como c cumple ambas condiciones,

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}}.$$

33.

(a) Tomemos $u = v = 1$:

$$\sqrt{u+v} = \sqrt{2} \neq 2 = \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

(b) Con $u = v = 1$:

$$(u+v)^2 = 4 \neq 2 = u^2 + v^2.$$

(c) Con $u = -1$:

$$\sqrt{u^2} = 1 \neq -1 = u.$$

Cada afirmación era universal: pretendía valer para **todos** los valores permitidos. Una proposición universal queda refutada en cuanto aparece un solo caso del dominio en el que resulta falsa.

34. Supongamos

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}, \qquad n, q > 0,$$

y $a > 0$. Entonces

$$mq = np.$$

Sea $x = (\sqrt[n]{a})^m$ y $y = (\sqrt[q]{a})^p$, con la convención de índice uno. Ambos son positivos. Las leyes de exponentes enteros, válidas también para exponentes negativos porque las bases son no nulas, dan $x^{nq} = a^{mq}$ y $y^{nq} = a^{pn}$. Como $mq = np$, ambos son la misma raíz positiva de ese número. Por unicidad, $x = y$.

Así, el valor de a^r depende del racional r, no de una escritura fraccionaria accidental. La unicidad de raíces positivas es la propiedad estructural que garantiza esa independencia.

35. Sea

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Como $a > 0$, tenemos $b > 0$ y

$$b^n = a.$$

Si $m \geq 0$, entonces

$$(b^m)^n = b^{mn} = (b^n)^m = a^m.$$

Además $b^m > 0$. Por unicidad de la raíz n-ésima positiva de a^m,

$$b^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Como por definición

$$a^{m/n} = b^m,$$

obtenemos

$$\boxed{a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.}$$

Si $m < 0$, se aplica el mismo argumento a $-m > 0$ y luego se toman recíprocos; la positividad de a garantiza que todo está definido.

36. Escribamos

$$r = \frac{m}{n}, \qquad s = \frac{p}{q}$$

con denominadores positivos. Para $a > 0$, todas las raíces intermedias son positivas y únicas.

Sea $b = a^{m/n} > 0$, y sea $u = b^{p/q} > 0$. Por definición de potencia racional sobre bases positivas y por las leyes enteras, $b^n = a^m$ y $u^q = b^p$. Entonces

$$u^{nq} = (u^q)^n = (b^p)^n = (b^n)^p = a^{mp}.$$

Por otra parte, $v = a^{mp/(nq)} > 0$ satisface $v^{nq} = a^{mp}$: puede evaluarse con la fracción no reducida porque la independencia de representación ya se justificó en la solución del ejercicio 34. Como u, v son positivos y tienen la misma potencia entera nq, la unicidad de la raíz positiva da $u = v$. Se obtiene $(a^r)^s = a^{rs}$ sin suponer esa ley durante la prueba. Si algún exponente es cero, las mismas igualdades siguen válidas porque todas las bases son positivas.

La positividad es decisiva: no hay cambio de signo ni ambigüedad de raíz principal. Con bases negativas la ley puede fallar. Por ejemplo,

$$\left((-8)^{2/3}\right)^{3/2} = 4^{3/2} = 8,$$

mientras que

$$(-8)^{(2/3)(3/2)} = (-8)^1 = -8.$$

Por eso la ley se adopta sistemáticamente sobre bases positivas.

37. Multiplicar una fracción por

$$\frac{u - \sqrt{v}}{u - \sqrt{v}}$$

conserva su valor sólo cuando

$$u - \sqrt{v} \neq 0,$$

porque entonces el multiplicador vale exactamente 1.

La utilidad proviene de

$$(u + \sqrt{v})(u - \sqrt{v}) = u^2 - v.$$

Así desaparece el radical cruzado del denominador.

Si

$$u - \sqrt{v} = 0,$$

el supuesto multiplicador sería

$$\frac{0}{0},$$

que no está definido. Por tanto no sería una forma de 1 y la transformación dejaría de ser legítima.

38. Una igualdad obtenida mediante simplificación debe interpretarse **sobre el dominio donde empezó la cadena**.

Para

$$E(x) = \frac{x^2}{x},$$

el dominio es

$$x \neq 0.$$

En ese dominio,

$$E(x) = x.$$

La forma aislada

$$S(x) = x$$

sí está definida en $x = 0$, pero ese punto nunca perteneció al dominio de E.

Por tanto,

$$\frac{x^2}{x} = x \qquad (x \neq 0),$$

pero las dos expresiones no definen la misma función si a S se le asigna su dominio natural completo.

D. Diagnóstico del primer paso inválido

39. La regla correcta es

$$\sqrt{u^2} = |u|.$$

Con $u = x - 7$:

$$\boxed{\sqrt{(x-7)^2} = |x-7|}.$$

El primer error consiste en reemplazar la raíz principal por u sin comprobar que $u \geq 0$. La forma $x - 7$ sólo sería válida bajo

$$x \geq 7.$$

40. No existe una ley que distribuya la raíz sobre una suma.

Con $x = 9$:

$$\sqrt{x+16} = \sqrt{25} = 5,$$

mientras que

$$\sqrt{x} + 4 = 3 + 4 = 7.$$

Por tanto la identidad propuesta es falsa.

Una ley verdadera relacionada es, por ejemplo,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad (a, b \geq 0),$$

o

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (a \geq 0,\ b > 0).$$

41. Las leyes de exponentes se distribuyen sobre productos, no sobre sumas.

Por C13,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

La expresión

$$a^3 + b^3$$

omite los términos cruzados

$$3a^2b + 3ab^2.$$

Por tanto,

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3$$

sólo puede ocurrir en casos especiales, no como identidad universal.

42. La cadena es correcta **cuando** $x \neq 0$:

$$\frac{x^5}{x^5} = 1 = x^0.$$

En $x = 0$ la primera expresión sería

$$\frac{0}{0},$$

que no está definida. Por tanto la cadena nunca produce una afirmación sobre 0^0.

Lo correcto es escribir

$$\frac{x^5}{x^5} = x^0 = 1, \qquad x \neq 0.$$

43. Por definición,

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}.$$

El signo negativo del exponente indica **recíproco**; no convierte el resultado en negativo. El signo del valor depende de la base y de la paridad del exponente entero:

$$(-3)^2 = 9 > 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{(-3)^{-2} = \frac{1}{9}}.$$

44. El cálculo

$$\frac{x^4}{x} = x^3$$

es correcto siempre que el cociente original esté definido.

Pero

$$\frac{x^4}{x}$$

exige

$$x \neq 0.$$

La forma x^3 sí existe en $x = 0$, de modo que no puede declararse la igualdad sobre todo $\mathbb{R}$.

La formulación correcta es

$$\boxed{\frac{x^4}{x} = x^3, \qquad x \neq 0.}$$

45. El exponente debe reducirse primero:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$(-64)^{2/6} = (-64)^{1/3} = \sqrt[3]{-64} = -4.$$

El primer paso de la cadena propuesta,

$$(-64)^{2/6} = \sqrt[6]{(-64)^2},$$

usa la representación no reducida $2/6$ para una base negativa. Bajo la política del capítulo esa operación no define correctamente la potencia racional.

Así,

$$\boxed{(-64)^{2/6} = -4}.$$

46. Primero evaluamos el lado izquierdo por una ruta permitida:

$$(-27)^{2/3} = (\sqrt[3]{-27})^2 = 9.$$

Entonces

$$\left((-27)^{2/3}\right)^{3/2} = 9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 27.$$

La combinación formal de exponentes daría

$$(-27)^{(2/3)(3/2)} = (-27)^1 = -27.$$

La discrepancia aparece porque

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

se está usando fuera de su dominio rector de bases positivas.

Por tanto el lado izquierdo vale

$$\boxed{27},$$

no -27.

47. El producto dentro de la raíz sí está en $\mathbb{R}$:

$$(-3)(-12) = 36,$$

luego

$$\sqrt{(-3)(-12)} = \sqrt{36} = 6.$$

El paso

$$\sqrt{(-3)(-12)} = \sqrt{-3}\sqrt{-12}$$

es el primero inválido: las raíces cuadradas del lado derecho no son reales.

La ley

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

requiere $a, b \geq 0$.

48. Como

$$\sqrt{x^4} = x^2$$

para todo real x, y

$$\sqrt{y^2} = |y|,$$

tenemos

$$\sqrt{x^4y^2} = x^2|y|.$$

El paso incorrecto consiste en reemplazar

$$\sqrt{y^2}$$

por y sin controlar su signo.

La forma universal es

$$\boxed{x^2|y|}.$$

La igualdad con x^2y se cumple exactamente cuando $y \geq 0$ o $x = 0$. Si $x = 0$, ambos lados son cero incluso cuando $y < 0$; si $x \neq 0$ y $y < 0$, los signos de los dos valores son opuestos.

49. La expresión original es simplemente

$$\frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

El conjugado sería

$$1 - \sqrt{1} = 0.$$

Por tanto

$$\frac{1-\sqrt{1}}{1-\sqrt{1}} = \frac{0}{0}$$

no está definido y no puede usarse como multiplicador equivalente a 1.

La lección es que “usar el conjugado” no basta: el factor por el que multiplicamos debe ser no nulo.

50. El dominio original exige

$$x \neq 1.$$

El primer paso inválido es

$$\sqrt{(x-1)^2} = x - 1.$$

La regla correcta es

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

Así,

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{|x-1|}{x-1}, \qquad x \neq 1.$$

Por casos:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ -1, & x < 1. \end{cases}$$

La cadena propuesta sólo es correcta en la región $x > 1$.

E. Estrategia y elección de representación

51. Ruta exponencial. Como $a > 0$,

$$\sqrt[3]{a^5}\sqrt[6]{a} = a^{5/3}a^{1/6} = a^{10/6+1/6} = a^{11/6}.$$

Ruta radical. Pasamos al índice 6:

$$\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[6]{a^{10}},$$

de modo que

$$\sqrt[6]{a^{10}}\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^{11}} = a\sqrt[6]{a^5}.$$

Como

$$a^{11/6} = a\sqrt[6]{a^5},$$

ambas rutas coinciden.

La ruta exponencial hace visible de inmediato la suma de exponentes y es más corta.

52. La decisión estratégica correcta es **simplificar cada radical antes de sumar**:

$$4\sqrt{18} = 12\sqrt{2},$$
$$-3\sqrt{8} = -6\sqrt{2},$$
$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Entonces

$$12\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \boxed{11\sqrt{2}}.$$

Sumar coeficientes desde el comienzo sería injustificado porque todavía no sabemos si las partes radicales son semejantes.

53. Racionalizando:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \boxed{\sqrt{5}-2}.$$

Las dos formas son equivalentes.

- La forma original puede ser natural si se quiere conservar la estructura “recíproco de una suma”.
- La forma racionalizada es útil si se desea sumar con una expresión que contiene el conjugado o eliminar radicales del denominador.
- Para una aproximación decimal, cualquiera de las dos puede evaluarse directamente.

Racionalizar cambia la representación, no el valor.

54. 1. Dominio. El numerador exige

$$x - 1 \geq 0,$$

luego $x \geq 1$.

Además x^{-2} exige $x \neq 0$ y $\sqrt{x+3}$ está en el denominador, por lo que $x + 3 > 0$. Ambas condiciones ya se cumplen si $x \geq 1$.

Así,

$$D = [1, \infty).$$

2. Exponente negativo.

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Entonces

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x^{-2}\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}/x^2} = \boxed{\frac{x^2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}}, \qquad x \geq 1.$$

La lectura del dominio antes de simplificar evita perder condiciones.

55. Elegimos valores pequeños y simétricos:

$$u = v = 1.$$

Entonces

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{2},$$

mientras que

$$|u| + |v| = 2.$$

Como

$$\sqrt{2} \neq 2,$$

la identidad queda refutada.

La elección $u = v = 1$ elimina signos y produce cálculos mínimos; ésa es una buena estrategia para construir contraejemplos.

56. Ruta exponencial.

$$\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a}} = a^{3/4-1/6} = a^{9/12-2/12} = \boxed{a^{7/12}}.$$

Ruta radical. Usamos índice común 12:

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^9},$$
$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^2}.$$

Por tanto

$$\frac{\sqrt[12]{a^9}}{\sqrt[12]{a^2}} = \boxed{\sqrt[12]{a^7}}.$$

Las formas coinciden porque $a > 0$:

$$a^{7/12} = \sqrt[12]{a^7}.$$

La ruta exponencial es más breve; la radical hace visible el índice común.

57. Como $x > 0$, la notación exponencial es la más transparente:

$$\frac{(x^{3/4})^2\sqrt{x}}{x^{1/2}} = x^{3/2}x^{1/2}x^{-1/2}.$$

Sumando exponentes:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Así,

$$\boxed{x^{3/2}}.$$

Si se mezclan radicales y exponentes sin un objetivo, la cancelación entre $\sqrt{x}$ y $x^{1/2}$ queda menos visible.

58. Factorizamos:

$$72(x-1)^6 = 36 \cdot 2 \cdot \left((x-1)^3\right)^2.$$

Entonces

$$\sqrt{72(x-1)^6} = 6\sqrt{2}\,\left|(x-1)^3\right|.$$

Como

$$|(x-1)^3| = |x-1|^3,$$

obtenemos

$$\boxed{6\sqrt{2}\,|x-1|^3}.$$

El valor absoluto aparece exactamente al extraer de una raíz cuadrada el cuadrado de $(x-1)^3$.

59. Racionalizamos:

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2} \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \boxed{\sqrt{7}+2}.$$

(a) Para una estimación numérica, cualquiera sirve; la forma racionalizada tiene una suma sencilla.

(b) Para sumar con

$$\frac{3}{\sqrt{7}+2},$$

conviene racionalizar ambas:

$$\frac{3}{\sqrt{7}+2} = \sqrt{7}-2.$$

La suma queda

$$2\sqrt{7}.$$

(c) Para estudiar dominio, la forma original ya basta: el denominador es una constante positiva. Racionalizar no aporta información adicional.

60. Con $x \neq 0$:

$$\sqrt{50x^4} = 5\sqrt{2}\,\sqrt{x^4} = 5\sqrt{2}\,x^2.$$

Por tanto

$$\frac{\sqrt{50x^4}}{x\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}\,x^2}{x\sqrt{2}} = \boxed{5x}, \qquad x \neq 0.$$

La ruta segura trata primero la raíz:

$$\sqrt{x^4} = x^2.$$

Cancelar símbolos antes de identificar correctamente lo que sale del radical puede ocultar el papel del signo y del dominio.

F. Transferencia acumulativa

61. La potencia

$$x^{-1/2}$$

se trabaja sistemáticamente para $x > 0$.

Además, como

$$\sqrt{x-1}$$

está en el denominador,

$$x - 1 > 0,$$

es decir,

$$x > 1.$$

La intersección es

$$D = (1, \infty).$$

Ahora

$$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

de modo que

$$\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}}, \qquad x > 1.$$

62. El dominio original exige

$$x \neq 3$$

por $(x-3)^{-2}$ y

$$x \neq -1$$

por el denominador $x + 1$.

Además,

$$\sqrt{(x-3)^4} = \sqrt{\left((x-3)^2\right)^2} = (x-3)^2,$$

porque $(x-3)^2 \geq 0$.

Entonces

$$(x-3)^{-2}\sqrt{(x-3)^4} = \frac{1}{(x-3)^2}(x-3)^2 = 1$$

en el dominio original.

Por tanto,

$$\boxed{\frac{1}{x+1}}, \qquad x \neq 3, -1.$$

Aunque la forma final está definida en $x = 3$, ese valor no se reincorpora.

63. Por C13,

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2.$$

Por tanto,

$$u^2 + 2uv + v^2 = (u+v)^2,$$

y entonces

$$\sqrt{u^2 + 2uv + v^2} = \sqrt{(u+v)^2} = \boxed{|u+v|}.$$

En cambio,

$$u^2 + v^2$$

no es el cuadrado de $u + v$ porque faltaría el término $2uv$. Por eso no puede concluirse

$$\sqrt{u^2 + v^2} = |u| + |v|.$$

64. La condición $a+b\neq 0$ hace que el cociente esté definido.

Observamos:

$$\frac{(a-b)^4}{(a+b)^2}=\left(\frac{(a-b)^2}{a+b}\right)^2.$$

Por tanto

$$\sqrt{\frac{(a-b)^4}{(a+b)^2}}=\left|\frac{(a-b)^2}{a+b}\right|.$$

Como $(a-b)^2\geq 0$,

$$\boxed{\frac{(a-b)^2}{|a+b|}}, \qquad a+b\neq 0.$$

65. La teoría sistemática de $x^{3/2}$ y $x^{-1/2}$ exige

$$x>0.$$

La raíz $\sqrt{x+2}$ sólo exigiría $x\geq -2$, de modo que la intersección sigue siendo

$$x>0.$$

Simplificamos:

$$\frac{x^{3/2}}{x^{-1/2}\sqrt{x+2}}=\frac{x^{3/2-(-1/2)}}{\sqrt{x+2}}=\boxed{\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}}, \qquad x>0.$$

La forma final aislada está definida para $x>-2$, porque la raíz del denominador no puede anularse; pero el dominio original era $x>0$ y debe conservarse.

66. Tenemos

$$E(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\frac{|x|}{x}, \qquad x\neq 0.$$

Por tanto

$$D_E=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

También

$$F(x)=\frac{|x|}{x}$$

tiene dominio

$$D_F=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

En cambio

$$G(x)=1$$

tiene dominio natural

$$D_G=\mathbb{R}.$$

Así, E y F son la misma función: mismo dominio y mismos valores. En su dominio común con G, no coinciden para $x<0$, pues

$$E(x)=F(x)=-1, \qquad G(x)=1.$$

La comparación muestra que una forma simbólica no determina por sí sola la función: también importa el dominio.

67. Para todo real t:

$$\sqrt{(t-3)^2} = |t-3|,$$
$$\sqrt{(t+3)^2} = |t+3|.$$

Así,

$$\boxed{|t-3||t+3|} = \boxed{|t^2-9|}.$$

Sustituir esto por

$$(t-3)(t+3) = t^2 - 9$$

sería válido sólo cuando

$$t^2 - 9 \geq 0,$$

es decir,

$$t \leq -3 \quad \text{o} \quad t \geq 3.$$

68. Primero el dominio. Las raíces exigen

$$x+1 \geq 0, \qquad x+4 \geq 0.$$

La condición dominante es

$$x \geq -1.$$

En ese dominio,

$$\sqrt{x+4} > \sqrt{x+1},$$

de modo que el denominador original es positivo y no se anula. El conjugado

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}$$

también es positivo.

Racionalizamos:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}}.$$

El denominador es

$$(x+4) - (x+1) = 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1})}{3}}, \qquad x \geq -1.$$

69. Leemos primero la raíz interior:

$$\sqrt{x}$$

exige

$$x \geq 0.$$

Luego la raíz exterior exige

$$1 - \sqrt{x} \geq 0,$$

es decir,

$$\sqrt{x} \leq 1.$$

Como $\sqrt{x} \geq 0$, esto equivale a

$$x \leq 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{D = [0,1]}.$$

De afuera hacia adentro, la raíz exterior exige $1 - \sqrt{x} \geq 0$, siempre que exista la raíz interior. Esta última exige $x \geq 0$ y por ello $\sqrt{x} \geq 0$. Juntas, las condiciones son $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, equivalentes a $0 \leq x \leq 1$. La cota superior uno para el radicando exterior procede de la no negatividad de la raíz interior, no de la raíz exterior por sí sola.

No usamos ninguna técnica de desanidamiento; sólo intersectamos condiciones de dominio.

70. Escribimos

$$r = \frac{p}{q}$$

en términos mínimos, con $q > 0$.

Como la base es negativa:

- si q es par, $(-c)^{p/q}$ no es real;
- si q es impar, la raíz q-ésima real de $-c$ existe, de modo que la potencia es real.

Cuando q es impar,

$$(-c)^{p/q} = \left(-c^{1/q}\right)^p.$$

Por tanto:

- si p es par, el resultado es positivo;
- si p es impar, el resultado es negativo.

Si $p < 0$, la base es no nula, así que se toma además el recíproco; la regla de signo según la paridad permanece igual.

71. Como $x > 0$:

$$\sqrt[3]{x^4} = x^{4/3},$$
$$\sqrt[6]{x^{-1}} = x^{-1/6}.$$

Entonces

$$\frac{x^{4/3}x^{-5/6}}{x^{-1/6}} = x^{4/3-5/6+1/6}.$$

Llevando a sextos:

$$\frac{8}{6} - \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Así,

$$\boxed{x^{2/3}} = \boxed{\sqrt[3]{x^2}}.$$

72. Como $x \neq 0$:

$$\sqrt{18x^6} = 3\sqrt{2}\,|x^3| = 3\sqrt{2}\,|x|^3.$$

Por tanto

$$\frac{\sqrt{18x^6}}{x^2} \cdot \frac{x^{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\,|x|^3}{x^2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{2}}.$$

Cancelando factores no nulos:

$$= 3\frac{|x|^3}{x^3}.$$

Como

$$\frac{|x|^3}{x^3} = \frac{|x|}{x},$$

obtenemos

$$\boxed{3\frac{|x|}{x}}, \qquad x \neq 0.$$

La dependencia de

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

aparece al extraer el factor x^3 de la raíz cuadrada:

$$\sqrt{x^6} = |x^3|.$$

G. Síntesis avanzada

73. Lectura y dominio. La potencia $x^{-3/2}$, bajo la política sistemática del capítulo, exige

$$x > 0.$$

Con $x > 0$, todas las raíces restantes existen y

$$\sqrt{x+1} - 1 > 0,$$

de modo que el denominador no se anula. Por tanto

$$D = (0, \infty).$$

Ruta exponencial. Como $x > 0$:

$$x^{-3/2}\sqrt{x^5} = x^{-3/2}x^{5/2} = x.$$

Así

$$E(x) = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - 1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

Racionalizando el último denominador:

$$E(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} + 1)}{(x+1) - 1} = \boxed{\frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x}}}, \qquad x > 0.$$

Ruta radical. Como $x > 0$,

$$\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x},$$

mientras que

$$x^{-3/2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Por tanto el numerador vuelve a ser

$$x.$$

Desde allí se obtiene la misma forma.

Comparación. La ruta exponencial condensa mejor las potencias; la radical hace visible cómo se cancelan los factores de $\sqrt{x}$. En ambas rutas, el dominio $x > 0$ se conserva aunque la forma final por sí sola sugiera sólo $x > 0$ por su denominador.

74. Sea n par. Entonces

$$a^{2n}b^n = (a^2b)^n.$$

Como n es par,

$$\sqrt[n]{(a^2b)^n} = |a^2b|.$$

Pero $a^2 \geq 0$, de modo que

$$|a^2b| = a^2|b|.$$

Por tanto

$$\boxed{\sqrt[n]{a^{2n}b^n} = a^2|b|}$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$. El radicando siempre es no negativo porque $a^{2n} \geq 0$ y $b^n \geq 0$.

Si el índice n fuera impar, la raíz impar recuperaría directamente la base:

$$\sqrt[n]{(a^2b)^n} = a^2b.$$

La diferencia entre $a^2|b|$ y a^2b proviene exactamente de la raíz principal de índice par.

75. Ruta 1: exponentes racionales. Para $a > 0$:

$$P(a) = a^{5/3}a^{3/4}a^{-7/12}.$$

Con denominador común 12:

$$\frac{20}{12} + \frac{9}{12} - \frac{7}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}.$$

Así,

$$\boxed{P(a) = a^{11/6}}.$$

Ruta 2: índice común. Escribimos todo con índice 12:

$$\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[12]{a^{20}},$$
$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^9},$$
$$a^{7/12} = \sqrt[12]{a^7}.$$

Entonces

$$P(a) = \sqrt[12]{a^{20+9-7}} = \sqrt[12]{a^{22}}.$$

Extraemos a^{12}:

$$P(a) = a\sqrt[12]{a^{10}} = a\sqrt[6]{a^5}.$$

Como

$$a\sqrt[6]{a^5} = a^{11/6},$$

las rutas coinciden.

La ruta exponencial es más corta; la radical hace visible la unificación de índices y sirve como control independiente.

76. La cadena debe auditarse desde el primer símbolo.

El exponente

$$\frac{4}{6}$$

se reduce a

$$\frac{2}{3}.$$

Por tanto el primer paso

$$(-64)^{4/6} = \left((-64)^{1/6}\right)^4$$

ya es inválido bajo la definición del capítulo: se está usando una representación no reducida con denominador par para una base negativa.

El paso siguiente

$$(-64)^{1/6} = \sqrt[6]{-64}$$

sale además de $\mathbb{R}$, pues una raíz sexta de un número negativo no es real. La escritura posterior $(-2)^4$ no puede reparar esa ruptura.

La cadena correcta empieza reduciendo:

$$(-64)^{4/6} = (-64)^{2/3}.$$

Como el denominador reducido es impar,

$$(-64)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-64}\right)^2 = (-4)^2 = \boxed{16}.$$

Que una cadena inválida termine casualmente en 16 no la convierte en demostración: la validez depende de cada paso, no sólo del resultado final.

77. Sea

$$A = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Entonces

$$\frac{1}{A+\sqrt{5}} \cdot \frac{A-\sqrt{5}}{A-\sqrt{5}} = \frac{A-\sqrt{5}}{A^2-5}.$$

Calculamos

$$A^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Por tanto

$$A^2 - 5 = 2\sqrt{6},$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}.$$

Racionalizamos el denominador restante:

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{12}.$$

Simplificando:

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \qquad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Así,

$$\boxed{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}.$$

Los multiplicadores son legítimos. En el primer paso,

$$A - \sqrt{5} \neq 0,$$

pues

$$A^2 = 5 + 2\sqrt{6} > 5.$$

En el segundo,

$$\sqrt{6} \neq 0.$$

78. Dominios.

Para

$$E(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x},$$

el denominador exige

$$x \neq 0.$$

Por tanto

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Para

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}},$$

la raíz existe para todo real, pero el denominador vale 0 en $x = 0$. Así,

$$D_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Para

$$G(x) = \frac{x^2}{|x|^2},$$

el denominador también se anula en 0:

$$D_G = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Simplificación. Como

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

tenemos

$$E(x) = \frac{|x|}{x},$$
$$F(x) = \frac{x}{|x|},$$

y

$$G(x) = 1 \qquad (x \neq 0).$$

Pero para $x \neq 0$,

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Por tanto $E = F$ como funciones, mientras que G difiere de ellas para $x < 0$.

Aunque G se simplifique a 1, el punto $x = 0$ no puede reincorporarse: no pertenecía al dominio original.

79. Escribimos

$$r = \frac{p}{q}$$

en términos mínimos, con $q > 0$.

(a) Existencia real. Como la base es negativa,

$$(-c)^r$$

es real exactamente cuando q es impar. Si q es par, la raíz real necesaria no existe.

(b) Signo. Si q es impar,

$$(-c)^{p/q} = \left(-c^{1/q}\right)^p.$$

El signo es positivo si p es par y negativo si p es impar.

(c) Tres expresiones. Tenemos

$$(-c)^{2/3} = c^{2/3} > 0.$$

Entonces

$$\left((-c)^{2/3}\right)^{3/2} = (c^{2/3})^{3/2} = c.$$

Pero

$$(-c)^{(2/3)(3/2)} = (-c)^1 = -c.$$

(d) Conclusión. Las dos últimas expresiones tienen valores opuestos:

$$c \neq -c.$$

Por tanto

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

no puede trasladarse automáticamente a bases negativas. Sobre bases positivas, en cambio, las raíces intermedias permanecen positivas y la ley es estable.

80. 1. Lectura estructural. La expresión combina una raíz cuadrada con potencia de x, una potencia racional negativa, dos radicales en el denominador y una diferencia de raíces:

$$Q(x) = \frac{\sqrt{72x^6}\, x^{-1/2}}{\sqrt{x+2}\,(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})}.$$

2. Dominio real original. La potencia $x^{-1/2}$ se trabaja sistemáticamente con

$$x > 0.$$

Esta condición implica ya

$$x + 2 > 0, \qquad x + 5 > 0.$$

Además

$$\sqrt{x+5} > \sqrt{x+2},$$

así que la diferencia del denominador no se anula. Por tanto

$$\boxed{D = (0, \infty)}.$$

3. Elección de representación. Para el bloque de potencias de x conviene usar exponentes racionales; para la diferencia del denominador conviene conservar radicales, porque así queda visible el conjugado.

4. Simplificación. Como $x > 0$,

$$\sqrt{72x^6} = 6\sqrt{2}\, x^3.$$

Entonces

$$\sqrt{72x^6}\, x^{-1/2} = 6\sqrt{2}\, x^{3-1/2} = 6\sqrt{2}\, x^{5/2}.$$

Así,

$$Q(x) = \frac{6\sqrt{2}\, x^{5/2}}{\sqrt{x+2}\,(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})}.$$

5. Valor absoluto. En una simplificación universal aparecería

$$\sqrt{x^6} = |x^3|.$$

Pero el dominio ya impone $x > 0$, de modo que

$$|x^3| = x^3.$$

El valor absoluto no se omite: se resuelve usando información previa de dominio.

6. Racionalización con objetivo. Racionalizamos la diferencia para eliminarla del denominador:

$$\frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}}.$$

Como

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}) = 3,$$

obtenemos

$$Q(x) = \frac{2\sqrt{2}\, x^{5/2}(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}}.$$

Si se desea un denominador completamente racional, multiplicamos además por

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}},$$

válido porque $x > 0$:

$$\boxed{Q(x) = \frac{2\sqrt{2}\, x^{5/2}\left(\sqrt{(x+5)(x+2)} + x + 2\right)}{x+2}}, \qquad x > 0.$$

7. Dominio conservado. La forma final podría tener sentido en puntos adicionales si se leyera aislada, pero la equivalencia demostrada vale sobre

$$x > 0.$$

8. Auditoría final. Cada transformación respetó el dominio original; no se usaron ecuaciones radicales, no se introdujeron raíces extrañas y la racionalización tuvo un objetivo explícito: eliminar radicales del denominador. La forma final debe viajar acompañada por

$$\boxed{x > 0}.$$

H. Convenciones, leyes y construcción de dominios

81. Las dos potencias tienen el mismo exponente racional porque $10/6 = 5/3$. El denominador reducido tres es impar; ambas existen y son negativas. Si $a = -c$ con $c > 0$, valen $-c^{5/3}$.

La raíz cúbica $\sqrt[3]{a^5}$ también es negativa y vale $-c^{5/3}$: su cubo es a^5 y la raíz impar es única. En cambio, $\sqrt[6]{a^{10}} = c^{5/3} > 0$, porque la raíz sexta es principal. La potencia del radicando borró el signo y la raíz par no lo reconstruye. Finalmente, $\sqrt[6]{a}$ no es real; por ello $(\sqrt[6]{a})^{10}$ tampoco define un valor real. Elevar después a un entero par no legitima una operación interior inexistente.

Así, las primeras tres expresiones coinciden; la cuarta existe y tiene el signo opuesto; la quinta no existe en $\mathbb{R}$. Una fracción no reducida sigue nombrando el mismo racional, pero no autoriza cualquier descomposición en operaciones.

82. Escribe $a = -c$, con $c > 0$. Como n es impar, la potencia interior existe y es $(-1)^m c^{m/n}$.

Si m es impar, la base interior es negativa y el racional n/m, escrito con denominador positivo, tiene denominador $|m|$ impar. La potencia exterior existe. Su valor absoluto es $(c^{m/n})^{n/m} = c$ por las leyes sobre bases positivas; su signo es negativo porque el numerador reducido es impar. El resultado es $-c = a$.

Si m es par, la base interior es positiva. Se puede usar la ley de potencia de potencia en esa base positiva y el valor es $c = |a|$. Este razonamiento incluye $m < 0$: tomar recíprocos conserva los signos y las bases nunca son cero.

En ambos casos $a^{(m/n)(n/m)} = a^1 = a$. Por tanto las dos expresiones coinciden exactamente cuando m es impar. El numerador par elimina el signo en el paso interior y la potencia exterior positiva no puede recuperarlo.

83. Al reducir una fracción de denominador impar, sólo se divide ese denominador por un divisor suyo; el denominador reducido sigue siendo impar. Recíprocamente, si p/q está reducido y q es impar, la escritura $2p/(2q)$ tiene denominador par y representa exactamente el mismo racional. La paridad de una escritura arbitraria no decide pertenencia a A.

Si p/q y u/v tienen denominadores impares, la suma $(pv + uq)/(qv)$ y el producto $pu/(qv)$ también tienen denominador impar antes de reducirse. Por el primer argumento, pertenecen a A. Incluimos cero: su forma reducida es $0/1$.

Para $p/q \neq 0$ reducido, el recíproco tiene denominador positivo $|p|$, y sigue reducido porque $\gcd(|p|, q) = 1$. Pertenece a A exactamente cuando p es impar. Por ejemplo, $2/3 \in A$, pero $3/2 \notin A$; $1/3$ y tres pertenecen a A.

Para una base negativa fija, A es exactamente el conjunto de exponentes con potencia real. Una escritura con denominador par puede representar un exponente admisible. Sumar y multiplicar exponentes admisibles mantiene la existencia de la potencia final; esto no prueba por sí solo una ley de potencias de potencias.

84. Escribe $a = -c$, con $c > 0$. Los dos factores existen y valen $(-1)^p c^r$, $(-1)^u c^s$. Su producto es $(-1)^{p+u} c^{r+s}$.

La suma tiene la escritura $(pv + uq)/(qv)$, de denominador impar. Al reducirla sólo se cancela un divisor impar, por lo que la paridad de su numerador reducido es la de $pv + uq$, igual a la de $p + u$ porque q, v son impares. La potencia final existe y tiene exactamente el signo del producto. Su valor absoluto es c^{r+s}, luego la igualdad es verdadera.

Si la suma es cero, la forma reducida es $0/1$ y $p+u$ es par; ambos lados valen uno. Si algún exponente es negativo, la base no es cero y el recíproco conserva la misma regla de signo. La prueba usa leyes racionales sólo en la base positiva c y controla el signo aparte. Reescribir la suma con un denominador par no cambia su valor; se vuelve siempre a la fracción reducida para interpretar la potencia.

85. El denominador reducido tres es impar y el exponente es positivo; las tres potencias de exponente $2/3$ existen para todo real, incluido cero. Sean $u = \sqrt[3]{a}$ y $v = \sqrt[3]{b}$. Por las leyes enteras, $(uv)^3 = ab$, así que $\sqrt[3]{ab} = uv$ por unicidad. Al cuadrar, $(ab)^{2/3} = u^2 v^2 = a^{2/3} b^{2/3}$. El dominio de ambas expresiones es todo $\mathbb{R}^2$.

La raíz $\sqrt{ab}$ existe cuando $ab \geq 0$; el producto separado de raíces exige $a \geq 0$, $b \geq 0$. En el dominio común coinciden, pero sus dominios naturales son distintos. Con $a = -8$, $b = -1$, la ley de exponente $2/3$ da cuatro en ambos lados; $\sqrt{ab} = \sqrt{8}$ es real y las raíces cuadradas separadas no lo son. La restricción depende de la operación y del exponente, no sólo de que la base sea negativa.

86. Para que ambos lados sean reales se necesita $a, b \geq 0$; esto garantiza también $a + b \geq 0$. Si la igualdad se cumple, elevar ambos lados al cuadrado da $a + b = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$, de modo que $\sqrt{a}\sqrt{b} = 0$. En los reales, un producto nulo tiene un factor nulo, por lo que $a = 0$ o $b = 0$.

Recíprocamente, si $a, b \geq 0$ y uno es cero, la igualdad se reduce a $\sqrt{b} = \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} = \sqrt{a}$ y es verdadera. La clasificación exacta es $a, b \geq 0$ con $ab = 0$.

El cuadrado se usó para obtener una condición necesaria; la suficiencia se comprobó directamente, sin resolver ecuaciones radicales por un método general. El ejemplo $a = b = 1$ refuta la universalidad, pero no los casos de la clasificación. Una regla falsa en general puede ser verdadera en una familia particular que se describa y pruebe.

87. Ambas expresiones existen para todo $a \in \mathbb{R}$: la primera tiene índice impar y el radicando de la segunda es no negativo. Pon $u = \sqrt[n]{a}$, así que $u^n = a$. Entonces $|u| \geq 0$ y $|u|^{2n} = a^2$. Por unicidad de la raíz principal, $\sqrt[2n]{a^2} = |u| = |\sqrt[n]{a}|$.

Las expresiones originales son iguales exactamente cuando $u \geq 0$, equivalente a $a \geq 0$ porque la potencia impar conserva el signo. Para $a < 0$, una es negativa y la otra positiva. Por ejemplo, $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $\sqrt[6]{64} = 2$.

La reparación universal es $\sqrt[2n]{a^2} = |\sqrt[n]{a}|$. Igualar índices mediante un número par puede convertir una raíz con signo en una raíz principal no negativa; el dominio común por sí solo no garantiza igualdad.

88. La primera exige $b \neq 0$ y $a/b \geq 0$. Si $b > 0$, esto equivale a $a \geq 0$; si $b < 0$, equivale a $a \leq 0$. El dominio es la unión de esas dos regiones, con cero permitido para a.

La segunda exige $a \geq 0$ y $b > 0$: la raíz del denominador debe existir y no anularse. En esta región ambas expresiones coinciden por la ley del cociente. Sólo existe la primera exactamente cuando $b < 0$ y $a \leq 0$.

En esa región $-a \geq 0$, $-b > 0$ y $a/b = (-a)/(-b)$, por lo que $\sqrt{a/b} = \sqrt{-a}/\sqrt{-b}$. Esto incluye $a = 0$, cuyo valor es cero. Las dos regiones agotan los signos posibles de un denominador no nulo. No se puede separar el cociente usando raíces de a, b negativos; sí se puede cambiar simultáneamente sus signos antes de separar.

89. Las raíces pares exigen $t \geq 0$. El denominador se anula exactamente cuando $t = 1$, por la definición de raíz principal. Así, $D = [0, \infty) \setminus \{1\}$.

La presencia de los índices cuatro, seis y doce sugiere nombrar $u = \sqrt[12]{t} \geq 0$. Entonces $u^{12} = t$, y la unicidad de las raíces principales da $\sqrt[4]{t} = u^3$, $\sqrt[6]{t} = u^2$. Para $u \neq 1$, $u^3 - u^2 = u^2(u-1)$ por distributividad. Por tanto $R(t) = u^2 = \sqrt[6]{t}$ en D; esta última identificación se verifica porque $u^2 \geq 0$ y $(u^2)^6 = t$.

En $t = 0$ la expresión original vale cero y está permitida. La forma aislada $\sqrt[6]{t}$ tiene valor uno en $t = 1$, pero R no existe allí. La cancelación conserva una función restringida al dominio original, aunque su fórmula simplificada admita una extensión.

90. Ambas raíces existen para $t \geq 0$. Son no negativas y la primera es mayor: si fuese menor o igual, sus cuadrados también lo serían, contradiciendo $t+9 > t+4$. Por ello $L(t) > 0$.

El conjugado $\sqrt{t+9} + \sqrt{t+4}$ es positivo. Multiplicar y dividir por él da

$$L(t) = \frac{5}{\sqrt{t+9} + \sqrt{t+4}}.$$

Para $t \geq 0$ se tiene $\sqrt{t+9} \geq 3$ y $\sqrt{t+4} \geq 2$, de modo que el denominador es al menos cinco. Resulta $0 < L(t) \leq 1$. Si $t = 0$, el denominador vale cinco y se alcanza uno. Si $t > 0$, ambas raíces superan respectivamente tres y dos, el denominador supera cinco y la desigualdad es estricta. Así, la igualdad superior ocurre exactamente en cero.

La forma original revela una diferencia positiva; la racionalizada convierte una cota de esa diferencia en una cota sencilla de una suma. No se necesita calcular las raíces ni desarrollar una teoría general de inecuaciones.

91. Las raíces cúbicas existen para todos los reales. La ley del producto impar, demostrable elevando el candidato al cubo, da $P(x, y) = \sqrt[3]{x^2y^4} = \sqrt[3]{(xy^2)^2}$. Puede escribirse también $(xy^2)^{2/3}$; el denominador impar y el exponente positivo permiten cualquier signo y cero.

Después de sustituir, el radicando es $(\lambda x)^2(\lambda y)^4 = \lambda^6 x^2 y^4$. El candidato $\lambda^2 P(x, y)$ tiene cubo $\lambda^6 x^2 y^4$, pues $P(x, y)^3 = x^2 y^4$. Por unicidad de la raíz cúbica,

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 P(x, y).$$

El argumento funciona para $\lambda < 0$, porque el factor obtenido es λ^2, y también cuando λ, x o y son cero: ambos lados son cero. La notación de un único radical hace visible el grado total seis y permite verificar la escala sin aplicar una ley racional a una base negativa sin control.

92. En bases positivas, $P(x) = x^{3/4+5/6} = x^{19/12}$. Si N es múltiplo positivo de doce, digamos $N = 12k$, la ley de potencia de potencia da $P(x)^N = x^{19k}$, así que $(N, M) = (12k, 19k)$ funciona.

Para probar necesidad, supón que la igualdad vale para todo $x > 0$ y toma $x = 2$. Elevando ambos lados a doce se obtiene $2^{19N} = 2^{12M}$. Las potencias enteras de dos son distintas para exponentes distintos: si una diferencia positiva h diera $2^h = 1$, se contradiría $2^h \geq 2$; para una diferencia negativa se toman recíprocos. Luego $19N = 12M$. Como $\gcd(19, 12) = 1$, doce divide a N por cancelación coprima. Escribiendo $N = 12k$, se obtiene $M = 19k$.

Todos los pares son los ya construidos, con $k \geq 1$. El mínimo es $N = 12$, con $M = 19$. La fracción reducida no sólo simplifica la notación: su denominador determina cuántas repeticiones hacen desaparecer el exponente fraccionario.

93. Una construcción es $E(x) = \sqrt{x-a}\sqrt{b-x}/(x-c)$. Las raíces exigen $x \geq a$ y $x \leq b$, y el cociente exige $x \neq c$. Estas condiciones son necesarias y suficientes, luego el dominio es exactamente $[a, b] \setminus \{c\}$. Los extremos se permiten porque la raíz del numerador puede valer cero y allí el denominador no se anula.

En ese dominio se puede reunir el producto: $E(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}/(x-c)$. La forma reunida tiene el mismo dominio natural. Para $a \le x \le b$, ambos factores son no negativos. Si $x < a$, el primero es negativo y el segundo positivo; si $x > b$, el primero es positivo y el segundo negativo. Por tanto el producto es no negativo exactamente en $[a, b]$. Se excluye después c por el denominador.

La comparación revisa los dominios de las dos expresiones, en lugar de inferirlos de una igualdad válida sólo en un conjunto previamente fijado.

94. Si $k \ge 1$, toma

$$E_F(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(x-c_i)^2}{(x-c_i)^2}.$$

Cada cociente existe exactamente cuando $x \neq c_i$ y vale uno allí. Un producto de expresiones sólo está definido cuando cada factor lo está: el dominio es la intersección de las exclusiones, $\mathbb{R} \setminus F$, y el valor es uno. Si F es vacío, toma directamente $E_F(x) = 1$, con dominio $\mathbb{R}$; no hace falta imponer una convención de producto vacío.

La construcción verifica ambas direcciones. Si $x \notin F$, todos los denominadores son no nulos. Si $x \in F$, al menos un cociente contiene división por cero y la expresión no existe. La forma simplificada uno, acompañada por $x \notin F$, representa la misma función restringida; la constante uno en todos los reales sería una extensión distinta.

95. Escribe $F = \{c_1, \dots, c_k\}$. Para $k \ge 1$, una expresión es

$$E(x) = \frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-a}} \prod_{i=1}^{k} \frac{(x-c_i)^2}{(x-c_i)^2}.$$

Si $F = \varnothing$, usa sólo el primer cociente. La raíz del numerador exige $x \le b$; la raíz del denominador debe ser real y no nula, por lo que exige $x > a$. Los cocientes adicionales excluyen exactamente los c_i. Son condiciones necesarias y suficientes: cada punto permitido define todas las operaciones y cada punto exterior incumple alguna. Por tanto el dominio es $(a, b] \setminus F$.

El extremo b está incluido y produce valor cero: su denominador es $\sqrt{b-a} > 0$ y ningún c_i coincide con b. El extremo a está excluido porque anula la raíz del denominador. Todos los factores adicionales valen uno en el dominio, por lo que queda la forma pedida, conservando $x \notin F$. Una raíz en el numerador y la misma raíz en el denominador imponen restricciones diferentes.

96. Toma $E(x) = 1/\sqrt{(x-a)(x-b)}$. La raíz del denominador exige producto estrictamente positivo. Si $x < a$, ambos factores son negativos; si $a < x < b$, tienen signos opuestos; si $x > b$, ambos son positivos; en los extremos el producto es cero. Por tanto el dominio es exactamente $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$.

La expresión separada $1/(\sqrt{x-a}\sqrt{x-b})$ exige $x - a > 0$ y $x - b > 0$ por sus dos raíces denominadoras; su dominio es sólo (b, ∞). Coincide con E allí, pero pierde toda la región izquierda.

Para $x < a$, cambia simultáneamente los signos: $(x-a)(x-b) = (a-x)(b-x)$, con ambos factores positivos. Por la ley del producto, $E(x) = 1/(\sqrt{a-x}\sqrt{b-x})$ en esa región. Para $x > b$, $E(x) = 1/(\sqrt{x-a}\sqrt{x-b})$. Las dos fórmulas describen todos los valores de la expresión construida; ninguna separación única usando sólo $x-a, x-b$ conserva por sí sola las dos regiones.

Capítulo 19

Identidades, productos notables y factorización

En capítulos anteriores hemos aprendido a transformar expresiones sin perder de vista las propiedades que justifican cada paso. Ahora aparece una habilidad diferente. Ya no basta con saber **cómo** distribuir, multiplicar o combinar términos: debemos aprender a decidir **qué forma de una expresión conviene mirar**.

Considere

$$x^2 - 9$$

y

$$(x - 3)(x + 3).$$

Son expresiones iguales para todo $x \in \mathbb{R}$, pero no muestran la misma información. La primera hace visible una diferencia de cuadrados. La segunda exhibe dos factores. Si expandimos,

$$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9.$$

Si leemos la misma identidad en sentido inverso,

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

La primera dirección se llama **expansión**. La segunda, **factorización**.

El punto decisivo de este capítulo es que ninguna de las dos formas es universalmente "mejor". Una forma puede ser más útil para comparar términos; otra, para reconocer factores; otra, para preparar una transformación posterior. La fluidez algebraica madura consiste en poder cambiar de representación **con un propósito**.

La idea rectora será:

> **Factorizar no es adivinar una fórmula. Es reconstruir una estructura multiplicativa cuya expansión reproduce exactamente la expresión inicial.**

Por eso no estudiaremos los llamados "casos de factorización" como una colección de recetas aisladas. Los derivaremos de unas pocas ideas: distributividad, reconocimiento de forma, agrupación y verificación.

19.1. Expandir y factorizar son dos lecturas de la distributividad

La identidad fundamental es

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Leída de izquierda a derecha, distribuye el factor a sobre una suma. Leída de derecha a izquierda, extrae el factor común a:

$$ab + ac = a(b + c).$$

No son dos leyes diferentes. Son la misma igualdad recorrida en direcciones opuestas.

Dos formas, una misma expresión. Por ejemplo,

$$3x(x+4) = 3x^2 + 12x.$$

La forma $3x(x+4)$ hace visible que toda la expresión es un producto y que $3x$ es factor. La forma $3x^2 + 12x$ hace visibles dos términos y sus coeficientes. La igualdad permite pasar de una descripción a la otra.

Factorizar como reconstrucción. Supongamos que encontramos

$$6x^2 + 9x.$$

Los dos términos contienen $3x$:

$$6x^2 + 9x = 3x(2x) + 3x(3) = 3x(2x+3).$$

La factorización no apareció por reconocimiento mágico. Reconstruimos un producto a partir de la distributividad.

Verificar en sentido contrario. Toda factorización propuesta puede someterse a una prueba simple:

```
FORMA FACTORIZADA
      ↓ expandir
FORMA OBTENIDA
      ↓ comparar
EXPRESIÓN ORIGINAL
```

Si proponemos

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3),$$

expandimos:

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

La verificación confirma la identidad. Factorizar produce una conjetura estructural; expandir permite auditarla.

Pregunta de lectura. Ante una expresión, antes de operar, pregunte:

> ¿Estoy mirando una suma que oculta un producto, o un producto que conviene desarrollar?

19.2. Expansión controlada: distribuir sin destruir información

Expandir significa eliminar productos sobre sumas mediante distributividad. Pero no toda expansión debe hacerse de inmediato ni hasta el final.

Considere

$$(2x-3)(x+5).$$

Aplicando distributividad:

$$(2x-3)(x+5) = 2x(x+5) - 3(x+5)$$

y luego

$$= 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15.$$

La estructura general. Para cualesquiera a, b, c, d,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

La justificación no depende de una mnemotecnia:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

El signo negativo entra en la distribución. Por ejemplo,

$$(x - 4)(x - 7) = x(x - 7) - 4(x - 7) = x^2 - 11x + 28.$$

El $+28$ proviene de $(-4)(-7)$.

No expandir por reflejo. Considere

$$(x - 1)(x + 1) + (x - 1)(x + 4).$$

La forma dada ya muestra un factor común:

$$(x - 1)\big((x + 1) + (x + 4)\big) = (x - 1)(2x + 5).$$

Expandir todo al comienzo habría ocultado temporalmente la estructura útil.

Expansión parcial. En

$$(x + 2)\big((x - 1)(x + 1) + 3\big),$$

puede ser útil expandir sólo el producto interior:

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1,$$

obteniendo

$$(x + 2)(x^2 + 2).$$

No existe obligación de expandir el producto exterior si la forma obtenida ya cumple el propósito.

19.3. Factor común: la primera pregunta

Cuando una expresión es una suma de términos, la primera inspección debería buscar factores comunes.

En

$$12x^3y - 18x^2y^2,$$

ambos términos contienen $6x^2y$. Por tanto,

$$12x^3y - 18x^2y^2 = 6x^2y(2x - 3y).$$

El factor común más informativo. Podríamos extraer sólo $2x$, pero la expresión interior seguiría teniendo factor común. En problemas de factorización suele convenir extraer de una vez el mayor factor común visible.

No estamos desarrollando aquí una teoría general del MCD de polinomios.

El coeficiente residual 1.

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1).$$

El 1 es esencial porque $x^2 = x^2 \cdot 1$.

Extraer un factor negativo. A veces conviene elegir deliberadamente -1:

$$3 - x = -(x - 3),$$

y en general

$$a - b = -(b - a).$$

Esto puede hacer visible otra estructura.

Protocolo inicial.

```
1. LEER LOS TÉRMINOS.
2. BUSCAR FACTORES NUMÉRICOS COMUNES.
3. BUSCAR POTENCIAS COMUNES.
4. BUSCAR BLOQUES ALGEBRAICOS COMUNES.
5. DECIDIR SI CONVIENE EXTRAER UN SIGNO NEGATIVO.
6. VOLVER A LEER LA EXPRESIÓN RESULTANTE.
```

El último paso es crucial: una factorización puede revelar inmediatamente otra.

19.4. El cuadrado de una suma y de una diferencia

La identidad

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se deriva de

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$

Distribuyendo:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por tanto,

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

Análogamente,

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

El término cruzado no es opcional. La igualdad

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

es falsa en general. Con $a = b = 1$:

$$4 \neq 2.$$

El error consiste en perder los dos términos cruzados ab.

Lectura inversa.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Esto permite reconocer trinomios cuadrados perfectos.

Por ejemplo,

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2.$$

Los extremos son x^2 y 5^2, y el término medio coincide con $2(x)(5)$.

Conexión con C13. Los coeficientes $1, 2, 1$ son los coeficientes binomiales de la expansión de segundo grado. La identidad forma parte de la estructura general del binomio.

19.5. Diferencia de cuadrados: una identidad con dos direcciones

Multipliquemos

$$(a + b)(a - b).$$

Entonces

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Así,

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).}$$

Reconocimiento.

$$9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2,$$

de modo que

$$9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5).$$

Factorización iterada.

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

En el marco actual no afirmaremos formalmente que x^2+4 sea irreducible. Sólo observamos que las estructuras elementales estudiadas aquí no producen otra factorización real del mismo tipo. La irreducibilidad pertenece a C25.

No confundir suma y diferencia. La identidad no autoriza

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a - b).$$

La semejanza visual no basta: hay que verificar la estructura.

19.6. Cubos: expansión y factorización

Por C13,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

y

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Diferencia de cubos.

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Al expandir,

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Los términos intermedios se cancelan.

Suma de cubos.

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).}$$

El signo negativo del término central es precisamente el que permite cancelar los términos mixtos.

Ejemplo.

$$8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x+3)(4x^2 - 6x + 9).$$

La expansión verifica el resultado.

19.7. Diferencias de potencias y sumas de potencias impares

Sea $n \geq 1$. Considere

$$(a-b)\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^j\right).$$

Al distribuir, todos los términos intermedios aparecen una vez con signo positivo y una vez con signo negativo. Se cancelan y queda

$$a^n - b^n.$$

Precisión de lectura. Cuando $n = 1$, el paréntesis de esta identidad contiene un único sumando 1. Para todos los índices, los monomios de las sumas finitas omiten los factores de exponente cero, como producto vacío de valor uno: no requiere evaluar 0^0 cuando $a = 0$ o $b = 0$.

Por tanto,

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^j\right).}$$

Para $n = 5$,

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Suma de potencias impares. Si n es impar,

$$\boxed{a^n + b^n = (a+b)\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j a^{n-1-j}b^j\right).}$$

Los signos alternan y la expansión vuelve a cancelar los términos intermedios.

Para $n = 5$:

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

No apelamos al teorema del factor. Estas identidades se justifican por distributividad y cancelación finita.

Varias estructuras simultáneas.

$$x^{12} - y^{12}$$

puede verse como diferencia de cuadrados, de cubos o de potencias. La mejor lectura depende del objetivo.

19.8. Factorización por agrupación

Hay expresiones sin factor común global evidente que pueden reorganizarse para producirlo.

Considere

$$ax + ay + bx + by.$$

Agrupamos:

$$(ax + ay) + (bx + by).$$

Entonces

$$a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y).$$

La agrupación tiene un objetivo. En

$$2x^2 + 6x + x + 3,$$

podemos escribir

$$(2x^2 + 6x) + (x+3) = 2x(x+3) + (x+3) = (2x+1)(x+3).$$

Agrupar sirve porque después aparece un factor común compuesto.

Reordenar antes de agrupar.

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x^3 + 3x^2) + (-4x - 12)$$

$$= x^2(x+3) - 4(x+3)$$

$$= (x+3)(x^2 - 4)$$

$$= (x+3)(x-2)(x+2).$$

La agrupación puede ser sólo el primer nivel de una factorización.

19.9. Trinomios mónicos: reconstruir suma y producto

Partamos de

$$(x+r)(x+s) = x^2 + sx + rx + rs = x^2 + (r+s)x + rs.$$

Por tanto, factorizar

$$x^2 + bx + c$$

como producto de dos binomios significa encontrar r, s tales que

$$r + s = b$$

y

$$rs = c.$$

Ejemplo. Para

$$x^2 + 7x + 12,$$

buscamos dos números cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7:

$$3 \cdot 4 = 12, \qquad 3 + 4 = 7.$$

Así,

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4).$$

Los signos salen de suma y producto. En

$$x^2 - x - 12$$

necesitamos

$$r + s = -1, \qquad rs = -12.$$

Una pareja adecuada es $r = 3$, $s = -4$. Entonces

$$x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4).$$

No hace falta una tabla de signos separada: las condiciones de suma y producto contienen toda la información.

Cuando no aparece una pareja. Si dentro del conjunto de coeficientes que estamos explorando no encontramos r, s adecuados, no concluimos todavía una irreducibilidad formal.

Diremos simplemente:

> Con las estructuras elementales y el tipo de coeficientes buscados en este contexto no hemos obtenido una factorización adicional.

La noción precisa de irreducibilidad pertenece a C25.

Reconstruir suma y producto con un centro. Si buscamos $r+s=S$ y $rs=P$, escribamos $h=S/2$, $r=h+d$ y $s=h-d$. Su producto es h^2-d^2. Por tanto, una pareja real exige $P\le h^2$ y se reconstruye con $d=\sqrt{h^2-P}$. La justificación inversa es $(r-s)^2=S^2-4P\ge 0$. No estamos aplicando una receta sin comprobarla: la suma y el producto de la pareja obtenida certifican la reconstrucción. Con $S=6$ y $P=5$, $h=3$ y $d=2$, obtenemos 1, 5 y $x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$. **Control resuelto:** $S=4$, $P=5$ es imposible en los reales, porque $h^2-P=-1$. No encontrar enteros era insuficiente; la no negatividad del cuadrado descarta aquí toda pareja real.

19.10. Trinomios generales: fabricar una agrupación

Consideremos

$$ax^2+bx+c, \qquad a\neq 0.$$

Cuando $a\neq 1$, una estrategia útil consiste en buscar dos números m,n que satisfagan

$$m+n=b$$

y

$$mn=ac.$$

Después descomponemos el término medio:

$$bx=mx+nx,$$

y usamos agrupación.

Ejemplo. Factoricemos

$$6x^2+11x+3.$$

Tenemos

$$ac=18.$$

Buscamos dos números que multipliquen 18 y sumen 11:

$$9+2=11, \qquad 9\cdot 2=18.$$

Entonces

$$6x^2+11x+3=6x^2+9x+2x+3.$$

Agrupamos:

$$(6x^2+9x)+(2x+3)$$

y obtenemos

$$3x(2x+3)+1(2x+3).$$

Por tanto,

$$\boxed{6x^2+11x+3=(3x+1)(2x+3).}$$

Por qué aparece el producto ac. Si

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s),$$

entonces

$$pr = a, \qquad qs = c,$$

y el término medio es

$$(ps + qr)x.$$

Los dos productos cruzados son los que descomponen el coeficiente b. Su producto es

$$(ps)(qr) = pr \cdot qs = ac.$$

Por eso la condición $mn = ac$ organiza la búsqueda de una descomposición compatible con agrupación.

Inspección o procedimiento. En un caso sencillo como

$$2x^2 + 5x + 2,$$

puede verse directamente

$$(2x + 1)(x + 2).$$

Pero cuando la inspección no es inmediata, descomponer el término medio ofrece una ruta sistemática.

En ambos casos, el control final es el mismo:

> Expandir el producto obtenido y comparar término a término con la expresión original.

19.11. Cuadrados perfectos y patrones casi correctos

Reconocer una forma no consiste en mirar sólo los términos extremos.

Considere

$$x^2 + 12x + 36.$$

Los extremos son

$$x^2 \qquad \text{y} \qquad 6^2.$$

Para que la expresión sea

$$(x + 6)^2,$$

el término medio debe ser

$$2(x)(6) = 12x.$$

Como coincide,

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2.$$

Un patrón casi correcto. Ahora considere

$$x^2 + 10x + 36.$$

Los extremos siguen siendo x^2 y 6^2, pero el término medio correcto para $(x+6)^2$ sería $12x$. Por tanto,

$$x^2 + 10x + 36 - (x+6)^2 = -2x.$$

No es una identidad de igualdad: los miembros coinciden en $x = 0$ y difieren cuando $x \neq 0$. La semejanza visual no basta.

Reconstruir un término faltante. Si deseamos que

$$x^2 + kx + 49$$

sea el cuadrado de $(x + 7)$, entonces

$$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49.$$

Por tanto el término lineal debe ser $14x$.

No estamos resolviendo aquí una ecuación en el sentido de C21. Estamos reconstruyendo una identidad bajo una condición estructural.

Prueba de estrés. Ante un supuesto cuadrado perfecto:

```
1. IDENTIFICAR LOS DOS CUADRADOS.
2. TOMAR SUS RAÍCES.
3. CALCULAR EL DOBLE PRODUCTO.
4. COMPARAR CON EL TÉRMINO MEDIO.
5. SÓLO ENTONCES FACTORIZAR.
```

19.12. Sustitución auxiliar: nombrar una estructura repetida

Algunas expresiones parecen complicadas porque una misma subestructura aparece varias veces.

Considere

$$x^4 - 5x^2 + 4.$$

Si escribimos

$$u = x^2,$$

la expresión se convierte temporalmente en

$$u^2 - 5u + 4.$$

Ahora reconocemos un trinomio mónico:

$$u^2 - 5u + 4 = (u-1)(u-4).$$

Deshacemos la sustitución:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Y volvemos a leer:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Por tanto,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

La sustitución no cambia el problema. La letra u no crea un objeto nuevo; nombra temporalmente un bloque para hacer visible una forma conocida.

Sustituir un bloque compuesto. En

$$(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 + 4$$

tomamos

$$u = (x + 1)^2.$$

Entonces

$$u^2 - 5u + 4 = (u - 1)(u - 4),$$

y al regresar:

$$\big((x + 1)^2 - 1\big)\big((x + 1)^2 - 4\big).$$

Cada factor puede analizarse de nuevo como diferencia de cuadrados.

Transferencia desde C18. En el dominio real apropiado puede aparecer

$$x - 5\sqrt{x} + 4.$$

Si $x \geq 0$, tomamos

$$u = \sqrt{x}.$$

Entonces $x = u^2$ y la expresión queda

$$u^2 - 5u + 4.$$

La sustitución no elimina el dominio original $x \geq 0$.

Una sustitución no borra los términos que quedan fuera. En $E = x^4 - 5x^2 + 4 + x(x^2 - 1)$, poner $u = x^2$ produce $(u - 1)(u - 4) + x(u - 1)$. La letra x sigue presente: no podemos sustituirla por u. Agrupamos y regresamos a la variable original: $E = (x^2 - 1)(x^2 + x - 4)$. Expandir devuelve $x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 4$. **Diagnóstico resuelto:** afirmar que toda la expresión depende solo de u pierde información. En $x = 2$ y $x = -2$ tenemos el mismo $u = 4$, pero E vale 6 y -6. La sustitución auxiliar puede organizar parte de una expresión sin convertirla entera en una expresión de una sola nueva variable. Conservar las dependencias residuales evita reconstrucciones falsas.

19.13. Factorizaciones encadenadas

En problemas de varias etapas, después de cada transformación debemos volver a leer la nueva forma.

Considere

$$2x^5 - 18x.$$

Paso 1: factor común.

$$2x^5 - 18x = 2x(x^4 - 9).$$

Paso 2: diferencia de cuadrados.

$$x^4 - 9 = (x^2)^2 - 3^2 = (x^2 - 3)(x^2 + 3).$$

Por tanto,

$$2x^5 - 18x = 2x(x^2 - 3)(x^2 + 3).$$

La forma $2x(x^2 - 3)(x^2 + 3)$ cumple el objetivo de hacer visibles estos bloques. Si se pide continuar con factores reales, C18 permite escribir $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Detenerse depende del objetivo declarado; no afirma que todos los factores sean irreducibles.

Agrupación que revela una nueva identidad. Considere

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18.$$

Agrupamos:

$$(x^3 + 2x^2) + (-9x - 18).$$

Luego,

$$x^2(x + 2) - 9(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 9)$$

y finalmente

$$\boxed{x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x - 3)(x + 3).}$$

Estrategia recursiva.

```
FACTOR COMÚN
    ↓
VOLVER A LEER
    ↓
IDENTIDAD / AGRUPACIÓN / SUSTITUCIÓN
    ↓
VOLVER A LEER
    ↓
NUEVA FACTORIZACIÓN SI PROCEDE
    ↓
VERIFICAR
```

No debemos “seguir factorizando” por inercia. Nos detenemos cuando el objetivo está cumplido y ninguna estructura del marco actual ofrece una continuación justificada.

19.14. Elegir entre forma expandida y forma factorizada

Considere

$$(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10.$$

Las dos formas son equivalentes, pero hacen visible información diferente.

Forma expandida.

$$x^2 + 3x - 10$$

muestra con claridad:

- los términos;
- los coeficientes;
- la contribución lineal;
- la facilidad para sumar con otra expresión expandida.

Forma factorizada.

$$(x - 2)(x + 5)$$

muestra:

- dos factores;
- una estructura multiplicativa;
- una forma que será útil en capítulos posteriores.

Elegir forma por función. Si debemos sumar esta expresión con

$$-x^2 + 4x + 1,$$

puede convenir expandir.

Si debemos compararla con otra expresión que contiene $(x - 2)$, puede convenir conservar la factorización.

Si una expresión ya aparece como

$$(x + 3)(x^2 - 4),$$

expandir de inmediato oculta que

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Previsión algebraica. La pregunta experta no es:

> ¿Qué operación puedo hacer ahora?

sino:

> ¿Qué forma quiero obtener y qué información necesito que quede visible?

En C20, la forma factorizada ayudará a leer expresiones racionales. En C21, ayudará a estudiar ecuaciones. Aquí sólo preparamos esas representaciones: todavía no cancelamos factores en cocientes ni resolvemos ecuaciones por producto nulo.

Comparar rutas sin dividir por un parámetro. Para $E = (x + a)(x + b) - (x + a)(x + c)$, extraer el bloque compartido da $E = (x + a)[(x + b) - (x + c)] = (b - c)(x + a)$. Expandir primero da $(b - c)x + a(b - c)$, que verifica la misma identidad. La primera ruta conserva un factor y reduce la resta a una constante; la segunda facilita comparar coeficientes. **Control resuelto:** si $b = c$, ambas representaciones dan cero para todo x. Dividir por $b - c$ para «comprobar» habría eliminado precisamente ese caso. Una identidad paramétrica debe verificarse también donde algún factor se anula; la distributividad funciona allí sin divisiones. La forma final se elige por su propósito, no por una preferencia automática por productos.

19.15. Laboratorio P3: localizar el primer patrón falso

Las cadenas largas plantean un peligro especial: un error temprano puede quedar oculto por pasos posteriores que, considerados aisladamente, parecen familiares.

Considere

$$(x+3)^2 = x^2 + 9 = (x-3)(x+3).$$

El primer error ocurre en

$$(x+3)^2 = x^2 + 9.$$

La expansión correcta es

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

La cadena queda rota desde esa primera igualdad falsa.

Segundo ejemplo.

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = x^2 - 9.$$

El primer paso es correcto. El segundo es falso:

$$(x-3)^2 - (x^2 - 9) = 18 - 6x.$$

No es una identidad, aunque los dos miembros coinciden en $x = 3$. Se confundió el cuadrado de una diferencia con una diferencia de cuadrados.

Agrupación aparente. La cadena

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x^2 + 2x) + (3x + 3)$$

$$= 2x(x+1) + 3(x+1)$$

$$= (2x+3)(x+1)$$

es correcta.

En cambio, si escribimos

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x^2 + x) + (4x + 3),$$

la primera igualdad sigue siendo válida, pero

$$x(2x+1) + (4x+3)$$

no posee el factor común $(2x+1)$. El error sería inventar después una factorización que la expresión no contiene.

Protocolo de auditoría.

```
1. LEER SIN CORREGIR.
2. LOCALIZAR LA PRIMERA IGUALDAD FALSA.
3. IDENTIFICAR LA LEY QUE SE INTENTÓ USAR.
4. EXPLICAR QUÉ ESTRUCTURA FALTABA.
5. VOLVER AL ÚLTIMO PASO VÁLIDO.
6. RECONSTRUIR LA CADENA.
7. VERIFICAR POR UNA RUTA INDEPENDIENTE.
```

Por qué los errores son plausibles. La falsa igualdad

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

imita una ley verdadera:

$$(ab)^2 = a^2b^2.$$

Por eso la corrección no debe limitarse a "eso está mal". Hay que identificar si tenemos:

- potencia de un producto;
- potencia de una suma;
- diferencia de cuadrados;
- cuadrado de una diferencia.

Aprender álgebra implica clasificar la forma antes de elegir la ley.

19.16. Cierre: un protocolo de reconocimiento y factorización

A lo largo del capítulo hemos usado varias identidades, pero el objetivo no era acumular fórmulas.

Todo el trabajo puede organizarse alrededor de tres movimientos:

$$\boxed{\text{leer} \longrightarrow \text{reconstruir} \longrightarrow \text{verificar}}$$

Leer. Antes de transformar:

- ¿cuántos términos hay?;
- ¿hay factor común?;
- ¿veo cuadrados, cubos o potencias repetidas?;
- ¿hay un bloque que aparece varias veces?;
- ¿una agrupación podría crear un factor común?;
- ¿la expresión hereda restricciones de dominio desde C18?

Reconstruir. Elegimos la herramienta según la forma:

- distributividad inversa;
- diferencia de cuadrados;
- cuadrados perfectos;
- suma o diferencia de cubos;
- diferencia general de potencias;
- agrupación;
- trinomios;
- sustitución auxiliar.

Volver a leer. Después de cada paso preguntamos:

¿La nueva forma revela otra estructura?

Una factorización puede abrir la puerta a otra.

Verificar. Cuando haya riesgo de error:

$$\text{factorización propuesta} \longrightarrow \text{expansión} \longrightarrow \text{comparación}.$$

Elegir la forma final. No existe una forma universalmente superior.

La forma expandida puede ser mejor para comparar y combinar términos. La forma factorizada puede revelar estructura. Una sustitución puede hacer visible un patrón.

Protocolo final.

```
1. ¿HAY FACTOR COMÚN?
2. ¿QUÉ FORMA GLOBAL TIENE LA EXPRESIÓN?
3. ¿HAY DOS TÉRMINOS, TRES, CUATRO O UN BLOQUE REPETIDO?
4. ¿RECONOZCO CUADRADOS, CUBOS O DIFERENCIAS DE POTENCIAS?
5. ¿UNA AGRUPACIÓN CREA UN FACTOR COMÚN?
6. ¿UN TRINOMIO PUEDE LEERSE COMO PRODUCTO DE BINOMIOS?
7. ¿CONVIENE UNA SUSTITUCIÓN AUXILIAR?
8. ¿LA NUEVA FORMA ADMITE OTRA ETAPA?
9. ¿CÓMO VERIFICO LA IDENTIDAD?
10. ¿QUÉ FORMA SIRVE MEJOR PARA LA TAREA SIGUIENTE?
```

La idea que debe permanecer. Factorizar no consiste en reconocer dibujos familiares de manera automática. Consiste en **hacer visible una estructura multiplicativa y justificar que realmente estaba allí**.

En el próximo capítulo esa habilidad adquirirá una responsabilidad nueva. Cuando las expresiones aparezcan en cocientes, ya no bastará con reconocer factores: habrá que controlar también qué valores estaban excluidos antes de cualquier simplificación.

La forma seguirá importando, pero el dominio volverá al primer plano.

Ejercicios

Los 80 ejercicios iniciales conservan su procedencia y organización por función cognitiva. El suplemento añade 12 tareas con soluciones y procedencia interna explícita; el banco completo contiene 92 ejercicios. Los problemas de reconocimiento exigen leer antes de transformar; los de fluidez técnica deben verificarse cuando la expansión sea útil; los de justificación y diagnóstico requieren argumentar, y los problemas avanzados combinan varias decisiones. **No se solicita resolver ecuaciones ni simplificar fracciones algebraicas:** esas tareas pertenecen a capítulos posteriores.

A. Reconocimiento y lectura estructural

1. **Nivel A.** Sin efectuar cálculos completos, clasifique cada tarea como **expansión**, **factorización** o **verificación de una identidad**: (a) transformar $(x+2)(x-5)$ en suma; (b) transformar $6x^2+9x$ en producto; (c) comprobar que $x^2-16=(x-4)(x+4)$; (d) recuperar un producto a partir de $a^2+2ab+b^2$. Explique qué información revelaría la forma buscada.
2. **Nivel A.** En $18x^3y^2-12x^2y^3+6xy$, identifique el factor numérico, las potencias de variables comunes y el factor común conjunto. Escriba **sólo la forma que espera obtener**, indicando cómo verificaría después su elección.
3. **Nivel A.** Asocie cada expresión con una identidad candidata, sin factorizar todavía: (a) p^2-49; (b) $p^2+14p+49$; (c) $8p^3+27$; (d) p^2+49; (e) p^4-16. Señale cuál no comparte el patrón elemental de diferencia de cuadrados y cuál admite más de una lectura.
4. **Nivel A.** Examine $9x^2-25$, $9x^2+25$, $9x^2+30x+25$ y $9x^2-30x+25$. Para cada una, decida si reconoce diferencia de cuadrados, cuadrado perfecto u otra forma; justifique en una frase el papel del signo y del término medio.
5. **Nivel A.** Explique, sin desarrollar un producto largo, por qué $(-a)^2$, $-a^2$, $(a-b)^2$ y a^2-b^2 no representan en general el mismo objeto algebraico. Para las dos últimas, indique qué identidad habría que consultar.

6. **Nivel A.** Para cada trinomio $x^2+7x+10$, x^2-x-12 y $x^2-8x+15$, indique qué suma y qué producto deben satisfacer dos números r, s para obtener $(x+r)(x+s)$. Todavía no complete la factorización.
7. **Nivel A.** En $x^3+4x^2-9x-36$, proponga dos agrupaciones de términos que merezca examinar. Anticipe qué factor compuesto debería aparecer para que una de ellas resulte útil; no es necesario desarrollar toda la factorización.
8. **Nivel A.** Indique una sustitución auxiliar natural para (a) x^6-7x^3+10 y (b) $(2x-1)^4-5(2x-1)^2+4$. Explique qué patrón aparecería y cómo habría que regresar a la variable original.
9. **Nivel A.** Elija **expandir**, **factorizar** o **conservar** para cada propósito: (a) leer coeficientes de $(x-3)(2x+1)$; (b) mostrar factores de x^2-9; (c) detectar rápidamente un factor común en $(x+1)(x-2)+4(x+1)$; (d) comparar términos de dos expresiones ya desarrolladas. Justifique cada elección.
10. **Nivel A.** En el dominio real de $x^{3/2}-x^{1/2}$, identifique el factor visible y la condición sobre x que debe examinarse antes de manipular exponentes. Explique por qué una factorización posterior debe conservar esa información.

B. Fluidez técnica

11. **Nivel B.** Expanda y reúna términos semejantes: $(3x-2)(2x+5)$. Anote al lado de cada término su procedencia en la distributividad.
12. **Nivel B.** Expanda $(x-2y)(x+3y)$ y explique qué dos productos originan el coeficiente de xy.
13. **Nivel B.** Expanda y simplifique $(2x-y+3)(x+2y)$. Organice el cálculo para evitar perder los signos.
14. **Nivel B.** Extraiga primero el mayor factor común evidente de $24x^4y^2-36x^3y^3+12x^2y^2$. Compruebe por expansión la expresión obtenida.
15. **Nivel B.** Extraiga deliberadamente un factor común **negativo** de $-4x^3+12x^2-8x$ para que el primer término del paréntesis sea positivo. Justifique los tres signos interiores.
16. **Nivel B.** Desarrolle $(3a-2b)^2$ y $(x+4)^2$ desde productos de binomios, no mediante la cita aislada de una fórmula.
17. **Nivel B.** Factorice $16x^2-81y^2$ y verifique el resultado multiplicando los factores.
18. **Nivel B.** Factorice x^8-1 aplicando sucesivamente diferencias de cuadrados mientras encuentre un nuevo patrón estudiado; escriba las etapas y compruebe al menos la primera multiplicación.
19. **Nivel B.** Factorice $27a^3+8b^3$ usando una identidad cúbica. Reconstruya los signos del segundo factor por expansión.
20. **Nivel B.** Factorice $64x^3-125$ y verifique que los términos mixtos se cancelan.
21. **Nivel B.** Factorice $x^3+4x^2-9x-36$ por agrupación y examine si el segundo factor admite otra identidad.
22. **Nivel B.** Factorice $6xy-9x+4y-6$ mediante una agrupación que produzca el mismo binomio dos veces.
23. **Nivel B.** Factorice $x^2-9x+20$ reconstruyendo dos números mediante su suma y su producto.
24. **Nivel B.** Factorice $x^2+2x-35$ y verifique por expansión que los signos son correctos.
25. **Nivel B.** Factorice $6x^2+13x+6$ descomponiendo el término medio y agrupando. Indique la pareja elegida y por qué su producto es $6\cdot 6$.
26. **Nivel B.** Factorice $12x^2-7x-10$ por el método *ac*. Compruebe explícitamente tanto el coeficiente lineal como el término constante.

C. Justificación y reconstrucción

27. **Nivel C.** Demuestre $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ mediante dos aplicaciones de distributividad. Lea después su igualdad en sentido inverso e indique qué información debe reconocerse para factorizar.
28. **Nivel C.** Reconstruya desde $(a-b)(a-b)$ la identidad del cuadrado de una diferencia. Señale los dos términos cruzados y construya un contraejemplo a $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.
29. **Nivel C.** Obtenga $(a+b)^3$ por distributividad y explique por qué sus coeficientes son $1, 3, 3, 1$. Compare el mecanismo con el teorema del binomio ya disponible en C13.
30. **Nivel C.** Derive $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ mediante expansión. Explique por qué la misma operación no justifica $a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$ y exhiba un contraejemplo numérico.
31. **Nivel C.** Demuestre por expansión tanto $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ como $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Identifique exactamente qué pares de términos se cancelan.
32. **Nivel C.** Para cada entero $n \geq 1$, demuestre mediante distributividad y cancelación telescópica la identidad $a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^j$. Incluya explícitamente el caso $n = 1$ y explique el papel de los índices extremos.
33. **Nivel C.** Sea $n = 2k+1$ impar positivo. Sustituya b por $-b$ en la identidad del ejercicio anterior para derivar $a^n + b^n$. Justifique la alternancia de signos y compruebe la fórmula para $n = 3$ y $n = 5$.
34. **Nivel C.** Demuestre en ambos sentidos: $x^2 + bx + c = (x+r)(x+s)$ **si y sólo si** $b = r + s$ y $c = rs$, suponiendo igualdad de expresiones en x para todos los reales. Justifique la comparación de coeficientes usando valores adecuados de x o expansión y una identidad elemental.
35. **Nivel C.** Explique por qué, si $a \neq 0$, $m + n = b$ y $mn = ac$, se obtiene $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax+m)(ax+n)$. Derive de esta identidad el método de descomposición del término medio y agrupe un ejemplo original.
36. **Nivel C.** Verifique por **dos rutas** la identidad $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x+5)(x-2)(x+2)$: primero por agrupación y luego expandiendo el producto propuesto. Indique qué controla cada ruta.
37. **Nivel C.** Muestre que $2x(x+1) = x(2x+2) = 2x^2 + 2x$ para todo real x. ¿En qué difieren las tres formas y qué enseña el ejemplo acerca de la elección de representación?
38. **Nivel C.** Factorice $x^{3/2} - x^{1/2}$ como $\sqrt{x}(x-1)$ en su dominio real $x \geq 0$: justifique la identidad para $x > 0$ mediante leyes de potencias y verifique $x = 0$ por separado. Explique por qué no debe perderse la información de dominio.

D. Diagnóstico del primer paso inválido

39. **Nivel D.** Audite la cadena $(a+b)^2 = a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$. Localice **la primera** igualdad inválida, nombre la ley que se intentó usar, corrija desde el último punto válido y dé un contraejemplo.
40. **Nivel D.** Audite $(x-4)^2 = x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$. Determine el primer paso inválido, distinga cuadrado de diferencia de diferencia de cuadrados y reconstruya una identidad verdadera.
41. **Nivel D.** Audite $a^2 + b^2 = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Identifique el primer paso inválido y explique por qué la segunda igualdad, tomada aisladamente, sí es correcta.
42. **Nivel D.** Audite $(a+b)^3 = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Señale el primer error y explique cómo una igualdad posterior correcta puede ocultarlo.
43. **Nivel D.** En la cadena $x^3 + 8 = (x+2)(x^2+2x+4) = x^3 + 8$, identifique el primer patrón falso. Reconstruya la identidad correcta de suma de cubos y compruébela expandiendo.
44. **Nivel D.** En $x^3 - 8 = (x-2)(x^2-2x+4) = x^3 - 8$, detecte el primer error de signo y escriba la factorización corregida con comprobación.

45. **Nivel D.** Un estudiante escribe $6x^2 + 9x = 3x(2x + 9) = 6x^2 + 27x$. Localice la primera ruptura, explique el papel del coeficiente residual y repare la cadena.
46. **Nivel D.** Examine $-x^2 + 5x - 6 = -(x^2 + 5x - 6) = -(x + 2)(x + 3)$. Determine la primera igualdad falsa y reconstruya una extracción correcta del factor -1, sin resolver ninguna ecuación.
47. **Nivel D.** La cadena $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5) = (x + 2)(x - 5)$ contiene un paso correcto seguido por uno falso. Localice el primero que falla, nombre el cambio de estructura y verifique la reparación.
48. **Nivel D.** Audite $6x^2 + 11x + 3 = 6x^2 + 6x + 5x + 3 = 6x(x + 1) + (5x + 3) = (x + 1)(6x + 3)$. Identifique la primera igualdad inválida y elija una descomposición del término medio que sí produzca agrupación útil.
49. **Nivel D.** Un estudiante declara $x^4 - 5x^2 + 4 = u^2 - 5u + 4$ con $u = x$ y concluye $(u - 1)(u - 4)$. Determine el primer error en la sustitución, elija el bloque correcto y regrese a x sin resolver ecuaciones.
50. **Nivel D.** Audite, en el dominio $x \geq 0$, $x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x+1) = \sqrt{x}(x+1)$. Localice el primer error, compárelo con la distributividad verdadera y explique cómo verificar la reparación en $x = 0$.

E. Estrategia y elección de representación

51. **Nivel E.** En $(x + 2)(x - 3) + (x + 2)(2x + 1)$, decida entre expandir ambos productos o extraer primero un factor compuesto. Ejecute la ruta elegida, compare con la otra y explique qué estrategia evita más trabajo.
52. **Nivel E.** Compare $x^4 - 16$ con $x^4 + 16$. Identifique las diferencias estructurales que justifican o impiden aplicar directamente la diferencia de cuadrados, y describa hasta dónde llega una factorización elemental sin declarar irreducibilidad.
53. **Nivel E.** Factorice $6x^2 + 11x + 3$ de dos maneras: (i) inspección del producto de binomios; (ii) método ac y agrupación. Compare qué pista ofrece cada procedimiento y verifique expandiendo.
54. **Nivel E.** Elija y justifique el orden de técnicas para $8x^3 + 12x^2 + 4x$: factor común, trinomio o expansión. Factorice por etapas y explique por qué conviene volver a leer después del primer paso.
55. **Nivel E.** Para comparar $x^2 + 2x + 1$ con $(x - 1)(x + 1) + 2x + 2$, elija una forma común y establezca por una cadena de identidades si son iguales. ¿Por qué esa representación es mejor para esta tarea?
56. **Nivel E.** Construya un trinomio con extremos x^2 y 16 que **no** sea cuadrado perfecto y explique cómo corregir su término medio para obtener $(x + 4)^2$. Distinga reconocer extremos de verificar el doble producto.
57. **Nivel E.** Factorice $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ por dos agrupaciones distintas. Argumente qué factor común pretende fabricar cada una y por qué ambas conducen a la misma identidad.
58. **Nivel E.** Determine una sustitución conveniente para $(x-2)^4 - 5(x-2)^2 + 4$. Factorice, deshaga la sustitución y explique en qué momento debe revisarse una nueva diferencia de cuadrados.
59. **Nivel E.** Proponga dos rutas para comenzar la factorización de $a^6 - b^6$ —como diferencia de cuadrados y como diferencia de cubos—. Desarrolle ambas hasta obtener productos equivalentes y compruebe la equivalencia por identidades, sin usar el teorema del factor.
60. **Nivel E.** Para $(x^2 + 9)(x^2 - 9) + 3(x^2 + 9)$, decida si conviene expandir o factorizar primero. Obtenga una forma estructuralmente útil y compruebe por expansión sin sostener que una representación sea superior para toda tarea.

F. Transferencia acumulativa

61. **Nivel F.** En el dominio $x \geq 0$, factorice $x^{5/2} - 4x^{3/2} + 3x^{1/2}$ mediante factor común y un trinomio. Justifique para $x > 0$ las leyes de potencias y controle por separado $x = 0$.
62. **Nivel F.** Con $x > 0$, use la sustitución $u = x^{2/3}$ para factorizar $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 4$. Regrese a exponentes racionales y explique qué hipótesis permiten esas transformaciones.
63. **Nivel F.** Para $x \geq 0$, factorice $\sqrt{x}(x-4) + 2\sqrt{x}(x+1)$ por factor común compuesto. Verifique por distributividad y declare el dominio original.
64. **Nivel F.** Derive una forma factorizada de $(u+v)^3 + (u-v)^3$ por expansión controlada; compárela con una ruta que extraiga primero un factor común después de reagrupar. Verifique ambas para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$.
65. **Nivel F.** Factorice $x^6 - 1$ por dos rutas: (i) empiece con la diferencia de cuadrados $(x^3)^2 - 1^2$ y después use suma y diferencia de cubos; (ii) empiece con la diferencia de cubos $(x^2)^3 - 1^3$ y reconstruya las identidades restantes. Compare los productos por expansión.
66. **Nivel F.** Deduzca la factorización de $x^7 + 2^7$ usando la suma de potencias impares. Escriba todos los signos, compruebe los dos términos extremos y explique por qué se cancelan los intermedios.
67. **Nivel F.** Use $u = x^2$ para factorizar $x^4 - 10x^2 + 9$. Deshaga la sustitución y aplique las diferencias de cuadrados restantes. Verifique por expansión.
68. **Nivel F.** Factorice $(x+1)^4 - 10(x+1)^2 + 9$ mediante una sustitución para el bloque repetido. Deshaga la sustitución con cuidado y explique por qué expandir de entrada sería más costoso.
69. **Nivel F.** Reconozca un cuadrado perfecto dentro de $9x^2 - 6xy + y^2 - 25z^2$; convierta luego la expresión en diferencia de cuadrados. Verifique el producto obtenido mediante una ruta independiente.
70. **Nivel F.** Sea $k \in \mathbb{R}$. Verifique para todo x la identidad $x^3 + (k+2)x^2 + (2k-3)x - 3k = (x+k)(x+3)(x-1)$. Reconstruya una factorización por agrupación y explique qué papel desempeña el parámetro.
71. **Nivel F.** Factorice $12x^3 - 27x$ por al menos dos rutas: (i) factor común seguido de identidad; (ii) reconocimiento de la diferencia de cuadrados dentro de un factor común alternativo. Compare y verifique.
72. **Nivel F.** Compare las factorizaciones de $4x^4 - 20x^2 + 16$ obtenidas por (i) extracción inicial de 4 y sustitución $u = x^2$, y (ii) agrupación de una diferencia de cuadrados construida. Justifique cada paso sin apelar a raíces de ecuaciones.

G. Síntesis avanzada

73. **Nivel G. Auditoría de cuatro etapas.** Factorice $2x^4 + 6x^3 - 18x^2 - 54x$ empezando por factor común, continuando por agrupación, identificando una diferencia de cuadrados y releyendo los factores resultantes. Escriba la razón de cada paso, verifique la forma final por expansión y compare con una ruta que agrupe antes de extraer todo el factor común.
74. **Nivel G. Identidad paramétrica.** Para $a, b \in \mathbb{R}$, demuestre $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$ mediante (i) dos diferencias de cuadrados encadenadas y (ii) expansión binomial. Explique qué cancelaciones producen el resultado y compare las dos arquitecturas de prueba.
75. **Nivel G. Diferencia general de potencias.** Demuestre la identidad de $a^n - b^n$ para todo $n \geq 1$ mediante una suma finita explícita. Aplíquela a $x^{10} - 1$ de dos maneras (exponente 10 y diferencia de quintas potencias de x^2 y 1); compare los factores obtenidos sin invocar teorema del factor ni irreducibilidad.

76. **Nivel G. Suma de potencias impares.** Sea $n = 2k+1$. Derive la identidad general desde la diferencia de potencias y aplíquela a $x^7 + 1$. Justifique los signos de los siete términos del segundo factor y verifique la factorización mediante cancelación telescópica.
77. **Nivel G. Trinomio general de alta carga.** Factorice $18x^2 - 21x - 15$ (i) extrayendo primero el factor numérico y usando el método ac y (ii) descomponiendo directamente el término medio antes de agrupar. Compare el número de pasos, explique la selección de sumandos y verifique por expansión.
78. **Nivel G. Sustitución estructural.** Factorice $(x^2+2x)^2 - 2(x^2+2x) - 3$ sin resolver ecuaciones: nombre el bloque repetido, factorice el trinomio auxiliar, deshaga la sustitución y examine cada factor nuevamente. Construya una segunda verificación por expansión.
79. **Nivel G. Auditoría extensa de cadena.** Examine línea por línea la cadena siguiente. Localice **la primera igualdad falsa**, aunque las transformaciones posteriores sean correctas a partir de la expresión equivocada. Explique por qué el error era plausible y reconstruya desde el último paso válido una factorización verdadera; compruebe ambos productos por expansión.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad E &= x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 20x,\\
(2)\quad &= x(x^3 + 5x^2 - 4x - 20),\\
(3)\quad &= x\big[(x^3 + 5x^2) + (-4x - 20)\big],\\
(4)\quad &= x\big[x^2(x+5) - 4(x+5)\big],\\
(5)\quad &= x(x+5)(x^2 - 4),\\
(6)\quad &= x(x+5)(x-2)(x+2),\\
(7)\quad &= x(x+5)(x-2)^2,\\
(8)\quad &= (x^2 + 5x)(x-2)^2,\\
(9)\quad &= (x^2 + 5x)(x^2 - 4x + 4),\\
(10)\quad &= x^4 + x^3 - 16x^2 + 20x,\\
(11)\quad &= x(x^3 + x^2 - 16x + 20),\\
(12)\quad &= x\big[(x^3 + x^2) + (-16x + 20)\big],\\
(13)\quad &= x\big[x^2(x+1) - 4(4x-5)\big].
\end{aligned}
$$

80. **Nivel G. Síntesis MA-PED completa.** Considere, para $x \in \mathbb{R}$,

$$E(x) = (x+1)^4 - 5(x+1)^2 + 4 + 3(x+1)\big((x+1)^2 - 1\big).$$

Redacte una solución que distinga expresamente: **(1)** lectura de bloques y objetivo; **(2)** estrategia de sustitución $u = x+1$ frente a expansión inmediata; **(3)** identidad que revela el factor común; **(4)** mecanismo de reconstrucción del trinomio y de sus diferencias de cuadrados; **(5)** ejecución técnica de una factorización de varias etapas; **(6)** verificación independiente mediante expansión; **(7)** comparación con una segunda ruta que expanda primero; **(8)** cierre sobre qué información hace visible cada forma. No resuelva la ecuación $E(x) = 0$ ni emplee teoría posterior.

H. Profundización y reconstrucción

Intente cada tarea antes de consultar su solución. Los parámetros son reales salvo indicación distinta.

Ejercicio 081. Factorización paramétrica por reconstrucción. Para cada $t \in \mathbb{R}$, factorice $x^4 + (t-1)x^2 - t$ y explique qué ocurre en $t = -1$ y $t = 0$. Verifique sin dividir por t.

Ejercicio 082. Un parámetro que anula toda una identidad. Simplifique $(tx+1)^2 - (x+t)^2$ y determine todos los t para los que es cero para todo real x.

Ejercicio 083. Una diferencia de productos que no depende de la variable. Pruebe que $(x+a)(x+b) - (x+a+h)(x+b-h)$ es constante en x. Clasifique cuándo es idénticamente cero.

Ejercicio 084. Construir factores enteros consecutivos. Caracterice todos los trinomios $x^2 + Bx + C$ que se escriben $(x+r)(x+r+1)$ con $r \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 085. Diseñar un producto simétrico. Determine para qué $A \in \mathbb{R}$ existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 + Ax^2 + 1 = (x^2 + ux + 1)(x^2 - ux + 1)$ para todo x; dé todos los u.

Ejercicio 086. Una familia cúbica diseñada por sus factores. Construya todos los productos $(x+a)^2(x+b)$ cuyo término en x^2 sea cero. Expanda y conserve el caso $a = 0$.

Ejercicio 087. Expandir para certificar una propiedad aritmética. Para $n \in \mathbb{Z}$, simplifique $(n+1)^4 - 2n^4 + (n-1)^4$. Pruebe que siempre es positivo y par, pero nunca múltiplo de 4.

Ejercicio 088. Paridad visible en una diferencia de cuadrados. Para enteros x, a, b, estudie la paridad de $(x+a)^2 - (x+b)^2$. Pruebe que es múltiplo de 4 si a, b tienen igual paridad y que es impar si tienen paridad distinta.

Ejercicio 089. Un cuadrado oculto entre cuatro consecutivos. Pruebe para todo entero n que $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ es un cuadrado entero. Compare una agrupación y una expansión.

Ejercicio 090. Reparar un patrón casi cuadrado. Compare $x^4 + (a^2+b^2)x^2 + a^2b^2$ con $(x^2 + ab)^2$. Halle su diferencia y determine cuándo coinciden para todo x real.

Ejercicio 091. Certificar una identidad cúbica sin suponer los coeficientes. Determine b, c en función de a para que $(x-a)(x^2 + bx + c) = x^3 - a^3$ para todo real x. Justifique también la necesidad.

Ejercicio 092. Reparar y especializar una identidad de tres variables. Determine λ para que $a^3+b^3+c^3+\lambda abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ para todos los reales. Factorice después la especialización $c = b$.

Soluciones razonadas

En cada solución distinguimos la estructura reconocida de la ley que permite transformarla. Cuando se propone una factorización, la expansión proporciona un control independiente; cuando intervienen radicales o exponentes racionales, se conserva el dominio original. Una identidad no se convierte aquí en un problema de resolución de ecuaciones.

A. Reconocimiento y lectura estructural

Solución 1.

(a) **Expansión**: $(x+2)(x-5)$ debe pasar de producto a suma para mostrar términos y coeficientes. (b) **Factorización**: $6x^2 + 9x$ debe pasar de suma a producto para exhibir el factor $3x$. (c) **Verificación**: se multiplica $(x-4)(x+4)$ y se compara con $x^2 - 16$. (d) **Factorización por cuadrado perfecto**: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ muestra una sola estructura cuadrada. La clasificación depende de la *tarea*, no de la apariencia aislada de los símbolos.

Solución 2. El factor numérico común es 6. Las menores potencias de las variables presentes en los tres términos son x^1 e y^1; el factor conjunto es, por tanto, $6xy$. La forma anticipada es

$$18x^3y^2 - 12x^2y^3 + 6xy = 6xy(3x^2y - 2xy^2 + 1).$$

Para verificarla, se distribuye $6xy$ sobre los tres sumandos: deben reaparecer exactamente los tres términos originales. El último sumando interior es 1, no 0.

Solución 3.

(a) $p^2 - 49 = p^2 - 7^2$: diferencia de cuadrados. (b) $p^2 + 14p + 49$: candidato a $(p+7)^2$, porque $14p = 2p \cdot 7$. (c) $8p^3 + 27 = (2p)^3 + 3^3$: suma de cubos. (d) $p^2 + 49$: **suma**, no diferencia, de cuadrados; no admite directamente la identidad de (a). (e) $p^4 - 16 = (p^2)^2 - 4^2$: diferencia de cuadrados; también puede verse como $(p^4) - (2^4)$, diferencia de cuartas potencias. El caso (e) admite varias lecturas y una segunda diferencia de cuadrados tras el primer paso.

Solución 4. $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2$ es diferencia de cuadrados. $9x^2 + 25$ es suma de cuadrados, sin la misma identidad directa. $9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$: el término medio coincide con $2(3x)(5)$. Finalmente $9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$: el signo negativo corresponde a $-2(3x)(5)$. La presencia de extremos cuadrados **no basta** para reconocer un cuadrado perfecto: es necesario comprobar el término medio.

Solución 5. $(-a)^2 = a^2$, mientras que $-a^2 = -(a^2)$; por ejemplo, para $a = 2$ son 4 y -4. Además,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

La primera es el **cuadrado de una diferencia**; la segunda, una **diferencia de cuadrados**. Para $a = 3, b = 1$ valen 4 y 8, respectivamente. La posición de los paréntesis y el término cruzado deciden qué identidad consultar.

Solución 6. La regla de lectura es $(x+r)(x+s) = x^2 + (r+s)x + rs$. Para $x^2 + 7x + 10$ se requiere $r+s = 7$ y $rs = 10$; para $x^2 - x - 12$, $r+s = -1$ y $rs = -12$; para $x^2 - 8x + 15$, $r+s = -8$ y $rs = 15$. Son las condiciones buscadas; no se necesita completar las factorizaciones en esta etapa de reconocimiento.

Solución 7. Una agrupación es $(x^3 + 4x^2) + (-9x - 36)$: se anticipa $x^2(x+4) - 9(x+4)$, de modo que aparece $(x+4)$. Otra es $(x^3 - 9x) + (4x^2 - 36)$: se anticipa $x(x^2-9) + 4(x^2-9)$, que produce (x^2-9). Ambas agrupaciones son legítimas; anticipar *qué factor aparecerá* hace que la selección sea estratégica.

Solución 8.

(a) Sea $u = x^3$. Entonces $x^6 - 7x^3 + 10$ se lee como $u^2 - 7u + 10$: un trinomio mónico. (b) Sea $u = (2x-1)^2$. Entonces aparece $u^2 - 5u + 4$. Primero se analiza el trinomio en u; después se sustituye de vuelta el bloque exacto, x^3 o $(2x-1)^2$, y se inspeccionan los factores resultantes por si esconden diferencias de cuadrados. La sustitución sólo *nombra* una estructura; no autoriza olvidar su definición.

Solución 9.

(a) **Expandir** $(x-3)(2x+1)$ para leer los coeficientes de $2x^2 - 5x - 3$. (b) **Factorizar** $x^2 - 9$ como $(x-3)(x+3)$ para exhibir los factores. (c) **Conservar la estructura y extraer** $(x+1)$: $(x+1)[(x-2)+4] = (x+1)(x+2)$; expandir primero sería trabajo innecesario. (d) **Conservar las formas desarrolladas** para comparar término a término, tras reunir los términos semejantes si hace falta. La finalidad decide la representación.

Solución 10. En $\mathbb{R}$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$ exige $x \geq 0$; ése es también el dominio de $x^{3/2}$. Para $x > 0$, $x^{3/2} = x\,x^{1/2}$, por lo que el factor esperado es $x^{1/2}$ y la forma $\sqrt{x}(x-1)$. En $x = 0$ ambas expresiones valen 0, de modo que la identidad se extiende al dominio original. La forma factorizada debe seguir interpretándose en $x \geq 0$: la manipulación no asigna valores reales a la expresión original para $x < 0$.

B. Fluidez técnica

Solución 11. Cada término procede de un producto distinto:

$$(3x-2)(2x+5) = \underbrace{6x^2}_{(3x)(2x)} + \underbrace{15x}_{(3x)(5)} - \underbrace{4x}_{(-2)(2x)} - \underbrace{10}_{(-2)(5)} = 6x^2 + 11x - 10.$$

La reunión $15x - 4x = 11x$ ocurre *después* de distribuir.

Solución 12.

$$(x-2y)(x+3y) = x^2 + 3xy - 2xy - 6y^2 = x^2 + xy - 6y^2.$$

Los dos productos que forman el coeficiente de xy son $x \cdot 3y = 3xy$ y $(-2y) \cdot x = -2xy$; juntos dan xy.

Solución 13. Distribuimos cada sumando del primer factor:

$$\begin{aligned}(2x - y + 3)(x + 2y) &= 2x^2 + 4xy - xy - 2y^2 + 3x + 6y \\ &= 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + 6y.\end{aligned}$$

El signo $-2y^2$ procede de $(-y)(2y)$; organizar el cálculo por sumando previene la omisión de productos.

Solución 14. El factor numérico común máximo visible es 12; las potencias comunes son x^2y^2. Entonces

$$24x^4y^2 - 36x^3y^3 + 12x^2y^2 = 12x^2y^2(2x^2 - 3xy + 1).$$

La expansión de la derecha devuelve $24x^4y^2 - 36x^3y^3 + 12x^2y^2$. El coeficiente final del paréntesis es 1 porque se ha extraído el tercer término entero.

Solución 15. Elegimos $-4x$, que deja positivo el primer coeficiente interior:

$$-4x^3 + 12x^2 - 8x = -4x(x^2 - 3x + 2).$$

Los signos interiores son $+$, $-$ y $+$: multiplicados por $-4x$ producen, respectivamente, $-4x^3$, $+12x^2$ y $-8x$. Además $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, por lo que puede escribirse $-4x(x-1)(x-2)$; la verificación por expansión recupera el original.

Solución 16.

$$\begin{aligned}(3a - 2b)^2 &= (3a - 2b)(3a - 2b) \\ &= 9a^2 - 6ab - 6ab + 4b^2 \\ &= 9a^2 - 12ab + 4b^2.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$(x+4)^2 = (x+4)(x+4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16.$$

Los términos cruzados se obtienen de dos productos diferentes.

Solución 17.

$$16x^2 - 81y^2 = (4x)^2 - (9y)^2 = (4x - 9y)(4x + 9y).$$

La comprobación es $(4x - 9y)(4x + 9y) = 16x^2 - 81y^2$ porque $36xy - 36xy = 0$.

Solución 18. Repetimos la misma identidad donde aparece una nueva diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} x^8 - 1 &= (x^4 - 1)(x^4 + 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1). \end{aligned}$$

La primera comprobación: $(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1$. No declaramos irreducibles los otros factores; simplemente detenemos esta ruta de *diferencias de cuadrados visibles*.

Solución 19. Es suma de cubos de $3a$ y $2b$:

$$27a^3 + 8b^3 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2).$$

Al expandir, los términos mixtos son $-18a^2b + 18a^2b$ y $12ab^2 - 12ab^2$: ambos pares se cancelan y quedan $27a^3 + 8b^3$. El signo central negativo es indispensable.

Solución 20.

$$64x^3 - 125 = (4x)^3 - 5^3 = (4x - 5)(16x^2 + 20x + 25).$$

La expansión produce $64x^3+80x^2+100x-80x^2-100x-125 = 64x^3-125$. Son precisamente los términos mixtos los que se cancelan.

Solución 21. Agrupamos:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 9x - 36 &= x^2(x + 4) - 9(x + 4) \\ &= (x + 4)(x^2 - 9) \\ &= (x + 4)(x - 3)(x + 3). \end{aligned}$$

El nuevo factor $x^2 - 9$ es una diferencia de cuadrados, motivo para volver a inspeccionar después de agrupar.

Solución 22.

$$6xy - 9x + 4y - 6 = 3x(2y - 3) + 2(2y - 3) = (3x + 2)(2y - 3).$$

El binomio $2y - 3$ aparece dos veces; distribuir el producto final devuelve los cuatro términos iniciales.

Solución 23. Buscamos $r + s = -9$ y $rs = 20$. La pareja $-4, -5$ satisface ambas condiciones, por lo que

$$x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5).$$

Expandir devuelve $x^2 - (4 + 5)x + 20$.

Solución 24. Las condiciones son $r + s = 2$ y $rs = -35$, satisfechas por $7, -5$. Por tanto,

$$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5).$$

La comprobación da $x^2 - 5x + 7x - 35 = x^2 + 2x - 35$: el producto negativo exige signos opuestos, pero la suma decide cuál es positivo.

Solución 25. Aquí $ac = 6 \cdot 6 = 36$. Elegimos $9, 4$, pues $9 + 4 = 13$ y $9 \cdot 4 = 36$:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 13x + 6 &= 6x^2 + 9x + 4x + 6 \\ &= 3x(2x + 3) + 2(2x + 3) \\ &= (3x + 2)(2x + 3). \end{aligned}$$

El producto ac organiza la partición del término medio para que surja un binomio común.

Solución 26. $ac = 12(-10) = -120$. La pareja $-15, 8$ tiene suma -7 y producto -120:

$$\begin{aligned} 12x^2 - 7x - 10 &= 12x^2 - 15x + 8x - 10 \\ &= 3x(4x - 5) + 2(4x - 5) \\ &= (3x + 2)(4x - 5). \end{aligned}$$

La expansión muestra coeficiente lineal $-15 + 8 = -7$ y constante $2(-5) = -10$, además del término principal $3 \cdot 4x^2 = 12x^2$.

C. Justificación y reconstrucción

Solución 27. La primera distributividad respecto del factor izquierdo da

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d).$$

La segunda, aplicada en ambos sumandos, da $ac + ad + bc + bd$. Para leer la igualdad al revés, primero identificamos los pares $ac + ad = a(c + d)$ y $bc + bd = b(c + d)$; al reconstruir el bloque compartido $c + d$ obtenemos $(a + b)(c + d)$. No basta observar cuatro términos: debemos reconocer una organización que produzca el mismo factor compuesto.

Solución 28.

$$\begin{aligned} (a - b)(a - b) &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Los términos cruzados son $a(-b) = -ab$ y $(-b)a = -ab$. Por ejemplo, $a = 3, b = 1$ refuta la falsa identidad: $(3 - 1)^2 = 4$, mientras $3^2 - 1^2 = 8$. La fórmula correcta para la última expresión es $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Solución 29. Comenzamos con el cuadrado ya demostrado:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Los tres aportes a a^2b y los tres a ab^2 explican los coeficientes 3. Desde C13, el teorema del binomio proporciona la misma secuencia $\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3} = 1, 3, 3, 1$. La expansión muestra el mecanismo; el teorema revela su estructura combinatoria general.

Solución 30.

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

La cancelación de ab con $-ab$ produce una **diferencia**, nunca una suma de cuadrados. Con $a = b = 1$, el supuesto $a^2 + b^2 = (a - b)(a + b)$ afirmaría $2 = 0$, lo que la refuta. La expansión es simultáneamente demostración de la identidad verdadera y diagnóstico de la falsa.

Solución 31. Para la diferencia,

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 + \underbrace{a^2b}_{+} - \underbrace{a^2b}_{-} + \underbrace{ab^2}_{+} - \underbrace{ab^2}_{-} - b^3 \\ &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 - \underbrace{a^2b}_{-} + \underbrace{a^2b}_{+} + \underbrace{ab^2}_{+} - \underbrace{ab^2}_{-} + b^3 \\ &= a^3 + b^3.\end{aligned}$$

En ambos casos se anulan exactamente un par de términos de tipo a^2b y otro de tipo ab^2; los signos interiores son los necesarios para esa cancelación.

Solución 32. Sea $S = \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^j$, para $n \geq 1$. Distribuimos y cambiamos sólo el índice de la segunda suma:

$$\begin{aligned}(a-b)S &= \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j}b^j - \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j}b^j - \sum_{j=1}^{n} a^{n-j}b^j \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

Cada índice $1 \leq j \leq n-1$ se cancela. El extremo $j=0$ de la primera suma deja a^n y el extremo $j=n$ de la segunda deja $-b^n$. Para $n=1$, definimos la suma de un único término como $S=1$, y la identidad se reduce a $(a-b)\cdot 1 = a-b$. En las sumas generales, un factor de exponente cero se **omite** como factor vacío; en particular no estamos evaluando 0^0 cuando alguna base vale cero. Todo se obtiene mediante operaciones finitas.

Solución 33. En la identidad anterior reemplazamos b por $-b$. Como $n = 2k+1$ es impar, $(-b)^n = -b^n$ y

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^{n-1-j}b^j.$$

Los signos alternan porque cada término lleva $(-b)^j$; el último es positivo, pues $n-1 = 2k$ es par. Para $n=3$, resulta $(a+b)(a^2-ab+b^2)$; para $n=5$, $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$. Expandir cualquiera de ellos anula los términos intermedios y conserva a^n+b^n.

Solución 34. Suficiencia. Si $r+s=b$ y $rs=c$, entonces

$$(x+r)(x+s) = x^2 + (r+s)x + rs = x^2 + bx + c.$$

Necesidad. Si esta igualdad vale para *todo* x, al expandir y restar x^2 tenemos

$$[b-(r+s)]x + [c-rs] = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Al elegir $x=0$ deducimos $c-rs=0$. Con $x=1$ queda $b-(r+s)=0$. Por tanto $c=rs$ y $b=r+s$. El argumento justifica la comparación de coeficientes sin presuponer todavía una teoría formal de polinomios.

Solución 35. Como $a \neq 0$, la expresión propuesta está definida. Al expandir,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}(ax+m)(ax+n) &= \frac{1}{a}(a^2x^2 + a(m+n)x + mn)\\ &= ax^2 + bx + c,\end{aligned}$$

porque $m+n=b$ y $mn=ac$. Esta fórmula explica el método: dividir bx como $mx+nx$ permite reagrupar $ax^2+mx+nx+c$ hasta construir los factores. Ejemplo propio, distinto del desarrollado en la teoría: $8x^2+14x+3$ tiene $ac=24$; elegimos $m=12$ y $n=2$, pues $12+2=14$ y $12\cdot 2=24$. Por agrupación,

$$8x^2+14x+3 = 8x^2+12x+2x+3 = 4x(2x+3)+(2x+3) = (4x+1)(2x+3).$$

La factorización se comprueba expandiendo. El método no presupone que cualquier pareja exista dentro de una clase de coeficientes fijada.

Solución 36. Ruta por agrupación:

$$\begin{aligned}x^3+5x^2-4x-20 &= x^2(x+5)-4(x+5)\\ &= (x+5)(x^2-4)\\ &= (x+5)(x-2)(x+2).\end{aligned}$$

Ruta inversa de verificación: $(x-2)(x+2)=x^2-4$ y

$$(x+5)(x^2-4) = x^3+5x^2-4x-20.$$

La primera ruta *descubre* una estructura común; la segunda comprueba independientemente que la expresión propuesta reproduce todos los términos.

Solución 37. Por asociatividad y conmutatividad, $2x(x+1) = x[2(x+1)]$, y por distributividad $2(x+1)=2x+2$. Luego

$$2x(x+1) = x(2x+2) = 2x^2+2x.$$

La primera forma destaca el factor $2x$ y el bloque $x+1$; la segunda, el factor x y el bloque $2x+2$; la tercera, dos términos y sus coeficientes. Las tres son iguales para todo x, pero su utilidad depende de qué información se necesite.

Solución 38. El dominio real de $x^{3/2}-x^{1/2}$ es $x\geq 0$. Para $x>0$, la ley de potencias da $x^{3/2}=x^{1/2}x$, así que

$$x^{3/2}-x^{1/2} = x^{1/2}(x-1) = \sqrt{x}(x-1).$$

En el extremo $x=0$, la expresión original y la factorizada valen 0 directamente, por lo que también allí coinciden. La expresión factorizada debe conservar la restricción $x\geq 0$; no se infiere una extensión real a valores negativos de x.

D. Diagnóstico del primer paso inválido

Solución 39. La **primera** igualdad es falsa: $(a+b)^2$ se ha tratado como si el cuadrado distribuyera sobre una suma. En realidad,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2.$$

Además, la última expresión propuesta $(a-b)(a+b)$ vale a^2-b^2, no a^2+b^2. Con $a=b=1$, la primera igualdad falsa da $4=2$. Se reconstruye desde $(a+b)^2$, sin considerar verdaderas las igualdades posteriores por el mero hecho de que forman una cadena.

Solución 40. El primer error es $(x-4)^2 = x^2 - 16$: se confundió el cuadrado de una diferencia con una diferencia de cuadrados. La reparación es

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16.$$

La identidad diferente $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$ sí es válida, pero **no** demuestra la cadena propuesta. Para $x = 0$, por ejemplo, $(x-4)^2 = 16$ y $x^2 - 16 = -16$.

Solución 41. La primera igualdad es inválida: $a^2 + b^2$ no es, en general, $(a+b)(a-b)$. La segunda igualdad es correcta si se la aísla:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Con $a = b = 1$ se ve $2 \neq 0$. La corrección consiste en sustituir el miembro inicial por $a^2 - b^2$, no en presentar una falsa factorización de la suma de cuadrados.

Solución 42. El primer error es $(a+b)^3 = a^3 + b^3$: se perdieron $3a^2b + 3ab^2$. La expansión correcta es

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En cambio, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ es una identidad verdadera aislada. Esa coincidencia posterior no repara el primer salto falso ni valida la cadena completa.

Solución 43. La primera igualdad ya falla por el signo central: la propuesta $(x+2)(x^2 + 2x + 4)$ expande a $x^3 + 4x^2 + 8x + 8$, no a $x^3 + 8$. La suma de cubos correcta es

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Al expandir aparecen $+2x^2 - 2x^2$ y $+4x - 4x$, que se cancelan. La segunda igualdad de la cadena original también es falsa; la primera falla antes.

Solución 44. La primera igualdad cambia el signo equivocado: $(x-2)(x^2 - 2x + 4)$ contiene $-4x^2 + 8x$, que no están en $x^3 - 8$. La identidad de diferencia de cubos da

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Comprobación: $x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$. El término central del factor cuadrático debe ser $+2x$.

Solución 45. La primera ruptura aparece al escribir $6x^2 + 9x = 3x(2x + 9)$. Distribuir el supuesto resultado da $6x^2 + 27x$, como la propia cadena reconoce; el factor de $9x$ por $3x$ deja coeficiente residual 3, **no** 9. La reparación es

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3).$$

Expandir verifica exactamente la expresión inicial.

Solución 46. La primera igualdad es falsa porque extraer -1 debe invertir **todos** los signos:

$$-x^2 + 5x - 6 = -(x^2 - 5x + 6).$$

Ahora $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, pues $(-2) + (-3) = -5$ y $(-2)(-3) = 6$. En consecuencia,

$$-x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3).$$

No estamos resolviendo una ecuación: comprobamos una identidad multiplicando.

Solución 47. La primera igualdad es correcta: $(x+2)(x+5) = x^2+7x+10$. La **segunda** es falsa porque cambiar $x+5$ por $x-5$ altera tanto el término lineal como el constante. La reparación es conservar

$$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5).$$

Al expandir de nuevo se obtiene $x^2 + (2+5)x + 10$. Para $x = 0$, el producto correcto vale 10 y el alterado vale -10.

Solución 48. La primera descomposición $11x = 6x + 5x$ es correcta; también lo es $6x^2 + 6x = 6x(x+1)$. La **primera igualdad falsa** es la última: $6x(x+1) + (5x+3)$ no tiene el binomio $(x+1)$ como factor común, y $(x+1)(6x+3) = 6x^2+9x+3$, no la expresión anterior.

Para fabricar una agrupación útil, elegimos $9+2 = 11$ y $9 \cdot 2 = 6 \cdot 3 = 18$:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 11x + 3 &= 6x^2 + 9x + 2x + 3 \\ &= 3x(2x+3) + (2x+3) \\ &= (3x+1)(2x+3). \end{aligned}$$

La expansión confirma el término medio $9x + 2x = 11x$.

Solución 49. La primera sustitución ya falla: con $u = x$, $u^2 = x^2$, no x^4. Debe elegirse $u = x^2$ para obtener $u^2 - 5u + 4$. Éste factoriza como $(u-1)(u-4)$; al regresar,

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

No se resolvió ninguna ecuación; se reconstruyó una identidad y puede comprobarse expandiendo.

Solución 50. El dominio original es $x \geq 0$. El primer error está en $x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x+1)$: por distributividad, la expresión de la derecha vale $x^{3/2} + x^{1/2}$, con signo **positivo** en el segundo término. La forma corregida es

$$x^{3/2} - x^{1/2} = \sqrt{x}(x-1), \qquad x \geq 0.$$

Para $x > 0$ se usa $x^{3/2} = x\sqrt{x}$; para $x = 0$ se evalúan directamente ambos lados y se obtiene $0 = 0$. La igualdad falsa coincide fortuitamente en 0, lo que demuestra que una comprobación en un solo punto no acredita una identidad.

E. Estrategia y elección de representación

Solución 51. Los dos productos comparten el bloque $(x+2)$: conservarlo ahorra una expansión y una refactorización. Por distributividad inversa,

$$\begin{aligned} (x+2)(x-3) + (x+2)(2x+1) &= (x+2)[(x-3) + (2x+1)] \\ &= (x+2)(3x-2). \end{aligned}$$

La ruta alternativa desarrolla: $(x^2 - x - 6) + (2x^2 + 5x + 2) = 3x^2 + 4x - 4$, que al expandir $(x+2)(3x-2)$ resulta igual. Extraer primero el factor compuesto evita producir seis términos para recuperar un producto ya visible.

Solución 52. $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2$ es una diferencia de cuadrados directa:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

En cambio, $x^4 + 16$ es inicialmente una **suma** de cuadrados y no admite aplicar a sus dos términos la misma fórmula. No debemos concluir de ello que sea imposible factorizarla de otra manera. Podemos *construir* una diferencia de cuadrados usando identidades ya estudiadas y $\sqrt{2}$ de C18:

$$\begin{aligned} x^4 + 16 &= (x^2 + 4)^2 - (2\sqrt{2}\,x)^2 \\ &= (x^2 + 4 - 2\sqrt{2}\,x)(x^2 + 4 + 2\sqrt{2}\,x). \end{aligned}$$

La expansión confirma que los $8x^2$ añadidos y sustraídos se cancelan. En C19 no se emite un juicio formal de irreducibilidad ni se exige una clasificación completa sobre distintos cuerpos; se precisa qué identidad se usa y por qué la aplicación directa inicial era incorrecta.

Solución 53. Inspección: buscamos factores principales $3x$ y $2x$ y constantes 1 y 3; $(3x + 1)(2x + 3)$ produce término cruzado $9x + 2x = 11x$. **Método** *ac***:** $ac = 18$, pareja $9, 2$; por tanto,

$$6x^2 + 11x + 3 = 6x^2 + 9x + 2x + 3 = 3x(2x + 3) + (2x + 3) = (3x + 1)(2x + 3).$$

La inspección utiliza la estructura esperada del producto; el método *ac* fabrica sistemáticamente una agrupación. Expandir $(3x + 1)(2x + 3) = 6x^2 + 11x + 3$ verifica ambas rutas.

Solución 54. Antes de buscar un patrón especial, observamos el factor común $4x$:

$$8x^3 + 12x^2 + 4x = 4x(2x^2 + 3x + 1).$$

La nueva forma revela un trinomio que puede reconstruirse como $(2x + 1)(x + 1)$, pues su expansión es $2x^2 + 3x + 1$. Concluimos

$$4x(2x + 1)(x + 1).$$

No había un producto que expandir al inicio. El primer paso reduce el número de factores y **hace aparecer** una estructura distinta; por eso es preciso volver a leer después de extraer el factor común.

Solución 55. Elegimos la forma desarrollada como representación común, porque el objetivo es comparar dos expresiones:

$$(x - 1)(x + 1) + 2x + 2 = x^2 - 1 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1.$$

Es idéntica a la primera. Alternativamente, ambas expresiones se reconstruyen como $(x + 1)^2$; en efecto, la segunda es $(x + 1)[(x - 1) + 2] = (x + 1)^2$. La forma desarrollada facilita la comparación término a término; la factorizada muestra el cuadrado oculto.

Solución 56. Un ejemplo original es $x^2 + 5x + 16$. Sus extremos son x^2 y 4^2, pero para que sea $(x + 4)^2$ necesita el término central $2x \cdot 4 = 8x$. Con $5x$ no es ese cuadrado perfecto. Corrigiendo el término medio obtenemos

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2.$$

La identificación de los extremos sólo sugiere un candidato: el doble producto debe comprobarse antes de declararlo identidad.

Solución 57. Una primera agrupación produce

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x^2+3).$$

Reordenando los términos obtenemos una segunda:

$$(x^3 + 3x) + (-2x^2 - 6) = x(x^2+3) - 2(x^2+3) = (x-2)(x^2+3).$$

La primera intenta fabricar $(x-2)$ y la segunda (x^2+3). Al extraer el factor común final, el mismo producto aparece con el orden de los factores intercambiado. Su expansión reproduce el enunciado.

Solución 58. El bloque repetido es $(x-2)^2$. Si $u = (x-2)^2$, entonces

$$u^2 - 5u + 4 = (u-1)(u-4).$$

Al regresar,

$$[(x-2)^2 - 1][(x-2)^2 - 4].$$

Aquí hay que volver a inspeccionar: cada corchete es diferencia de cuadrados. Así,

$$[(x-3)(x-1)][(x-4)x] = x(x-1)(x-3)(x-4).$$

La sustitución sirve para ver el trinomio y deshacerla revela los factores adicionales; expandir en sentido inverso confirma la identidad.

Solución 59. Diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

Diferencia de cubos:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ &= (a-b)(a+b)[(a^2+b^2)^2 - (ab)^2] \\ &= (a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

Los productos finales son iguales por conmutatividad de los factores. En la segunda ruta, la identidad intermedia se verifica expandiendo $(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4$. No necesitamos teorema del factor.

Solución 60. La suma presenta el bloque común (x^2+9); extraerlo primero conserva la estructura:

$$\begin{aligned} (x^2+9)(x^2-9) + 3(x^2+9) &= (x^2+9)[(x^2-9) + 3] \\ &= (x^2+9)(x^2-6). \end{aligned}$$

Al expandir la expresión original: $(x^4 - 81) + 3x^2 + 27 = x^4 + 3x^2 - 54$. Expandir $(x^2 + 9)(x^2 - 6)$ da el mismo resultado. La forma producto conserva los factores; la desarrollada permite leer coeficientes. Ninguna es superior para *todas* las tareas.

F. Transferencia acumulativa

Solución 61. El dominio original es $x \geq 0$. Para $x > 0$, las leyes de C18 permiten extraer $x^{1/2}$:

$$\begin{aligned} x^{5/2} - 4x^{3/2} + 3x^{1/2} &= x^{1/2}(x^2 - 4x + 3) \\ &= \sqrt{x}(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

La pareja $-1, -3$ tiene suma -4 y producto 3. En $x = 0$ todos los términos originales y el producto final valen 0, de modo que la identidad también es válida allí. Mantener $x \geq 0$ es parte de la respuesta.

Solución 62. La hipótesis $x > 0$ asegura que los exponentes racionales y sus leyes pueden utilizarse de forma sistemática. Tomando $u = x^{2/3}$,

$$x^{4/3} - 5x^{2/3} + 4 = u^2 - 5u + 4 = (u-1)(u-4).$$

Al regresar,

$$(x^{2/3} - 1)(x^{2/3} - 4), \qquad x > 0.$$

Si se desea continuar, con $v = x^{1/3} > 0$ los factores son diferencias de cuadrados: $(v-1)(v+1)(v-2)(v+2)$. Cada sustitución debe revertirse de manera completa y la hipótesis original $x > 0$ permanece; no se amplía el dominio al simplificar.

Solución 63. El dominio original es $x \geq 0$. El factor compuesto común es $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}(x-4) + 2\sqrt{x}(x+1) = \sqrt{x}[(x-4) + 2(x+1)] = \sqrt{x}(3x-2).$$

Distribuyendo el producto final obtenemos $3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$, y en el original $x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ produce lo mismo. La comprobación incluye $x = 0$ porque ninguna expresión contiene divisiones por $\sqrt{x}$.

Solución 64. Ruta por expansión:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + (u-v)^3 &= (u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) \\ &\quad + (u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3) \\ &= 2u^3 + 6uv^2 \\ &= 2u(u^2 + 3v^2). \end{aligned}$$

Las contribuciones impares en v se cancelan por parejas. **Ruta de reagrupación estructural:** sean $A = u + v$, $B = u - v$. La suma de cubos produce $(A+B)(A^2 - AB + B^2)$; aquí $A + B = 2u$ y

$$A^2 - AB + B^2 = (u+v)^2 - (u^2 - v^2) + (u-v)^2 = u^2 + 3v^2.$$

Extraemos así inmediatamente el factor $2u$ y obtenemos el mismo producto. No se requiere restricción de dominio: son identidades para todos los reales u, v.

Solución 65. Ruta (i), cuadrados primero:

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Los dos factores cúbicos se tratan mediante diferencia y suma de cubos. **Ruta (ii), cubos primero:**

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^2-1)(x^4+x^2+1) \\ &= (x-1)(x+1)[(x^2+1)^2 - x^2] \\ &= (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Son los mismos cuatro factores, salvo el orden. La identidad $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4+x^2+1$ verifica la equivalencia por expansión.

Solución 66. Como 7 es impar, aplicamos la suma de potencias con $a = x$, $b = 2$:

$$\boxed{x^7 + 2^7 = (x+2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64).}$$

Los siete términos del segundo factor alternan signos $+, -, +, -, +, -, +$. Al distribuir x y 2, cada término intermedio $\pm 2^j x^{7-j}$ aparece con el signo opuesto de la otra distribución; se cancelan. Sólo quedan x^7 del primer extremo y $2 \cdot 64 = 128 = 2^7$ del último extremo. La comprobación es algebraica y no usa raíces de polinomios.

Solución 67. Pongamos $u = x^2$. El trinomio auxiliar factoriza como

$$u^2 - 10u + 9 = (u-1)(u-9)$$

porque $-1 - 9 = -10$ y $(-1)(-9) = 9$. Al regresar,

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2-1)(x^2-9) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3).$$

La expansión de los dos factores cuadráticos produce $(x^2)^2 - 10x^2 + 9$, verificando la expresión inicial.

Solución 68. El bloque repetido es $u = (x+1)^2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (x+1)^4 - 10(x+1)^2 + 9 &= u^2 - 10u + 9 \\ &= (u-1)(u-9) \\ &= [(x+1)^2 - 1][(x+1)^2 - 9] \\ &= x(x+2)(x-2)(x+4). \end{aligned}$$

Ambos corchetes son diferencias de cuadrados, pues $1 = 1^2$ y $9 = 3^2$. Expandir desde el inicio un binomio a la cuarta potencia y luego volver a factorizar generaría más términos intermedios; la sustitución conserva visible la estructura cuadrática del bloque.

Solución 69. Los primeros tres términos forman el cuadrado perfecto

$$9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)^2.$$

Luego

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6xy + y^2 - 25z^2 &= (3x-y)^2 - (5z)^2 \\ &= (3x - y - 5z)(3x - y + 5z). \end{aligned}$$

Verificación independiente: multiplique los dos factores como conjugados, obteniendo $(3x-y)^2 - 25z^2$, y expanda el cuadrado para recuperar los cuatro términos. El término cruzado $-6xy$ es indispensable.

Solución 70. Descomponemos los coeficientes que contienen k para fabricar el bloque $x + k$:

$$\begin{aligned} &x^3 + (k+2)x^2 + (2k-3)x - 3k \\ &= x^3 + kx^2 + 2x^2 + 2kx - 3x - 3k \\ &= x^2(x+k) + 2x(x+k) - 3(x+k) \\ &= (x+k)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x+k)(x+3)(x-1). \end{aligned}$$

Para el último paso, $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$. El parámetro k se trata como un real arbitrario: no hace falta dividir por él ni imponer $k \neq 0$. La expansión del producto final da exactamente $x^3 + (k+2)x^2 + (2k-3)x - 3k$ para todo $x, k \in \mathbb{R}$.

Solución 71. Ruta (i): extraemos $3x$ y aplicamos diferencia de cuadrados:

$$12x^3 - 27x = 3x(4x^2 - 9) = 3x(2x-3)(2x+3).$$

Ruta (ii): extraemos sólo x y luego reorganizamos el coeficiente:

$$x(12x^2 - 27) = x \cdot 3[(2x)^2 - 3^2] = 3x(2x-3)(2x+3).$$

La primera reconoce de entrada un factor común más grande; la segunda lo descubre después. Expandir los conjugados da $4x^2 - 9$, y multiplicar por $3x$ produce $12x^3 - 27x$.

Solución 72. Ruta (i): primero extraemos 4 y luego usamos $u = x^2$:

$$\begin{aligned} 4x^4 - 20x^2 + 16 &= 4(x^4 - 5x^2 + 4) \\ &= 4(u^2 - 5u + 4) \\ &= 4(u-1)(u-4) \\ &= 4(x-1)(x+1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Ruta (ii): fabricamos una diferencia de cuadrados dentro del mismo factor común:

$$\begin{aligned} 4(x^4 - 5x^2 + 4) &= 4[(x^2+2)^2 - (3x)^2] \\ &= 4(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2) \\ &= 4(x-1)(x-2)(x+1)(x+2). \end{aligned}$$

La construcción funciona porque $(x^2+2)^2 - 9x^2 = x^4 - 5x^2 + 4$. Ambas rutas son identidades de expresiones, no resolución de ecuaciones, y sus productos sólo difieren por el orden de los factores.

G. Síntesis avanzada

Solución 73. Lectura y plan. La expresión $2x^4 + 6x^3 - 18x^2 - 54x$ tiene factor común $2x$. Después quedarán cuatro términos: convendrá agruparlos y volver a buscar un patrón.

Ruta principal, cuatro etapas:

$$\begin{aligned} E &= 2x(x^3+3x^2-9x-27) && \text{factor común},\\ &= 2x\big[x^2(x+3)-9(x+3)\big] && \text{agrupación},\\ &= 2x(x+3)(x^2-9) && \text{factor compuesto},\\ &= 2x(x+3)(x-3)(x+3) && \text{diferencia de cuadrados}\\ &= \boxed{2x(x+3)^2(x-3)}. && \text{relectura} \end{aligned}$$

Verificación independiente. $(x+3)^2(x-3) = (x+3)(x^2-9) = x^3+3x^2-9x-27$; al multiplicar por $2x$ se recuperan exactamente los cuatro términos del enunciado.

Ruta alternativa, agrupación primero:

$$\begin{aligned} E &= (2x^4+6x^3)+(-18x^2-54x)\\ &= 2x^3(x+3)-18x(x+3)\\ &= (x+3)(2x^3-18x)\\ &= 2x(x+3)(x^2-9)\\ &= 2x(x+3)^2(x-3). \end{aligned}$$

Las rutas difieren en el momento de extraer $2x$, no en la identidad final. En ninguna etapa se divide por x o $x+3$, por lo que las igualdades valen para todo real x.

Solución 74. Arquitectura 1: dos diferencias de cuadrados. Identificamos $A = (a+b)^2$ y $B = (a-b)^2$:

$$\begin{aligned} (a+b)^4-(a-b)^4 &= [(a+b)^2-(a-b)^2][(a+b)^2+(a-b)^2]\\ &= [(2b)(2a)]\,[2(a^2+b^2)]\\ &= \boxed{8ab(a^2+b^2)}. \end{aligned}$$

La primera diferencia de cuadrados interna se obtiene con $(a+b)-(a-b) = 2b$ y $(a+b)+(a-b) = 2a$; la suma de cuadrados de los binomios vale $2a^2+2b^2$ porque $+2ab$ y $-2ab$ se cancelan.

Arquitectura 2: expansión binomial.

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\\ (a-b)^4 &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4. \end{aligned}$$

Al restar se cancelan a^4, $6a^2b^2$ y b^4; los términos de grados impares en b se duplican: $8a^3b+8ab^3 = 8ab(a^2+b^2)$. La primera prueba explota la forma antes de expandir; la segunda identifica explícitamente la cancelación entre coeficientes binomiales. Ambas son válidas para todos los reales a, b.

Solución 75. Demostración general. Definimos para $n \geq 1$ la suma finita

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}b^j.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (a-b)S_n &= \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j}b^j - \sum_{j=1}^{n} a^{n-j}b^j\\ &= a^n - b^n, \end{aligned}$$

pues los términos de índices $1, \dots, n-1$ se anulan por parejas. En $n = 1$, S_1 es por definición la suma de un único término 1, y se recupera $a - b = (a - b) \cdot 1$. En los extremos de las sumas se omiten los factores de exponente cero (producto vacío); no se evalúa 0^0 si una base vale cero. La prueba no utiliza división por $a - b$ ni el teorema del factor.

Aplicación con exponente 10**.** Directamente,

$$x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Aplicación como diferencia de quintas potencias. Sustituyendo $a = x^2$, $b = 1$, $n = 5$:

$$\begin{aligned} x^{10} - 1 &= (x^2 - 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1). \end{aligned}$$

Comparación. Multiplicar $(x + 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$ produce exactamente los diez sumandos $x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$. Por tanto, los factores de ambas rutas son compatibles: la segunda revela un factor $x + 1$ que la primera todavía no había hecho visible. No declaramos que alguna expresión sea irreducible ni empleamos teoría de raíces.

Solución 76. Sea $n = 2k+1 \geq 1$. Partimos de la diferencia de potencias y reemplazamos b por $-b$:

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= a^n - (-b)^n \\ &= (a + b) \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j}(-b)^j \\ &= (a + b) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^{n-1-j} b^j. \end{aligned}$$

La sustitución es válida porque $(-b)^n = -b^n$ para n impar. Para $a = x$, $b = 1$ y $n = 7$:

$$\boxed{x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).}$$

Los siete signos del segundo factor son $+, -, +, -, +, -, +$. Si $S = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, entonces xS y S aportan términos iguales y opuestos en grados 1 a 6; sólo permanecen x^7 y 1. Esto demuestra por expansión telescópica que el producto reproduce $x^7 + 1$, incluso para $x = -1$ sin realizar ninguna división.

Solución 77. Ruta (i), factor numérico inicial. Como los tres coeficientes son múltiplos de 3,

$$18x^2 - 21x - 15 = 3(6x^2 - 7x - 5).$$

En el trinomio interior, $ac = 6(-5) = -30$. Buscamos sumandos -10 y 3, cuyo producto es -30 y suma -7:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 5 &= 6x^2 - 10x + 3x - 5 \\ &= 2x(3x - 5) + (3x - 5) \\ &= (2x + 1)(3x - 5). \end{aligned}$$

La forma final es $\boxed{3(2x + 1)(3x - 5)}$.

Ruta (ii), descomposición directa. Sin sacar el 3, usamos $ac = 18(-15) = -270$. La pareja $-30, 9$ suma -21 y tiene producto -270:

$$\begin{aligned}18x^2 - 21x - 15 &= 18x^2 - 30x + 9x - 15\\ &= 6x(3x - 5) + 3(3x - 5)\\ &= (6x + 3)(3x - 5)\\ &= 3(2x + 1)(3x - 5).\end{aligned}$$

La primera ruta reduce los coeficientes antes de buscar la pareja y suele facilitar la aritmética; la segunda muestra que el procedimiento también funciona directamente. **Verificación:** $(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 7x - 5$ y el factor 3 devuelve $18x^2 - 21x - 15$.

Solución 78. Bloque y estrategia. Escribimos $u = x^2 + 2x$. El enunciado se convierte en un trinomio mónico:

$$u^2 - 2u - 3 = (u - 3)(u + 1),$$

pues $-3 + 1 = -2$ y $(-3)(1) = -3$.

Regreso a x y nueva lectura:

$$\begin{aligned}E(x) &= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1)\\ &= (x + 3)(x - 1)(x + 1)^2.\end{aligned}$$

El primer factor es un trinomio mónico; el segundo es un cuadrado perfecto. **Segunda verificación:** desarrollar directamente la expresión original da

$$(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3.$$

Expandir $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1)$ produce ese mismo polinomio. La sustitución sólo facilita una identidad; no hemos resuelto la ecuación $E(x) = 0$.

Solución 79. Lectura secuencial. Las líneas (1)–(6) son correctas. La línea (2) extrae x; (3) reagrupa; (4) extrae respectivamente x^2 y -4; (5) extrae $(x+5)$; y (6) usa la diferencia de cuadrados $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

La **primera igualdad falsa es (6) $\longrightarrow$ (7)**:

$$(x - 2)(x + 2) \neq (x - 2)^2$$

como identidad, pues el primero vale $x^2 - 4$ y el segundo $x^2 - 4x + 4$. Es plausible confundir los dos productos porque ambos contienen $x - 2$ y dos factores lineales, pero un par de conjugados no forma un cuadrado. Por ejemplo, para $x = 0$ esos dos factores cuadráticos valen -4 y 4, pero ese valor no refuta la igualdad completa de las líneas (6) y (7), porque su factor exterior x vale cero. Para comprobar la ruptura de la cadena completa, usamos $x = 1$: la línea (6) vale $1 \cdot 6 \cdot (-1) \cdot 3 = -18$ y la línea (7) vale $1 \cdot 6 \cdot (-1)^2 = 6$.

No confundir error temprano y pasos posteriores. Las líneas (7)–(13), tomadas como transformaciones sucesivas *de la expresión equivocada*, son algebraicamente correctas: (8) agrupa $x(x + 5) = x^2 + 5x$, (9) desarrolla $(x - 2)^2$, (10) expande, (11) extrae x, (12) reagrupa y (13) factoriza dos grupos. Su corrección local no las reconecta con E después de la ruptura en (7).

Reconstrucción desde el último paso válido: conservamos la línea (6) sin alterar ninguno de sus dos conjugados; la factorización verdadera es

$$\boxed{E = x(x + 5)(x - 2)(x + 2).}$$

Control de ambos productos. El producto correcto expande así:

$$x(x + 5)(x^2 - 4) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 20x.$$

El producto introducido erróneamente en (7), en cambio, es

$$x(x+5)(x-2)^2 = x^4 + x^3 - 16x^2 + 20x.$$

Las dos expansiones son diferentes. Esto identifica exactamente dónde dejó de conservarse la expresión original y por qué una larga cadena posterior no proporciona una demostración.

Solución 80. (1) Lectura estructural y objetivo. Toda la expresión está definida para $x \in \mathbb{R}$. Aparecen reiteradamente $x+1$ y su cuadrado. Buscamos una forma multiplicativa que permita ver factores sin resolver la ecuación $E(x) = 0$.

(2) Estrategia y sustitución. Tomamos $u = x+1$. A diferencia de expandir de inmediato las potencias de $x+1$, esto conserva los bloques:

$$E = u^4 - 5u^2 + 4 + 3u(u^2 - 1).$$

(3) Identidad que revela el factor común. La parte par es cuadrática en u^2:

$$u^4 - 5u^2 + 4 = (u^2 - 1)(u^2 - 4).$$

El sumando restante ya contiene $u^2 - 1$. Lo extraemos:

$$E = (u^2 - 1)[(u^2 - 4) + 3u] = (u^2 - 1)(u^2 + 3u - 4).$$

(4) Mecanismo de reconstrucción. El trinomio $u^2 + 3u - 4$ procede de la pareja $4, -1$, cuya suma es 3 y producto -4:

$$u^2 + 3u - 4 = (u+4)(u-1).$$

Por diferencia de cuadrados, $u^2 - 1 = (u-1)(u+1)$.

(5) Ejecución técnica y regreso a la variable original.

$$\begin{aligned} E &= (u-1)(u+1)(u+4)(u-1) \\ &= (u-1)^2(u+1)(u+4) \\ &= \boxed{x^2(x+2)(x+5)}, \qquad u = x+1. \end{aligned}$$

No se ha dividido por ningún factor; la identidad es válida para todo real x.

(6) Verificación independiente. Expandimos directamente en u:

$$E = u^4 + 3u^3 - 5u^2 - 3u + 4.$$

Al sustituir $u = x+1$ y desarrollar se obtiene $E = x^4 + 7x^3 + 10x^2$. Expandir el producto propuesto da igualmente $x^2(x^2 + 7x + 10) = x^4 + 7x^3 + 10x^2$.

(7) Segunda ruta: expansión primero. Sin introducir u podemos expandir $\big((x+1)^2\big)^2$, $-5(x+1)^2$ y $3(x+1)((x+1)^2 - 1)$, reunir términos y obtener $x^4 + 7x^3 + 10x^2$. Extrayendo x^2 y reconstruyendo el trinomio, llegamos a $x^2(x+2)(x+5)$. Es válida, pero genera más términos y exige controlar más cancelaciones.

(8) Cierre: forma y función. La representación en u hace visible la estructura cuadrática y el factor compartido $u^2 - 1$; la desarrollada hace visibles los coeficientes; la factorizada muestra x^2, $(x+2)$ y $(x+5)$. Las tres representan la misma expresión en $\mathbb{R}$. La elección de forma respondió al propósito de factorizar y verificar, no a la idea de que un producto sea siempre preferible.

H. Soluciones de profundización y reconstrucción

Solución 081. Con $u = x^2$, buscamos suma $t-1$ y producto $-t$: los factores son $(u-1)(u+t)$. Así, $E = (x-1)(x+1)(x^2+t)$. Expandir $(x^2-1)(x^2+t)$ devuelve los tres términos originales para todo t. Si $t = -1$, queda $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$; si $t = 0$, queda $x^2(x-1)(x+1)$. La identidad no exige que los factores sean no nulos y conserva ambos valores excepcionales.

Solución 082. La diferencia de cuadrados da $[(t-1)(x-1)][(t+1)(x+1)] = (t^2-1)(x^2-1)$. Si $t = \pm 1$, se anula para todo x. Recíprocamente, evaluar en $x = 0$ exige $1 - t^2 = 0$, luego $t = \pm 1$. Expandir los cuadrados da $(t^2-1)x^2 + 1 - t^2$, verificando el resultado. Evaluar en $x = 1$ solamente no habría restringido t.

Solución 083. Escribamos $A = x+a$, $B = x+b$. El segundo producto es $(A+h)(B-h) = AB + hB - hA - h^2$. La diferencia es $h(A-B) + h^2 = h(a-b+h)$. Desapareció x porque $A - B = a - b$. Por el producto nulo, la constante es cero exactamente si $h = 0$ o $h = b - a$. En el segundo caso se intercambian los dos factores originales; en el primero no cambian. No se ha dividido por un parámetro potencialmente nulo.

Solución 084. Expandir exige $B = 2r + 1$ y $C = r(r+1)$. Por tanto, B es impar y $C = (B^2-1)/4$. Estas condiciones también bastan: si B es un entero impar, $r = (B-1)/2$ es entero y $r(r+1) = (B^2-1)/4 = C$. La expansión comprueba el trinomio. No basta que B sea impar: el término constante está fijado por esa misma elección.

Solución 085. El producto es $(x^2+1)^2 - u^2x^2 = x^4 + (2-u^2)x^2 + 1$. La igualdad equivale a $A = 2 - u^2$: la necesidad se obtiene también evaluando la diferencia en $x = 1$. Existe u real exactamente si $A \leq 2$. Todos son $u = \pm\sqrt{2-A}$, con una sola elección $u = 0$ cuando $A = 2$. Sustituir esos valores demuestra la suficiencia; no se afirma irreducibilidad de los factores.

Solución 086. La expansión es $x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2+2ab)x + a^2b$. El requisito fuerza $b = -2a$ y produce $x^3 - 3a^2x - 2a^3$. Recíprocamente, cada real a y $b = -2a$ satisfacen el requisito, por la misma expansión. Si $a = 0$, también $b = 0$ y el producto es x^3. Esta parametrización describe los productos con la forma impuesta, no todos los cúbicos posibles sin término cuadrático.

Solución 087. Las expansiones son $n^4 \pm 4n^3 + 6n^2 \pm 4n + 1$. Al sumarlas y restar $2n^4$, queda $12n^2 + 2$. Como $n^2 \geq 0$, es al menos 2; es $2(6n^2+1)$ y por tanto par. También es $4(3n^2) + 2$, cuyo resto al dividir por 4 es 2. La demostración incluye negativos y cero; comprobar unos pocos enteros no sustituye este certificado.

Solución 088. La factorización es $(a-b)(2x+a+b)$. Con igual paridad, $a-b$ y $a+b$ son pares; ambos factores son pares, de modo que el producto es múltiplo de 4. Con paridad distinta, $a-b$ y $a+b$ son impares; añadir $2x$ conserva la imparidad del segundo factor y el producto es impar. La identidad procede de la diferencia de cuadrados, así que no requiere suponer signos positivos.

Solución 089. Agrupemos $n(n+3) = u = n^2 + 3n$ y $(n+1)(n+2) = u + 2$. La expresión es $u(u+2) + 1 = (u+1)^2 = (n^2+3n+1)^2$. El número entre paréntesis es entero. Como verificación independiente, ambas expansiones dan $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$. La agrupación revela el cuadrado con menos términos; la expansión certifica la identidad. El argumento vale incluso si alguno de los consecutivos es cero o negativo.

Solución 090. El segundo es $x^4 + 2abx^2 + a^2b^2$. La diferencia es $(a^2+b^2-2ab)x^2 = (a-b)^2x^2$. Por tanto, el primero se reconstruye sumando ese defecto al supuesto cuadrado. Coinciden para todo x si $a = b$; si coinciden, evaluar en $x = 1$ fuerza $(a-b)^2 = 0$, luego $a = b$. La igualdad en $x = 0$ no prueba nada sobre los parámetros, porque el defecto se anula allí siempre.

Solución 091. La diferencia entre ambos miembros es $(b-a)x^2 + (c-ab)x + a^3 - ac$. Evaluar en 0 anula el término constante. Evaluar después en 1 y -1 da la suma y diferencia de los otros dos coeficientes; ambos deben ser cero. Así $b = a$ y $c = ab = a^2$, también cuando $a = 0$. Sustituir da $(x-a)(x^2+ax+a^2) = x^3 - a^3$, cuya expansión verifica la suficiencia. Se usaron tres evaluaciones de una diferencia cuadrática, sin presuponer una factorización.

Solución 092. En $a=b=c=1$, el segundo miembro es cero y el primero $3+\lambda$, así que $\lambda=-3$ es necesario. Al distribuir el segundo miembro, los seis términos mixtos de la forma a^2b se cancelan y quedan los tres cubos y $-3abc$; esto prueba la suficiencia. Si $c=b$, el factor cuadrático es $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$, por lo que $a^3+2b^3-3ab^2=(a+2b)(a-b)^2$. Expandir esta última expresión recupera sus tres términos. La identidad es clásica; la tarea consiste en reconstruir su coeficiente y usarla.

Capítulo 20

Fracciones algebraicas y expresiones racionales

En C19 aprendimos a cambiar la forma de una expresión para hacer visible su estructura multiplicativa. Esa habilidad se vuelve decisiva en cuanto aparece una división, porque una transformación que simplifica mucho la fórmula puede ocultar parte de la información con la que empezamos.

Considere, por ejemplo,

$$\frac{x^2-9}{x-3}.$$

La factorización de la diferencia de cuadrados nos invita a escribir

$$x^2-9=(x-3)(x+3).$$

Parece entonces que basta cancelar el factor $x-3$ y obtener $x+3$. El cálculo es correcto, pero hay una pregunta que debemos responder antes de declarar terminada la transformación:

¿para qué valores de x tenía sentido la expresión original?

Ésta será la pregunta rectora del capítulo. Trabajaremos con expresiones que contienen cocientes, productos, sumas y divisiones anidadas, y aprenderemos a transformarlas sin perder las condiciones bajo las cuales esas transformaciones son válidas.

La idea central puede adelantarse desde ahora:

> **Una fórmula más simple puede conservar todos los valores de la expresión original allí donde ésta estaba definida y, sin embargo, estar definida en puntos nuevos.**

Por eso, en este capítulo una simplificación no estará completa mientras no conservemos también el dominio original.

20.1. Una fórmula más simple, un dominio distinto

Volvamos a

$$E(x)=\frac{x^2-9}{x-3}.$$

Antes de factorizar, leamos el denominador. La división sólo tiene sentido cuando

$$x-3\neq 0,$$

es decir, cuando

$$x\neq 3.$$

Por tanto, la expresión $E(x)$ está definida para todos los números reales excepto 3.

Ahora sí factorizamos el numerador:

$$E(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}.$$

Si $x \neq 3$, entonces $x - 3 \neq 0$, y podemos dividir numerador y denominador por el factor no nulo $x - 3$. Así obtenemos

$$E(x) = x + 3, \qquad x \neq 3.$$

La restricción escrita al lado de la fórmula no es un comentario accesorio. Forma parte de la información que debemos conservar.

¿Qué significa realmente la simplificación? Para cualquier $x \neq 3$, ambas fórmulas producen el mismo valor. Por ejemplo,

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$	$x+3$
0	3	3
2	5	5
4	7	7

Nada extraño ocurre mientras x permanezca en el dominio de la expresión original.

Pero en $x = 3$ la situación cambia. La fórmula simplificada da

$$3 + 3 = 6,$$

mientras que la expresión original exigiría calcular

$$\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0},$$

que no está definido.

Así que no podemos escribir sin condiciones

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$$

como una afirmación válida para todo $x \in \mathbb{R}$. La afirmación correcta es

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3 \qquad \text{para } x \neq 3.$$

Esta pequeña diferencia será fundamental una y otra vez.

La cancelación no crea el valor que faltaba. Es tentador pensar que, después de cancelar $x - 3$, hemos descubierto que el cociente original "vale 6" cuando $x = 3$. Eso sería incorrecto.

La cancelación se justificó precisamente bajo la condición $x - 3 \neq 0$. En $x = 3$ no existe un factor no nulo por el cual podamos dividir. La expresión $x + 3$ nos proporciona una fórmula que coincide con el cociente en todos los puntos permitidos, pero no cambia retroactivamente el significado de la expresión inicial.

Dicho de otra manera: la transformación algebraica conserva valores **dentro del dominio en que está autorizada**. No amplía por sí sola ese dominio.

Dos datos que deben viajar juntos. A partir de ahora, cuando simplifiquemos una expresión de este tipo, registraremos dos cosas:

1. la fórmula obtenida;
2. las restricciones heredadas de la expresión original.

En nuestro ejemplo, la respuesta completa es

$$\boxed{E(x) = x + 3, \qquad x \neq 3.}$$

La fórmula $x + 3$ es más simple, pero por sí sola contiene menos información sobre el problema del que surgió.

Un no-ejemplo: una igualdad demasiado amplia. Considere la afirmación

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

El cálculo de factorización que parece sostenerla es

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3.$$

¿Dónde está la falla? No está en la factorización. Tampoco está en el resultado $x + 3$. La falla consiste en omitir la hipótesis que autoriza cancelar: $x - 3 \neq 0$.

Éste es un tipo de error especialmente importante, porque la parte visible del álgebra puede ser correcta mientras la afirmación completa es falsa.

Una lectura funcional que desarrollaremos después. Podemos anticipar una distinción que formalizaremos en §20.4. Si consideramos las fórmulas con sus dominios naturales, entonces

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, mientras que

$$g(x) = x + 3$$

tiene dominio $\mathbb{R}$.

Coinciden en todos los puntos del dominio de f, pero no son la misma función si cada una conserva su dominio natural. Más adelante precisaremos exactamente cómo expresar esta situación. Por ahora basta con retener la regla operacional: **simplificar una fórmula no autoriza a olvidar dónde estaba definida la expresión original**.

Recuperación breve. Simplifique

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

y conserve toda la información necesaria.

Respuesta razonada. La expresión original exige $x - 2 \neq 0$, de modo que $x \neq 2$. Como

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$$

para $x \neq 2$ podemos cancelar el factor $x - 2$:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \qquad x \neq 2.$$

En $x = 2$ la fórmula $x + 2$ vale 4, pero el cociente original no está definido. Por tanto, la respuesta completa es

$$\boxed{x + 2, \qquad x \neq 2.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. La primera regla del cálculo racional no es una técnica de simplificación, sino un hábito de lectura:

> **Antes de transformar una expresión, determine dónde está definida. Después de transformar, conserve esas restricciones aunque hayan desaparecido de la fórmula visible.**

En la sección siguiente distinguiremos con precisión qué llamaremos **expresión fraccionaria** y qué llamaremos **expresión racional**. Esa terminología nos permitirá describir con mayor cuidado los objetos que acabamos de manipular.

20.2. Expresiones fraccionarias y expresiones racionales

En §20.1 trabajamos con

$$\frac{x^2-9}{x-3}.$$

La forma de la expresión nos dice inmediatamente que hay una división, pero todavía necesitamos una terminología que distinga dos ideas diferentes: **estar escrito como un cociente** y **ser un cociente de polinomios**.

Esta distinción será útil porque más adelante aparecerán cocientes con radicales, cocientes de otros cocientes y expresiones que, después de varias transformaciones, pueden adquirir una forma mucho más simple que aquella con la que empezaron.

Expresión fraccionaria: la forma de cociente. Llamaremos **expresión fraccionaria** a una expresión escrita como un cociente

$$\frac{A}{B},$$

donde A y B son expresiones algebraicas y el denominador B debe estar definido y ser distinto de cero en cada valor donde pretendamos evaluar el cociente.

Por ejemplo,

$$\frac{x+1}{x-4}, \qquad \frac{\sqrt{x}+1}{x+2}, \qquad \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$$

son expresiones fraccionarias: las tres presentan una división entre dos expresiones algebraicas.

La palabra *fraccionaria* describe aquí una forma de construcción. No afirma todavía que numerador y denominador sean polinomios.

Expresión racional: un cociente de polinomios. Una **expresión racional** en la variable x es una expresión que puede escribirse en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son expresiones polinómicas y Q no es el polinomio cero.

Así,

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}$$

es racional porque tanto el numerador como el denominador son polinomios. También lo son

$$\frac{3}{x^2+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{2x^3-x+7}{5x-4}.$$

En cambio,

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}$$

es fraccionaria, pero no es racional en esta forma: el numerador $\sqrt{x}+1$ no es una expresión polinómica.

Análogamente,

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}+2}$$

es fraccionaria pero no racional, porque el denominador contiene $\sqrt{x}$.

Por tanto,

> **Toda expresión racional escrita como P/Q es una expresión fraccionaria, pero no toda expresión fraccionaria es racional.**

Los polinomios también están dentro de la clase racional. Puede parecer extraño llamar racional a una expresión que no muestra ninguna fracción. Sin embargo, cualquier polinomio $P(x)$ puede escribirse como

$$P(x) = \frac{P(x)}{1}.$$

Como 1 es un polinomio que nunca se anula, toda expresión polinómica puede considerarse también una expresión racional.

Por ejemplo,

$$x^2 - 3x + 5$$

es polinómica y, al mismo tiempo, racional porque

$$x^2 - 3x + 5 = \frac{x^2-3x+5}{1}.$$

Esto no significa que debamos reescribir todos los polinomios como fracciones. La inclusión es conceptual: la clase de las expresiones racionales contiene a las polinómicas.

«Racional» no describe los valores numéricos que produce. Aquí conviene detener una posible confusión. El adjetivo **racional** no significa que la expresión sólo pueda tomar valores que sean números racionales.

Considere

$$R(x) = x + 1.$$

Como acabamos de ver, R es una expresión racional. Pero si evaluamos en $x = \sqrt{2}$, obtenemos

$$R(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1,$$

que no es un número racional.

La palabra *racional* describe la **estructura algebraica de la expresión** —cociente de polinomios—, no la naturaleza aritmética de todos sus valores.

Clasificar antes de operar. Compare ahora las expresiones siguientes:

Expresión	¿Fraccionaria?	¿Racional?	Razón
$\dfrac{x^2+1}{x-3}$	sí	sí	numerador y denominador son polinomios
$\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-3}$	sí	no	aparece un radical en el numerador
x^3-2x+1	no está escrita como cociente	sí	puede escribirse como $\dfrac{x^3-2x+1}{1}$
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x}+3}$	sí	no	aparece un radical en el denominador

La clasificación evita una costumbre peligrosa: llamar «racional» a cualquier expresión que visualmente tenga una barra de fracción. La barra sólo indica división; para hablar de expresión racional debemos mirar qué tipo de expresiones ocupan numerador y denominador.

Una fórmula puede cambiar de aspecto sin perder su procedencia. Considere de nuevo

$$\frac{x^2-9}{x-3}.$$

Es una expresión racional porque es cociente de dos polinomios. Para $x \neq 3$ se simplifica a

$$x+3,$$

que es una expresión polinómica y, por tanto, también racional.

Aquí aparecen dos hechos distintos:

1. la **clase algebraica** se conserva: ambas fórmulas son racionales;
2. el **dominio original** no se recupera mirando sólo la fórmula final.

La clasificación de una expresión y el estudio de su dominio están relacionados, pero no son la misma tarea. En §20.3 aprenderemos a leer sistemáticamente las restricciones de una expresión antes de realizar ninguna operación.

Una precaución con las formas equivalentes. A veces una expresión que no está presentada inicialmente como un cociente simple de polinomios puede transformarse, bajo ciertas restricciones, en una expresión racional. Por ejemplo, una fracción compleja puede contener dentro de sí otras expresiones racionales y terminar reduciéndose a un solo cociente de polinomios.

No utilizaremos esta posibilidad para borrar su historia algebraica. Cuando una transformación cambie la forma visible, seguiremos registrando las condiciones necesarias para que cada paso sea válido.

Ésta es la misma disciplina que apareció en §20.1: **la forma final no sustituye al dominio de procedencia**.

No-ejemplo: una clasificación por apariencia. Supongamos que alguien afirma:

«$\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-2}$ es racional porque es una fracción de dos expresiones algebraicas.»

La segunda parte de la frase sólo permite concluir que es una expresión fraccionaria. Para que sea racional, numerador y denominador deben ser polinomios. Como $\sqrt{x}+1$ no es polinómico, la conclusión no se sigue.

El error no está en una manipulación, sino en haber usado una definición demasiado amplia.

Recuperación breve. Clasifique cada expresión como polinómica, racional y/o fraccionaria. Cuando una expresión pertenezca a más de una clase, indíquelo.

1. $\dfrac{2x-1}{x^2+4}$;
2. $\dfrac{x+3}{\sqrt{x}+1}$;
3. x^4-5x^2+2;
4. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Respuesta razonada.

1. $\dfrac{2x-1}{x^2+4}$ es fraccionaria y racional, porque numerador y denominador son polinomios.
2. $\dfrac{x+3}{\sqrt{x}+1}$ es fraccionaria, pero no racional en esta forma, porque el denominador no es polinómico.
3. x^4-5x^2+2 es polinómica y también racional, pues puede escribirse como $\dfrac{x^4-5x^2+2}{1}$. No está presentada en forma fraccionaria visible.
4. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ es fraccionaria, pero no racional en esta forma, porque el numerador contiene un radical.

Qué debemos conservar de esta sección. La terminología puede resumirse así:

$$\text{polinómica} \subset \text{racional},$$

mientras que **fraccionaria** describe la presencia de un cociente visible y puede abarcar expresiones racionales y no racionales.

La pregunta siguiente ya no será «¿qué tipo de expresión es?», sino otra más operativa:

> **¿Para qué valores de la variable está realmente definida?**

Responderla de manera sistemática es el objetivo de §20.3.

20.3. Leer el dominio antes de operar

En §20.1 vimos que una simplificación puede ocultar una exclusión. En §20.2 distinguimos la clase algebraica de una expresión de las condiciones bajo las cuales está definida. Ahora convertiremos esas observaciones en un procedimiento sistemático.

La pregunta que debe preceder a cualquier transformación es:

> **¿Qué tiene que ser cierto para que cada parte de la expresión esté definida?**

Cuando trabajamos sobre los números reales, una expresión racional simple $P(x)/Q(x)$ está definida exactamente en los valores para los cuales $Q(x) \neq 0$. Pero las expresiones que aparecerán en este capítulo pueden contener varios cocientes, unos dentro de otros. En ese caso no existe un único denominador visible que podamos mirar al final: debemos leer la expresión por niveles.

El dominio se construye, no se adivina. Considere primero

$$R(x) = \frac{x+5}{(x-2)(x+4)^2}.$$

El numerador no impone ninguna restricción. El denominador, en cambio, debe ser distinto de cero. Como

$$(x-2)(x+4)^2 \neq 0$$

si y sólo si ninguno de sus factores es cero, debemos exigir

$$x \neq 2 \qquad \text{y} \qquad x \neq -4.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}.$$

Observe que la potencia no crea una exclusión nueva: $(x+4)^2$ y $x+4$ se anulan en el mismo punto. Lo que importa para el dominio no es cuántas veces aparece un factor, sino en qué valores puede hacer cero un denominador.

A veces conviene factorizar sólo para leer el dominio. Ahora mire

$$S(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}.$$

El denominador no muestra de inmediato sus ceros, pero C19 nos permite factorizarlo:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

Así, la condición de definición es

$$(x-3)(x+2) \neq 0,$$

y por tanto

$$x \neq 3, \qquad x \neq -2.$$

De modo que

$$\mathrm{Dom}(S) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

Aquí la factorización no se utilizó para simplificar la expresión. Se utilizó para **hacer visibles las restricciones**. Esta diferencia de propósito será importante: antes de modificar una fórmula debemos saber primero dónde tenía sentido.

Las restricciones de las subexpresiones se acumulan. Considere ahora una expresión con más de un nivel de división:

$$T(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{x+2}{x-3}}.$$

No operemos todavía. Limitémonos a leer qué condiciones exige la escritura tal como está. Primero, la subexpresión del numerador

$$\frac{1}{x-1}$$

requiere

$$x \neq 1.$$

Segundo, la subexpresión que aparece en el denominador exterior,

$$\frac{x+2}{x-3},$$

debe estar definida. Por ello,

$$x \neq 3.$$

Pero todavía falta una condición. Ese cociente completo ocupa el **denominador de la fracción exterior**, de modo que no basta con que exista: también debe ser distinto de cero. Bajo la condición $x \neq 3$, tenemos

$$\frac{x+2}{x-3} = 0$$

exactamente cuando $x + 2 = 0$. Por tanto debemos excluir también

$$x = -2.$$

Reuniendo las tres condiciones,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(T) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}.}$$

No hemos invertido ninguna fracción ni simplificado la expresión. Sólo hemos leído todas las obligaciones de definición que ya estaban presentes.

Dominio por capas. El ejemplo anterior sugiere un procedimiento que utilizaremos durante todo el capítulo.

1. **Identifique las subexpresiones.** En particular, localice cada división, no sólo la barra de fracción más grande.
2. **Exija que cada subexpresión esté definida.** Todo denominador interno debe ser distinto de cero.
3. **Mire los denominadores exteriores.** Una expresión que funciona como divisor debe, además de estar definida, ser no nula.
4. **Reúna las restricciones.** El dominio final es la intersección de todas las condiciones obtenidas.
5. **Sólo después opere.** Factorizar, cancelar, multiplicar o invertir viene después de fijar el dominio original.

Podemos condensar el método así:

```
LEER LA EXPRESIÓN
       ↓
LOCALIZAR SUBEXPRESIONES
       ↓
REGISTRAR CONDICIONES DE DEFINICIÓN
       ↓
EXIGIR DENOMINADORES NO NULOS
       ↓
INTERSECTAR LAS RESTRICCIONES
       ↓
OPERAR
```

La palabra **intersectar** recuerda una idea ya conocida de C7–C9: para que la expresión completa tenga sentido, todas las condiciones deben cumplirse simultáneamente.

Un denominador puede ser una expresión completa. La dificultad de $T(x)$ no provenía de un cálculo complicado, sino de una lectura incompleta. Es fácil mirar sólo $x-1$ y $x-3$, porque ambos aparecen escritos como denominadores pequeños. Sin embargo, el verdadero denominador exterior es

$$\frac{x+2}{x-3}.$$

Ese objeto entero debe ser no nulo. Por eso $x=-2$ queda excluido aunque -2 no haga cero ninguno de los dos denominadores internos visibles.

Ésta es una regla general:

> **Si una expresión completa ocupa el lugar de un divisor, debemos comprobar dos cosas: que esté definida y que su valor no sea cero.**

Más adelante, en §20.8, esta distinción controlará la división de expresiones racionales. Aquí sólo nos interesa reconocerla antes de operar.

No-ejemplo: mirar únicamente los denominadores internos. Supongamos que, para

$$T(x)=\frac{1}{\dfrac{x-1}{\dfrac{x+2}{x-3}}},$$

alguien declara

$$\mathrm{Dom}(T)=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}.$$

Las dos exclusiones registradas son correctas, pero la respuesta está incompleta. Si $x=-2$, la subexpresión

$$\frac{x+2}{x-3}$$

está definida y vale 0. Entonces la expresión exterior intentaría dividir por cero. El primer punto omitido no es un error de cálculo: es no haber reconocido que el denominador exterior era una subexpresión completa que también debía ser no nula.

Este diagnóstico será recurrente en el capítulo. Una lista de restricciones puede contener condiciones correctas y, aun así, no ser todavía el dominio.

Restricciones heredadas y restricciones nuevas. Durante una transformación posterior puede aparecer una fórmula con menos denominadores visibles. Eso no elimina las condiciones que acabamos de registrar. El dominio que calculamos **antes de operar** es parte de los datos iniciales del problema y debe viajar con la expresión.

También puede ocurrir lo contrario: una ruta de cálculo puede introducir temporalmente un denominador auxiliar. En ese caso habrá que comprobar si esa elección impone una restricción nueva. Trataremos esa situación cuando estudiemos denominadores comunes y fracciones complejas. Por ahora basta con distinguir dos fuentes de condiciones:

- **restricciones heredadas**, que ya pertenecen a la expresión original;
- **restricciones introducidas por una transformación**, que sólo son legítimas si se controlan explícitamente.

Nuestro objetivo será siempre preservar las primeras y no añadir las segundas de manera inadvertida.

Recuperación breve. Determine el dominio de cada expresión **sin simplificarla**.

1. $A(x) = \dfrac{x-1}{(x+5)(x-2)^2}$;
2. $B(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x-6}$;
3. $C(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{x-3}{x+1}}$.

Respuesta razonada.

1. En $A(x)$ el denominador es $(x+5)(x-2)^2$. Se anula en $x=-5$ y $x=2$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(A) = \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}.$$

2. Para $B(x)$ factorizamos sólo para localizar los ceros del denominador:

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2).$$

Así,

$$\mathrm{Dom}(B) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}.$$

3. En $C(x)$ aparecen tres obligaciones. La fracción $1/(x+2)$ exige $x \neq -2$. La fracción $(x-3)/(x+1)$ exige $x \neq -1$. Finalmente, como esta última fracción es el denominador exterior, también debe ser no nula; bajo $x \neq -1$ se anula en $x = 3$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(C) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3\}.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. El dominio de una expresión compuesta se obtiene imponiendo **simultáneamente** las condiciones de definición de todas sus partes. No basta con buscar símbolos que parezcan denominadores: una subexpresión completa puede funcionar como divisor y, en ese caso, debe existir y ser distinta de cero.

La regla de trabajo queda fijada:

primero dominio; después álgebra.

En §20.4 usaremos este control para formular con precisión qué significa que dos expresiones sean equivalentes sobre un dominio declarado y por qué una fórmula simplificada puede tener un dominio natural mayor que la expresión de la que provino.

20.4. Equivalencia sobre un dominio declarado

En §20.1 apareció una situación que ahora podemos formular con precisión. Las expresiones

$$\frac{x^2-9}{x-3} \qquad \text{y} \qquad x+3$$

producen el mismo valor para todo $x \neq 3$, pero no tienen el mismo dominio natural. La primera no está definida en $x = 3$; la segunda sí.

Por tanto, antes de escribir que dos expresiones son «iguales», conviene responder una pregunta:

¿sobre qué dominio estamos haciendo la comparación?

Equivalencia de expresiones sobre un dominio. Sean $E(x)$ y $F(x)$ dos expresiones y sea D un conjunto de valores en el que ambas están definidas. Diremos que E **y** F **son equivalentes sobre** D si

$$E(x) = F(x) \qquad \text{para todo } x \in D.$$

El dominio D no es una decoración de la afirmación. Forma parte de ella.

En el ejemplo inicial,

$$E(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \qquad F(x) = x + 3,$$

podemos declarar

$$E(x) = F(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Así, las dos expresiones son equivalentes sobre $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

No estamos afirmando que la primera expresión adquiera un valor en $x = 3$. Estamos diciendo que, en el dominio donde ambas pueden compararse y donde la cancelación está autorizada, producen exactamente los mismos valores.

El mismo cálculo puede describir funciones distintas. Recordemos la convención de C9. Si

$$f, g : A \to B,$$

entonces $f = g$ cuando

$$f(a) = g(a) \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Si cambian el dominio o el codominio, tratamos editorialmente las funciones como objetos distintos, aunque utilicen la misma regla simbólica.

Apliquemos esto al ejemplo. Defina

$$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3},$$

y

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x + 3.$$

Aunque

$$f(x) = g(x) \qquad \text{para todo } x \neq 3,$$

las funciones f y g no son iguales, porque tienen dominios distintos.

En cambio, si restringimos g al dominio de f y definimos

$$g_* : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, \qquad g_*(x) = x + 3,$$

entonces

$$f = g_*.$$

Aquí sí coinciden todos los datos que estamos usando para comparar funciones: mismo dominio, mismo codominio y mismos valores en cada punto.

Una identidad algebraica puede necesitar un dominio de lectura. Considere ahora

$$A(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}.$$

Factorizando,

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

y

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1).$$

El dominio natural de A es

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

En ese dominio, como $x - 2 \neq 0$, podemos cancelar:

$$A(x) = \frac{x + 2}{x + 1}, \qquad x \neq -1, 2.$$

La fórmula

$$B(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$$

tiene, en cambio, dominio natural

$$\mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Por tanto,

$$A(x) = B(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\},$$

pero las funciones naturales asociadas a A y B no son iguales si cada una conserva su propio dominio.

El punto $x = 2$ resume toda la diferencia: $B(2) = 4/3$, mientras que $A(2)$ no está definido.

Fórmula final y dominio de procedencia. Cuando una transformación elimina un factor del denominador, pueden quedar dos dominios en juego:

1. el **dominio original**, fijado antes de transformar;
2. el **dominio natural de la fórmula final**, que puede ser mayor.

Para conservar la equivalencia de la transformación, la fórmula final debe leerse sobre el dominio original, salvo que se declare expresamente otra función u otro objeto.

Por ejemplo,

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{x + 2}{x + 1}, \qquad x \neq -1, 2,$$

es una afirmación correcta y completa.

En cambio, escribir solamente

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{x + 2}{x + 1}$$

sin indicar el dominio puede ocultar que la expresión de la derecha está definida en un punto adicional.

No toda coincidencia parcial es una equivalencia útil. Supongamos que dos expresiones coinciden en algunos valores aislados. Eso no basta para afirmar que son equivalentes sobre un dominio.

Por ejemplo,

$$x^2 = x$$

es verdad cuando $x = 0$ y cuando $x = 1$, pero no para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si declaramos

$$D = \{0, 1\},$$

entonces sí podemos decir que x^2 y x son equivalentes sobre D. Si el dominio declarado fuera $\mathbb{R}$, la afirmación sería falsa.

Esto muestra por qué el dominio debe aparecer en la proposición completa:

$$\text{fórmula} + \text{dominio} = \text{afirmación verificable.}$$

Igualdad en el dominio común. A veces dos expresiones poseen dominios naturales diferentes, pero existe un dominio común sobre el cual ambas están definidas. En ese caso podemos comparar sus valores allí.

Si D_E y D_F son los dominios naturales de E y F, respectivamente, una comparación válida requiere al menos

$$D \subseteq D_E \cap D_F.$$

Sobre un conjunto así podemos preguntar si

$$E(x) = F(x) \qquad \text{para todo } x \in D.$$

En el cálculo racional de este capítulo, el dominio declarado será normalmente el dominio de la expresión original. Esa elección preserva exactamente las condiciones bajo las cuales se justificó la transformación.

No-ejemplo: «misma fórmula simplificada, misma función». Considere nuevamente

$$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3},$$

y

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x + 3.$$

La afirmación

> «Como al simplificar obtenemos $x + 3$, entonces $f = g$»

es incorrecta.

La simplificación demuestra que ambos valores coinciden para todo x del dominio de f. No demuestra que los dominios sean iguales. El primer dato que falla en la comparación de funciones es precisamente ése.

Recuperación breve. Considere

$$E(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

y

$$F(x) = x + 1.$$

Responda:

1. ¿Cuál es el dominio natural de cada expresión?
2. ¿Son equivalentes sobre $\mathbb{R} \setminus \{1\}$?
3. Si cada fórmula define una función con su dominio natural y codominio $\mathbb{R}$, ¿son iguales esas funciones?
4. ¿Qué ocurre si restringimos F a $\mathbb{R} \setminus \{1\}$?

Respuesta razonada.

La expresión E exige $x \neq 1$, mientras que F está definida para todo real. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(E) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad \mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R}.$$

Como

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

para $x \neq 1$ tenemos

$$E(x) = x + 1 = F(x).$$

Así, E y F son equivalentes sobre $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sin embargo, las funciones con sus dominios naturales no son iguales porque sus dominios difieren. Si restringimos F a $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ y mantenemos codominio $\mathbb{R}$, entonces ambas funciones tienen el mismo dominio, el mismo codominio y los mismos valores; en ese caso sí son iguales.

Qué debemos conservar de esta sección. Una transformación algebraica no debe leerse separada de su dominio. La afirmación

$$E(x) = F(x)$$

sólo es completa cuando sabemos dónde se pretende que sea válida.

Para este capítulo fijamos la regla:

> **Dos expresiones pueden ser equivalentes sobre un dominio declarado aunque sus fórmulas naturales definan funciones distintas. Una simplificación preserva valores en el dominio autorizado; no borra ni amplía automáticamente el dominio de procedencia.**

En §20.5 utilizaremos esta precisión para justificar formalmente la cancelación de factores y señalar exactamente qué hipótesis permite efectuarla.

20.5. Cancelar factores: demostración y condiciones

Hasta ahora hemos usado la cancelación varias veces, pero siempre bajo una condición explícita. Conviene detenernos y justificarla con precisión, porque «cancelar» no es una operación primitiva ni significa tachar símbolos iguales. Es una consecuencia de poder dividir por una cantidad que sabemos que no es cero.

La pregunta central es:

> **¿Qué estamos haciendo realmente cuando cancelamos un factor?**

La regla general. Considere una expresión de la forma

$$\frac{AC}{BC}.$$

Para que el cociente original esté definido debemos tener $BC \neq 0$. En los números reales, un producto es distinto de cero exactamente cuando cada factor lo es, de modo que necesitamos

$$B \neq 0 \qquad \text{y} \qquad C \neq 0.$$

Bajo estas condiciones, C posee inverso multiplicativo. Podemos escribir

$$\frac{AC}{BC} = AC\,(BC)^{-1}.$$

Como $B \neq 0$ y $C \neq 0$,

$$(BC)^{-1} = B^{-1}C^{-1},$$

y por tanto

$$AC\,(BC)^{-1} = ACB^{-1}C^{-1} = AB^{-1}(CC^{-1}) = AB^{-1} = \frac{A}{B}.$$

Así obtenemos la regla

$$\boxed{\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \qquad \text{si } B \neq 0 \text{ y } C \neq 0.}$$

La condición $C \neq 0$ es la que autoriza eliminar el factor común. La condición $B \neq 0$ garantiza que tanto el cociente original como la expresión final estén definidos.

Cancelar es dividir por un factor común no nulo. La misma idea puede verse de manera más directa. Si $C \neq 0$, podemos dividir numerador y denominador por C:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC/C}{BC/C} = \frac{A}{B}.$$

Pero esta escritura sólo tiene sentido porque C no es cero. Por eso una cancelación nunca debe leerse como un gesto puramente tipográfico.

En particular, la cadena mental correcta es

```
FACTOR COMÚN
     ↓
COMPROBAR QUE NO SEA CERO
     ↓
DIVIDIR NUMERADOR Y DENOMINADOR POR ÉL
     ↓
CONSERVAR LAS RESTRICCIONES ORIGINALES
```

Ejemplo: un factor que desaparece, una exclusión que permanece. Considere

$$R(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}.$$

Antes de cancelar, determinamos el dominio. Factorizamos:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

y

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

La expresión original exige

$$x \neq 2 \qquad \text{y} \qquad x \neq -3.$$

En ese dominio,

$$R(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 3)}.$$

Como $x \neq 2$, el factor $x - 2$ es no nulo y puede cancelarse:

$$R(x) = \frac{x + 2}{x + 3}, \qquad x \neq 2, -3.$$

La fórmula final ya no contiene $x-2$, pero la exclusión $x = 2$ no desaparece. La cancelación eliminó un factor de la **escritura**, no una condición del dominio original.

Sólo se cancelan factores. La regla anterior tiene una consecuencia decisiva: para cancelar, aquello que aparece arriba y abajo debe ser un **factor** de todo el numerador y de todo el denominador.

Considere

$$\frac{x + 3}{x + 5}.$$

Aquí x aparece en numerador y denominador, pero no es factor de ninguno de los dos. No podemos «cancelar la x» y escribir $3/5$.

Podemos detectar inmediatamente el error con $x = 1$:

$$\frac{1 + 3}{1 + 5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

mientras que

$$\frac{3}{5} \neq \frac{2}{3}.$$

El problema estructural es más importante que el contraejemplo numérico: en $x + 3$ y $x + 5$, la variable forma parte de una **suma**. La cancelación actúa sobre productos.

Factorizar puede convertir términos en factores. Considere ahora

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 5x}.$$

Aquí tampoco debemos cancelar términos directamente. Primero reconocemos la estructura multiplicativa:

$$x^2 + 3x = x(x + 3),$$

$$x^2 + 5x = x(x + 5).$$

El dominio original exige

$$x(x + 5) \neq 0,$$

es decir,

$$x \neq 0, \qquad x \neq -5.$$

Sólo entonces escribimos

$$\frac{x(x+3)}{x(x+5)} = \frac{x+3}{x+5}, \qquad x \neq 0, -5.$$

La variable x pudo cancelarse **después de convertirse en factor común de los dos miembros del cociente**.

Ésta será una pauta recurrente:

> **Si parece haber algo «igual arriba y abajo», pregunte primero si es realmente un factor de todo el numerador y de todo el denominador.**

Por qué no se cancelan términos de una suma. Supongamos que alguien intenta pasar de

$$\frac{A+C}{B+C}$$

a

$$\frac{A}{B}$$

«cancelando C».

No existe una propiedad algebraica que justifique ese paso en general. Para obtener A/B cancelando C, los bloques originales tendrían que ser CA y CB, no $A+C$ y $B+C$.

Si $C \neq 0$, sí podemos factorizar numéricamente C mediante

$$A + C = C(A/C + 1), \qquad B + C = C(B/C + 1).$$

Pero esa cancelación deja $(A/C + 1)/(B/C + 1)$, no A/B, y conserva la condición $B + C \neq 0$. Por tanto, extraer un factor no equivale a borrar un sumando.

La suma no distribuye sobre la división de esa manera. Por tanto, la regla

$$\frac{A+C}{B+C} = \frac{A}{B}$$

es falsa en general.

El cero en el numerador no borra restricciones. Considere

$$Z(x) = \frac{0}{x-1}.$$

Para todo $x \neq 1$,

$$Z(x) = 0.$$

Sin embargo, en $x = 1$ aparece $0/0$, que no está definido. Por tanto,

$$\frac{0}{x-1} = 0, \qquad x \neq 1,$$

pero no como identidad válida para todo real.

Este ejemplo muestra otra vez que una fórmula final muy simple puede ocultar información de dominio. «El numerador es cero» no autoriza a ignorar el denominador.

No-ejemplo: una cancelación que divide por cero. Considere

$$\frac{x(x+1)}{x(x-2)}.$$

Si escribimos

$$\frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

sin registrar condiciones, hemos omitido parte de la afirmación.

La expresión original exige

$$x \neq 0, \qquad x \neq 2.$$

La cancelación del factor x sólo está autorizada porque estamos trabajando bajo $x \neq 0$. Por tanto, la forma correcta es

$$\frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}, \qquad x \neq 0, 2.$$

En $x = 0$ la fórmula de la derecha sí está definida y vale $-1/2$, pero la expresión original no existe. La cancelación no puede utilizarse para fabricar un valor allí donde hubo división por cero.

Recuperación breve. Simplifique cuando sea posible y justifique cada cancelación. Conserve siempre el dominio original.

1. $\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+3)}$;
2. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-3x}$;
3. $\dfrac{x+2}{x+5}$, frente a la propuesta de «cancelar x».

Respuesta razonada.

1. El denominador exige $x \neq 4$ y $x \neq -3$. Bajo $x \neq 4$, el factor $x-4$ es no nulo y puede cancelarse:

$$\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}, \qquad x \neq 4, -3.$$

2. Primero factorizamos:

$$x^2+2x = x(x+2), \qquad x^2-3x = x(x-3).$$

El dominio original exige $x \neq 0$ y $x \neq 3$. Como $x \neq 0$, podemos cancelar el factor x:

$$\frac{x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{x+2}{x-3}, \qquad x \neq 0, 3.$$

3. No existe cancelación posible. En $x+2$ y $x+5$, la x no es un factor común sino parte de dos sumas. La expresión permanece

$$\frac{x+2}{x+5}, \qquad x \neq -5.$$

Qué debemos conservar de esta sección. La cancelación es una división por un factor común no nulo. Por eso exige tres controles simultáneos:

1. reconocer un **factor** común, no simplemente símbolos o términos parecidos;
2. comprobar que ese factor no sea cero en el dominio declarado;
3. conservar todas las restricciones de la expresión original después de simplificar.

La regla conceptual puede resumirse así:

> **No se cancelan símbolos: se dividen numerador y denominador por un factor común que sabemos no nulo.**

En §20.6 recuperaremos las técnicas de factorización de C19 para hacer visibles esos factores y normalizar factores opuestos antes de simplificar.

20.6. Factorizar para simplificar y normalizar factores opuestos

En §20.5 justificamos la cancelación cuando un factor común ya era visible. En la práctica, sin embargo, muchas expresiones racionales llegan en una forma que oculta precisamente los factores que necesitamos ver. Ahí vuelve a entrar C19: no para abrir una teoría nueva de factorización, sino para escoger una representación que haga posible una simplificación legítima.

La pregunta de esta sección es:

> **¿Qué transformación conviene hacer antes de cancelar para que la estructura multiplicativa quede visible?**

La respuesta tendrá dos componentes: **factorizar** y, cuando sea necesario, **normalizar factores que sólo difieren por un signo**.

Factorizar antes de cancelar. Considere

$$R(x) = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 16}.$$

Antes de transformar nada, leemos el dominio original. Como

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4),$$

la expresión exige

$$x \neq 4, \qquad x \neq -4.$$

Ahora factorizamos también el numerador:

$$x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5).$$

Así,

$$R(x) = \frac{(x - 4)(x - 5)}{(x - 4)(x + 4)}.$$

Como el dominio original ya impone $x \neq 4$, el factor $x - 4$ es no nulo y podemos cancelarlo. Obtenemos

$$\boxed{R(x) = \frac{x - 5}{x + 4}, \qquad x \neq -4, 4.}$$

La factorización no fue un paso ornamental. Cambió la representación de manera que una estructura cancelable se volvió visible.

La forma expandida puede ocultar lo importante. Si hubiéramos permanecido en

$$\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 16},$$

no habría ningún símbolo que pudiera cancelarse directamente. La posibilidad de simplificar aparece sólo después de reconocer que numerador y denominador comparten un **factor**, no un término.

Por eso la secuencia correcta es

```
DOMINIO ORIGINAL
      ↓
FACTORIZAR
      ↓
COMPARAR FACTORES
      ↓
CANCELAR SÓLO FACTORES NO NULOS
      ↓
CONSERVAR LAS RESTRICCIONES
```

Esta secuencia evita dos errores opuestos: intentar cancelar dentro de sumas y expandir una expresión que ya estaba mostrando la estructura útil.

Factores repetidos: cancelar sólo lo que corresponde. Considere

$$S(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3}.$$

Factorizando,

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

y

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1).$$

El dominio original exige

$$x \neq 3, \qquad x \neq -1.$$

Entonces

$$S(x) = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 1)}.$$

Como $x \neq 3$, podemos cancelar **una copia** del factor $x - 3$:

$$\boxed{S(x) = \frac{x - 3}{x + 1}, \qquad x \neq -1, 3.}$$

El factor no desaparece por completo del numerador porque allí aparecía con multiplicidad dos. Cancelar un factor común reduce una copia en numerador y denominador; no borra todas sus apariciones.

Factores opuestos. A veces dos factores no son literalmente iguales, pero sí difieren por un factor -1. C19 nos dio la identidad

$$a - b = -(b - a).$$

En particular,

$$3 - x = -(x - 3).$$

Esta observación permite reconocer factores que, a primera vista, parecen distintos.

Considere

$$T(x) = \frac{(3 - x)(x + 5)}{(x - 3)(x - 2)}.$$

El dominio original exige

$$x \neq 3, \qquad x \neq 2.$$

Como

$$3 - x = -(x - 3),$$

podemos escribir

$$T(x) = \frac{-(x - 3)(x + 5)}{(x - 3)(x - 2)}.$$

Ahora el factor común $x - 3$ es visible. Bajo $x \neq 3$ podemos cancelarlo:

$$\boxed{T(x) = -\frac{x + 5}{x - 2}, \qquad x \neq 2, 3.}$$

El signo negativo no es una complicación secundaria: es exactamente la información que distingue a $3 - x$ de $x - 3$.

Normalizar orientación de factores. Cuando aparecen factores como

$$x - a \qquad \text{y} \qquad a - x,$$

conviene escoger una orientación común antes de cancelar. Cada inversión del orden introduce un factor -1:

$$a - x = -(x - a).$$

Por ejemplo,

$$\frac{5 - x}{x - 5} = -1, \qquad x \neq 5,$$

porque

$$5 - x = -(x - 5).$$

Si aparecen dos factores opuestos, aparecen dos signos negativos y su producto es positivo. Por ejemplo,

$$\frac{(2 - x)(5 - x)}{(x - 2)(x - 5)} = 1, \qquad x \neq 2, 5.$$

En efecto,

$$2 - x = -(x - 2) \qquad \text{y} \qquad 5 - x = -(x - 5),$$

de modo que los dos factores -1 se multiplican y producen 1.

Normalizar signos no es hacer análisis de signos. En esta sección sólo usamos identidades algebraicas como

$$a - x = -(x - a)$$

para poner factores en una forma comparable. No estamos preguntando cuándo un factor es positivo o negativo, ni dividiendo la recta real en intervalos, ni construyendo tablas de signos. Esas técnicas pertenecen al estudio de inequaciones de C22.

Aquí el signo se manipula **algebraicamente y de manera global**.

Un error típico: tratar factores opuestos como si fueran iguales. Supongamos que alguien escribe

$$\frac{3 - x}{x - 3} = 1.$$

La cancelación es incorrecta porque $3 - x$ y $x - 3$ no son el mismo factor. Su relación es

$$3 - x = -(x - 3).$$

Por tanto,

$$\frac{3 - x}{x - 3} = \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1, \qquad x \neq 3.$$

El error consiste en perder un factor -1. Una buena normalización evita precisamente ese tipo de pérdida.

Factorizar con un propósito. No toda factorización posible merece hacerse. En cálculo racional buscamos una forma que cumpla alguna función concreta:

- revelar factores comunes;
- hacer visibles las restricciones del dominio;
- comparar orientaciones de factores;
- reducir productos antes de multiplicar;
- evitar expansiones innecesarias.

Por ejemplo, en

$$\frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 5)},$$

la estructura ya está visible. Expandir numerador y denominador antes de simplificar sería retroceder: destruiría temporalmente la información que necesitamos.

En cambio, en

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3},$$

la factorización sí es útil:

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2),$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

No aparece ningún factor común, de modo que la factorización nos permite concluir que **no hay cancelación disponible** mediante las técnicas actuales. Factorizar también puede servir para saber cuándo detenerse.

Protocolo operativo. Ante una expresión racional que todavía no muestra factores comunes, usaremos este orden:

1. **registre el dominio original**;
2. **factorice sólo donde aporte estructura**;
3. **normalice factores opuestos**, extrayendo los signos -1 necesarios;
4. **compare factores completos** de numerador y denominador;
5. **cancele únicamente factores no nulos**;
6. **conserve todas las exclusiones originales**.

El punto 3 es nuevo en esta sección. Los demás reúnen hábitos ya construidos desde §20.1.

Recuperación breve. Simplifique cada expresión, justificando la factorización, los signos y las restricciones que permanecen.

1. $A(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$;
2. $B(x) = \dfrac{(4 - x)(x + 1)}{(x - 4)(x - 3)}$;
3. $C(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{(x - 1)(x + 2)}$.

Respuesta razonada.

1. El denominador original factoriza como

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$$

por lo que $x \neq 2, -2$. Además,

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

Así,

$$A(x) = \frac{(x - 2)(x - 5)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 5}{x + 2}, \qquad x \neq -2, 2.$$

2. El dominio original exige $x \neq 4, 3$. Como

$$4 - x = -(x - 4),$$

tenemos

$$B(x) = \frac{-(x - 4)(x + 1)}{(x - 4)(x - 3)} = -\frac{x + 1}{x - 3}, \qquad x \neq 3, 4.$$

3. El denominador original exige $x \neq 1, -2$. Bajo $x \neq 1$, cancelamos una copia del factor $x - 1$:

$$C(x) = \frac{(x - 1)^3}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{(x - 1)^2}{x + 2}, \qquad x \neq -2, 1.$$

Qué debemos conservar de esta sección. Factorizar es útil en cálculo racional cuando cambia la representación de una manera que hace visible la estructura relevante. La regla práctica es:

> **Primero conserve el dominio; luego factorice para revelar factores, normalice los factores opuestos mediante signos globales y sólo entonces cancele.**

La identidad

$$a - x = -(x - a)$$

permite comparar factores opuestos sin confundirlos. El signo -1 debe viajar con la transformación igual que las restricciones del dominio.

En §20.7 aplicaremos estas ideas al producto de expresiones racionales, donde factorizar antes de multiplicar puede reducir drásticamente el trabajo y evitar expansiones innecesarias.

20.7. Multiplicación de expresiones racionales

En las dos secciones anteriores aprendimos a hacer visibles factores, justificar su cancelación y conservar las restricciones que desaparecen de la fórmula final. Al multiplicar expresiones racionales, esas tres ideas actúan al mismo tiempo.

La pregunta que guiará esta sección es:

> **¿Conviene multiplicar primero o mirar primero la estructura de los factores?**

La regla aritmética de la multiplicación es sencilla. La dificultad real consiste en aplicarla sin destruir una estructura que podría simplificar el cálculo.

La regla de multiplicación. Supongamos que las expresiones

$$\frac{A}{B} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{D}$$

están definidas en el dominio que estamos considerando. En particular, necesitamos

$$B \neq 0 \qquad \text{y} \qquad D \neq 0.$$

Entonces

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

Podemos justificarlo mediante inversos:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = AB^{-1}CD^{-1} = ACB^{-1}D^{-1} = AC(BD)^{-1} = \frac{AC}{BD}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \qquad B \neq 0,\ D \neq 0.}$$

No aparece aquí una condición nueva distinta de las que ya exigían los dos factores. El producto original está definido exactamente donde **ambas expresiones racionales están definidas**.

Si D_1 y D_2 son sus dominios respectivos, entonces el dominio del producto escrito originalmente es

$$D_1 \cap D_2.$$

Una simplificación posterior puede producir una fórmula con dominio natural mayor, pero el dominio de procedencia sigue siendo esta intersección.

Un producto que conviene factorizar antes de ejecutar. Considere

$$P(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x - 2}{x + 3}.$$

Antes de multiplicar, registramos el dominio original. El primer denominador factoriza como

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2),$$

de modo que exige $x \neq 3$ y $x \neq -2$. El segundo factor exige además $x \neq -3$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(P) = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}.$$

Ahora observamos que

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Así,

$$P(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} \cdot \frac{x - 2}{x + 3}.$$

En el dominio original, tanto $x - 3$ como $x + 3$ son no nulos. Podemos simplificarlos antes de efectuar ninguna multiplicación extensa:

$$\boxed{P(x) = \frac{x - 2}{x + 2}, \qquad x \neq -3, -2, 3.}$$

La fórmula final sólo muestra la exclusión $x \neq -2$ si se lee aisladamente. Sin embargo, $x = -3$ y $x = 3$ permanecen fuera del dominio porque hacían indefinidos factores del producto original.

La cancelación cruzada no es una regla nueva. En el ejemplo anterior cancelamos factores que estaban en fracciones distintas. A veces se habla informalmente de **cancelación cruzada**, pero no hay una nueva propiedad algebraica detrás de ella.

Considere

$$\frac{AU}{B} \cdot \frac{C}{DU},$$

con $B \neq 0$, $D \neq 0$ y $U \neq 0$. Multiplicar primero daría

$$\frac{AU}{B} \cdot \frac{C}{DU} = \frac{AUC}{BDU}.$$

Ahora U es un factor común del numerador y del denominador, de modo que §20.5 permite escribir

$$\frac{AUC}{BDU} = \frac{AC}{BD}.$$

Hacer esa cancelación antes de escribir el producto completo sólo evita una escritura intermedia. La justificación sigue siendo la misma: dividimos numerador y denominador por un factor no nulo.

Comparar dos rutas. Volvamos a

$$P(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x - 2}{x + 3}.$$

La ruta estructural fue

```
DOMINIO
  ↓
FACTORIZAR
  ↓
CANCELAR FACTORES NO NULOS
  ↓
MULTIPLICAR LO QUE QUEDA
```

y condujo rápidamente a $(x - 2)/(x + 2)$.

Si multiplicamos primero las formas expandidas, obtenemos

$$P(x) = \frac{(x^2 - 9)(x - 2)}{(x^2 - x - 6)(x + 3)} = \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}.$$

La expresión es correcta en el mismo dominio original, pero la estructura que permitía simplificar quedó oculta. Para recuperar la forma simple tendríamos que factorizar de nuevo dos polinomios cúbicos que nosotros mismos acabamos de crear.

Expandir no produjo un error lógico; produjo una **representación peor para el objetivo del problema**.

No es obligatorio expandir lo que ya está bien organizado. Considere

$$Q(x) = \frac{x + 1}{x - 2} \cdot \frac{x + 4}{x + 3}.$$

El dominio original es $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$. No existe ningún factor común entre numeradores y denominadores. Podemos escribir directamente

$$\boxed{Q(x) = \frac{(x + 1)(x + 4)}{(x - 2)(x + 3)}, \qquad x \neq -3, 2.}$$

Expandir hasta

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + x - 6}$$

no constituye una simplificación automática. Ha cambiado la representación, pero no ha reducido la estructura relevante. En este capítulo, cuando queremos controlar dominio y cancelaciones, la forma factorizada suele contener más información visible.

Un producto puede terminar en una constante. Considere

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{x + 2}{x - 1}.$$

Como

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2),$$

el primer factor exige $x \neq -1, -2$, y el segundo exige $x \neq 1$. Así,

$$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}.$$

Además,

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

por lo que

$$R(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x-1}.$$

Todos los factores visibles se cancelan en el dominio original y obtenemos

$$\boxed{R(x) = 1, \qquad x \neq -2, -1, 1.}$$

La constante 1 está definida para todo real, pero el producto original no. Cuanto más simple se vuelve la fórmula final, más fácil puede ser olvidar el dominio de procedencia.

Qué puede cancelarse en un producto. Cuando varias fracciones se multiplican, podemos comparar **todos los factores del numerador total** con **todos los factores del denominador total**.

Por ejemplo,

$$\frac{(x-1)(x+4)}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{(x+2)(x+5)}{(x-1)(x+7)}$$

posee factores $x-1$ y $x+2$ que aparecen una vez arriba y una vez abajo. Si el dominio original garantiza que son no nulos, pueden cancelarse.

En cambio, en

$$\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x+3}{x+4},$$

la aparición repetida del símbolo x no crea ningún factor común. La unidad relevante sigue siendo el **factor completo**.

No-ejemplo: simplificar el producto y reconstruir mal el dominio. Supongamos que alguien calcula

$$\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x+2}{x-1} = 1$$

y concluye que el dominio es $\mathbb{R}$.

La simplificación algebraica produjo correctamente la fórmula 1, pero la reconstrucción del dominio es falsa. Los denominadores originales eran

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

y $x-1$. Por tanto, $x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$ ya estaban prohibidos antes de cualquier cancelación.

El primer error no está en el resultado 1, sino en intentar deducir el dominio original **a partir de la fórmula final**.

Protocolo operativo para productos. Para multiplicar expresiones racionales, usaremos el orden

```
1. LEER EL DOMINIO DE CADA FACTOR.
2. INTERSECTAR LAS RESTRICCIONES.
3. FACTORIZAR NUMERADORES Y DENOMINADORES CUANDO SEA ÚTIL.
4. NORMALIZAR FACTORES OPUESTOS SI APARECEN.
5. CANCELAR SÓLO FACTORES NO NULOS.
6. MULTIPLICAR LOS FACTORES QUE QUEDAN.
7. CONSERVAR TODO EL DOMINIO ORIGINAL.
```

El paso 6 aparece deliberadamente tarde. Multiplicar es fácil; escoger una representación que no multiplique el trabajo innecesariamente es la parte estratégica.

Recuperación breve. Simplifique los productos siguientes y conserve su dominio original.

1. $A(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6} \cdot \dfrac{x+3}{x+2}$;
2. $B(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+2)(x-3)} \cdot \dfrac{x+2}{x-1}$;
3. $C(x) = \dfrac{x+1}{x-4} \cdot \dfrac{x+2}{x+5}$.

Respuesta razonada.

1. Factorizamos

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

y

$$x^2+x-6 = (x+3)(x-2).$$

El primer factor exige $x \neq -3, 2$ y el segundo exige $x \neq -2$. En el dominio $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$,

$$A(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} \cdot \frac{x+3}{x+2} = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{A(x) = 1, \qquad x \neq -3, -2, 2.}$$

2. El primer factor exige $x \neq -2, 3$ y el segundo exige $x \neq 1$. En el dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$,

$$B(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-3}.$$

Así,

$$\boxed{B(x) = \frac{x-1}{x-3}, \qquad x \neq -2, 1, 3.}$$

3. No hay factores comunes. El dominio original exige $x \neq 4, -5$, y la forma factorizada ya es adecuada:

$$\boxed{C(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-4)(x+5)}, \qquad x \neq -5, 4.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Multiplicar expresiones racionales no significa expandir de inmediato. La regla de cálculo es

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},$$

pero la estrategia eficaz es:

> **fijar primero el dominio, factorizar antes de multiplicar, cancelar sólo factores no nulos y multiplicar únicamente lo que sobreviva.**

Las cancelaciones entre fracciones distintas no constituyen una nueva ley: son cancelaciones ordinarias en el numerador y denominador del producto total. Y ninguna de ellas borra las restricciones de los factores originales.

En §20.8 estudiaremos la división. Allí aparecerá una obligación adicional: el divisor no sólo deberá estar definido, sino que deberá ser distinto de cero.

20.8. División: invertir el divisor completo

En §20.7 vimos que multiplicar expresiones racionales no añade restricciones distintas de las que ya exigían los factores originales. La división cambia la situación: no basta con que las dos expresiones que participan estén definidas. La expresión que ocupa el lugar de **divisor** debe, además, tener un valor distinto de cero.

La pregunta central será:

> **¿Qué condiciones deben cumplirse antes de reemplazar una división por una multiplicación por el recíproco?**

La regla de división. Considere

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}.$$

Para que el dividendo A/B esté definido necesitamos $B\neq 0$. Para que el divisor C/D esté definido necesitamos $D\neq 0$. Pero todavía falta una condición: como estamos dividiendo por C/D, ese cociente debe ser distinto de cero.

Bajo $D\neq 0$, el cociente C/D es cero exactamente cuando $C=0$. Por tanto, debemos exigir también $C\neq 0$.

Si $C\neq 0$ y $D\neq 0$, entonces el recíproco de C/D es D/C, porque

$$\frac{C}{D}\cdot\frac{D}{C}=1.$$

Así podemos transformar la división en multiplicación:

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}.$$

La regla completa es, por tanto,

$$\boxed{\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC},\qquad B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0.}$$

Observe qué símbolo no aparece entre las condiciones: no necesitamos exigir $A\neq 0$. Un dividendo puede valer cero; cero dividido por una cantidad no nula sigue siendo cero. La condición adicional de la división recae sobre el **divisor**.

Estar definido no es lo mismo que ser no nulo. Esta distinción es la parte conceptual más importante de la operación.

Considere como divisor

$$D(x) = \frac{x-2}{x+5}.$$

En $x = -5$, la expresión $D(x)$ ni siquiera está definida. En cambio, en $x = 2$ sí está definida, pero vale cero:

$$D(2) = 0.$$

Por tanto, si otra expresión se divide por $D(x)$, ambos valores deben excluirse, aunque por razones diferentes:

- $x = -5$, porque el divisor **no existe**;
- $x = 2$, porque el divisor **existe pero vale cero**.

Esta doble comprobación puede resumirse así:

```
DIVISOR
  ↓
¿ESTÁ DEFINIDO?
  ↓ sí
¿ES DISTINTO DE CERO?
  ↓ sí
SE PUEDE DIVIDIR POR ÉL
```

Una respuesta que controle sólo los denominadores internos del divisor puede seguir siendo incompleta.

Ejemplo rector: una exclusión que nace del numerador del divisor. Considere

$$Q(x) = \frac{x-2}{x+1} \div \frac{x-2}{x-4}.$$

Antes de invertir nada, determinamos todas las condiciones de la expresión original.

El dividendo exige $x \neq -1$. El divisor $(x-2)/(x-4)$ exige $x \neq 4$ para estar definido. Además, ese divisor debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq 4$, se anula cuando $x - 2 = 0$, de modo que debemos excluir también $x = 2$.

Así,

$$\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 4\}.$$

Sólo ahora invertimos el **divisor completo**:

$$Q(x) = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x-4}{x-2}.$$

Como $x \neq 2$ forma parte del dominio original, el factor $x - 2$ es no nulo y puede cancelarse. Obtenemos

$$\boxed{Q(x) = \frac{x-4}{x+1}, \qquad x \neq -1, 2, 4.}$$

La fórmula final ya no muestra las exclusiones $x = 2$ ni $x = 4$. Sin embargo, ambas pertenecen a la expresión original: en $x = 2$ el divisor valía cero y en $x = 4$ el divisor ni siquiera estaba definido.

Invertir el divisor completo. La frase «multiplicar por el recíproco» puede inducir errores si no se identifica qué objeto está siendo invertido.

En

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D},$$

el divisor es **todo** el cociente C/D. Su recíproco es D/C. Por eso

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}.$$

No se invierte el dividendo. Tampoco se invierten simultáneamente las dos fracciones. Y no se conserva el divisor sin cambios.

Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6},$$

mientras que multiplicar sin invertir daría $8/15$, que corresponde a otra operación.

La disciplina de lectura es sencilla:

> **localice primero el signo de división; el objeto completo situado a su derecha es el que debe reemplazarse por su recíproco.**

El denominador del divisor se mueve, pero su restricción permanece. Considere ahora

$$R(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 2} \div \frac{x - 3}{x + 1}.$$

La expresión original impone tres restricciones.

El dividendo exige $x \neq -2$. El divisor exige $x \neq -1$ para estar definido. Además, el divisor debe ser no nulo, de modo que $x \neq 3$.

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3\}.$$

Invertimos el divisor completo:

$$R(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 2} \cdot \frac{x + 1}{x - 3}.$$

Ahora factorizamos $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ y, como $x \neq 3$, cancelamos el factor $x - 3$:

$$\boxed{R(x) = \frac{(x + 3)(x + 1)}{x + 2}, \qquad x \neq -2, -1, 3.}$$

Observe lo ocurrido con $x = -1$. El factor $x + 1$ estaba originalmente en el **denominador del divisor**. Después de invertir, aparece en el numerador y deja de producir una exclusión visible en la fórmula final. Sin embargo, $x = -1$ continúa prohibido porque el divisor original no estaba definido allí.

Éste es un patrón característico de la división: al invertir el divisor, un antiguo denominador puede pasar al numerador, pero su restricción no se borra.

Por qué aparece la condición $C \neq 0$. La transformación

$$\frac{C}{D} \longmapsto \frac{D}{C}$$

introduce visualmente a C como denominador. Pero la condición $C \neq 0$ no es una restricción artificial creada por nuestra técnica. Ya estaba implícita en la operación original, porque dividir por C/D exigía que ese divisor fuera no nulo.

Así, cuando la inversión hace aparecer una nueva barra de fracción con C abajo, sólo está **haciendo visible una obligación previa**.

Esto distingue la inversión legítima del uso de un factor auxiliar arbitrario. Aquí no estamos reduciendo el dominio por conveniencia: estamos expresando explícitamente el dominio que la división ya exigía.

Un dividendo nulo sí está permitido. Para evitar una simetría falsa entre dividendo y divisor, considere

$$Z(x) = \frac{x-1}{x+2} \div \frac{x+3}{x+4}.$$

En $x = 1$, el dividendo vale cero. Eso no produce ningún problema mientras el divisor esté definido y sea no nulo. En efecto,

$$Z(1) = 0 \div \frac{4}{5} = 0.$$

Las restricciones proceden de $x + 2 \neq 0$, de $x + 4 \neq 0$ y de $x + 3 \neq 0$ porque el divisor no puede valer cero. No aparece la condición $x - 1 \neq 0$.

Por tanto, al auditar una división, no debemos declarar «todos los numeradores y denominadores distintos de cero». La regla es más precisa: **los denominadores deben ser no nulos y el divisor completo debe ser no nulo**.

No-ejemplo: controlar sólo que el divisor esté definido. Vuelva al ejemplo

$$Q(x) = \frac{x-2}{x+1} \div \frac{x-2}{x-4}.$$

Supongamos que alguien registra únicamente $x \neq -1$ y $x \neq 4$ y, a continuación, invierte el divisor.

La lista sigue siendo incompleta. En $x = 2$ ambas fracciones originales están individualmente definidas, pero la segunda vale cero. La expresión completa intentaría calcular

$$0 \div 0,$$

que no está definido.

El primer error ocurre **antes** de cualquier cancelación: se confundió «el divisor existe» con «podemos dividir por él».

Cancelar después de invertir. Una vez reemplazada la división por multiplicación, vuelven a aplicarse exactamente las reglas de §§20.5–20.7: factorizar, normalizar factores opuestos cuando sea necesario y cancelar sólo factores que sabemos no nulos.

La secuencia completa será

```
1. LEER EL DOMINIO DEL DIVIDENDO.
2. LEER EL DOMINIO DEL DIVISOR.
3. EXIGIR ADEMÁS QUE EL DIVISOR SEA NO NULO.
4. INVERTIR EL DIVISOR COMPLETO.
5. FACTORIZAR Y CANCELAR SÓLO FACTORES AUTORIZADOS.
```

```
6. MULTIPLICAR LO QUE QUEDE.
7. CONSERVAR TODAS LAS RESTRICCIONES ORIGINALES.
```

El paso 3 es la diferencia estructural entre multiplicar y dividir expresiones racionales.

Una simplificación del divisor no puede ampliar retroactivamente el dominio. Considere

$$H(x) = 1 \div \frac{x-2}{x-2}.$$

La fracción que actúa como divisor está definida sólo para $x \neq 2$. En ese dominio vale 1, por lo que

$$H(x) = 1, \qquad x \neq 2.$$

No sería correcto simplificar primero $(x-2)/(x-2)$ a 1 y concluir después que H está definida para todo real. La simplificación del divisor preserva sus valores en el dominio autorizado; no repara el punto donde el divisor original no existía.

Este ejemplo reúne las ideas centrales de §§20.4–20.8: una forma final puede ser extremadamente simple y, aun así, conservar una historia de restricciones que no aparece en su escritura.

Recuperación breve. Simplifique cada cociente y conserve su dominio original.

1. $A(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \div \dfrac{x-3}{x+4}$;
2. $B(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1} \div \dfrac{x-2}{x+3}$;
3. $C(x) = \dfrac{x-1}{x+2} \div \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Respuesta razonada.

1. El dividendo exige $x \neq 2$. El divisor exige $x \neq -4$ y, para ser no nulo, también $x \neq 3$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(A) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2, 3\}.$$

Invertimos el divisor:

$$A(x) = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x+4}{x-3}.$$

No hay factores comunes, de modo que

$$\boxed{A(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x-3)}, \qquad x \neq -4, 2, 3.}$$

2. El dividendo exige $x \neq -1$. El divisor exige $x \neq -3$ y debe además ser no nulo, de modo que $x \neq 2$. Como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$,

$$B(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x-2}.$$

Bajo $x \neq 2$, cancelamos $x-2$ y obtenemos

$$\boxed{B(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{x+1}, \qquad x \neq -3, -1, 2.}$$

3. El dividendo exige $x \neq -2$. El divisor $(x^2-1)/(x-1)$ exige $x \neq 1$. Además, bajo esa condición, el divisor se anula cuando $x^2-1=0$; como $x^2-1=(x-1)(x+1)$ y $x=1$ ya está excluido, debemos excluir también $x=-1$. Así,

$$\mathrm{Dom}(C) = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,1\}.$$

Invertimos el divisor y factorizamos:

$$C(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}.$$

Como $x \neq 1$, cancelamos una copia de $x-1$:

$$\boxed{C(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x+1)}, \qquad x \neq -2,-1,1.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Dividir por una expresión racional exige más que multiplicar por otra expresión racional. Antes de invertir debemos comprobar que el divisor **existe y no vale cero**.

La regla algebraica es

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC},$$

con $B \neq 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$.

La regla de lectura es todavía más importante:

> **registre primero las restricciones del dividendo y del divisor; añada los ceros del divisor completo; sólo entonces invierta el divisor completo y simplifique.**

En §20.9 pasaremos a suma y resta. Allí el problema estratégico ya no será invertir, sino escoger un denominador común que permita operar sin introducir trabajo innecesario ni perder el dominio original.

20.9. Elegir un denominador común

En §20.8 la operación exigía identificar un divisor completo y reemplazarlo por su recíproco. En una suma o una resta aparece otro problema: antes de combinar numeradores necesitamos expresar los términos con un mismo denominador.

La pregunta estratégica será:

> **¿Qué denominador común conviene elegir para que todas las fracciones puedan reescribirse sin introducir trabajo ni restricciones innecesarias?**

Existe una respuesta que siempre funciona: multiplicar los denominadores. Pero que una elección sea válida no significa que sea la más económica.

Un denominador común siempre disponible. Supongamos que trabajamos con

$$\frac{A}{B} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{D},$$

bajo las condiciones $B \neq 0$ y $D \neq 0$.

El producto BD es siempre un denominador común. En efecto,

$$\frac{A}{B} = \frac{AD}{BD}$$

y

$$\frac{C}{D} = \frac{BC}{BD}.$$

Estas reescrituras son legítimas en el dominio original: para obtener la primera multiplicamos por D/D, y allí $D \neq 0$; para obtener la segunda multiplicamos por B/B, y allí $B \neq 0$.

Por tanto, cuando no vemos una estructura mejor, el producto de los denominadores ofrece una ruta segura.

Sin embargo, puede repetir factores que ya estaban compartidos y aumentar innecesariamente el tamaño de la expresión.

Comparar factores antes de multiplicar denominadores. Considere

$$\frac{1}{x(x+2)} \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{x+2}.$$

El dominio original exige

$$x \neq 0, \qquad x \neq -2.$$

Si multiplicamos los denominadores sin mirar su estructura, obtenemos

$$x(x+2)^2.$$

Es un denominador común válido, porque contiene como factores a $x(x+2)$ y a $x+2$. Pero contiene **dos copias** de $x+2$ aunque una sola basta para ambos denominadores.

La estructura muestra inmediatamente una opción más económica:

$$x(x+2).$$

La primera fracción ya tiene ese denominador. Para la segunda sólo falta el factor x, así que

$$\frac{3}{x+2} = \frac{3x}{x(x+2)}, \qquad x \neq 0, -2.$$

No hemos sumado todavía. Sólo hemos puesto ambas fracciones en una forma compatible usando el mínimo trabajo visible.

Un factor compartido se escribe una sola vez. Considere ahora los denominadores

$$x(x+1) \qquad \text{y} \qquad (x+1)(x-2).$$

El producto bruto sería

$$x(x+1)^2(x-2).$$

Pero ambos denominadores ya contienen el factor $x+1$. Para que cada uno divida al denominador común basta tomar

$$\boxed{x(x+1)(x-2)}.$$

Así, para expresiones como

$$\frac{A}{x(x+1)} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{(x+1)(x-2)},$$

podemos reescribir

$$\frac{A}{x(x+1)} = \frac{A(x-2)}{x(x+1)(x-2)}$$

y

$$\frac{C}{(x+1)(x-2)} = \frac{Cx}{x(x+1)(x-2)}.$$

Las restricciones originales son $x \neq 0, -1, 2$. Los factores que introdujimos en cada fracción eran precisamente factores de **otro denominador original**, de modo que ya sabíamos que eran no nulos en el dominio común.

Esta observación es importante: la elección económica no se basa en una regla nueva, sino en **no repetir factores que ya están presentes**.

Potencias repetidas: conservar la potencia suficiente. El mismo principio aparece cuando un factor se repite con distintas potencias. Considere

$$\frac{1}{(x-1)^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{(x-1)^3(x+4)}.$$

El dominio original exige $x \neq 1, -4$.

El segundo denominador ya contiene tres copias del factor $x-1$, suficientes para absorber las dos copias que necesita el primero. Por eso un denominador común económico es

$$\boxed{(x-1)^3(x+4)}.$$

La primera fracción se reescribe multiplicando por

$$\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+4)},$$

que vale 1 en el dominio original, mientras que la segunda fracción ya posee el denominador elegido.

No necesitamos sumar los exponentes $2+3$. Para construir un denominador que contenga a ambos basta conservar la **mayor potencia necesaria** de cada factor visible.

Un inventario local de factores. En este capítulo no desarrollaremos una teoría de máximo común divisor o mínimo común múltiplo de polinomios. Esa infraestructura pertenece a C23. Aquí basta con una lectura local de los factores que ya sabemos reconocer.

Cuando los denominadores están factorizados, podemos proceder así:

```
1. REGISTRAR EL DOMINIO ORIGINAL.
2. FACTORIZAR LOS DENOMINADORES CUANDO SEA ÚTIL.
3. HACER UN INVENTARIO DE LOS FACTORES VISIBLES.
4. PARA CADA FACTOR, CONSERVAR LA POTENCIA MÁXIMA NECESARIA.
5. REESCRIBIR CADA FRACCIÓN MULTIPLICANDO SÓLO POR LOS FACTORES QUE LE FALTAN.
6. COMPROBAR QUE ESOS MULTIPLICADORES SON NO NULOS EN EL DOMINIO ORIGINAL.
```

Este procedimiento no pretende decidir el denominador común «óptimo» en toda situación algebraica. Sólo evita repeticiones evidentes dentro del repertorio de factorizaciones ya disponible.

Elegir un denominador común no debe reducir el dominio. Aquí aparece una precaución que no debemos perder.

Considere

$$\frac{1}{x-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{x+1}.$$

El dominio original es

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

El denominador

$$(x-1)(x+1)$$

es una elección natural. Pero también podríamos fabricar el denominador más grande

$$(x-1)(x+1)(x+5).$$

Para hacerlo tendríamos que introducir factores $(x+5)/(x+5)$. Eso exige $x \neq -5$, condición que **no pertenecía al dominio original**.

Por tanto, esa ruta sólo produciría expresiones equivalentes en

$$\mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 1\},$$

un dominio menor que el original.

El problema no es que el nuevo denominador sea «demasiado grande» en sentido estético. El problema es que hemos introducido una división por una expresión que puede anularse en un punto originalmente permitido.

Así que fijamos una regla:

> **Un denominador común es adecuado para una transformación sobre el dominio original sólo si los factores usados para construirlo son no nulos en todo ese dominio.**

Los factores tomados de los denominadores originales satisfacen automáticamente esta condición en el dominio común; un factor auxiliar arbitrario puede no satisfacerla.

No confundir denominador común con producto obligatorio. Supongamos que debemos compatibilizar

$$\frac{2}{(x-3)^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{x-3}.$$

El producto de denominadores es $(x-3)^3$, pero no es necesario. Como $(x-3)^2$ ya contiene el factor requerido por $x-3$, podemos usar simplemente

$$(x-3)^2.$$

La segunda fracción se transforma en

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x(x-3)}{(x-3)^2}, \qquad x \neq 3.$$

La regla «multiplique siempre los denominadores» produce una respuesta válida cuando se preservan las condiciones, pero puede multiplicar también el trabajo. Conviene leer primero la relación entre los denominadores.

Verificar una reescritura. Una transformación hacia un denominador común debe poder comprobarse sin realizar todavía la suma o la resta.

Por ejemplo, en el dominio $x \neq 0, -2$,

$$\frac{3}{x+2} = \frac{3x}{x(x+2)}.$$

Podemos verificarla cancelando el factor no nulo x en la expresión de la derecha:

$$\frac{3x}{x(x+2)} = \frac{3}{x+2}.$$

Esta recomposición confirma dos cosas al mismo tiempo: que la fracción conserva su valor y que el factor introducido estaba autorizado por el dominio declarado.

No-ejemplo: repetir todos los factores sin mirar. Considere

$$\frac{1}{x(x-1)} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{(x-1)^2}.$$

El producto de los denominadores es

$$x(x-1)^3.$$

Es un denominador común válido para $x \neq 0, 1$, pero no es necesario. El inventario de factores muestra que necesitamos una copia de x y, como máximo, dos copias de $x-1$. Por tanto,

$$\boxed{x(x-1)^2}$$

es suficiente.

El error conceptual no sería usar $x(x-1)^3$: esa elección sigue siendo válida en el dominio original. El error sería creer que **multiplicar todos los denominadores es la única manera** de construir un denominador común.

Recuperación breve. Para cada par de fracciones, determine el dominio original y elija un denominador común económico. Reescriba las fracciones, pero no efectúe todavía la suma o resta.

1. $\dfrac{2}{x(x-2)}$ y $\dfrac{3}{x-2}$;
2. $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ y $\dfrac{4}{(x+1)(x-3)}$;
3. $\dfrac{1}{x-1}$ y $\dfrac{1}{x+1}$, frente a la propuesta de usar $(x-1)(x+1)(x+4)$.

Respuesta razonada.

1. El dominio original exige $x \neq 0, 2$. El primer denominador $x(x-2)$ ya contiene al segundo. Elegimos

$$x(x-2).$$

Así,

$$\frac{2}{x(x-2)}$$

queda igual y

$$\frac{3}{x-2} = \frac{3x}{x(x-2)}, \qquad x \neq 0, 2.$$

2. El dominio original exige $x \neq -1, 3$. Los factores necesarios son $(x+1)^2$ y $x-3$, de modo que elegimos

$$(x+1)^2(x-3).$$

Entonces

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x-3}{(x+1)^2(x-3)}$$

y

$$\frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{4(x+1)}{(x+1)^2(x-3)}, \qquad x \neq -1, 3.$$

3. El dominio original es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. El denominador común natural es

$$(x-1)(x+1).$$

La propuesta que añade $x+4$ obligaría a usar $(x+4)/(x+4)$ y excluiría artificialmente $x = -4$, que sí pertenecía al dominio original. Por tanto, no es una transformación equivalente sobre todo el dominio de procedencia.

Qué debemos conservar de esta sección. Para sumar o restar expresiones racionales necesitamos un denominador común, pero **común** no significa necesariamente **producto completo de todos los denominadores**.

El producto siempre ofrece una opción disponible. Cuando la factorización revela factores compartidos o potencias repetidas, podemos evitar duplicaciones conservando cada factor con la potencia máxima que realmente se necesita.

La regla estratégica queda fijada:

> **lea primero el dominio y los factores; elija después un denominador común que contenga lo necesario, pero no introduzca ceros nuevos en el dominio original.**

En §20.10 utilizaremos esta elección para efectuar sumas y restas completas, donde además habrá que controlar con cuidado los signos y la estructura del numerador resultante.

20.10. Sumar y restar con estructura visible y signos

En §20.9 aprendimos a escoger un denominador común sin repetir factores innecesarios ni reducir artificialmente el dominio. Ahora sí efectuaremos la operación completa. La dificultad principal ya no está en encontrar una barra común, sino en conservar tres estructuras al mismo tiempo: el dominio original, los numeradores completos y los signos que actúan sobre ellos.

La pregunta central será:

> **¿Cómo combinar varias expresiones racionales sin perder factores, paréntesis ni signos antes de simplificar el resultado?**

Cuando el denominador ya es común. Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la operación ocurre en el numerador. Bajo $B \neq 0$,

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$$

y

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}.$$

El denominador no se suma ni se resta. Su función es indicar la unidad fraccionaria común respecto de la cual combinamos los numeradores.

Por ejemplo,

$$\frac{3}{x-4} + \frac{2x-1}{x-4} = \frac{3+(2x-1)}{x-4} = \frac{2x+2}{x-4} = \frac{2(x+1)}{x-4}, \qquad x \neq 4.$$

Observe el primer paréntesis: escribir $3 + (2x - 1)$ deja visible que el segundo numerador entra como un bloque completo. En una suma sencilla podríamos omitirlo sin riesgo, pero esa disciplina será decisiva cuando aparezca un signo menos.

Denominadores distintos: primero compatibilizar, después combinar. Para

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D},$$

con $B \neq 0$ y $D \neq 0$, el producto BD siempre permite escribir

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}.$$

Esta fórmula es correcta, pero §20.9 ya mostró que BD no siempre es la elección más económica. En la práctica seguiremos este orden:

1. registrar el dominio original;
2. factorizar denominadores cuando eso revele estructura;
3. elegir un denominador común adecuado;
4. reescribir **cada numerador como un bloque completo**;
5. combinar esos bloques con el signo correcto;
6. simplificar el numerador resultante;
7. factorizar y cancelar sólo después de que la suma o resta se haya convertido en una sola fracción;
8. conservar todas las restricciones originales.

La posición del paso 7 es importante: antes de combinar no existe todavía un único numerador total en el que podamos buscar factores comunes con el denominador.

Ejemplo rector: una resta que se simplifica sólo al final. Considere

$$E(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}.$$

Antes de operar, determinamos el dominio. Como

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

la expresión original exige

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

El segundo denominador ya contiene al primero. Por tanto elegimos como denominador común

$$(x-1)(x+1).$$

Reescribimos la primera fracción multiplicando por $(x+1)/(x+1)$:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}, \qquad x \neq -1, 1.$$

Ahora sí restamos:

$$E(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}.$$

Simplificamos el numerador:

$$(x+1) - 2 = x - 1.$$

Sólo en este punto aparece un factor común entre numerador y denominador:

$$E(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}.$$

Como $x \neq 1$ pertenece al dominio original, podemos cancelar $x-1$ y obtener

$$\boxed{E(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad x \neq -1, 1.}$$

La fórmula final sólo muestra la exclusión $x \neq -1$. La exclusión $x = 1$ desapareció visualmente después de la cancelación, pero sigue perteneciendo al dominio original.

Este ejemplo muestra por qué **sumar o restar puede crear un factor cancelable que no existía antes de combinar los numeradores**.

El signo menos actúa sobre el numerador completo. Considere ahora

$$F(x) = \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x-3}{x-1}.$$

El dominio original es

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

Como los denominadores no comparten factores, usamos $(x+2)(x-1)$. Entonces

$$F(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}.$$

Al combinar, el signo menos debe aplicarse al **segundo numerador completo**:

$$F(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x-3)(x+2)}{(x+2)(x-1)}.$$

Ahora expandimos sólo el numerador, porque allí necesitamos efectuar la resta:

$$(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$$

y

$$(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(2x+1)(x-1)-(x-3)(x+2) &= (2x^2-x-1)-(x^2-x-6)\\ &= x^2+5.\end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{F(x)=\frac{x^2+5}{(x+2)(x-1)}, \qquad x\neq -2,1.}$$

No necesitamos expandir el denominador. Su forma factorizada sigue mostrando mejor las restricciones y permite comprobar de inmediato que no existe cancelación con el numerador.

Un error de signo que nace al quitar demasiado pronto los paréntesis. En el cálculo anterior, una escritura peligrosa sería

$$(2x+1)(x-1)-(x-3)(x+2)$$

seguida de una expansión en la que sólo se cambia el signo del primer término del segundo producto. El signo menos no actúa sobre una parte del producto: actúa sobre **todo el resultado** de $(x-3)(x+2)$.

La escritura segura es

$$(2x^2-x-1)-\big(x^2-x-6\big),$$

y sólo después distribuir el signo:

$$2x^2-x-1-x^2+x+6.$$

Por eso fijamos una regla de microgramática algebraica:

> **En una resta de fracciones, mantenga el numerador sustraído entre paréntesis hasta que el signo menos haya sido distribuido por completo.**

Factores opuestos dentro de una suma. La normalización de §20.6 sigue siendo útil. Considere

$$G(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2-x}.$$

El dominio original exige $x\neq 2$. Como

$$2-x=-(x-2),$$

podemos escribir

$$\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{x-2}, \qquad x\neq 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{G(x)=0, \qquad x\neq 2.}$$

La fórmula final 0 está definida para todo real, pero la suma original no existía en $x=2$. Una vez más, una simplificación extrema puede ocultar por completo el dominio de procedencia.

Tres o más fracciones: conservar bloques antes de reducir. Considere

$$H(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)}.$$

El dominio original exige

$$x \neq 0, \qquad x \neq -1.$$

El denominador común económico es $x(x+1)$. Reescribimos cada término:

$$H(x) = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)}.$$

Ahora combinamos los numeradores conservando sus signos:

$$H(x) = \frac{(x+1) + x - 1}{x(x+1)} = \frac{2x}{x(x+1)}.$$

Como $x \neq 0$, podemos cancelar el factor x:

$$\boxed{H(x) = \frac{2}{x+1}, \qquad x \neq -1, 0.}$$

Este ejemplo concentra varias ideas del capítulo: denominador común económico, suma de tres términos, signo menos, cancelación posterior y conservación de una exclusión que deja de ser visible.

No cancelar a través de una suma o una resta. Vuelva al ejemplo rector:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

Podría resultar tentador «cancelar $x-1$» porque aparece en ambos denominadores. Eso no tiene sentido: los dos términos están separados por una resta. No forman todavía un único cociente con un factor común arriba y abajo.

La cancelación sólo aparece después de combinar:

$$\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}.$$

Ahora sí $x-1$ es factor del **numerador total** y del denominador total. La misma regla de §20.5 sigue vigente: se cancelan factores de un producto, no fragmentos separados por sumas o restas.

No-ejemplo: sumar denominadores. Una regla falsa muy común es

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D}.$$

No existe una propiedad algebraica que justifique esta transformación.

Por ejemplo, con $x = 1$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

mientras que la regla falsa produciría

$$\left.\frac{1+1}{x+(x+1)}\right|_{x=1} = \frac{2}{3}.$$

El error aparece antes de cualquier simplificación: para sumar fracciones necesitamos **un mismo denominador**, no sumar los denominadores existentes.

Verificar sin rehacer todo el cálculo. Después de obtener una sola fracción conviene realizar al menos dos controles breves:

1. **control estructural:** ¿el denominador final contiene sólo factores autorizados y las restricciones originales siguen registradas?;
2. **control puntual:** elegir un valor permitido sencillo y comprobar que la expresión original y la final producen el mismo número.

El control puntual puede detectar un signo perdido, pero no reemplaza la demostración algebraica. Dos fórmulas que coinciden en uno o varios valores no son por ello equivalentes en todo el dominio, como ya vimos en §20.4.

En el ejemplo rector, podemos usar $x = 2$:

$$\frac{1}{2-1} - \frac{2}{2^2-1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

mientras que la fórmula final da

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

La coincidencia confirma el cálculo en ese punto; la cadena algebraica anterior es la que justifica la igualdad para todo $x \neq -1, 1$.

Protocolo operativo para sumas y restas. Usaremos el siguiente orden:

```
1. LEER EL DOMINIO ORIGINAL.
2. FACTORIZAR LOS DENOMINADORES CUANDO SEA ÚTIL.
3. ELEGIR UN DENOMINADOR COMÚN ADECUADO.
4. REESCRIBIR CADA TÉRMINO CON SU NUMERADOR COMPLETO ENTRE PARÉNTESIS.
5. COMBINAR LOS NUMERADORES CONSERVANDO TODOS LOS SIGNOS.
6. SIMPLIFICAR Y, SI CONVIENE, FACTORIZAR EL NUMERADOR RESULTANTE.
7. CANCELAR SÓLO FACTORES DEL COCIENTE TOTAL Y SÓLO SI SON NO NULOS.
8. CONSERVAR LAS RESTRICCIONES ORIGINALES.
9. VERIFICAR LA FORMA FINAL SIN RECONSTRUIR EL DOMINIO DESDE ELLA.
```

El punto 4 evita errores de signo; el punto 7 evita cancelaciones ilegales a través de sumas; el punto 8 impide que una simplificación final borre información de procedencia.

Recuperación breve. Simplifique cada expresión y conserve su dominio original.

1. $A(x) = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{x+1}{(x-2)(x+4)}$;
2. $B(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} - \dfrac{x+3}{x-2}$;
3. $C(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Respuesta razonada.

1. El dominio original exige $x \neq 2, -4$. El denominador común $(x-2)(x+4)$ ya contiene al primer denominador, de modo que

$$A(x) = \frac{3(x+4)}{(x-2)(x+4)} + \frac{x+1}{(x-2)(x+4)}.$$

Combinando,

$$A(x) = \frac{3x + 12 + x + 1}{(x-2)(x+4)} = \boxed{\frac{4x + 13}{(x-2)(x+4)}, \qquad x \neq -4, 2.}$$

No aparece ningún factor común adicional que pueda cancelarse.

2. El dominio original exige $x \neq -1, 2$. Usamos $(x+1)(x-2)$ y mantenemos entre paréntesis el numerador sustraído:

$$B(x) = \frac{(2x-1)(x-2) - (x+3)(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Como

$$(2x-1)(x-2) = 2x^2 - 5x + 2$$

y

$$(x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3,$$

obtenemos

$$\boxed{B(x) = \frac{x^2 - 9x - 1}{(x+1)(x-2)}, \qquad x \neq -1, 2.}$$

3. El dominio original exige $x \neq 0, -1$. El denominador común es $x(x+1)$:

$$C(x) = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)}.$$

Por tanto,

$$C(x) = \frac{(x+1) + x - 1}{x(x+1)} = \frac{2x}{x(x+1)}.$$

Como $x \neq 0$, cancelamos x y obtenemos

$$\boxed{C(x) = \frac{2}{x+1}, \qquad x \neq -1, 0.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Sumar o restar expresiones racionales requiere mucho más que «ponerlas sobre una misma barra». Debemos preservar el dominio, escoger una representación útil y tratar cada numerador como una unidad sintáctica completa.

La regla de trabajo queda fijada:

> **denominador común primero; numeradores completos después; distribuya el signo menos antes de simplificar y cancele sólo cuando ya exista un único cociente factorizable.**

En §20.11 aplicaremos estas ideas dentro de fracciones complejas. Allí el numerador exterior y el denominador exterior podrán contener, cada uno, varias fracciones; el primer método consistirá en reducir cada bloque interior a una sola fracción y sólo entonces efectuar la división exterior.

20.11. Fracciones complejas: método interior

Hasta ahora hemos operado con expresiones racionales cuyos numeradores y denominadores eran bloques relativamente simples. Una **fracción compleja** añade un nivel de estructura: el numerador exterior, el denominador exterior o ambos contienen a su vez fracciones.

Por ejemplo,

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1}$$

no debe leerse como una colección plana de símbolos. Hay una división exterior cuyo numerador es el bloque $1/x + 1$ y cuyo denominador es el bloque $1/x - 1$.

La pregunta central será:

> **¿Cómo simplificar una fracción compleja sin perder las restricciones de sus denominadores internos ni olvidar que el denominador exterior completo debe ser distinto de cero?**

En esta sección usaremos el **método interior**: reducir por separado el numerador exterior y el denominador exterior a una sola fracción, y sólo después efectuar la división entre esos dos resultados.

Antes de simplificar: leer la expresión por niveles. Volvamos a

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1}.$$

La primera restricción aparece en las dos fracciones internas $1/x$:

$$x \neq 0.$$

Pero eso no basta. El denominador exterior completo,

$$\frac{1}{x} - 1,$$

debe además ser distinto de cero.

Bajo $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}.$$

Este bloque se anula cuando

$$1 - x = 0,$$

es decir, cuando $x = 1$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.}$$

Observe que las dos exclusiones tienen orígenes diferentes:

- $x = 0$ hace indefinidas las fracciones internas;
- $x = 1$ deja definidas esas fracciones, pero hace cero el **denominador exterior completo**.

Esta distinción recupera exactamente la lectura por capas de §20.3 y la condición adicional de la división estudiada en §20.8.

Paso 1: reducir el numerador exterior. Trabajemos ahora dentro del bloque superior:

$$\frac{1}{x} + 1.$$

Con denominador común x,

$$\frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x} + \frac{x}{x} = \frac{x+1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

El numerador exterior completo se ha convertido en una sola fracción.

Paso 2: reducir el denominador exterior. Ahora trabajamos dentro del bloque inferior:

$$\frac{1}{x} - 1.$$

De manera análoga,

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{1-x}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Además, como este bloque ocupa el lugar de divisor exterior, ya sabemos que debemos mantener

$$x \neq 1.$$

Por tanto, la fracción compleja original queda representada como

$$F(x) = \frac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{1-x}{x}}, \qquad x \neq 0, 1.$$

Paso 3: efectuar la división exterior. Ahora la estructura es exactamente la de §20.8: una fracción dividida por otra fracción. Invertimos el divisor completo:

$$F(x) = \frac{x+1}{x} \div \frac{1-x}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{1-x}.$$

Como $x \neq 0$ forma parte del dominio original, podemos cancelar el factor x:

$$\boxed{F(x) = \frac{x+1}{1-x}, \qquad x \neq 0, 1.}$$

La fórmula final sólo muestra de manera visible la exclusión $x \neq 1$. La restricción $x \neq 0$ ha desaparecido de la escritura, pero no del dominio de procedencia.

La estructura general del método interior. Una fracción compleja puede pensarse como

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde tanto $N(x)$ como $D(x)$ pueden contener a su vez varias fracciones.

El método interior sigue esta arquitectura:

```
1. LEER TODAS LAS FRACCIONES INTERNAS.
2. REGISTRAR SUS RESTRICCIONES.
3. EXIGIR QUE EL DENOMINADOR EXTERIOR COMPLETO SEA NO NULO.
4. REDUCIR EL NUMERADOR EXTERIOR A UNA SOLA FRACCIÓN.
5. REDUCIR EL DENOMINADOR EXTERIOR A UNA SOLA FRACCIÓN.
6. REEMPLAZAR LA BARRA EXTERIOR POR UNA DIVISIÓN ENTRE ESAS DOS FRACCIONES.
7. INVERTIR EL DIVISOR COMPLETO.
8. FACTORIZAR Y CANCELAR SÓLO FACTORES AUTORIZADOS.
9. CONSERVAR TODAS LAS RESTRICCIONES ORIGINALES.
```

Los pasos 4 y 5 organizan la expresión; los pasos 6 y 7 no introducen una técnica nueva, sino que reutilizan la división de §20.8.

El denominador exterior puede crear una exclusión nueva. Considere

$$G(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + 1}{\dfrac{1}{x+1} - 1}.$$

Las fracciones internas exigen

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

Pero aún debemos estudiar el denominador exterior completo. Reducimos ese bloque:

$$\frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-(x+1)}{x+1} = -\frac{x}{x+1}.$$

En el dominio donde está definido, este denominador exterior vale cero cuando $x = 0$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(G) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Ahora reducimos también el numerador exterior:

$$\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{1+(x-1)}{x-1} = \frac{x}{x-1}.$$

Así,

$$G(x) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{-\dfrac{x}{x+1}} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x+1}{-x}.$$

Como $x \neq 0$ ya pertenece al dominio original, podemos cancelar x y obtenemos

$$\boxed{G(x) = -\frac{x+1}{x-1}, \qquad x \neq -1, 0, 1.}$$

El punto $x = 0$ es especialmente instructivo: ninguna fracción interna era indefinida allí. La exclusión aparece porque el **bloque inferior completo** se vuelve cero.

Una forma final polinómica puede conservar varias exclusiones. Considere ahora

$$H(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{2}{x^2-1}}.$$

Las fracciones internas imponen

$$x \neq -1, \qquad x \neq 1.$$

El denominador exterior $2/(x^2-1)$ nunca vale cero cuando está definido, de modo que no aparece una exclusión adicional.

Reducimos el numerador exterior:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

El denominador exterior ya es una sola fracción. Entonces

$$H(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{2}{x^2-1}} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{2}.$$

Como $x \neq \pm 1$, el factor $x^2 - 1$ es no nulo en el dominio original y puede cancelarse. También cancelamos el factor constante 2:

$$\boxed{H(x) = x, \qquad x \neq -1, 1.}$$

La fórmula final x está definida para todo real. Sin embargo, la fracción compleja original no existía en $x = \pm 1$.

No simplificar el denominador exterior sin conservar su historia. Supongamos que, en el ejemplo rector, alguien reduce primero

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

y luego mira sólo la fórmula final de toda la expresión,

$$\frac{x+1}{1-x},$$

para reconstruir el dominio. Concluiría únicamente $x \neq 1$ y perdería $x \neq 0$.

La reducción interior fue algebraicamente correcta, pero el dominio no puede reconstruirse desde la última forma. Las restricciones deben haberse registrado **antes** de simplificar los bloques interiores.

Este principio puede expresarse así:

> **En una fracción compleja, simplifique los bloques interiores sobre el dominio ya fijado; no use sus formas simplificadas para volver a decidir dónde existía la expresión original.**

No-ejemplo: olvidar que el bloque inferior es un divisor. Considere nuevamente

$$G(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + 1}{\dfrac{1}{x+1} - 1}.$$

Si alguien registra sólo $x \neq 1$ y $x \neq -1$, ha controlado los denominadores internos, pero no la división exterior.

En $x = 0$,

$$\frac{1}{x+1} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

La expresión completa intentaría dividir por cero. El error ocurre **antes** de invertir o cancelar: se olvidó que el bloque inferior entero es un divisor y, por tanto, debe ser distinto de cero.

Método interior y economía de escritura. El método interior resulta especialmente natural cuando cada bloque exterior contiene pocas fracciones y puede reducirse con rapidez.

Por ejemplo, en

$$\frac{\dfrac{1}{x} + 2}{\dfrac{1}{x} + 1}$$

ambos bloques usan el mismo denominador interno x. Reducir cada uno por separado deja inmediatamente

$$\frac{\dfrac{1+2x}{x}}{\dfrac{1+x}{x}},$$

y la división exterior permite cancelar el factor x bajo $x \neq 0$.

En cambio, cuando muchos denominadores internos distintos aparecen a ambos lados de la barra exterior, puede ser más económico eliminarlos todos mediante un multiplicador común. Ése será el segundo método de §20.12. Ambos métodos deben producir expresiones equivalentes sobre el mismo dominio original; la diferencia estará en la **ruta** y en el coste algebraico.

Verificación por recomposición. Después de obtener una forma simple conviene comprobar que la división exterior fue leída correctamente.

En el ejemplo rector,

$$F(x) = \frac{x+1}{1-x}, \qquad x \neq 0, 1.$$

Para $x = 2$, la expresión original da

$$\frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3,$$

mientras que la forma final da

$$\frac{2+1}{1-2} = -3.$$

La coincidencia es un control puntual, no una demostración independiente. La justificación general está en la reducción algebraica de los dos bloques y la división posterior.

Recuperación breve. Simplifique mediante el método interior y conserve el dominio original.

1. $A(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} + 2}{\dfrac{1}{x} + 1}$;
2. $B(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}$;
3. $C(x) = \dfrac{\dfrac{2}{x+2}}{\dfrac{x-1}{x+2} + 1}$.

Respuesta razonada.

1. Las fracciones internas exigen $x \neq 0$. El denominador exterior es

$$\frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x},$$

de modo que debe cumplirse además $x \neq -1$. El numerador exterior se reduce a

$$\frac{1}{x} + 2 = \frac{1+2x}{x}.$$

Por tanto,

$$A(x) = \frac{\dfrac{1+2x}{x}}{\dfrac{x+1}{x}} = \frac{1+2x}{x} \cdot \frac{x}{x+1},$$

y, como $x \neq 0$,

$$\boxed{A(x) = \frac{2x+1}{x+1}, \qquad x \neq -1, 0.}$$

2. Las fracciones internas exigen $x \neq 1, -1$. Reducimos el numerador exterior:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}.$$

El denominador exterior es

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) + (x-1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Además de $x \neq \pm 1$, este bloque debe ser no nulo, así que $x \neq 0$. Entonces

$$B(x) = \frac{\dfrac{2}{x^2-1}}{\dfrac{2x}{x^2-1}} = \frac{2}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{2x} = \boxed{\frac{1}{x}, \qquad x \neq -1, 0, 1.}$$

3. La expresión interna exige $x \neq -2$. Reducimos el denominador exterior:

$$\frac{x-1}{x+2}+1=\frac{x-1+x+2}{x+2}=\frac{2x+1}{x+2}.$$

Como este bloque es divisor, debe ser no nulo; por tanto $2x+1\neq 0$, es decir, $x\neq -\frac{1}{2}$. Así,

$$C(x)=\frac{\dfrac{2}{x+2}}{\dfrac{2x+1}{x+2}}=\frac{2}{x+2}\cdot\frac{x+2}{2x+1}.$$

Bajo $x\neq -2$ cancelamos $x+2$ y obtenemos

$$\boxed{C(x)=\frac{2}{2x+1},\qquad x\neq -2,-\frac{1}{2}.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Una fracción compleja no exige una teoría nueva: combina suma o resta interior con una división exterior. La dificultad está en respetar los niveles de la expresión.

La regla de trabajo queda fijada:

> **dominio por niveles primero; reduzca después el numerador y el denominador exteriores a una fracción cada uno; sólo entonces ejecute la división exterior y simplifique sobre el dominio ya declarado.**

En §20.12 resolveremos las mismas clases de expresiones mediante otra ruta: eliminaremos de una vez los denominadores internos multiplicando el numerador y el denominador exteriores por un denominador común no nulo. La comparación entre ambos métodos permitirá escoger la representación más económica sin alterar las condiciones de validez.

20.12. Fracciones complejas: eliminar denominadores internos

En §20.11 resolvimos fracciones complejas reduciendo primero el numerador exterior y el denominador exterior a una fracción cada uno. Ese método hace visible la división final, pero no es la única ruta posible. Cuando varios denominadores internos comparten factores o aparecen repetidos en ambos bloques, puede resultar más económico eliminarlos todos de una vez.

La pregunta central será:

> **¿Cuándo podemos multiplicar el numerador y el denominador exteriores por una misma expresión para hacer desaparecer las fracciones internas sin cambiar el valor ni reducir el dominio?**

La respuesta contiene una condición decisiva: el multiplicador debe ser **no nulo en todo el dominio original**.

La transformación que permite limpiar una fracción compleja. Considere una fracción compleja escrita como

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ pueden contener otras fracciones y donde, por supuesto, $D(x)\neq 0$ en el dominio que estamos considerando.

Si elegimos una expresión $M(x)$ tal que

$$M(x)\neq 0$$

para todo x del dominio original, entonces podemos multiplicar el numerador y el denominador exteriores por $M(x)$:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{M(x)N(x)}{M(x)D(x)}.$$

La igualdad está justificada porque $M(x)$ es un factor común no nulo del numerador y del denominador del nuevo cociente. En efecto, si quisiéramos recomponer la expresión original, podríamos cancelar ese factor $M(x)$ precisamente porque sabemos que no vale cero.

Esta observación convierte la técnica en una aplicación directa de §20.5. No estamos inventando una nueva regla de fracciones: estamos multiplicando arriba y abajo por la misma cantidad no nula.

Cómo escoger el multiplicador. El objetivo de $M(x)$ será contener todos los factores necesarios para eliminar los denominadores internos que aparecen en el numerador y el denominador exteriores.

En la práctica seguiremos la misma lectura local usada en §20.9:

1. registrar primero el dominio original;
2. identificar los denominadores internos;
3. factorizar esos denominadores cuando sea útil;
4. construir un denominador común que contenga los factores necesarios;
5. comprobar que ese multiplicador es no nulo en todo el dominio original;
6. multiplicar por él el numerador y el denominador exteriores;
7. simplificar cada producto por distributividad y cancelaciones autorizadas;
8. conservar todas las restricciones originales.

No necesitamos desarrollar una teoría de mínimo común múltiplo de polinomios. Nos basta un multiplicador común adecuado y controlado.

Ejemplo rector: limpiar de una vez los denominadores internos. Volvamos a la fracción compleja de §20.11:

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1}.$$

Ya sabemos que las fracciones internas exigen $x \neq 0$ y que el denominador exterior completo se anula en $x = 1$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Los denominadores internos son ambos x. Elegimos entonces

$$M(x) = x.$$

Esta elección es legítima sobre el dominio original porque allí $x \neq 0$.

Multiplicamos el numerador y el denominador exteriores por x:

$$F(x) = \frac{x\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)}{x\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)}.$$

Distribuyendo,

$$x\left(\frac{1}{x}+1\right)=1+x$$

y

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-x.$$

Por tanto,

$$\boxed{F(x)=\frac{x+1}{1-x}, \qquad x\neq 0,1.}$$

Llegamos exactamente a la misma forma obtenida mediante el método interior, pero sin reducir por separado dos fracciones antes de efectuar la división exterior.

Por qué el multiplicador no puede anularse. La condición $M(x)\neq 0$ no es un detalle técnico. Si $M(x)=0$ en un punto del dominio original, la nueva expresión tendría allí numerador y denominador multiplicados por cero y dejaría de representar la fracción de partida.

Por ejemplo, en el caso anterior podríamos intentar usar

$$M(x)=x(x+2).$$

Ese multiplicador elimina también los denominadores x, pero contiene un factor innecesario $x+2$. En $x=-2$, la fracción original está perfectamente definida, pues $-2\neq 0,1$. Sin embargo, al multiplicar arriba y abajo por $x(x+2)$ obtendríamos en ese punto un denominador exterior multiplicado por cero.

La ruta quedaría justificada sólo en

$$\mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\},$$

que es un dominio menor que el original.

El problema no es que $x(x+2)$ sea algebraicamente «demasiado grande». El problema es que introduce un cero nuevo en un punto originalmente permitido.

Fijamos así una regla:

> **Para limpiar denominadores internos sin cambiar el dominio de procedencia, el multiplicador debe ser no nulo en todo el dominio original.**

Un multiplicador construido con denominadores originales es seguro. Cuando $M(x)$ se construye exclusivamente con factores procedentes de denominadores internos originales, su no nulidad suele estar ya garantizada por el dominio.

Considere

$$H(x)=\frac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{2}{x^2-1}}.$$

Las fracciones internas exigen

$$x\neq -1, \qquad x\neq 1.$$

El denominador exterior $2/(x^2-1)$ no puede valer cero mientras esté definido, porque su numerador es la constante no nula 2. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Como

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

podemos elegir

$$M(x) = x^2 - 1.$$

Ese multiplicador es no nulo precisamente en el dominio original. Multiplicamos los dos bloques exteriores:

$$H(x) = \frac{(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right)}{(x^2-1)\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)}.$$

En el numerador,

$$(x^2-1)\frac{1}{x-1} = x+1$$

y

$$(x^2-1)\frac{1}{x+1} = x-1.$$

En el denominador,

$$(x^2-1)\frac{2}{x^2-1} = 2.$$

Por tanto,

$$H(x) = \frac{(x+1)+(x-1)}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

con las restricciones heredadas

$$\boxed{H(x) = x, \qquad x \neq -1, 1.}$$

Este ejemplo muestra con especial claridad la ventaja del método: tres denominadores internos desaparecen mediante una sola elección de representación.

El denominador exterior sigue necesitando un control propio. Limpiar denominadores internos no sustituye el análisis del denominador exterior completo.

Considere

$$G(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + 1}{\dfrac{1}{x+1} - 1}.$$

Las fracciones internas exigen $x \neq 1, -1$. Además, como vimos en §20.11,

$$\frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1},$$

de modo que el bloque inferior se anula en $x = 0$. Así,

$$\mathrm{Dom}(G) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Ahora elegimos

$$M(x) = (x-1)(x+1).$$

Este multiplicador es no nulo en todo el dominio declarado. Entonces

$$G(x) = \frac{(x-1)(x+1)\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)}{(x-1)(x+1)\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)}.$$

Simplificando cada bloque,

$$(x-1)(x+1)\left(\frac{1}{x-1}+1\right) = (x+1) + (x^2-1) = x(x+1),$$

y

$$(x-1)(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-1\right) = (x-1) - (x^2-1) = x(1-x).$$

Por tanto,

$$G(x) = \frac{x(x+1)}{x(1-x)}.$$

Como $x \neq 0$ ya forma parte del dominio original, podemos cancelar x y obtener

$$\boxed{G(x) = \frac{x+1}{1-x} = -\frac{x+1}{x-1}, \qquad x \neq -1, 0, 1.}$$

El multiplicador común eliminó los denominadores internos, pero la exclusión $x = 0$ no procedía de ellos: procedía del denominador exterior completo. Por eso tenía que registrarse **antes** de aplicar el método.

Multiplicar ambos bloques no significa cancelar una suma. Conviene precisar qué ocurre en una escritura como

$$M\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right).$$

No estamos «cancelando M» con términos de una suma. Estamos usando la distributividad:

$$M\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = \frac{M}{A} + \frac{M}{B},$$

y después simplificamos cada cociente cuando A o B es un factor no nulo de M.

Por ejemplo, si $M = AB$ y $A \neq 0$, $B \neq 0$, entonces

$$AB\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = B + A.$$

La simplificación ocurre **después de distribuir el producto**. Esto conserva la regla de §20.5: nunca cancelamos a través de una suma.

Comparar los dos métodos. Las §§20.11–20.12 proporcionan dos rutas para la misma clase de expresiones.

En el **método interior**:

```
DOMINIO
  ↓
REDUCIR EL BLOQUE SUPERIOR A UNA FRACCIÓN
  ↓
REDUCIR EL BLOQUE INFERIOR A UNA FRACCIÓN
  ↓
DIVIDIR ESAS DOS FRACCIONES
```

En el método de **eliminación de denominadores internos**:

```
DOMINIO
  ↓
ELEGIR UN MULTIPLICADOR COMÚN NO NULO
  ↓
MULTIPLICAR ARRIBA Y ABAJO POR ÉL
  ↓
DISTRIBUIR Y ELIMINAR LAS FRACCIONES INTERNAS
```

Ninguno es universalmente mejor. El método interior suele ser transparente cuando cada bloque contiene pocas fracciones y sus denominadores comunes son inmediatos. El segundo método puede ser más económico cuando muchos denominadores internos comparten factores y una sola multiplicación los elimina simultáneamente.

Lo que no cambia entre ambos métodos es el dominio. Si las dos rutas están bien justificadas, deben producir expresiones equivalentes **sobre el mismo dominio original**.

Un criterio práctico de coste. Antes de empezar, conviene mirar la estructura y preguntar:

- ¿puedo reducir cada bloque interior en uno o dos pasos?;
- ¿aparece el mismo conjunto de denominadores varias veces?;
- ¿existe un multiplicador común sencillo cuyo no cero ya esté garantizado por el dominio?;
- ¿qué ruta evita más expansiones y denominadores auxiliares?

Estas preguntas no definen una complejidad formal. Funcionan como criterio de representación: escoger una forma que haga visibles las cancelaciones legítimas y reduzca el número de transformaciones necesarias.

No-ejemplo: limpiar primero y estudiar el dominio después. Supongamos que partimos de

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1}$$

y multiplicamos inmediatamente arriba y abajo por x:

$$F(x) = \frac{x+1}{1-x}.$$

Si a partir de esta última fórmula intentáramos reconstruir el dominio, concluiríamos sólo $x \neq 1$. La exclusión $x = 0$ habría desaparecido.

El cálculo con x fue legítimo **porque previamente sabíamos que** $x \neq 0$. Por tanto, la secuencia correcta no es «limpiar y luego buscar restricciones», sino exactamente la contraria:

primero dominio; después multiplicador; después eliminación de denominadores internos.

Recuperación breve. Simplifique mediante eliminación de denominadores internos y conserve el dominio original.

1. $A(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} + 2}{\dfrac{1}{x} + 1}$;
2. $B(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}$;
3. $C(x) = \dfrac{\dfrac{2}{x+2}}{\dfrac{x-1}{x+2} + 1}$.

Respuesta razonada.

1. Las fracciones internas exigen $x \neq 0$. El denominador exterior $1/x + 1 = (x+1)/x$ debe además ser no nulo, de modo que $x \neq -1$. Elegimos $M(x) = x$, que es no nulo en el dominio original. Entonces

$$A(x) = \frac{x\left(\dfrac{1}{x} + 2\right)}{x\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)} = \frac{1 + 2x}{1 + x}.$$

Por tanto,

$$\boxed{A(x) = \frac{2x+1}{x+1}, \qquad x \neq -1, 0.}$$

2. Los denominadores internos exigen $x \neq 1, -1$. El denominador exterior

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

debe ser no nulo, así que también $x \neq 0$. Elegimos

$$M(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

que es no nulo en el dominio original. Entonces

$$B(x) = \frac{(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)}{(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right)} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1) + (x-1)} = \frac{2}{2x}.$$

Así,

$$\boxed{B(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq -1, 0, 1.}$$

3. La fracción interna exige $x \neq -2$. El denominador exterior es

$$\frac{x-1}{x+2}+1=\frac{2x+1}{x+2},$$

por lo que también debemos exigir $x\neq-\frac{1}{2}$. Elegimos $M(x)=x+2$, no nulo en el dominio original. Entonces

$$C(x)=\frac{(x+2)\left(\dfrac{2}{x+2}\right)}{(x+2)\left(\dfrac{x-1}{x+2}+1\right)}=\frac{2}{(x-1)+(x+2)}=\frac{2}{2x+1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{C(x)=\frac{2}{2x+1},\qquad x\neq-2,-\frac{1}{2}.}$$

Las tres respuestas coinciden con las obtenidas por el método interior en §20.11. La igualdad de resultados no es accidental: ambos procedimientos transforman la misma expresión sobre el mismo dominio declarado.

Qué debemos conservar de esta sección. Eliminar denominadores internos consiste en multiplicar el numerador y el denominador exteriores por una misma expresión que sea no nula en todo el dominio original. La técnica es legítima por la misma razón que cualquier cancelación: estamos introduciendo un factor común que vale 1 al comparar numerador y denominador.

La regla de trabajo queda fijada:

> **determine primero el dominio; elija después un multiplicador común no nulo en ese dominio; distribúyalo sobre los dos bloques exteriores; elimine las fracciones internas y conserve todas las restricciones de procedencia.**

Los métodos de §§20.11–20.12 producen la misma matemática, pero pueden tener costes algebraicos distintos. En §20.13 ampliaremos esta comparación a cadenas más largas de operaciones, donde escoger una representación adecuada puede ser tan importante como ejecutar correctamente cada paso.

20.13. Cadenas largas y elección de representación

En las secciones anteriores aprendimos operaciones concretas: factorizar antes de cancelar, multiplicar y dividir expresiones racionales, escoger denominadores comunes y resolver fracciones complejas por dos métodos. En una cadena larga, sin embargo, el problema principal ya no es recordar una regla aislada. Hay que decidir **en qué orden conviene usar las reglas que ya conocemos**.

La pregunta central será:

> **¿Qué forma de una expresión conviene conservar en cada etapa para que la siguiente transformación sea más simple, más visible y más fácil de justificar?**

Una cadena larga no es una orden de «hacer todo». Es una sucesión de decisiones. En cada paso debemos saber qué objetivo cumple la transformación y sobre qué dominio continúa siendo válida.

Una cadena larga no obliga a expandir. Considere

$$E(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x} \cdot \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Antes de elegir una ruta, fijamos el dominio original. Como

$$x^2 + x = x(x+1),$$

el primer factor exige $x \neq 0, -1$. El segundo exige $x \neq 1$ y el último vuelve a exigir $x \neq -1$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(E) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Ahora aparece la decisión estratégica. Podríamos multiplicar inmediatamente las dos primeras fracciones en forma expandida. Pero también podemos mirar si su estructura permite reducir primero un bloque completo.

Factorizamos

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

y

$$x^2 + x = x(x+1).$$

Entonces el producto inicial se convierte en

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{x-1}.$$

En el dominio original, los factores $x+1$, x y $x-1$ son no nulos. Podemos cancelarlos y obtenemos

$$\frac{x^2-1}{x^2+x} \cdot \frac{x}{x-1} = 1, \qquad x \neq -1, 0, 1.$$

La cadena completa queda ahora reducida a

$$E(x) = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Con denominador común $x+1$,

$$E(x) = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{E(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad x \neq -1, 0, 1.}$$

La fórmula final sólo muestra $x \neq -1$. Las exclusiones $x = 0$ y $x = 1$ pertenecen a bloques que desaparecieron durante la simplificación, pero continúan formando parte del dominio de procedencia.

Cada paso debe tener una razón. La ruta anterior puede escribirse como una cadena de decisiones:

```
DOMINIO ORIGINAL
  ↓
FACTORAR EL BLOQUE MULTIPLICATIVO
  razón: revelar factores comunes
  ↓
CANCELAR FACTORES NO NULOS
  razón: reducir ese bloque antes de combinarlo con el resto
  ↓
CONSERVAR EL RESULTADO 1 COMO BLOQUE
  razón: no reconstruir una expresión más complicada
  ↓
EFECTUAR LA RESTA RESTANTE
  razón: ahora la estructura es mínima
```

Ninguna flecha significa simplemente «hacer álgebra». Cada transformación tiene una función local.

Este hábito será especialmente importante en problemas no rutinarios: una transformación puede ser correcta y, sin embargo, ser una mala elección porque destruye la estructura que necesitábamos para el siguiente paso.

Una ruta correcta puede ser estratégicamente mala. Volvamos al producto inicial de $E(x)$:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x}\cdot\frac{x}{x-1}.$$

Si multiplicamos primero sin factorizar, obtenemos

$$\frac{x(x^2-1)}{(x^2+x)(x-1)}.$$

Expandiendo,

$$x(x^2-1)=x^3-x$$

y

$$(x^2+x)(x-1)=x^3-x.$$

Así llegamos a

$$\frac{x^3-x}{x^3-x}.$$

Esta expresión vale 1 donde está definida, pero ahora los ceros relevantes están ocultos dentro del polinomio cúbico. Para justificar la cancelación tendríamos que volver a factorizar

$$x^3-x=x(x-1)(x+1),$$

es decir, reconstruir la información que ya estaba visible antes de expandir.

La ruta expandida no es falsa. Es simplemente peor para este problema porque aumenta el trabajo y vuelve menos visible el dominio.

> **Una transformación útil no sólo debe ser correcta: debe conservar o revelar la estructura que hará más fácil el siguiente paso.**

Los bloques simplificados conservan su historia de dominio. Una cadena larga suele contener subexpresiones que conviene tratar como bloques. Pero simplificar un bloque no borra las condiciones bajo las cuales fue simplificado.

Considere

$$Q(x) = \frac{\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}}{\dfrac{x+2}{x+1}}.$$

El bloque superior exige

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \neq 0,$$

por lo que $x \neq 2, -1$. Además,

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1},$$

pero sólo sobre ese dominio.

El bloque inferior $(x+2)/(x+1)$ exige $x \neq -1$ y, por ser divisor exterior, debe además ser no nulo, de modo que $x \neq -2$.

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}.$$

Sobre ese dominio, la fracción compleja toma la forma

$$Q(x) = \frac{\dfrac{x+2}{x+1}}{\dfrac{x+2}{x+1}} = 1.$$

Así,

$$\boxed{Q(x) = 1, \qquad x \neq -2, -1, 2.}$$

El punto $x = 2$ ya no aparece en ninguno de los dos bloques visibles después de simplificar el numerador exterior. Sin embargo, sigue excluido porque pertenecía a la historia del bloque original.

Esta observación permite formular una regla para cadenas largas:

> **Cada bloque simplificado debe viajar con las restricciones bajo las cuales fue obtenido.**

Conservar un bloque puede ser mejor que «aplanar» toda la expresión. Considere ahora

$$R(x) = \left(\frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}} \right) \cdot \frac{1}{2x+1}.$$

Las fracciones internas exigen $x \neq 0, -1$. El denominador exterior de la fracción compleja es

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)},$$

que nunca vale cero cuando está definido. El último factor exige además

$$2x + 1 \neq 0,$$

es decir, $x \neq -\frac{1}{2}$.

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

En vez de distribuir el último factor por toda la fracción compleja, simplifiquemos primero el bloque entre paréntesis. Su numerador es

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)},$$

mientras que su denominador es

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Así, el bloque completo vale

$$2x + 1,$$

sobre el dominio ya declarado. Entonces

$$R(x) = (2x+1)\frac{1}{2x+1} = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{R(x) = 1, \qquad x \neq -1, -\frac{1}{2}, 0.}$$

La decisión clave fue **cerrar primero un bloque** cuyo resultado estaba diseñado para cancelar con el factor siguiente.

Mirar hacia adelante sin razonar hacia atrás de manera inválida. Elegir representación exige cierta anticipación. Podemos preguntar qué forma sería útil para el siguiente paso, pero esa expectativa no autoriza una transformación.

En $R(x)$ era útil sospechar que la fracción compleja podía producir un factor relacionado con $2x + 1$, porque el último factor era $1/(2x + 1)$. Esa observación orienta la búsqueda. Sin embargo, seguimos necesitando demostrar que

$$\frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}} = 2x + 1$$

sobre el dominio correspondiente.

La expectativa decide **qué intentar**; las identidades algebraicas justifican **por qué funciona**.

Criterios para comparar dos rutas. En este capítulo no definiremos una medida formal de complejidad algebraica. Aun así, podemos comparar rutas con criterios concretos.

Una ruta suele ser preferible si:

1. mantiene visibles las restricciones del dominio;
2. conserva factores útiles en lugar de destruirlos mediante expansiones;
3. reduce temprano bloques que después se repiten o se cancelan;
4. evita denominadores auxiliares innecesarios;
5. disminuye el número de productos extensos y distribuciones de signos;
6. permite justificar cada transición con una regla ya establecida;
7. deja una forma final adecuada para la tarea siguiente.

El último punto impide identificar automáticamente «más expandido» con «más simple» o «más factorizado» con «mejor». La representación adecuada depende del objetivo local.

Saber cuándo detenerse. Considere

$$S(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x+3)}.$$

No hay factores comunes que cancelar. Si el objetivo es mostrar dominio y estructura multiplicativa, esta forma ya es adecuada. Expandir hasta

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2+x-6}$$

no resuelve ningún problema nuevo.

En cambio, si una suma posterior exigiera combinar numeradores expandidos, podría convenir expandir **en ese momento**. La misma transformación puede ser inútil en una etapa y útil en otra.

Por eso una cadena bien resuelta no consiste en llevar toda expresión a una única forma canónica informal. Consiste en cambiar de representación cuando existe una razón para hacerlo.

No-ejemplo: una simplificación local correcta y una conclusión global incompleta. Supongamos que, en

$$Q(x) = \frac{\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}}{\dfrac{x+2}{x+1}},$$

alguien simplifica el numerador exterior a $(x+2)/(x+1)$ y escribe inmediatamente

$$Q(x) = 1, \qquad x \neq -2, -1.$$

El álgebra visible final parece correcta, pero falta $x \neq 2$.

El error no está en la cancelación final. Ocurrió antes: el bloque superior fue reemplazado por una forma equivalente sin conservar la restricción $x \neq 2$ que pertenecía a su dominio de procedencia.

Este tipo de fallo es característico de las cadenas largas: **cada paso individual puede parecer correcto y, sin embargo, la composición completa perder información**.

Un protocolo para cadenas largas. Cuando una expresión reúne varias operaciones, usaremos el siguiente procedimiento:

```
1. LEER TODA LA EXPRESIÓN Y FIJAR SU DOMINIO ORIGINAL.
2. IDENTIFICAR BLOQUES NATURALES.
3. MIRAR QUÉ FORMA SERÍA ÚTIL PARA EL PASO SIGUIENTE.
4. ELEGIR UNA TRANSFORMACIÓN CON UNA RAZÓN CONCRETA.
5. EJECUTARLA SIN PERDER LAS RESTRICCIONES VIGENTES.
6. CERRAR EL BLOQUE CUANDO YA TENGA UNA FORMA ÚTIL.
7. EVITAR EXPANDIR O REFACTORIZAR SIN PROPÓSITO.
8. REPETIR EL PROCESO CON EL SIGUIENTE BLOQUE.
9. VERIFICAR LA FORMA FINAL Y CONSERVAR EL DOMINIO ORIGINAL COMPLETO.
```

El paso 3 introduce la estrategia. El paso 5 mantiene el rigor. Ninguno sustituye al otro.

Recuperación breve. Simplifique las expresiones siguientes. Antes de calcular, indique qué bloque conviene transformar primero y por qué. Conserve el dominio original completo.

1. $A(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6} \cdot \dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{2}{x+2}$;
2. $B(x) = \left(\dfrac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}} \right) \dfrac{1}{x}$;
3. $C(x) = \dfrac{\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}}{\dfrac{x+2}{x+1}}$.

Respuesta razonada.

1. Conviene simplificar primero el producto. Factorizamos

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

y

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

El dominio original exige $x \neq 3, -2, -3$. Entonces

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \cdot \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-2}{x+2}.$$

Ahora la suma restante usa ya el denominador $x+2$:

$$A(x) = \frac{x-2}{x+2} + \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{A(x) = \frac{x}{x+2}, \qquad x \neq -3, -2, 3.}$$

2. Las fracciones internas exigen $x \neq 1, -1$, y el factor final $1/x$ exige además $x \neq 0$. El denominador exterior de la fracción compleja es

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1},$$

que no se anula cuando está definido. Conviene reducir primero toda la fracción compleja. Su numerador es

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}.$$

Por tanto,

$$\frac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{2}{x^2-1}}=x.$$

Entonces

$$B(x)=x\cdot\frac{1}{x}=1,$$

con el dominio original conservado:

$$\boxed{B(x)=1, \qquad x\neq -1,0,1.}$$

3. El bloque superior exige $x\neq 2,-1$ y se simplifica, sobre ese dominio, a

$$\frac{x+2}{x+1}.$$

El divisor exterior exige $x\neq -1$ y además debe ser no nulo, así que $x\neq -2$. Conviene conservar el bloque simplificado sin olvidar $x\neq 2$. Entonces

$$C(x)=\frac{\dfrac{x+2}{x+1}}{\dfrac{x+2}{x+1}}=1.$$

Así,

$$\boxed{C(x)=1, \qquad x\neq -2,-1,2.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Una cadena larga no exige una nueva colección de reglas. Exige coordinar las que ya conocemos y elegir una representación que sirva al siguiente paso.

La regla estratégica queda fijada:

> **fije primero el dominio; identifique después bloques y objetivos locales; transforme sólo cuando la nueva forma revele estructura, reduzca trabajo o prepare el paso siguiente; y haga viajar las restricciones con cada bloque durante toda la cadena.**

La corrección algebraica y la elección estratégica son problemas distintos. Una ruta puede ser correcta pero innecesariamente costosa; una ruta breve puede ser inválida si pierde una hipótesis. En §20.14 añadiremos parámetros y una transferencia limitada desde C18, donde esta disciplina tendrá que conservar condiciones que pueden depender de valores paramétricos o de radicales.

Dos planes que deben acompañarse. Un plan de cálculo y un plan de verificación responden a preguntas distintas. Para $E = [1/(x-a) - 1/(x-b)] \div [(a-b)/((x-a)(x-b))]$, primero se fija $a \neq b$ y $x \neq a, b$. Después, la resta tiene numerador $a-b$ y ambos bloques coinciden: $E = 1$. La verificación no consiste solo en sustituir un valor: se reconstruye la resta y se comprueba que el divisor no es cero. **Control resuelto:** si $a = b$, no podemos conservar $E = 1$; el divisor original vale cero en todo punto donde existe. Ese caso tiene dominio vacío. Planificar las operaciones no exime de certificar sus hipótesis; detectar un parámetro excepcional es parte del cálculo completo.

20.14. Parámetros y transferencia desde C18

Hasta ahora, las restricciones del dominio aparecían como números concretos: $x \neq 2$, $x \neq -1$, $x > 0$. En muchas expresiones algebraicas, sin embargo, los puntos problemáticos dependen de **parámetros**. Una fórmula puede contener factores como $x - a$ o $x - b$, y el aspecto del dominio puede cambiar cuando dos parámetros toman el mismo valor.

La pregunta central será:

> **¿Cómo conservar correctamente el dominio cuando las exclusiones dependen de parámetros y algunas de ellas pueden coincidir?**

Añadiremos además una transferencia limitada desde C18: aplicaremos los mismos hábitos de lectura a expresiones fraccionarias con radicales. No abriremos una teoría nueva de radicales; reutilizaremos únicamente las condiciones ya establecidas allí.

Un parámetro se trata como fijo mientras operamos en x. Supongamos que a, $b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Al estudiar una expresión en la variable x, interpretamos a y b como números reales **fijos**, aunque todavía no conozcamos sus valores concretos.

Considere

$$F_{a,b}(x) = \frac{2(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

El denominador original exige

$$(x-a)(x-b) \neq 0.$$

Por tanto debemos tener

$$x \neq a \qquad \text{y} \qquad x \neq b.$$

Esta escritura lógica es correcta incluso si $a = b$: en ese caso las dos condiciones describen el mismo punto excluido. Si queremos hacer visible el número de puntos distintos del dominio, conviene separar los casos:

$$\operatorname{Dom}(F_{a,b}) = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{a, b\}, & a \neq b, \\ \mathbb{R} \setminus \{a\}, & a = b. \end{cases}$$

En cualquier caso, $x \neq a$ pertenece al dominio original, de modo que el factor $x - a$ es no nulo y puede cancelarse:

$$F_{a,b}(x) = \frac{2}{x-b},$$

pero la forma final debe seguir leyéndose sobre el dominio original.

Así,

$$\boxed{F_{a,b}(x) = \frac{2}{x-b}}$$

con

$$\boxed{x \neq a, \quad x \neq b.}$$

Si $a \neq b$, la exclusión $x = a$ ha desaparecido de la fórmula simplificada y debe conservarse explícitamente. Si $a = b$, esa exclusión coincide con la que todavía muestra el denominador final.

Una coincidencia de parámetros puede fusionar exclusiones. La expresión

$$S_{a,b}(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$$

ofrece un segundo tipo de fenómeno.

Para cualquier elección de a y b, la expresión original requiere

$$x \neq a, \qquad x \neq b.$$

Usando como denominador común $(x-a)(x-b)$, obtenemos

$$S_{a,b}(x) = \frac{x-b}{(x-a)(x-b)} + \frac{x-a}{(x-a)(x-b)}.$$

Por tanto,

$$S_{a,b}(x) = \frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}.$$

Esta fórmula es correcta sobre el dominio original. Ahora comparemos los dos casos paramétricos.

Si $a \neq b$, los puntos a y b son exclusiones distintas y no aparece ninguna cancelación adicional forzada por la estructura.

Si $a = b$, entonces

$$S_{a,a}(x) = \frac{2x-2a}{(x-a)^2} = \frac{2(x-a)}{(x-a)^2}.$$

Como el dominio original ya exige $x \neq a$, podemos cancelar una copia de $x-a$:

$$\boxed{S_{a,a}(x) = \frac{2}{x-a}, \qquad x \neq a.}$$

La coincidencia $a = b$ no autoriza a olvidar restricciones. Lo que ocurre es más preciso: **dos condiciones que antes podían describir puntos distintos pasan a describir el mismo punto**.

El conjunto de exclusiones, no su repetición escrita, controla el dominio. En una lista de condiciones puede aparecer varias veces el mismo requisito. Por ejemplo, si $a = b$, escribir

$$x \neq a, \qquad x \neq b$$

sigue siendo correcto, pero ya no representa dos exclusiones diferentes.

La forma de conjunto evita la ambigüedad:

$$\mathbb{R} \setminus \{a, b\}.$$

Cuando $a = b$,

$$\{a, b\} = \{a\},$$

y por tanto

$$\mathbb{R} \setminus \{a, b\} = \mathbb{R} \setminus \{a\}.$$

Este detalle será importante en ejercicios con parámetros: contar condiciones escritas no equivale a contar puntos excluidos.

Un divisor paramétrico puede añadir otra exclusión. Considere ahora

$$Q_{a,b}(x) = \frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{x-b}{x-a}}.$$

Primero leemos el dominio por niveles.

Las dos fracciones internas exigen

$$x \neq a.$$

Además, el denominador exterior completo

$$\frac{x-b}{x-a}$$

debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq a$, este cociente se anula cuando

$$x = b.$$

Por tanto debemos exigir también

$$x \neq b.$$

Así,

$$\mathrm{Dom}(Q_{a,b}) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\},$$

entendiendo nuevamente que si $a = b$ el conjunto posee un único punto.

Sobre este dominio,

$$Q_{a,b}(x) = \frac{1}{x-a} \cdot \frac{x-a}{x-b} = \frac{1}{x-b}.$$

Por tanto,

$$\boxed{Q_{a,b}(x) = \frac{1}{x-b}, \qquad x \neq a, \quad x \neq b.}$$

Si $a \neq b$, la fórmula final ya no muestra $x \neq a$. Si $a = b$, la única exclusión continúa visible porque $x - b = x - a$.

Este ejemplo combina dos ideas ya estudiadas: las restricciones internas de una fracción compleja y los ceros del divisor completo.

Los casos paramétricos se separan sólo cuando cambian la estructura relevante. No toda aparición de parámetros obliga a una larga clasificación por casos.

Por ejemplo, en

$$\frac{x-a}{x-b},$$

el dominio es simplemente $x \neq b$ para todos los valores de a y b. Si $a = b$, la expresión se convierte en

$$\frac{x-a}{x-a},$$

que vale 1 para $x \neq a$; pero esa simplificación especial sólo merece destacarse si el objetivo del problema requiere describir la forma resultante.

En cambio, cuando la relación entre parámetros cambia

- cuántos puntos quedan excluidos;
- qué factores coinciden;
- qué cancelaciones aparecen;
- o si un divisor completo puede anularse,

entonces sí debemos distinguir los casos relevantes.

La regla práctica es:

> **No divida en casos por costumbre; divida en casos cuando una relación entre parámetros cambie el dominio o la estructura de la transformación.**

Transferencia desde C18: un radical en un denominador. C18 estableció que, trabajando en $\mathbb{R}$, una raíz cuadrada principal $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$. Si además aparece en un denominador, necesitamos

$$\sqrt{u} \neq 0,$$

lo que equivale a exigir $u > 0$.

Apliquemos esta lectura a

$$R_a(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x-a}},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es fijo.

Para que la raíz exista necesitamos

$$x - a \geq 0.$$

Pero la raíz está en el denominador, así que además debe ser distinta de cero:

$$\sqrt{x-a} \neq 0.$$

En conjunto,

$$x - a > 0,$$

es decir,

$$x > a.$$

Sobre este dominio podemos usar

$$x - a = \left(\sqrt{x-a}\right)^2$$

y escribir

$$R_a(x) = \frac{\left(\sqrt{x-a}\right)^2}{\sqrt{x-a}}.$$

Como $\sqrt{x-a} \neq 0$ para $x > a$, cancelamos una copia:

$$\boxed{R_a(x) = \sqrt{x-a}, \qquad x > a.}$$

La fórmula final $\sqrt{x-a}$ también está definida en $x = a$, donde vale 0. Sin embargo, la expresión original no estaba definida allí porque tenía $\sqrt{x-a}$ en el denominador.

La misma disciplina de C20 vuelve a aparecer: **la forma final puede poseer un dominio natural mayor que la expresión de procedencia**.

Esta transferencia no convierte la expresión en racional. La expresión

$$\frac{x-a}{\sqrt{x-a}}$$

es fraccionaria, pero no es una expresión racional en el sentido de §20.2, porque su denominador contiene un radical.

Que pueda simplificarse a $\sqrt{x-a}$ no cambia ese hecho histórico ni convierte la expresión original en un cociente de polinomios.

C20 utiliza aquí técnicas de dominio, cancelación y equivalencia sobre un dominio declarado; la teoría del radical proviene de C18.

No-ejemplo: olvidar la raíz principal. C18 también fijó la identidad

$$\sqrt{u^2} = |u|$$

para todo real u.

Por tanto, no es correcto afirmar que

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a} = 1$$

para todo $x \neq a$.

La transformación correcta empieza por

$$\sqrt{(x-a)^2} = |x-a|,$$

de modo que

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a} = \frac{|x-a|}{x-a}, \qquad x \neq a.$$

No necesitamos desarrollar aquí un análisis sistemático de signos. Un solo valor basta para refutar la identidad propuesta: si $x = a - 1$, entonces

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a} = \frac{1}{-1} = -1.$$

El error habría sido importar una regla falsa para el radical, no una regla de cálculo racional.

Dos capas de condiciones pueden coexistir. En una expresión fraccionaria con radicales debemos distinguir las fuentes de restricciones.

Por ejemplo, en

$$T_a(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{x-a},$$

la raíz exige

$$x - a \geq 0,$$

mientras que el denominador exige

$$x - a \neq 0.$$

Juntas producen

$$x > a.$$

En ese dominio,

$$x - a = \left(\sqrt{x-a}\right)^2,$$

y como $\sqrt{x-a} \neq 0$ podemos simplificar:

$$\boxed{T_a(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}, \qquad x > a.}$$

La condición $x > a$ no procede de una sola regla. Es la intersección entre la condición de existencia de la raíz y la condición de no nulidad del denominador.

Protocolo para parámetros y transferencia radical. Cuando aparezcan parámetros o radicales en una expresión fraccionaria, usaremos este orden:

```
1. IDENTIFICAR QUÉ SÍMBOLOS SON VARIABLES Y CUÁLES SON PARÁMETROS FIJOS.
2. LEER EL DOMINIO ORIGINAL EN LA VARIABLE.
3. REGISTRAR RESTRICCIONES DEPENDIENTES DE LOS PARÁMETROS.
4. COMPROBAR SI DOS RESTRICCIONES COINCIDEN PARA ALGÚN CASO PARAMÉTRICO RELEVANTE.
5. APLICAR LAS REGLAS DE C20 SIN PERDER ESAS CONDICIONES.
6. SI HAY RADICALES, IMPORTAR SÓLO LAS CONDICIONES YA ESTABLECIDAS EN C18.
7. NO CLASIFICAR AUTOMÁTICAMENTE COMO RACIONAL UNA EXPRESIÓN QUE CONTENGA
↪  RADICALES.
8. CONSERVAR EL DOMINIO ORIGINAL AUNQUE LA FORMA FINAL SEA MÁS AMPLIA.
```

Los pasos 3 y 4 controlan los parámetros. El paso 6 evita reabrir la teoría de radicales. El paso 8 mantiene la tesis central de todo el capítulo.

Recuperación breve. Simplifique cuando sea posible y conserve el dominio original. En los ejercicios con parámetros, distinga los casos sólo si cambia la estructura del dominio o de la simplificación.

1. $A_{a,b}(x) = \dfrac{3(x-a)}{(x-a)(x-b)}$;
2. $B_{a,b}(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$;
3. $C_a(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{x-a}$.

Respuesta razonada.

1. El denominador original exige $x \neq a$ y $x \neq b$. Si $a \neq b$, son dos puntos distintos; si $a = b$, describen una sola exclusión. Como $x \neq a$, podemos cancelar el factor $x - a$:

$$\boxed{A_{a,b}(x) = \frac{3}{x-b}, \qquad x \neq a, \quad x \neq b.}$$

Si $a \neq b$, la exclusión $x = a$ queda oculta en la forma final. Si $a = b$, coincide con la exclusión todavía visible en $x - b$.

2. El dominio original exige $x \neq a$ y $x \neq b$. Con denominador común $(x-a)(x-b)$,

$$B_{a,b}(x) = \frac{x-b+x-a}{(x-a)(x-b)} = \frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}.$$

Por tanto,

$$\boxed{B_{a,b}(x) = \frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}, \qquad x \neq a, \quad x \neq b.}$$

Si $a = b$, aparece una simplificación adicional:

$$B_{a,a}(x) = \frac{2(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{2}{x-a}, \qquad x \neq a.$$

3. La raíz exige $x - a \geq 0$, mientras que el denominador exige $x - a \neq 0$. Por tanto,

$$x > a.$$

En ese dominio,

$$x - a = \left(\sqrt{x-a}\right)^2,$$

de modo que

$$C_a(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{\left(\sqrt{x-a}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x-a}}, \qquad x > a.}$$

Esta expresión es fraccionaria con radical y no debe clasificarse automáticamente como racional.

Qué debemos conservar de esta sección. Los parámetros no modifican las reglas algebraicas, pero pueden modificar **cómo se describen las restricciones**. Dos exclusiones simbólicamente distintas pueden coincidir cuando dos parámetros toman el mismo valor, y una cancelación puede ocultar una condición paramétrica que pertenecía al dominio original.

La transferencia desde C18 obedece a la misma disciplina. Una raíz aporta sus propias condiciones de existencia; si aparece en un denominador, debe además ser no nula.

La regla de trabajo queda fijada:

> **trate los parámetros como fijos, separe sólo los casos que cambien realmente el dominio o la estructura, importe de C18 las condiciones de los radicales y conserve siempre el dominio de procedencia después de simplificar.**

En §20.15 utilizaremos todo el repertorio construido hasta aquí para auditar errores: distinguiremos una transformación algebraicamente falsa de una transformación correcta cuyo dominio fue registrado de manera incompleta.

20.15. Laboratorio de errores

Hasta aquí hemos aprendido a transformar expresiones racionales preservando dominio, estructura y condiciones de validez. En esta sección invertiremos la tarea: en lugar de construir una solución desde cero, **auditaremos soluciones ya escritas**.

La pregunta central será:

> **Cuando una cadena contiene un error, ¿en qué paso aparece por primera vez y de qué tipo es?**

Esta pregunta es más precisa que preguntar simplemente si el resultado final es correcto. Una cadena puede terminar en una fórmula falsa por una manipulación algebraica incorrecta, pero también puede terminar en una fórmula algebraicamente correcta acompañada de un dominio equivocado. Del mismo modo, varios pasos posteriores pueden ser perfectamente válidos respecto de una línea que ya era falsa.

Nuestro objetivo será localizar siempre la **primera ruptura**.

Cuatro tipos de fallo que debemos distinguir. En este capítulo aparecen, sobre todo, cuatro clases de error.

1. **Error algebraico.** Se aplica una transformación que no preserva el valor de la expresión: se cancelan términos de una suma, se suman denominadores o se invierte incorrectamente un cociente.
2. **Error de dominio.** La transformación algebraica es válida sobre cierto dominio, pero se omite una exclusión original o se reconstruye el dominio a partir de la fórmula final.
3. **Error de divisor.** Se comprueba que un divisor está definido, pero no que sea distinto de cero.
4. **Error de signo.** Se pierde un factor -1, se distribuye incorrectamente una resta o se confunden factores opuestos.

Estas categorías pueden coexistir en una misma solución, pero el diagnóstico debe comenzar por la primera línea injustificada.

Caso 1: cancelación ilegal dentro de una suma. Considere la cadena

$$\frac{x+3}{x+5} = \frac{3}{5}.$$

La primera ruptura está en el único paso escrito. El símbolo x aparece arriba y abajo, pero no es un factor común de todo el numerador y de todo el denominador. La transformación sería legítima sólo ante una estructura multiplicativa como $xA/(xB)$, con $x \neq 0$. En cambio, $x+3$ y $x+5$ son sumas.

Éste es un **error algebraico**. No puede repararse agregando una restricción de dominio. En $x = 1$,

$$\frac{1+3}{1+5} = \frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}.$$

La reparación correcta consiste en reconocer que no hay factor común que cancelar.

Caso 2: álgebra correcta, afirmación incompleta. Considere ahora

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3.$$

Cada transformación algebraica es correcta **para** $x \neq 3$. El problema aparece si la cadena se presenta como una identidad válida para todo real. La primera ruptura no está en la factorización ni en la cancelación, sino en haber omitido la condición $x \neq 3$.

Éste es un **error de dominio**. La reparación es

$$\boxed{\frac{x^2-9}{x-3} = x+3, \qquad x \neq 3.}$$

Una solución puede tener todas sus cuentas correctas y seguir siendo matemáticamente incompleta.

Caso 3: un divisor definido que vale cero. Auditemos

$$\frac{x-2}{x+1} \div \frac{x-2}{x-4} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x-4}{x-2} = \frac{x-4}{x+1},$$

acompañado sólo de $x \neq -1, 4$.

La inversión y la cancelación son correctas **si** el divisor original es no nulo. Pero

$$\frac{x-2}{x-4}$$

está definido en $x = 2$ y allí vale cero. La primera ruptura ocurre **antes de invertir**: se confundió «el divisor está definido» con «podemos dividir por él».

La reparación exige $x \neq 2$:

$$\boxed{\frac{x-2}{x+1} \div \frac{x-2}{x-4} = \frac{x-4}{x+1}, \qquad x \neq -1, 2, 4.}$$

Es un **error de divisor** y, al mismo tiempo, una omisión de dominio.

Los pasos posteriores pueden ser correctos desde una línea ya falsa. Supongamos que alguien escribe

$$\frac{x-1}{x+2} \div \frac{x-3}{x+4} = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-3}{x+4} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x+4)}.$$

La primera igualdad es falsa: debía invertirse el **divisor completo**. Sin embargo, la segunda igualdad sí multiplica correctamente las dos fracciones de la línea anterior.

Eso no salva la solución. Una cadena exige que **cada enlace** sea válido. Una vez rota la primera igualdad, los pasos posteriores pueden describir correctamente otra expresión, pero ya no la original.

La reparación vuelve al primer punto falso:

$$\frac{x-1}{x+2} \div \frac{x-3}{x+4} = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x+4}{x-3},$$

con $x \neq -2, -4, 3$.

> **No busque el último resultado falso; busque la primera transición que dejó de estar justificada.**

Caso 4: perder el signo de un factor opuesto. Considere

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-2}.$$

La primera ruptura ocurre al reemplazar $2-x$ por $x-2$. La relación correcta es

$$2 - x = -(x-2).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{x-2}, \qquad x \neq 2,$$

y

$$\boxed{\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 0, \qquad x \neq 2.}$$

Éste es un **error de signo**: se perdió el factor global -1 que relaciona factores opuestos.

Caso 5: sumar denominadores. Considere

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

La primera ruptura aparece al sumar los denominadores. La operación correcta requiere un denominador común. Para $x \neq -1, 1$,

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

El resultado falso $1/x$ no sólo cambia los valores: además introduce la exclusión $x = 0$, que no pertenecía al dominio original. Una transformación falsa puede alterar simultáneamente la fórmula y el dominio aparente.

Caso 6: una restricción que desaparece sólo de la escritura. La identidad

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$$

es correcta sobre $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si después de simplificar alguien concluye que el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ porque ése es el dominio natural de la fórmula final, **no hay un error algebraico**: la primera ruptura aparece al reconstruir el dominio desde la última forma.

La exclusión $x = 1$ pertenecía a la expresión original y no se borra porque un factor desaparezca de la escritura.

Caso 7: introducir una restricción que no pertenecía al problema. También podemos excluir demasiado. En

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1},$$

el dominio original es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si al construir un denominador común se introduce arbitrariamente un factor $x+5$ mediante $(x+5)/(x+5)$, la ruta exige $x \neq -5$, una condición que no pertenecía al problema.

La nueva cadena podría ser válida sólo sobre un dominio menor, pero ya no sería una transformación equivalente sobre todo el dominio de procedencia.

La auditoría del dominio debe comprobar las dos direcciones:

- no perder condiciones originales;
- no introducir condiciones nuevas sin necesidad.

Caso 8: una prueba puntual detecta, pero no demuestra. Si alguien propone

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4},$$

basta evaluar en $x = 0$ para obtener $1/2 \neq 3/4$ y refutar la identidad en cualquier dominio que contenga a 0.

En cambio, que dos expresiones coincidan en un valor concreto no demuestra que sean equivalentes en todo el dominio.

> **Un contraejemplo puntual puede refutar una identidad; una coincidencia puntual no puede demostrarla.**

La verificación numérica es un instrumento de diagnóstico, no un sustituto de una transformación algebraica justificada.

Una tabla de diagnóstico.

Síntoma	Primera pregunta	Tipo de fallo probable
desaparece una suma al «cancelar»	¿lo eliminado era factor de todo el bloque?	algebraico
la fórmula final está definida en más puntos	¿se conservaron las exclusiones originales?	dominio
se divide por una fracción	¿el divisor existe y además es no nulo?	divisor/dominio
aparecen $a - x$ y $x - a$ como si fueran iguales	¿se perdió un factor -1?	signo
se obtiene un denominador añadiendo factores arbitrarios	¿el multiplicador puede anularse en el dominio original?	dominio introducido
una larga cadena falla	¿cuál es la primera flecha injustificada?	primera ruptura

La tabla no reemplaza el razonamiento. Su función es indicar dónde mirar primero.

Protocolo de auditoría.

```
1. FIJAR EL DOMINIO DE LA EXPRESIÓN ORIGINAL.
2. LEER LA CADENA DE IZQUIERDA A DERECHA.
3. PARA CADA TRANSICIÓN, IDENTIFICAR LA REGLA QUE LA JUSTIFICA.
4. COMPROBAR LAS HIPÓTESIS DE ESA REGLA EN EL DOMINIO VIGENTE.
5. DETENERSE EN LA PRIMERA TRANSICIÓN NO JUSTIFICADA.
6. CLASIFICAR EL FALLO: ÁLGEBRA, DOMINIO, DIVISOR O SIGNO.
7. NO ATRIBUIR A LOS PASOS POSTERIORES LA CAUSA DEL ERROR ORIGINAL.
8. REPARAR DESDE LA PRIMERA RUPTURA.
9. VERIFICAR QUE EL RESULTADO REPARADO CONSERVE EL DOMINIO DE PROCEDENCIA.
```

No basta con saber que «algo salió mal»: debemos explicar **qué regla dejó de aplicarse y por qué**.

Recuperación breve. Localice la primera ruptura de cada cadena, clasifique el error y repare la solución.

1. $\dfrac{x+4}{x+7} = \dfrac{4}{7}$.
2. $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$, declarada para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $\dfrac{x+1}{x-2} \div \dfrac{x-3}{x+4} = \dfrac{x+1}{x-2} \cdot \dfrac{x-3}{x+4}$.
4. $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{3-x} = \dfrac{2}{x-3}$.

Respuesta razonada.

1. La ruptura es una cancelación ilegal de x dentro de dos sumas. Es un error algebraico. No hay factor común que cancelar, de modo que queda

$$\boxed{\frac{x+4}{x+7}, \qquad x \neq -7.}$$

2. La simplificación es correcta para $x \neq 2$, pero la afirmación universal pierde el dominio de procedencia. La forma reparada es

$$\boxed{\frac{x^2-4}{x-2} = x+2, \qquad x \neq 2.}$$

3. La primera ruptura está al transformar la división en multiplicación sin invertir el divisor. Además, el divisor debe estar definido y ser no nulo, de modo que $x \neq 2, -4$, 3. La reparación es

$$\frac{x+1}{x-2} \div \frac{x-3}{x+4} = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x+4}{x-3},$$

y por tanto

$$\boxed{\frac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x-3)}, \qquad x \neq -4, 2, 3.}$$

4. La primera ruptura consiste en tratar $3-x$ como si fuera $x-3$. Como $3-x = -(x-3)$,

$$\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{x-3},$$

y

$$\boxed{\frac{1}{x-3} + \frac{1}{3-x} = 0, \qquad x \neq 3.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Auditar una solución exige separar tres preguntas:

1. ¿la transformación algebraica preserva el valor?;
2. ¿están satisfechas las hipótesis que autorizan esa transformación?;
3. ¿el dominio de procedencia sigue acompañando a la forma obtenida?

Una cadena deja de justificar la expresión original en la **primera transición que falla**, aunque después continúe con cálculos correctos sobre la expresión equivocada.

La regla de trabajo queda fijada:

> **localice la primera ruptura, identifique la regla que debía justificarla, compruebe sus hipótesis y repare desde ese punto; no confunda un error algebraico con una omisión de dominio.**

En §20.16 reuniremos todo el capítulo en un único protocolo de lectura, planificación, transformación, verificación e interpretación. Ese cierre preparará el paso a C21 sin comenzar todavía la resolución sistemática de ecuaciones.

20.16. Síntesis y puente a C21

Durante este capítulo aprendimos muchas técnicas: factorizar antes de cancelar, multiplicar y dividir expresiones racionales, elegir denominadores comunes, operar fracciones complejas, controlar parámetros y auditar errores. Pero ninguna de esas técnicas funciona de manera aislada. Todas responden a una misma disciplina: **transformar una expresión sin perder las condiciones que hacen válidas sus transformaciones**.

La pregunta final del capítulo es, por tanto:

> **¿Qué protocolo permite decidir, ejecutar y verificar una transformación racional completa sin separar la fórmula de su dominio?**

La respuesta puede condensarse en seis verbos:

```
LEER
  ↓
DOMINIO
  ↓
PLAN
  ↓
TRANSFORMAR
  ↓
VERIFICAR
  ↓
INTERPRETAR
```

No son seis trámites independientes. Cada etapa protege a la siguiente.

1. Leer: reconocer la arquitectura antes de calcular. Antes de operar, debemos identificar qué objeto tenemos delante.

Preguntamos, por ejemplo:

- ¿hay una sola fracción o una fracción compleja?;
- ¿aparece una multiplicación, una división, una suma o una resta entre bloques?;
- ¿algún cociente completo funciona como divisor?;
- ¿los denominadores ya están factorizados?;
- ¿hay factores opuestos como $a - x$ y $x - a$?;
- ¿aparecen parámetros o radicales cuya interpretación ya conocemos de capítulos anteriores?

Leer bien una expresión evita aplicar una regla correcta al bloque equivocado. En particular, una barra exterior, un signo menos o un divisor completo deben identificarse **antes** de comenzar a simplificar.

2. Dominio: fijar dónde existe la expresión original. El dominio no se reconstruye al final. Se determina al comienzo.

Para expresiones racionales simples, todo denominador debe ser distinto de cero. En expresiones anidadas, además, cualquier subexpresión que funcione como divisor debe estar definida y ser no nula.

Por eso el dominio puede contener restricciones que después desaparezcan por completo de la fórmula visible.

Si una expresión original está definida en un conjunto D, nuestras transformaciones deben entenderse sobre D salvo que declaremos explícitamente otro objeto.

Ésta es la idea que atravesó todo el capítulo:

> **La forma final puede tener un dominio natural mayor; la transformación conserva el dominio de procedencia.**

3. Plan: escoger una representación con propósito. Una vez fijado el dominio, no conviene transformar mecánicamente.

Podemos decidir, según la estructura:

- factorizar antes de multiplicar;
- normalizar factores opuestos;
- conservar una forma factorizada en vez de expandir;
- elegir un denominador común económico;
- reducir por separado los bloques de una fracción compleja;
- o eliminar denominadores internos mediante un multiplicador común no nulo.

Una representación es buena cuando hace visible lo que necesitamos y no introduce restricciones artificiales.

Por tanto, **simplificar** no significa siempre «expandir menos» ni «escribir menos símbolos». Significa escoger una forma que reduzca el trabajo sin ocultar la estructura relevante.

4. Transformar: justificar cada paso bajo sus hipótesis. Toda transformación debe responder a una propiedad concreta.

Cuando cancelamos, dividimos por un factor común no nulo. Cuando invertimos un divisor, ya sabemos que ese divisor existe y no vale cero. Cuando multiplicamos por M/M, ya sabemos que $M \neq 0$ en el dominio vigente. Cuando distribuimos un signo menos, lo aplicamos al bloque completo.

La pregunta local que acompaña a cada flecha es:

¿Qué regla autoriza este paso y qué hipótesis exige?

Si no podemos responderla, todavía no tenemos una transformación justificada.

5. Verificar: controlar estructura y valores. Una forma final merece al menos dos controles.

El primero es **estructural**:

- ¿se conservaron todas las restricciones originales?;
- ¿cada cancelación actuó sobre factores completos?;
- ¿los divisores fueron controlados también como posibles ceros?;
- ¿algún factor auxiliar introdujo una exclusión nueva?;
- ¿se perdió un signo al normalizar factores opuestos?

El segundo puede ser **puntual**: escoger un valor sencillo del dominio original y comprobar que la expresión inicial y la forma final coinciden allí.

Ese control numérico es útil para detectar fallos, pero no demuestra por sí solo una identidad. La demostración sigue siendo la cadena algebraica justificada sobre el dominio declarado.

6. Interpretar: declarar qué se ha demostrado realmente. El resultado de una simplificación no es sólo una fórmula.

Si partimos de una expresión E definida en D y obtenemos una fórmula F, la conclusión completa es

$$E(x) = F(x) \qquad \text{para todo } x \in D.$$

Puede ocurrir que F tenga sentido en puntos que no pertenecían a D. Eso no amplía retroactivamente el dominio de E.

Por tanto, al cerrar una transformación debemos poder responder:

1. ¿cuál es la fórmula obtenida?;
2. ¿sobre qué dominio hemos demostrado su equivalencia con la expresión original?;
3. ¿qué restricciones dejaron de ser visibles en la fórmula final?;

4. ¿la forma final representa la misma función natural o sólo una regla equivalente sobre un dominio restringido?

Ejemplo de síntesis: una cadena que termina mucho más simple de lo que empieza. Considere

$$E(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x+3}.$$

Leer. Hay un producto de dos expresiones racionales seguido de una resta.

Dominio. Factorizamos sólo para leer las restricciones:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

La primera fracción exige $x \neq 1, 2$; la segunda exige $x \neq -1$; la tercera exige $x \neq -3$. Por tanto,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 2\}.$$

Plan. Conviene factorizar el numerador $x^2 - 1$ antes de multiplicar:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Transformar. Sobre el dominio D,

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} \cdot \frac{x-2}{x+1}.$$

Los factores $x-1$, $x-2$ y $x+1$ son no nulos en D, así que las cancelaciones están autorizadas y el producto vale 1. Entonces

$$E(x) = 1 - \frac{1}{x+3}.$$

Con denominador común $x+3$,

$$E(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = \frac{x+2}{x+3}.$$

Así,

$$\boxed{E(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \neq -3, -1, 1, 2.}$$

Verificar. En $x = 0$, que pertenece al dominio original,

$$\frac{-1}{2} \cdot (-2) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

mientras que la forma final da

$$\frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3}.$$

La comprobación puntual concuerda con la cadena algebraica.

Interpretar. La fórmula $(x+2)/(x+3)$ sólo excluye naturalmente $x = -3$, pero la expresión original también excluía $x = -1, 1, 2$. Por ello la respuesta completa conserva las cuatro restricciones.

Este ejemplo resume el capítulo: la simplificación puede hacer desaparecer casi toda la historia visible de la expresión, pero esa historia sigue formando parte de la afirmación matemática.

El protocolo completo. Podemos reunir ahora el método en una sola secuencia operativa:

```
1. LEER LA EXPRESIÓN POR BLOQUES Y NIVELES.
2. FIJAR EL DOMINIO ORIGINAL ANTES DE TRANSFORMAR.
3. IDENTIFICAR LA ESTRUCTURA QUE CONVIENE HACER VISIBLE.
4. ELEGIR UNA RUTA: FACTORIZAR, NORMALIZAR, COMPATIBILIZAR O REDUCIR BLOQUES.
5. JUSTIFICAR CADA TRANSFORMACIÓN CON SUS HIPÓTESIS.
6. CANCELAR SÓLO FACTORES COMPLETOS Y NO NULOS.
7. NO INTRODUCIR DIVISORES AUXILIARES QUE SE ANULEN EN EL DOMINIO ORIGINAL.
8. CONSERVAR TODAS LAS RESTRICCIONES DE PROCEDENCIA.
9. VERIFICAR LA FORMA FINAL ESTRUCTURALMENTE Y, SI CONVIENE, EN UN PUNTO.
10. INTERPRETAR EL RESULTADO SOBRE EL DOMINIO DECLARADO.
```

Los diez pasos no obligan a escribir diez líneas en cada problema. Con práctica se vuelven una disciplina mental. Lo importante es que ninguno desaparezca de la lógica de la solución.

Lo que cambia cuando aparece una ecuación. Hasta aquí hemos transformado **expresiones**. En C21 aparecerá una pregunta nueva: no sólo querremos saber si dos fórmulas representan los mismos valores en un dominio, sino **qué valores de la variable hacen verdadera una igualdad**.

Considere, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

C20 ya nos permite afirmar que, sobre el dominio $x \neq 3$,

$$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3.$$

Por tanto, dentro de ese mismo dominio, la ecuación anterior puede reemplazarse por

$$x+3=6, \qquad x \neq 3.$$

Aquí nos detenemos. Resolver sistemáticamente la ecuación pertenece a C21.

Lo importante para el puente es otra cosa: **la restricción $x \neq 3$ debe acompañar a la ecuación transformada**. Cualquier valor que aparezca más adelante como candidato tendrá que ser compatible con el dominio original.

Éste será uno de los problemas centrales del capítulo siguiente: distinguir transformaciones que preservan exactamente el conjunto solución de aquellas que pueden introducir o perder candidatos y, por tanto, exigen comprobación adicional.

Expresiones equivalentes y ecuaciones equivalentes. Podemos anticipar la relación lógica sin desarrollar todavía la teoría de C21.

Si E y F son equivalentes sobre un dominio D, entonces para cualquier expresión G definida en D,

$$E(x)=G(x)$$

y

$$F(x)=G(x)$$

tienen el mismo valor de verdad para cada $x \in D$.

La condición **sobre** D es esencial. Si al pasar de E a F olvidamos el dominio, podemos terminar comparando ecuaciones sobre conjuntos distintos de valores admisibles.

C20 proporciona, por tanto, la infraestructura que C21 necesita:

- dominio antes de transformar;
- equivalencia sobre un dominio declarado;
- hipótesis explícitas para cancelar e invertir;
- control de factores auxiliares;
- diagnóstico de la primera ruptura;
- y verificación de la forma obtenida.

C21 añadirá una nueva capa: el estudio del **conjunto solución**.

No-ejemplo de puente: borrar el dominio al pasar a una ecuación. Supongamos que alguien parte de

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 4$$

y escribe simplemente

$$x + 1 = 4$$

como si ambas ecuaciones vivieran automáticamente sobre todos los reales.

La simplificación de la expresión de la izquierda sólo estaba autorizada bajo $x \neq 1$. Por eso la forma correcta del puente es

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 1 = 4 \qquad \text{para } x \neq 1.$$

No resolveremos aquí la ecuación. El objetivo es reconocer que una transformación de expresiones sólo puede convertirse en una transformación de ecuaciones **sobre el dominio donde ya sabíamos que era válida**.

Recuperación final. Aplique el protocolo del capítulo. No resuelva las ecuaciones del punto 3; sólo prepare correctamente el paso a C21.

1. Simplifique

$$A(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x+1}$$

y conserve el dominio original.

2. Para

$$B(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1},$$

indique primero el dominio y después una forma simple equivalente sobre ese dominio.

3. Reescriba, sin resolverla, la ecuación

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 5$$

mediante una expresión más simple y conserve la condición de admisibilidad.

Respuesta razonada.

1. La primera fracción exige $x \neq 2$ y la segunda exige $x \neq -1$. Como

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2),$$

sobre el dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ tenemos

$$A(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{A(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+1}, \qquad x \neq -1, 2.}$$

La exclusión $x = 2$ sigue presente aunque una copia del factor $x - 2$ haya desaparecido durante la primera simplificación.

2. Las fracciones internas exigen $x \neq 0$. Además, el denominador exterior

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

debe ser no nulo, por lo que $x \neq 1$. Así,

$$\mathrm{Dom}(B) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Reduciendo los dos bloques interiores,

$$B(x) = \frac{x+1}{1-x},$$

de modo que

$$\boxed{B(x) = \frac{x+1}{1-x}, \qquad x \neq 0, 1.}$$

3. La expresión de la izquierda exige $x \neq 1$. Bajo esa condición,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Por tanto, la ecuación puede prepararse para C21 como

$$\boxed{x + 1 = 5, \qquad x \neq 1.}$$

No hemos resuelto la ecuación; sólo hemos reemplazado una expresión por otra equivalente en el dominio autorizado.

Qué debemos conservar del capítulo. El cálculo racional no consiste en mover símbolos hasta obtener una forma más corta. Consiste en controlar simultáneamente **valor, estructura y dominio**.

La tesis central del capítulo puede formularse ahora de manera completa:

> **Una transformación algebraica de expresiones racionales conserva valores sobre un dominio declarado cuando cada paso satisface las hipótesis que lo justifican. La fórmula final puede ocultar restricciones, pero no puede borrarlas.**

Por eso la secuencia que debe quedar disponible al terminar C20 es

$$\boxed{\text{leer} \to \text{dominio} \to \text{plan} \to \text{transformar} \to \text{verificar} \to \text{interpretar.}}$$

En C21 conservaremos este protocolo y cambiaremos la pregunta final. Ya no bastará con obtener una expresión equivalente: tendremos que determinar qué valores de la variable hacen verdadera una ecuación y demostrar que el conjunto solución obtenido corresponde exactamente al problema original.

Recuperar el prerrequisito que corresponde al error. Ante una ruptura conviene volver al recurso que la explica. Si se cancela x en $(x+1)/x$, el problema es la estructura aditiva: C19 exige factores de todo el numerador y denominador. Si se reemplaza $\sqrt{x^2}$ por x para $x<0$, se ha perdido la raíz principal: C18 da $|x|$. Si una división por una fracción acepta que su numerador sea cero, falta el dominio de la operación de C20. **Control resuelto:** $\sqrt{x^2}/x = |x|/x$ para $x \neq 0$, y vale 1 si $x>0$ y -1 si $x<0$. El resultado no es una única constante. Identificar el origen del fallo permite reparar el primer paso, no acumular reglas de memoria sobre una cadena ya inválida.

Ejercicios

El banco de ejercicios está organizado por **función cognitiva**. En este primer bloque no se busca velocidad de cálculo: se busca leer con precisión qué tipo de expresión aparece, qué divisiones contiene, cuál es su dominio de procedencia y qué afirmaciones pueden hacerse sin confundir una fórmula con la función natural que determina.

Salvo que se indique lo contrario, trabajamos sobre los números reales. No resuelva ecuaciones ni efectúe simplificaciones extensas si no son necesarias para justificar la respuesta.

A. Reconocimiento y lectura estructural

1. **Nivel A.** Clasifique cada expresión como **polinómica**, **racional** y/o **fraccionaria**. Cuando pertenezca a más de una clase, indíquelo y justifique la clasificación a partir de la estructura, no de los valores que pueda tomar:
   (a) $\dfrac{3x-1}{x^2+4}$;
   (b) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5}$;
   (c) $2x^4 - x + 7$;
   (d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. **Nivel A.** Para cada una de las expresiones siguientes, distinga entre **tener una barra de fracción visible** y **pertenecer a la clase de las expresiones racionales**. No haga una simplificación completa; explique qué estructura permite decidir:
   (a) $\dfrac{x^2-1}{x+3}$;
   (b) $x + \dfrac{1}{x-2}$;
   (c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+4}$;

(d) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-2}}{\dfrac{x+3}{x+4}}$.

3. **Nivel A.** Lea, sin simplificar,

$$T(x) = \frac{\dfrac{2}{x-1} + 1}{\dfrac{x+3}{x-4}}.$$

Identifique: (i) el numerador exterior; (ii) el denominador exterior; (iii) todos los denominadores internos visibles; (iv) qué **subexpresión completa**, además de estar definida, debe ser distinta de cero. Explique por qué mirar sólo los denominadores pequeños no basta.

4. **Nivel A.** Considere

$$E(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x-2}{x+3} + \frac{2}{x+2}.$$

Sin efectuar la cadena completa, separe la expresión en **bloques naturales**, indique cuál convendría transformar primero y nombre la finalidad de esa transformación: revelar factores, escoger denominador común, invertir un divisor o expandir. Justifique por qué una expansión total inmediata no es la primera lectura más informativa.

5. **Nivel A.** Determine el dominio de

$$A(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2(x+4)}$$

sin simplificar ni expandir. Explique por qué la potencia $(x-2)^2$ no crea dos puntos excluidos y por qué el numerador no impone ninguna restricción adicional.

6. **Nivel A.** Determine el dominio de la expresión compuesta

$$B(x) = \frac{\dfrac{1}{x-2}}{\dfrac{x+1}{x+4}}$$

sin invertir todavía el divisor. Para cada punto excluido, indique si la causa es: denominador interno nulo o denominador exterior completo igual a cero.

7. **Nivel A.** Compare

$$E(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} \qquad \text{y} \qquad F(x) = x + 5.$$

Responda razonadamente: (i) ¿cuál es el dominio natural de cada expresión?; (ii) ¿son equivalentes sobre $\mathbb{R} \setminus \{5\}$?; (iii) si cada fórmula define una función con su dominio natural y codominio $\mathbb{R}$, ¿son la misma función?; (iv) ¿qué dato impide identificarlas aunque la fórmula simplificada coincida?

8. **Nivel A.** Considere

$$G(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} \qquad \text{y} \qquad H(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Determine sus dominios naturales y decida sobre qué dominio pueden compararse como expresiones equivalentes. Después explique por qué las funciones naturales asociadas no son

iguales. Use el valor $x = -1$ para hacer visible la diferencia entre las dos situaciones, sin tomar esa comprobación puntual como demostración de la equivalencia general.

9. **Nivel A.** Antes de efectuar ninguna división, analice

$$Q(x) = \frac{x+1}{x-3} \div \frac{x-2}{x+4}.$$

Enumere todas las restricciones del dominio original y explique la causa de cada una. En particular, responda: ¿por qué debe excluirse $x = 2$ aunque no anule ningún denominador interno? ¿Debe excluirse $x = -1$ porque anula el numerador del dividendo? Justifique ambas respuestas.

10. **Nivel A.** Estudie la expresión

$$R(x) = \frac{x+2}{x-1} \div \frac{x^2-9}{x^2+x-6}.$$

Sin simplificar el cociente completo, determine su dominio original. Factorice sólo lo necesario para distinguir cuatro fenómenos: (i) un punto donde el dividendo no está definido; (ii) puntos donde el divisor no está definido; (iii) un punto donde el divisor está definido pero vale cero; (iv) un factor que podría desaparecer si el divisor se simplificara. Explique por qué ninguna cancelación posterior puede borrar una exclusión ya registrada.

B. Fluidez técnica

En este bloque sí se espera ejecutar las operaciones completas. En todos los ejercicios, determine primero el dominio original y consérvelo después de simplificar. Factorice antes de expandir cuando ello haga visible una cancelación; no cancele términos separados por sumas o restas.

11. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

factorizando numerador y denominador. Justifique cada cancelación y escriba la forma final junto con **todas** las restricciones del dominio original.

12. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-x-6}.$$

Controle la multiplicidad del factor común: indique cuántas copias aparecen arriba y abajo, cuál se cancela y cuál permanece visible en la forma final. Conserve el dominio original.

13. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{(5-x)(x+2)}{(x-5)(x-1)}.$$

Normalice primero los factores opuestos mediante un signo global y sólo después cancele. Registre el dominio antes de operar.

14. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 16}.$$

Factorice sólo lo necesario para hacer visible la estructura multiplicativa. No expanda la forma final. Declare qué restricción desaparece de la escritura después de cancelar.

15. **Nivel B.** Simplifique el producto

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} \cdot \frac{x + 3}{x - 2}.$$

Determine primero la intersección de los dominios de los dos factores. Factorice antes de multiplicar y conserve todas las exclusiones aunque el producto termine en una constante.

16. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{(x - 1)^2}{(x + 2)(x - 3)} \cdot \frac{x + 2}{x - 1}.$$

Realice las cancelaciones antes de efectuar productos innecesarios y escriba el resultado con el dominio original completo.

17. **Nivel B.** Simplifique el cociente

$$\frac{x^2 - 9}{x + 4} \div \frac{x - 3}{x + 2}.$$

Distinga las restricciones que hacen que el dividendo y el divisor estén definidos de la condición adicional que impide que el divisor valga cero. Invierta únicamente el divisor completo.

18. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{x - 1}{x + 2} \div \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Factorice el divisor sólo después de registrar su dominio. Identifique expresamente el valor que hace cero al divisor completo y conserve todas las restricciones después de cancelar.

19. **Nivel B.** Sume y simplifique

$$\frac{3x + 1}{x - 2} + \frac{x - 5}{x - 2}.$$

Mantenga el denominador común, combine los numeradores como bloques y conserve el dominio original.

20. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{2}{x(x - 1)} + \frac{3}{x - 1}.$$

Elija un denominador común económico: no multiplique denominadores completos si uno ya contiene todos los factores del otro. Declare el dominio antes de reescribir las fracciones.

21. **Nivel B.** Reste y simplifique

$$\frac{2x+3}{x+1}-\frac{x-4}{x-2}.$$

Mantenga entre paréntesis el numerador sustraído hasta distribuir por completo el signo menos. Conserve la forma factorizada del denominador final si no aparece una cancelación legítima.

22. **Nivel B.** Simplifique la suma de tres términos

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x(x+1)}.$$

Use el denominador común $x(x+1)$, combine cuidadosamente los numeradores y cancele sólo después de haber obtenido una única fracción. Conserve las dos exclusiones originales.

23. **Nivel B.** Simplifique mediante el **método interior**

$$\frac{\dfrac{1}{x}+3}{\dfrac{1}{x}+1}.$$

Determine el dominio por niveles antes de operar: incluya tanto la restricción de las fracciones internas como el valor que hace cero al denominador exterior completo.

24. **Nivel B.** Simplifique mediante el método interior

$$\frac{\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}}.$$

Registre primero las restricciones internas y determine después si el bloque inferior introduce una exclusión adicional. Conserve el dominio original en la forma final.

25. **Nivel B.** Simplifique eliminando denominadores internos:

$$\frac{\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x-2}{x+1}+1}.$$

Determine antes el dominio original, elija un multiplicador común no nulo en ese dominio y distribúyalo sobre el numerador y el denominador exteriores. No reconstruya el dominio a partir de la fórmula final.

26. **Nivel B.** Simplifique

$$\frac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{3}{x^2-1}}.$$

Puede usar el método interior o eliminar denominadores internos, pero debe declarar el dominio **antes** de elegir la ruta. Explique brevemente por qué el denominador exterior no añade un cero nuevo además de los ya excluidos por x^2-1.

C. Justificación y reconstrucción

En este bloque no basta con obtener una forma equivalente. Cada respuesta debe identificar **qué regla se usa, qué hipótesis la autorizan y sobre qué dominio sigue siendo válida la transformación**. Cuando una forma final tenga un dominio natural mayor, conserve explícitamente el dominio de procedencia. En los ejercicios 35–38 compare también la calidad de distintas rutas, no sólo su corrección.

27. **Nivel C.** Justifique la regla de cancelación

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}.$$

Indique las hipótesis exactas que deben satisfacerse sobre B y C, explique por qué la cancelación equivale a dividir numerador y denominador por un factor común no nulo y describa qué falla si $C = 0$. No use la palabra «cancelar» como justificación en sí misma.

28. **Nivel C.** Reconstruya y justifique la regla

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}.$$

Separe tres obligaciones: que el dividendo esté definido, que el divisor esté definido y que el divisor completo sea distinto de cero. Explique por qué las hipótesis son $B \neq 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, y por qué no es necesario exigir $A \neq 0$.

29. **Nivel C.** Suponga que $B \neq 0$ y $D \neq 0$. Justifique las reescrituras

$$\frac{A}{B} = \frac{AD}{BD} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{D} = \frac{BC}{BD}.$$

Identifique en cada paso el factor por el cual se multiplica numerador y denominador, explique por qué ese factor representa 1 en el dominio vigente y deduzca de ahí por qué BD es siempre un denominador común disponible. Distinga «válido» de «económico».

30. **Nivel C.** Sea

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

una fracción compleja definida en un dominio E, y sea $M(x)$ una expresión. Explique por qué la transformación

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{M(x)N(x)}{M(x)D(x)}$$

preserva el valor en todo E sólo si $M(x) \neq 0$ para cada $x \in E$. Relacione esta condición con la regla de cancelación de §20.5 y explique por qué un factor auxiliar que se anule en un punto de E reduce artificialmente el dominio de la ruta.

31. **Nivel C.** Considere

$$R(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}.$$

Factorice y simplifique sólo después de determinar el dominio original. Después responda: (i) ¿qué restricción deja de ser visible en la forma final?; (ii) ¿cuál es el dominio natural de esa forma final?; (iii) ¿sobre qué dominio es correcta la equivalencia obtenida? Explique por qué esos tres datos no son redundantes.

32. **Nivel C.** Estudie el producto

$$P(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{x + 2}{x - 1}.$$

Demuestre que la fórmula final puede reducirse a la constante 1, pero reconstruya antes el dominio original a partir de los dos factores. Compare ese dominio con el dominio natural de la constante 1 y explique por qué concluir «$P(x) = 1$ para todo real» sería una afirmación más fuerte y falsa.

33. **Nivel C.** Justifique completamente la identidad restringida

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1}.$$

Debe incluir: dominio original, elección del denominador común, momento exacto en que aparece un factor cancelable y dominio de la fórmula final. Explique por qué la igualdad es correcta sobre $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ y no debe presentarse como identidad sobre todo el dominio natural de $1/(x + 1)$.

34. **Nivel C.** Analice

$$H(x) = \frac{\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}}{\dfrac{2}{x^2 - 1}}.$$

Determine primero el dominio por niveles y luego simplifique hasta una forma polinómica. Explique por qué una forma final sin denominadores visibles puede seguir representando correctamente la expresión original sólo acompañada de restricciones. Indique con precisión cuáles son.

35. **Nivel C.** Considere

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1}.$$

Resuélvala por las dos rutas estudiadas en §§20.11–20.12:

1. **método interior**: reduzca por separado el numerador exterior y el denominador exterior;
2. **eliminación de denominadores internos**: multiplique ambos bloques exteriores por un multiplicador común adecuado.

Antes de operar, fije un único dominio original para ambas rutas. Compare después: número de reescrituras, aparición de fracciones intermedias y visibilidad de las restricciones. Explique por qué dos métodos distintos deben producir expresiones equivalentes sobre el mismo dominio.

36. **Nivel C.** Para transformar

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1},$$

un estudiante propone usar como denominador común

$$(x - 1)(x + 1)(x + 5).$$

Otro propone usar sólo

$$(x - 1)(x + 1).$$

Determine el dominio original y analice ambas propuestas. Explique por qué la primera puede producir una transformación algebraicamente correcta en un dominio menor y, sin embargo, no constituye una equivalencia sobre todo el dominio de procedencia. Identifique exactamente qué factor auxiliar causa el problema.

37. **Nivel C.** Compare dos rutas para

$$P(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x - 2}{x + 3}.$$

- **Ruta I:** factorizar antes de multiplicar;
- **Ruta II:** multiplicar primero las formas expandidas.

Muestre que ambas rutas pueden ser correctas sobre el mismo dominio si se justifican adecuadamente. Después explique por qué la Ruta I es estratégicamente superior para este problema: señale qué factores permanecen visibles, qué trabajo evita y qué información de dominio se vuelve más fácil de controlar.

38. **Nivel C.** Considere

$$G(x) = \frac{\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}}{\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1}}.$$

Un estudiante quiere eliminar denominadores internos y duda entre

$$M_1(x) = x^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad M_2(x) = (x^2 - 1)(x - 4).$$

Determine primero el dominio original completo de G. Después decida cuál de los dos multiplicadores permite una transformación equivalente sobre **todo** ese dominio y cuál introduce una restricción artificial. Ejecute la ruta válida hasta obtener una forma simple y explique por qué la ruta con el multiplicador extra no es «más general» por contener más factores.

D. Diagnóstico y primera ruptura

En este bloque no se pide sólo corregir un resultado. Para cada cadena, localice **la primera transición que deja de estar justificada**, clasifique el fallo y repare la solución desde ese punto. Distinga con precisión entre error algebraico, pérdida o introducción de dominio, divisor nulo y error de signo. Si el resultado visible es correcto pero la justificación no lo es, deberá decirlo expresamente.

39. **Nivel D.** Audite la afirmación

$$\frac{x + 4}{x + 7} = \frac{4}{7}.$$

Un estudiante dice que «se cancela la x porque aparece arriba y abajo». Localice la primera ruptura, explique por qué x no es un factor común de los dos miembros del cociente y use un valor permitido sencillo para refutar la igualdad propuesta. Indique también el dominio original y escriba qué puede afirmarse correctamente sobre la expresión.

40. **Nivel D.** Un estudiante transforma

$$\frac{(x - 2)(x + 3) + 5}{(x - 2)(x + 4)}$$

mediante la cadena

$$\frac{(x-2)(x+3)+5}{(x-2)(x+4)} = \frac{x+3+5}{x+4}.$$

Afirma que canceló el factor $x-2$. Determine el dominio original, localice la primera transición inválida y explique por qué $x-2$ no es factor de **todo** el numerador. Dé un contraejemplo puntual permitido y describa qué factorización tendría que existir para que una cancelación semejante fuese legítima.

41. **Nivel D.** Examine la cadena

$$\frac{x^2+3x}{x^2+5x} = \frac{x+3}{x+5}.$$

El estudiante afirma que obtuvo el resultado «cancelando x^2». Decida por separado si **el resultado final** es correcto y si **la razón dada** lo justifica. Reconstruya una cadena válida mediante factorización, determine el dominio original y explique por qué un resultado correcto no convierte una regla falsa en una regla válida.

42. **Nivel D.** Considere

$$\frac{(x-1)(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+5)}.$$

Un estudiante escribe directamente

$$\frac{(x-1)(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+3}{x+5}$$

porque «canceló $x-1$ en cada término del numerador». La fórmula final es correcta en el dominio original. Decida si la explicación puede justificarse dividiendo todo el numerador y todo el denominador por el mismo factor no nulo y aplicando distributividad. Compare esa ruta con factorizar primero el numerador completo, reconstruya ambas cadenas y conserve todas las restricciones originales.

43. **Nivel D.** Audite

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-3}.$$

Localice la primera ruptura y clasifíquela. Escriba la relación correcta entre $3-x$ y $x-3$, repare la cadena completa y conserve el dominio original. Explique por qué el error es de signo antes que de denominador común.

44. **Nivel D.** Un estudiante comienza correctamente con

$$\frac{2x+1}{x+1} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{(2x+1)(x-2)-(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Luego escribe

$$\frac{(2x^2-3x-2)-(x^2-2x-3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2-3x-2-x^2-2x-3}{(x+1)(x-2)}.$$

Localice la primera transición errónea, explique qué términos deben cambiar de signo al retirar el segundo paréntesis, repare el numerador y dé la forma final con su dominio original.

45. **Nivel D.** Audite la cadena

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)+(x+1)}=\frac{1}{x}.$$

Indique la primera regla falsa que se ha usado. Determine el dominio original, obtenga la suma correcta mediante un denominador común y explique por qué la fórmula errónea $1/x$ introduce además una exclusión aparente que no pertenecía al problema inicial.

46. **Nivel D.** Considere

$$\frac{x+1}{x-2}\div\frac{x-3}{x+4}=\frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x+4}.$$

Localice la primera ruptura, identifique qué objeto completo debía invertirse y determine todas las restricciones del cociente original antes de reparar la operación. Distinga expresamente entre el valor que hace al divisor indefinido y el valor que lo hace cero.

47. **Nivel D.** Un estudiante calcula

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=x+4$$

sin error algebraico visible y concluye después que el dominio es $\mathbb{R}$ porque $x+4$ está definido para todo real. ¿Dónde aparece la primera ruptura? Clasifique el fallo, escriba la afirmación completa correcta y explique por qué la fórmula final no puede usarse para reconstruir el dominio de procedencia.

48. **Nivel D.** Se propone

$$\frac{x-2}{x+1}\div\frac{x-2}{x-4}=\frac{x-4}{x+1},\qquad x\neq -1,4.$$

La simplificación visible coincide con la forma correcta, pero la lista de restricciones es incompleta. Identifique el valor omitido, explique por qué el divisor está definido allí pero no puede usarse como divisor, y clasifique el fallo antes de reparar la afirmación completa.

49. **Nivel D.** Para sumar

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1},$$

un estudiante decide usar el denominador común

$$(x-1)(x+1)(x+5)$$

y multiplica cada fracción por los factores necesarios, incluido $(x+5)/(x+5)$. Afirma después que su ruta es «más general» porque utiliza un denominador que contiene más factores. Determine el dominio original, localice la primera decisión que impide conservar la equivalencia sobre todo ese dominio y explique qué nueva exclusión se introduce. Repare la ruta con un denominador común adecuado.

50. **Nivel D.** Audite la siguiente solución completa:

$$T(x)=\frac{\dfrac{x^2-1}{x-1}}{\dfrac{x+1}{x+2}}.$$

El estudiante escribe

$$\mathrm{Dom}(T)=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\},$$

porque el bloque inferior exige $x \neq -2$ y, al ser divisor, también $x \neq -1$. Luego continúa

$$T(x) = \frac{x+1}{\dfrac{x+1}{x+2}} = (x+1)\frac{x+2}{x+1} = x+2,$$

y concluye

$$T(x) = x+2, \qquad x \neq -2, -1.$$

Localice la **primera ruptura** de la solución. Explique por qué los pasos algebraicos posteriores pueden ser correctos sobre un dominio más restringido y, sin embargo, no reparar la omisión inicial. Determine el dominio original completo y escriba la conclusión corregida.

E. Estrategia y elección de ruta

En este bloque puede haber varias rutas algebraicamente correctas. La tarea consiste en **elegir con propósito**: preservar el dominio original, conservar visibles los factores útiles, evitar expansiones o denominadores auxiliares innecesarios y justificar por qué una representación es preferible para el objetivo concreto. Una ruta más larga no es falsa por ser larga; una ruta más corta no es válida por ser corta.

51. **Nivel E.** Para calcular

$$\frac{2}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2},$$

considere los tres candidatos a denominador común

$$D_1 = x(x-1)^2, \qquad D_2 = x(x-1)^3, \qquad D_3 = x(x-1)^2(x+2).$$

Determine primero el dominio original. Después clasifique cada candidato como **adecuado y económico**, **adecuado pero innecesariamente grande** o **inadecuado para conservar equivalencia en todo el dominio original**. Justifique la clasificación en términos de factores faltantes y ceros introducidos. Finalmente, ejecute la suma usando la opción que considere estratégicamente mejor.

52. **Nivel E.** Considere

$$\frac{1}{(x+2)^2(x-3)} - \frac{4}{(x+2)(x-3)^2}.$$

Compare las opciones

$$D_1 = (x+2)^2(x-3)^2,$$

$$D_2 = (x+2)^3(x-3)^3,$$

y

$$D_3 = (x+2)^2(x-3)^2(x-5).$$

Determine el dominio original y explique, sin apelar a una teoría general de mcm polinómico, cuál es la potencia necesaria de cada factor. Distinga entre una elección válida pero costosa y una elección que introduce una restricción artificial. Use después el denominador que preserve mejor la estructura y efectúe la resta.

53. **Nivel E.** Simplifique

$$S(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2(x-1)} - \frac{3}{x(x-1)^2}.$$

Antes de combinar numeradores:

1. determine el dominio original;
2. haga un inventario de los factores y sus mayores potencias necesarias;
3. proponga un denominador común que no repita factores innecesariamente;
4. explique qué tendría de estratégicamente peor multiplicar sin inspección los tres denominadores originales.

Ejecute después la ruta elegida y conserve el dominio de procedencia aunque la fórmula final admita más valores.

54. **Nivel E.** Para la fracción compleja

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}},$$

se proponen tres multiplicadores para eliminar denominadores internos:

$$M_1 = x^2 - 1, \qquad M_2 = (x^2-1)^2, \qquad M_3 = (x^2-1)(x-4).$$

Determine primero el dominio original completo, incluido el control del denominador exterior. Analice luego los tres multiplicadores: indique cuáles son no nulos en todo el dominio original, cuál elimina los denominadores con menor coste y cuál reduce artificialmente el dominio. Ejecute la mejor ruta hasta obtener una forma simple.

55. **Nivel E.** Compare dos rutas para

$$P(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 2x - 15} \cdot \frac{x-5}{x+5}.$$

- **Ruta A:** registrar el dominio, factorizar y cancelar antes de multiplicar;
- **Ruta B:** multiplicar primero las formas expandidas y factorizar sólo si resulta necesario al final.

Desarrolle ambas hasta una forma comparable. Después explique cuál conserva mejor la estructura multiplicativa, cuál hace más visibles las restricciones y qué trabajo algebraico adicional crea la expansión prematura. No declare una ruta falsa sólo por ser menos eficiente.

56. **Nivel E.** Estudie

$$Q(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \div \frac{x-2}{x+3}.$$

Compare estas estrategias:

1. simplificar primero el bloque del dividendo **sin perder su dominio**, y sólo después ejecutar la división;
2. invertir de inmediato el divisor completo, factorizar todos los polinomios y simplificar el producto total.

Determine el dominio original antes de elegir. Ejecute las dos rutas, compruebe que conducen a la misma forma sobre ese dominio y explique cuál deja más transparente la razón de cada cancelación.

57. **Nivel E.** Considere

$$H(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}.$$

Resuélvala por:

- el **método interior**;
- la **eliminación de denominadores internos** con un multiplicador común elegido por usted.

Antes de operar, determine un único dominio original. Compare después las dos rutas según cuatro criterios: número de fracciones intermedias, cantidad de distributividades, visibilidad del dominio y facilidad para detectar la cancelación final. Explique por qué el método más corto en este ejemplo no se convierte por ello en una regla universal.

58. **Nivel E.** Simplifique

$$E(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \div \frac{x + 2}{x + 1}\right) + \frac{1}{x + 1}.$$

Diseñe primero un **plan de bloques**: decida qué cociente conviene cerrar antes de construir un denominador común para toda la expresión. Compare su ruta con la alternativa de combinar desde el comienzo todas las fracciones visibles en una sola estructura. En ambas discusiones, registre por separado las restricciones que provienen del dividendo, del divisor y del último sumando. Termine con una forma simple y el dominio original completo.

59. **Nivel E.** Construya un producto de **dos expresiones racionales no constantes**, ambas con denominador no constante, que cumpla simultáneamente:

- su forma simplificada sea $x + 2$;
- su dominio original sea exactamente

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\};$$

- las dos exclusiones dejen de ser visibles en la fórmula final;
- la simplificación requiera al menos una cancelación entre factores pertenecientes a fracciones distintas.

No basta con escribir un ejemplo: factorice su construcción, determine el dominio desde la expresión original y demuestre que satisface las cuatro condiciones.

60. **Nivel E.** Diseñe un **cociente de dos expresiones racionales** cuya forma simplificada sea la constante 1 y cuyo dominio original sea exactamente

$$\mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1, 4\}.$$

Su construcción debe lograr además que:

- una exclusión proceda de un factor removible del denominador del **dividendo**;
- otra proceda de un factor removible del denominador del **divisor**;
- $x = 1$ quede excluido porque el divisor completo vale cero;
- la forma final 1 no muestre ninguna de las cuatro restricciones.

Puede partir de dos representaciones distintas de una misma expresión racional simple. Verifique por separado el dominio del dividendo, el dominio del divisor, los ceros del divisor y la simplificación del cociente. Explique por qué el diseño sería matemáticamente incompleto si sólo presentara la fórmula final.

F. Transferencia C18–C19 y varias capas

Este bloque exige reutilizar conocimientos anteriores sin abrir teorías nuevas. En 61–64 los parámetros se consideran reales fijos mientras se opera respecto de x; se distinguen casos sólo cuando cambian el dominio o la estructura. En 65–68 se importan de C18 y C19 únicamente las reglas ya establecidas para raíces principales, factorización, diferencia de cuadrados y factores opuestos. En 69–72 aparecen cocientes de incrementos **puramente algebraicos**: h es una variable o parámetro adicional sujeto a sus propias restricciones; no se estudian límites ni se hace tender h a cero.

61. **Nivel F.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ parámetros fijos. Estudie

$$F_{a,b}(x) = \frac{3(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

Determine el dominio original y simplifique. Distinga los casos $a \neq b$ y $a = b$ **sólo para describir cuántos puntos distintos quedan excluidos**. Explique por qué la forma final puede ocultar $x = a$ cuando $a \neq b$ y por qué escribir dos condiciones simbólicas no implica siempre dos puntos excluidos.

62. **Nivel F.** Para parámetros reales fijos a, b, simplifique

$$S_{a,b}(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}.$$

Obtenga una sola fracción y conserve el dominio original. Analice después qué cambia cuando $a = b$: compare la expresión original, la fórmula combinada y el conjunto de exclusiones. Justifique por qué el caso $a = b$ no debe tratarse como una excepción algebraica misteriosa, sino como una coincidencia de factores y restricciones.

63. **Nivel F.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Lea por niveles y simplifique

$$Q_{a,b}(x) = \frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{x-b}{x-a}}.$$

Antes de invertir, determine qué valores hacen indefinidas las fracciones internas y cuál hace cero al divisor completo. Obtenga una forma simple y conserve el dominio de procedencia. Compare $a \neq b$ con $a = b$ y explique por qué, en este último caso, dos restricciones simbólicas pueden fusionarse en un único punto excluido.

64. **Nivel F.** Para $a, b \in \mathbb{R}$, considere

$$P_{a,b}(x) = \frac{(x-a)(x+a)}{x-b} \cdot \frac{x-b}{x-a}.$$

Determine el dominio original antes de cancelar. Simplifique después y describa con precisión el dominio cuando $a \neq b$ y cuando $a = b$. Explique por qué la fórmula final puede ser polinómica aunque la expresión de partida conserve una o dos exclusiones según los valores de los parámetros.

65. **Nivel F.** Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo. Usando únicamente las reglas de C18 para la raíz cuadrada principal y las reglas de C20 para denominadores, simplifique

$$R_a(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x-a}}.$$

Determine primero el dominio real de la expresión original. Justifique cada paso de la cancelación escribiendo $x - a$ como el cuadrado de una raíz principal cuando corresponda.

Compare el dominio original con el dominio natural de la fórmula final y explique por qué no coinciden.

66. **Nivel F.** Audite la propuesta

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a} = 1, \qquad x \neq a.$$

No haga análisis sistemático de signos. Use la identidad de C18

$$\sqrt{u^2} = |u|$$

para escribir la forma correcta, y utilice al menos un valor permitido —por ejemplo $x = a - 1$— para refutar la identidad propuesta. Indique además por qué la expresión es fraccionaria pero no debe clasificarse automáticamente como racional.

67. **Nivel F.** Recupere de C19 la diferencia de cuadrados y la normalización de factores opuestos para simplificar

$$A(x) = \frac{x^2 - 16}{(4-x)(x+4)}.$$

Determine primero el dominio original. Factorice el numerador, convierta $4 - x$ en un múltiplo de $x - 4$ y controle el signo global. Explique por qué el resultado final constante no permite recuperar las dos exclusiones originales.

68. **Nivel F.** Trabajando en $\mathbb{R}$, simplifique

$$B(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}.$$

Determine el dominio original combinando la condición de existencia de $\sqrt{x}$ con la no nulidad del denominador. Después use

$$x - 9 = (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$$

en el dominio donde esa escritura tiene sentido. Conserve la exclusión que desaparece de la fórmula final y explique por qué este ejercicio combina una regla de C18 con una factorización de tipo C19 sin convertir la expresión original en racional.

69. **Nivel F.** Simplifique algebraicamente, sin usar límites,

$$D(x,h) = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}.$$

Trabaje con pares reales (x, h). Determine **antes de operar** todas las restricciones provenientes de los dos denominadores internos y de la división exterior por h. Obtenga una sola fracción y conserve las tres condiciones aunque la forma final oculte alguna de ellas.

70. **Nivel F.** Simplifique, sin interpretar el resultado como derivada ni tomar ningún límite,

$$E(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Registre primero la condición que impone la expresión original. Elija entre expandir todo desde el comienzo o usar una factorización estructural de la diferencia de cuadrados; compare brevemente ambas rutas y escriba la fórmula final junto con la restricción heredada.

71. **Nivel F.** Simplifique puramente por álgebra

$$G(x,h)=\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}.$$

Determine el dominio original en el plano (x,h): controle x, $x+h$ y h por separado. Combine las fracciones internas, factorice el numerador resultante antes de cancelar y conserve todas las restricciones en la forma final.

72. **Nivel F.** Sea

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Sin usar cálculo diferencial, simplifique el cociente de incremento algebraico

$$C(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{x+h+1}{x+h-1}-\dfrac{x+1}{x-1}}{h}.$$

Fije primero el dominio original en términos de x y h. Mantenga los dos numeradores completos al construir el denominador común, simplifique sólo después de efectuar la resta y explique por qué las condiciones $x\neq 1$, $x+h\neq 1$ y $h\neq 0$ deben acompañar a la forma final aunque ninguna de ellas pueda descartarse por mirar únicamente el último cociente.

G. Síntesis avanzada

Los ocho ejercicios finales no anuncian una técnica principal. Cada problema exige leer la estructura completa, fijar el dominio de procedencia, escoger una ruta, justificar sus hipótesis y explicar qué información deja de ser visible en la forma final. No basta con obtener una fórmula correcta: debe quedar claro **por qué la cadena es válida sobre exactamente el dominio declarado**.

73. **Nivel G. Dominio invisible en el resultado.** Simplifique completamente

$$E(x)=\left(\frac{x^2-1}{x-1}\cdot\frac{x-2}{x+1}\right)\div\frac{x-2}{x+3}.$$

La forma final debe ser polinómica. Antes de operar:

1. determine el dominio original y clasifique la causa de cada exclusión;
2. identifique qué restricciones proceden de denominadores internos y cuál procede de que el divisor completo valga cero;
3. elija una ruta que mantenga visibles los factores útiles hasta la última cancelación.

Después de simplificar, compare expresamente los puntos $x=1$ y $x=2$: en ambos la fórmula final tendrá sentido, pero las expresiones originales fallan por razones distintas. Explique por qué ese contraste impide reconstruir el dominio desde el resultado final.

74. **Nivel G. Auditoría de dos rutas.** Considere

$$Q(x)=\frac{x+3}{x-2}\div\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Un estudiante propone dos rutas.

Ruta A. Registra primero el dominio del cociente completo y sólo después factoriza el divisor.

Ruta B. Simplifica inmediatamente

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

y, mirando sólo esta última fórmula, declara como restricciones del divisor únicamente las que se ven en $x+1$.

Desarrolle ambas rutas. Determine cuál conserva el dominio original y localice con precisión la información que pierde la Ruta B. Muestre que sus manipulaciones algebraicas posteriores pueden ser correctas y, aun así, la afirmación completa quedar dañada. Termine con una forma simplificada común y compare los dominios que cada ruta declararía.

75. **Nivel G. Fracción compleja con parámetros.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ parámetros fijos. Estudie

$$F_{a,b}(x) = \frac{\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}}{\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b}}.$$

No convierta el problema en una ecuación. Debe:

1. determinar el dominio por niveles;
2. separar los casos $a \neq b$ y $a = b$ sólo cuando cambie realmente la estructura;
3. simplificar la fracción compleja en cada caso pertinente;
4. explicar qué ocurre con el denominador exterior cuando $a = b$;
5. distinguir entre «dos restricciones simbólicas» y «dos puntos distintos excluidos».

Su conclusión debe describir tanto la fórmula obtenida como el dominio en que esa fórmula representa a la expresión original.

76. **Nivel G. Construcción inversa.** Construya una expresión racional $R(x)$ que satisfaga simultáneamente:

- sea equivalente a x^2+1 sobre
$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\};$$
- su dominio original sea **exactamente** ese conjunto;
- las dos exclusiones desaparezcan por completo de la fórmula simplificada;
- numerador y denominador de la expresión construida sean no constantes.

No basta con presentar una fórmula. Debe determinar su dominio directamente desde la expresión original, justificar cada cancelación y demostrar que no ha introducido ninguna exclusión adicional. Después explique por qué R y la función polinómica natural $x \mapsto x^2+1$ no son la misma función si cada una conserva su dominio natural.

77. **Nivel G. Denominadores repetidos.** Simplifique

$$S(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{2}{x^2(x-1)} - \frac{3}{x(x-1)^3}.$$

Compare dos planes:

- **Plan bruto:** usar el producto completo de los tres denominadores;
- **Plan estructural:** conservar de cada factor sólo la mayor potencia necesaria.

Antes de efectuar la suma, determine el dominio original y escriba ambos candidatos a denominador común. Justifique por qué los dos pueden ser válidos en el mismo dominio, pero uno introduce mucho más trabajo. Ejecute el plan estructural, obtenga una sola fracción y verifique por **recomposición** que cada una de las tres reescrituras individuales conserva su valor en el dominio declarado.

78. **Nivel G. Transferencia con radical e inversión.** Trabajando en $\mathbb{R}$, simplifique

$$R(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \div \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}}.$$

Separe rigurosamente las fuentes de restricción:

1. existencia de la raíz principal;
2. no nulidad de los denominadores internos;
3. no nulidad del divisor completo.

Sólo después invierta el divisor y simplifique. Compare el dominio original con el dominio natural de la fórmula final. Indique además por qué la expresión de partida es fraccionaria, pero no debe clasificarse como racional en el sentido de §20.2.

79. **Nivel G. Primera ruptura en una cadena extensa.** Considere

$$T(x) = \left(\frac{x^2-1}{x-1} \div \frac{x+1}{x+2}\right)\frac{x+2}{x+3} - \frac{1}{x+3}.$$

Un estudiante escribe la siguiente cadena:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \div \frac{x+1}{x+2}\right)\frac{x+2}{x+3} - \frac{1}{x+3} \\
&= \left((x+1) \div \frac{x+1}{x+2}\right)\frac{x+2}{x+3} - \frac{1}{x+3} \\
&= (x+1)\frac{x+1}{x+2}\frac{x+2}{x+3} - \frac{1}{x+3} \\
&= \frac{(x+1)^2(x+2)}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{x+3} \\
&= \frac{(x+1)^2}{x+3} - \frac{1}{x+3} \\
&= \frac{(x+1)^2-1}{x+3} \\
&= \frac{x^2+2x+1-1}{x+3} \\
&= \frac{x^2+2x}{x+3} \\
&= \frac{x(x+2)}{x+3}.
\end{aligned}$$

Audite la cadena de izquierda a derecha. Debe:

1. determinar primero el dominio de la expresión original;
2. localizar la **primera** transición injustificada;
3. explicar por qué varias transiciones posteriores son algebraicamente válidas respecto de la expresión equivocada que ya se obtuvo;
4. reparar la cadena desde la primera ruptura;
5. comparar el resultado correcto con el resultado de la cadena defectuosa.

No atribuya el error a una línea posterior si la equivalencia con la expresión original ya se había perdido antes.

80. **Nivel G. Síntesis sin método anunciado.** Simplifique y audite completamente

$$S(x) = \left(\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \div \frac{x+3}{x-2}\right) + \frac{4}{x+2}.$$

No se indica qué método usar. Su solución debe contener, en un orden que usted justifique:

- lectura por bloques y dominio por capas;
- factorización sólo donde revele información útil;
- control de que el divisor esté definido y sea no nulo;
- elección del orden entre simplificar el dividendo e invertir el divisor;
- construcción del denominador común para la suma final;
- conservación de todas las restricciones después de las cancelaciones;
- una **segunda ruta de verificación** que empiece invirtiendo el divisor antes de simplificar el primer cociente;
- explicación de qué información de dominio queda completamente oculta en la forma final.

Cierre indicando por qué una comprobación puntual puede servir como control adicional, pero no reemplaza la equivalencia algebraica demostrada sobre el dominio original.

H. Profundización y reconstrucción

Intente cada tarea antes de consultar su solución. Los parámetros son reales salvo indicación distinta.

Ejercicio 081. Construcción mínima de dos huecos. Sean $a \neq b$. Entre las fracciones N/D con denominador mónico y dominio exactamente $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ que satisfacen la identidad formal $N = (x+1)D$, construya la de menor grado de denominador. Pruebe minimalidad y unicidad en ese grado.

Ejercicio 082. Hacer desaparecer una exclusión al invertir. Dados reales distintos a, b, diseñe una división entre fracciones que simplifique a $x - b$ y cuyo dominio excluya tanto a como b.

Ejercicio 083. Dos rutas y una misma condición excepcional. Para $a, b \in \mathbb{R}$, simplifique $E = [1/(x-a) - 1/(x-b)] \div [(a-b)/((x-a)(x-b))$. Compare simplificar primero con invertir primero y clasifique $a = b$.

Ejercicio 084. Comprobar una ruta radical por signos. Simplifique $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\dfrac{x-a}{x-a}$ y compare una ruta por cancelación con otra por casos. Incluya todos los valores reales de a.

Ejercicio 085. Un denominador común que cambia con el parámetro. Estudie $F_t = 1/[(x-t)(x-1)] + 1/[(x+t)(x-1)]$. Dé un denominador común económico para $t \notin \{0, 1, -1\}$ y para cada valor excepcional.

Ejercicio 086. Normalizar factores opuestos antes de sumar. Simplifique $G_t = 1/(x-t) + 1/(t-x) + 1/(x+t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Compare el dominio original y el natural de la forma final.

Ejercicio 087. Reparar una fracción compleja. Una resolución afirma $\dfrac{1/x + 1/y}{1/x - 1/y} = 1$ «cancelando los términos $1/x$». Localice la ruptura, repare y certifique el dominio.

Ejercicio 088. Verificar una cadena por reconstrucción. Simplifique

$$H = \Big[(x^2 - a^2)/(x^2 + ax)\Big] \div [(x-a)/x] - a/x$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Dé el dominio y un certificado inverso.

Soluciones razonadas

Las soluciones conservan la función cognitiva del banco. En el bloque A la meta no es acelerar el cálculo, sino leer con precisión la estructura, el dominio y la afirmación matemática completa. Cuando una simplificación sirve para justificar una comparación, se usa sólo hasta el punto necesario y se conservan las restricciones de procedencia.

A. Reconocimiento y lectura estructural

Solución 1.

(a) $\dfrac{3x-1}{x^2+4}$ está escrita como cociente, de modo que es **fraccionaria**. Numerador y denominador son polinomios, por lo que también es **racional**. No es una expresión polinómica: el denominador no es la constante 1 ni desaparece mediante una cancelación algebraica.

(b) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5}$ es **fraccionaria**, porque presenta una división entre dos expresiones algebraicas. No es racional en el sentido de este capítulo, ya que $\sqrt{x}+2$ no es un polinomio. Tampoco es polinómica.

(c) $2x^4-x+7$ es **polinómica**. Todo polinomio es además una expresión racional, pues puede escribirse como

$$2x^4-x+7=\frac{2x^4-x+7}{1}.$$

No está presentada como una expresión fraccionaria visible.

(d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ es **fraccionaria**, pero no racional en esta forma porque el denominador contiene un radical y no es un polinomio. Tampoco es polinómica.

La clasificación depende de la estructura algebraica de la expresión, no de que algunos valores numéricos obtenidos sean racionales o irracionales.

Solución 2.

(a) $\dfrac{x^2-1}{x+3}$ tiene una barra de fracción visible y es **racional**, porque numerador y denominador son polinomios.

(b) $x+\dfrac{1}{x-2}$ contiene una fracción visible como subexpresión, pero la expresión completa está escrita como una suma, no como un único cociente. Sin embargo, pertenece a la clase racional porque puede escribirse, para $x\neq 2$, como

$$x+\frac{1}{x-2}=\frac{x(x-2)+1}{x-2}=\frac{x^2-2x+1}{x-2}.$$

La clase racional no depende de que la barra exterior esté visible desde el comienzo.

(c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+4}$ tiene una barra de fracción visible, por lo que es fraccionaria. No es racional en esta forma porque el numerador contiene un radical y no es polinómico.

(d) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-2}}{\dfrac{x+3}{x+4}}$ posee una barra exterior y varias barras internas: es una fracción compleja y, por tanto, una expresión fraccionaria. Sus bloques internos son racionales y, sobre su dominio original, la expresión puede reducirse a un cociente de polinomios:

$$\frac{x+1}{x-2}\div\frac{x+3}{x+4}=\frac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x+3)}.$$

Por ello pertenece a la clase racional. Esta última fórmula no debe usarse para reconstruir el dominio original: el bloque divisor exigía además $x\neq -4$, aunque ese factor pase después al numerador.

Solución 3. La barra exterior separa dos bloques completos. El **numerador exterior** es

$$\frac{2}{x-1}+1,$$

y el **denominador exterior** es

$$\frac{x+3}{x-4}.$$

Los denominadores internos visibles son $x-1$ y $x-4$. Por tanto, para que las subexpresiones existan necesitamos

$$x \neq 1, \qquad x \neq 4.$$

Pero el bloque inferior completo ocupa el lugar de divisor exterior. No basta con que esté definido: debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq 4$,

$$\frac{x+3}{x-4} = 0$$

exactamente cuando $x = -3$. Así, también se requiere $x \neq -3$.

Por consiguiente,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(T) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 4\}.}$$

Mirar sólo los denominadores pequeños detectaría 1 y 4, pero perdería -3, que aparece porque **la subexpresión completa** $(x+3)/(x-4)$ funciona como divisor.

Solución 4. La expresión posee dos bloques principales: primero el producto

$$P(x) = \frac{x^2-9}{x^2-x-6} \cdot \frac{x-2}{x+3},$$

y después la suma de $P(x)$ con $2/(x+2)$.

Conviene transformar **primero el bloque multiplicativo**. La finalidad es **revelar factores**, no expandir. En efecto,

$$x^2-9 = (x-3)(x+3), \qquad x^2-x-6 = (x-3)(x+2).$$

Estas factorizaciones muestran inmediatamente factores que pueden simplificarse dentro del producto sobre el dominio correspondiente. Además, anticipan que el bloque reducido conservará el factor $x+2$ en el denominador, precisamente el mismo denominador que aparece en el último sumando.

Una expansión total inmediata produciría polinomios de mayor grado y ocultaría los factores $x-3$ y $x+3$ que ya están preparados para simplificarse. Por eso la primera decisión estratégica es

$$\boxed{\text{factorizar el bloque multiplicativo para revelar factores.}}$$

No hay aquí un divisor que deba invertirse. El denominador común sólo será relevante **después** de reducir el producto, al abordar la suma final.

Solución 5. La única fuente de restricciones es el denominador

$$(x-2)^2(x+4).$$

Para que el cociente esté definido necesitamos

$$(x-2)^2(x+4) \neq 0.$$

Un producto es no nulo exactamente cuando ninguno de sus factores es cero. Por tanto,

$$x-2 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x+4 \neq 0,$$

es decir,

$$x \neq 2, \qquad x \neq -4.$$

La potencia $(x-2)^2$ no crea dos puntos excluidos: se anula en el mismo único valor que $x-2$, a saber, $x=2$. El numerador $x+1$ puede valer cero sin producir una división por cero; simplemente hace que toda la fracción valga 0 cuando el denominador sigue siendo no nulo.

Así,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(A) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}.}$$

Solución 6. Leemos la expresión por niveles, sin invertir todavía el divisor.

El bloque superior

$$\frac{1}{x-2}$$

exige $x \neq 2$ porque su denominador interno no puede ser cero.

El bloque inferior

$$\frac{x+1}{x+4}$$

debe primero estar definido, lo que exige $x \neq -4$. Pero ese bloque completo es además el **denominador exterior**, de modo que también debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq -4$, se anula exactamente cuando $x+1=0$, es decir, en $x=-1$.

Las tres exclusiones tienen, por tanto, procedencias distintas:

- $x=2$: denominador interno del numerador exterior;
- $x=-4$: denominador interno del divisor;
- $x=-1$: el divisor completo está definido, pero vale cero.

Así,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(B) = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 2\}.}$$

Solución 7. Para

$$E(x) = \frac{x^2-25}{x-5},$$

el denominador exige $x \neq 5$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(E) = \mathbb{R} \setminus \{5\}.$$

En cambio,

$$F(x) = x + 5$$

es polinómica y está definida para todo real:

$$\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R}.$$

Como

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5),$$

para $x \neq 5$ podemos cancelar el factor no nulo $x - 5$ y obtener

$$E(x) = x + 5 = F(x).$$

Así, E y F son equivalentes sobre

$$\mathbb{R} \setminus \{5\}.$$

Sin embargo, si cada fórmula define una función con su dominio natural y codominio $\mathbb{R}$, esas funciones **no son iguales**, porque sus dominios son distintos. El dato que impide identificarlas no es la regla de cálculo —que coincide donde ambas pueden compararse—, sino el **dominio**: $F(5) = 10$, mientras que $E(5)$ no está definido.

Solución 8. Factorizamos sólo para leer el dominio y comparar las fórmulas:

$$x^2 + x = x(x + 1), \qquad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(G) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},$$

mientras que

$$\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sobre el dominio de G, el factor $x + 1$ es no nulo y puede cancelarse:

$$G(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{x - 1}{x} = H(x).$$

Así, ambas expresiones son equivalentes sobre

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.}$$

Las funciones naturales asociadas no son iguales porque sus dominios difieren. El valor $x = -1$ hace visible la diferencia: $G(-1)$ no existe, ya que el denominador original $x(x + 1)$ vale cero; en cambio,

$$H(-1) = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Este único valor muestra que los dominios no coinciden. La equivalencia general, sin embargo, no se demuestra por esa comprobación puntual, sino por la factorización y cancelación válidas para todo $x \neq -1, 0$.

Solución 9. Antes de efectuar la división, registramos las condiciones de cada bloque.
El dividendo

$$\frac{x+1}{x-3}$$

exige

$$x \neq 3.$$

El divisor

$$\frac{x-2}{x+4}$$

debe estar definido, de modo que

$$x \neq -4.$$

Además, como estamos dividiendo por ese cociente, debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq -4$, se anula cuando $x-2=0$, es decir, en $x=2$. Por eso $x=2$ debe excluirse aunque no anule ningún denominador interno: hace cero al **divisor completo**.

En cambio, $x=-1$ anula el numerador del dividendo. Eso está permitido: cero dividido por una cantidad no nula sigue siendo cero. De hecho, en $x=-1$ el divisor vale

$$\frac{-3}{3} = -1,$$

por lo que no hay ninguna obstrucción.
Así,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2, 3\}.}$$

Solución 10. El dividendo

$$\frac{x+2}{x-1}$$

no está definido en

$$x = 1.$$

Ahora analizamos el divisor

$$\frac{x^2-9}{x^2+x-6}.$$

Factorizamos únicamente para hacer visibles sus ceros y sus posibles factores comunes:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3),$$

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2).$$

El divisor no está definido cuando su denominador vale cero, es decir, en

$$x = -3 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

Además, el divisor completo debe ser no nulo. En su dominio, el numerador se anula en $x = 3$; el otro cero del numerador, $x = -3$, ya estaba fuera del dominio porque también anula el denominador. Por tanto, debemos excluir además

$$x = 3.$$

El dominio original del cociente completo es

$$\boxed{\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2, 3\}.}$$

Los cuatro fenómenos pedidos quedan separados así:

1. **Dividendo indefinido:** $x = 1$.
2. **Divisor indefinido:** $x = -3$ y $x = 2$.
3. **Divisor definido pero igual a cero:** $x = 3$.
4. **Factor que puede desaparecer al simplificar el divisor:** el factor $x + 3$, porque

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$$

sólo bajo la restricción ya registrada $x \neq -3$.

Precisamente por eso una cancelación posterior no puede borrar una exclusión. La cancelación cambia la fórmula visible sobre el dominio permitido; no modifica retroactivamente los valores para los cuales la expresión original estaba indefinida o actuaba como divisor nulo.

B. Fluidez técnica

Solución 11. Antes de cancelar, determinamos el dominio original. El denominador factoriza como

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2),$$

de modo que

$$x \neq 2, \qquad x \neq -2.$$

El numerador también factoriza:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Por tanto,

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}.$$

Como el dominio original ya impone $x \neq 2$, el factor $x - 2$ es no nulo y puede cancelarse:

$$\boxed{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{x-3}{x+2}, \qquad x \neq -2, 2.}$$

La exclusión $x = 2$ ya no aparece en la fórmula final, pero sigue perteneciendo al dominio de procedencia.

Solución 12. Factorizamos numerador y denominador:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2,$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

El dominio original exige

$$x \neq 3, \qquad x \neq -2.$$

En el numerador hay **dos copias** del factor $x-3$ y en el denominador hay **una copia**. Bajo $x \neq 3$ podemos cancelar una sola copia:

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

Así,

$$\boxed{\frac{x^2-6x+9}{x^2-x-6} = \frac{x-3}{x+2}, \qquad x \neq -2, 3.}$$

Una copia de $x-3$ permanece visible en el numerador; la exclusión $x=3$ permanece en el dominio aunque ya no sea una restricción natural de la fórmula final.

Solución 13. El denominador original es $(x-5)(x-1)$, de modo que

$$x \neq 5, \qquad x \neq 1.$$

Los factores $5-x$ y $x-5$ son opuestos:

$$5 - x = -(x-5).$$

Por tanto,

$$\frac{(5-x)(x+2)}{(x-5)(x-1)} = -\frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x-1)}.$$

Como $x \neq 5$, podemos cancelar el factor no nulo $x-5$:

$$\boxed{\frac{(5-x)(x+2)}{(x-5)(x-1)} = -\frac{x+2}{x-1}, \qquad x \neq 1, 5.}$$

El signo negativo es indispensable: los factores opuestos no son iguales, sino que difieren exactamente por un factor -1.

Solución 14. Factorizamos el denominador para leer el dominio:

$$x^2 - 16 = (x-4)(x+4),$$

por lo que

$$x \neq 4, \qquad x \neq -4.$$

En el numerador extraemos el factor común x^2:

$$x^3 - 4x^2 = x^2(x-4).$$

Así,

$$\frac{x^3-4x^2}{x^2-16}=\frac{x^2(x-4)}{(x-4)(x+4)}.$$

Como $x\neq 4$, cancelamos $x-4$ y obtenemos

$$\boxed{\frac{x^3-4x^2}{x^2-16}=\frac{x^2}{x+4}, \qquad x\neq -4,4.}$$

La restricción que desaparece de la escritura es $x\neq 4$. No expandimos la forma final porque la forma factorizada ya muestra con claridad el denominador restante.

Solución 15. Leemos primero el dominio de cada factor. Como

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3),$$

la primera fracción exige

$$x\neq -2,-3.$$

La segunda fracción exige

$$x\neq 2.$$

Por tanto, el producto original está definido en

$$\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2\}.$$

Factorizamos también

$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Entonces

$$\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x+3}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x-2}.$$

En el dominio original, los factores $x-2$, $x+2$ y $x+3$ son todos no nulos, de modo que pueden cancelarse. Queda

$$\boxed{1, \qquad x\neq -3,-2,2.}$$

La constante 1 tiene dominio natural $\mathbb{R}$, pero el producto original no estaba definido en los tres puntos excluidos.

Solución 16. El primer factor exige

$$x\neq -2, \qquad x\neq 3,$$

y el segundo exige

$$x\neq 1.$$

Así, el dominio original es

$$\mathbb{R}\setminus\{-2,1,3\}.$$

Sin multiplicar los polinomios, observamos los factores comunes:

$$\frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{x+2}{x-1}.$$

Como $x \neq -2$ y $x \neq 1$, podemos cancelar una copia de $x+2$ y una copia de $x-1$. Resulta

$$\boxed{\frac{x-1}{x-3}, \qquad x \neq -2, 1, 3.}$$

La exclusión $x = -2$ deja de ser visible en la fórmula final y $x = 1$ tampoco aparece como cero del denominador final, pero ambas restricciones proceden del producto original.

Solución 17. El dividendo

$$\frac{x^2-9}{x+4}$$

exige

$$x \neq -4.$$

El divisor

$$\frac{x-3}{x+2}$$

debe estar definido, así que

$$x \neq -2.$$

Además, el divisor debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq -2$, se anula cuando $x - 3 = 0$, por lo que también

$$x \neq 3.$$

El dominio original es entonces

$$\mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 3\}.$$

Sólo ahora invertimos el divisor completo:

$$\frac{x^2-9}{x+4} \div \frac{x-3}{x+2} = \frac{x^2-9}{x+4} \cdot \frac{x+2}{x-3}.$$

Factorizamos $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ y, como $x \neq 3$, cancelamos $x - 3$:

$$\boxed{\frac{(x+3)(x+2)}{x+4}, \qquad x \neq -4, -2, 3.}$$

Las tres exclusiones tienen procedencias distintas: -4 viene del dividendo, -2 de la definición del divisor y 3 de la obligación adicional de que el divisor no sea cero.

Solución 18. El dividendo

$$\frac{x-1}{x+2}$$

exige

$$x \neq -2.$$

Antes de simplificar el divisor,

$$\frac{x^2-1}{x-1},$$

registramos su dominio: exige

$$x \neq 1.$$

Además, como ese cociente funciona como divisor, debe ser distinto de cero. Factorizamos

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

En el dominio $x \neq 1$, el divisor se anula cuando $x+1=0$, es decir, en

$$x = -1.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}.$$

Invertimos el divisor completo:

$$\frac{x-1}{x+2} \div \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Sustituyendo $x^2-1=(x-1)(x+1)$ y cancelando una copia de $x-1$, autorizada porque $x \neq 1$,

$$\boxed{\frac{x-1}{(x+2)(x+1)}, \qquad x \neq -2, -1, 1.}$$

La restricción $x=1$ permanece aunque el factor correspondiente se haya cancelado.

Solución 19. Las dos fracciones tienen el mismo denominador, que exige

$$x \neq 2.$$

Por tanto combinamos únicamente los numeradores:

$$\frac{3x+1}{x-2} + \frac{x-5}{x-2} = \frac{(3x+1)+(x-5)}{x-2}.$$

Simplificando el numerador,

$$(3x+1)+(x-5) = 4x-4 = 4(x-1).$$

Así,

$$\boxed{\frac{4(x-1)}{x-2}, \qquad x \neq 2.}$$

No existe factor común entre $x-1$ y $x-2$, de modo que no hay cancelación adicional.

Solución 20. El dominio original exige

$$x \neq 0, \qquad x \neq 1.$$

El denominador $x(x-1)$ de la primera fracción ya contiene al denominador $x-1$ de la segunda. Por eso usamos el denominador común económico $x(x-1)$:

$$\frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x(x-1)},$$

válidamente porque $x \neq 0$ en el dominio original.

Entonces

$$\frac{2}{x(x-1)} + \frac{3}{x-1} = \frac{2+3x}{x(x-1)}.$$

No aparece ningún factor cancelable, de modo que

$$\boxed{\frac{3x+2}{x(x-1)}, \qquad x \neq 0, 1.}$$

No era necesario multiplicar los denominadores completos y producir una copia adicional de $x-1$.

Solución 21. El dominio original es

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

Usamos el denominador común $(x+1)(x-2)$:

$$\frac{2x+3}{x+1} - \frac{x-4}{x-2} = \frac{(2x+3)(x-2) - (x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Conservamos el segundo numerador entre paréntesis hasta completar la resta. Calculamos

$$(2x+3)(x-2) = 2x^2 - x - 6,$$

$$(x-4)(x+1) = x^2 - 3x - 4.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-2) - (x-4)(x+1) &= (2x^2 - x - 6) - (x^2 - 3x - 4) \\ &= x^2 + 2x - 2.\end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{\frac{x^2+2x-2}{(x+1)(x-2)}, \qquad x \neq -1, 2.}$$

El numerador no contiene ninguno de los factores lineales del denominador, por lo que no hay una cancelación legítima. La forma factorizada del denominador conserva visibles las restricciones.

Solución 22. El dominio original exige

$$x \neq 0, \qquad x \neq -1.$$

Usamos el denominador común indicado, $x(x+1)$:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{2x}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)}.$$

Combinamos los numeradores:

$$(x+1) + 2x - 1 = 3x.$$

Entonces

$$\frac{3x}{x(x+1)}.$$

Como $x \neq 0$, el factor x puede cancelarse:

$$\boxed{\frac{3}{x+1}, \qquad x \neq -1, 0.}$$

La exclusión $x = 0$ desaparece de la fórmula visible, pero pertenece al dominio original.

Solución 23. La fracción interna $1/x$ exige

$$x \neq 0.$$

El denominador exterior completo es

$$\frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x},$$

que, además de estar definido, debe ser distinto de cero. Por tanto,

$$x \neq -1.$$

Así,

$$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Aplicamos el método interior. El numerador exterior se reduce a

$$\frac{1}{x} + 3 = \frac{1+3x}{x},$$

y el denominador exterior a

$$\frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}.$$

Por tanto,

$$\frac{\dfrac{1+3x}{x}}{\dfrac{x+1}{x}} = \frac{1+3x}{x} \cdot \frac{x}{x+1}.$$

Como $x \neq 0$, cancelamos x y obtenemos

$$\boxed{\frac{3x+1}{x+1}, \qquad x \neq -1, 0.}$$

La fórmula final ya no muestra la exclusión $x = 0$, que procede de las fracciones internas.

Solución 24. Las fracciones internas exigen

$$x \neq 2, \qquad x \neq -2.$$

Reducimos el denominador exterior:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x}{x^2-4}.$$

En el dominio donde está definido, este bloque vale cero cuando $x = 0$. Como ocupa el lugar de divisor exterior, debemos excluir también

$$x \neq 0.$$

Así,

$$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}.$$

El numerador exterior es

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4}.$$

Entonces

$$\frac{\dfrac{4}{x^2-4}}{\dfrac{2x}{x^2-4}} = \frac{4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{2x}.$$

Como $x \neq \pm 2$, cancelamos $x^2 - 4$ y simplificamos el factor numérico:

$$\boxed{\frac{2}{x}, \qquad x \neq -2, 0, 2.}$$

La exclusión adicional $x = 0$ no procede de un denominador interno: aparece porque el bloque inferior completo se anula allí.

Solución 25. La fracción interna exige

$$x \neq -1.$$

El denominador exterior completo es

$$\frac{x-2}{x+1} + 1 = \frac{x-2+x+1}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}.$$

Como ese bloque funciona como divisor, debe ser distinto de cero. Por tanto,

$$2x - 1 \neq 0,$$

es decir,

$$x \neq \frac{1}{2}.$$

El dominio original es

$$\mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Elegimos como multiplicador común

$$M(x) = x + 1.$$

Es una elección legítima porque $x + 1 \neq 0$ en todo el dominio original. Multiplicamos el numerador y el denominador exteriores por $x + 1$:

$$\frac{(x+1)\left(\dfrac{2}{x+1}\right)}{(x+1)\left(\dfrac{x-2}{x+1}+1\right)}.$$

Distribuyendo en el bloque inferior,

$$(x+1)\left(\frac{x-2}{x+1}+1\right) = (x-2)+(x+1) = 2x-1.$$

Así,

$$\boxed{\frac{2}{2x-1}, \qquad x \neq -1, \frac{1}{2}.}$$

La forma final sólo hace visible $x \neq 1/2$; la exclusión $x = -1$ debe conservarse porque pertenecía a la expresión original.

Solución 26. Los denominadores internos $x - 1$, $x + 1$ y $x^2 - 1$ exigen

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

El denominador exterior es

$$\frac{3}{x^2-1}.$$

En su dominio nunca vale cero, porque su numerador es la constante no nula 3. Por tanto, no añade ninguna exclusión nueva.

Reducimos el numerador exterior:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)+(x-1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Entonces

$$\frac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{3}{x^2-1}} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{3}.$$

Como $x \neq \pm 1$, el factor $x^2 - 1$ es no nulo y puede cancelarse:

$$\boxed{\frac{2x}{3}, \qquad x \neq -1, 1.}$$

La fórmula final es polinómica salvo por el factor constante $1/3$, pero conserva las dos exclusiones heredadas de las fracciones internas.

C. Justificación y reconstrucción

Solución 27. La expresión original

$$\frac{AC}{BC}$$

está definida cuando $BC \neq 0$. En los números reales esto equivale a exigir simultáneamente

$$B \neq 0 \qquad \text{y} \qquad C \neq 0.$$

Bajo esas hipótesis, C posee inverso multiplicativo y podemos dividir numerador y denominador por el mismo factor no nulo:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC/C}{BC/C} = \frac{A}{B}.$$

Ésta es la justificación de la llamada cancelación: no se tachan símbolos, sino que se divide arriba y abajo por una misma cantidad que sabemos no nula.

Si $C = 0$, el cociente original tendría denominador $BC = 0$ y ni siquiera estaría definido. Además, el paso AC/C exigiría dividir por cero. Por eso la condición $C \neq 0$ no es opcional ni puede recuperarse después de simplificar.

En resumen,

$$\boxed{\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad \text{si } B \neq 0 \text{ y } C \neq 0.}$$

La equivalencia debe leerse precisamente sobre el dominio en el que esas hipótesis se cumplen.

Solución 28. Partimos de

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D}.$$

Hay tres obligaciones distintas.

Primero, el dividendo A/B debe estar definido:

$$B \neq 0.$$

Segundo, el divisor C/D debe estar definido:

$$D \neq 0.$$

Tercero, no basta con que el divisor exista: como estamos dividiendo por él, también debe ser distinto de cero. Bajo $D \neq 0$,

$$\frac{C}{D} = 0$$

si y sólo si $C = 0$. Por tanto necesitamos

$$C \neq 0.$$

Con $C \neq 0$ y $D \neq 0$, el recíproco de C/D es D/C, así que

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}.$$

La regla completa es

$$\boxed{\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}, \qquad B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0.}$$

No necesitamos imponer $A \neq 0$: el dividendo puede valer cero. Si $A = 0$ y el divisor es no nulo, la división está perfectamente definida y su resultado es 0.

Solución 29. Suponemos

$$B \neq 0 \qquad \text{y} \qquad D \neq 0.$$

Para la primera fracción multiplicamos numerador y denominador por D:

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{D} = \frac{AD}{BD}.$$

Esta transformación está autorizada porque $D \neq 0$, de modo que $D/D = 1$.

Para la segunda fracción multiplicamos numerador y denominador por B:

$$\frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{B}{B} = \frac{BC}{BD},$$

y aquí la hipótesis $B \neq 0$ garantiza que $B/B = 1$.

Por tanto, ambas fracciones pueden escribirse con denominador BD. Eso demuestra que BD es siempre un denominador común disponible cuando B y D son no nulos.

Sin embargo, **disponible** no significa **económico**. Si B y D comparten factores, el producto BD puede repetirlos innecesariamente. Por ejemplo, si $B = x(x+1)$ y $D = (x+1)(x-2)$, el producto bruto contiene $(x+1)^2$, aunque una sola copia de $x+1$ basta. La validez depende de las hipótesis de no nulidad; la economía depende de la estructura factorizada.

Solución 30. Sea

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

una fracción compleja definida en un dominio E. En particular, para todo $x \in E$ debemos tener $D(x) \neq 0$.

Queremos sustituirla por

$$\frac{M(x)N(x)}{M(x)D(x)}.$$

Para que esta nueva escritura conserve exactamente el valor de F en todo E, necesitamos

$$M(x) \neq 0 \qquad \text{para todo } x \in E.$$

Bajo esa condición,

$$\frac{M(x)N(x)}{M(x)D(x)} = \frac{N(x)}{D(x)},$$

porque podemos dividir numerador y denominador por el factor común no nulo $M(x)$. Es exactamente la regla de §20.5 aplicada al factor $M(x)$.

Si existe $x_0 \in E$ tal que $M(x_0) = 0$, la fracción original sigue estando definida en x_0, pero la nueva escritura tiene denominador

$$M(x_0)D(x_0) = 0.$$

La ruta deja entonces de ser válida en ese punto. No hemos encontrado una equivalencia sobre todo E, sino sólo sobre el subconjunto

$$\{x \in E : M(x) \neq 0\}.$$

Por eso un factor auxiliar que se anula dentro del dominio original **reduce artificialmente el dominio de la transformación**, aunque después pueda cancelarse de la fórmula final.

Solución 31. Consideramos

$$R(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}.$$

Primero determinamos el dominio original. Factorizamos el denominador:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

Ahora factorizamos también el numerador:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Sobre el dominio original, $x - 3 \neq 0$, así que

$$R(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}.$$

La respuesta completa es

$$\boxed{R(x) = \frac{x + 3}{x + 2}, \qquad x \neq -2, 3.}$$

(I) La restricción que deja de ser visible es $x \neq 3$.

(II) El dominio natural de la fórmula final $(x + 3)/(x + 2)$ es

$$\mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

(III) La equivalencia obtenida es correcta sobre el dominio original,

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

Los tres datos no son redundantes: la fórmula final informa de los valores; su dominio natural informa dónde esa nueva fórmula existe por sí sola; y el dominio de procedencia indica dónde hemos demostrado que representa a la expresión original.

Solución 32. Sea

$$P(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{x + 2}{x - 1}.$$

Antes de simplificar, factorizamos sólo para leer el dominio:

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

El primer factor exige

$$x \neq -1, -2,$$

y el segundo exige

$$x \neq 1.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(P) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}.$$

Además,

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

de modo que, en el dominio original,

$$P(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x-1}.$$

Los tres factores $x-1$, $x+1$ y $x+2$ son no nulos allí, así que se cancelan y obtenemos

$$\boxed{P(x) = 1, \qquad x \neq -2, -1, 1.}$$

La constante 1 tiene dominio natural $\mathbb{R}$. Sin embargo, afirmar $P(x) = 1$ para todo real sería falso como afirmación sobre la expresión original, porque P no existe en $x = -2, -1, 1$. La simplificación conserva valores sobre el dominio de procedencia; no convierte esos puntos excluidos en puntos admisibles.

Solución 33. Estudiamos

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}.$$

El dominio original se obtiene de

$$x - 1 \neq 0$$

y

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0.$$

Así,

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

El denominador común económico es

$$(x-1)(x+1).$$

Reescribimos la primera fracción:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

Entonces

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}.$$

Éste es el momento exacto en que aparece un factor cancelable: sólo después de combinar los numeradores. Como $x \neq 1$ pertenece al dominio original, podemos cancelar $x-1$:

$$\boxed{\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}, \qquad x \neq -1, 1.}$$

La fórmula final $1/(x+1)$ tiene dominio natural $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pero la equivalencia demostrada conserva también $x \neq 1$. Por eso no debe presentarse como identidad sobre todo el dominio natural de la fórmula final.

Solución 34. Consideramos

$$H(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{2}{x^2-1}}.$$

Leemos el dominio por niveles. Las fracciones internas exigen

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

El denominador exterior completo es

$$\frac{2}{x^2-1}.$$

En los puntos donde está definido nunca vale cero, porque su numerador es la constante no nula 2. Por tanto, no añade una exclusión nueva y

$$\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Reducimos el numerador exterior:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)+(x-1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Así,

$$H(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{2}{x^2-1}} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{2}.$$

Como $x^2 - 1 \neq 0$ en el dominio original, cancelamos y obtenemos

$$\boxed{H(x) = x, \qquad x \neq -1, 1.}$$

La fórmula final es polinómica y tiene dominio natural $\mathbb{R}$, pero eso no altera el dominio de procedencia. La forma correcta de conservar la equivalencia es escribir la fórmula x acompañada de las restricciones $x \neq -1, 1$.

Solución 35. Sea

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1}.$$

Primero fijamos un único dominio para ambas rutas. Las fracciones internas exigen $x \neq 0$. Además, el denominador exterior completo

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

debe ser no nulo, así que $x \neq 1$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Ruta 1: método interior.

Reducimos los dos bloques:

$$\frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}, \qquad \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Luego

$$F(x) = \frac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{1-x}{x}} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{1-x},$$

porque $x \neq 0$.

Ruta 2: eliminación de denominadores internos.

Elegimos

$$M(x) = x.$$

Es válido porque $x \neq 0$ en todo el dominio original. Multiplicamos ambos bloques exteriores por x:

$$F(x) = \frac{x\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)}{x\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)} = \frac{x+1}{1-x}.$$

Así, en ambos casos,

$$\boxed{F(x) = \frac{x+1}{1-x}, \qquad x \neq 0, 1.}$$

El método interior introduce dos fracciones intermedias simples y hace muy visible la división exterior. El segundo método elimina de una vez los denominadores internos y usa menos reescrituras en este ejemplo. Ninguno cambia el dominio: si ambas rutas están bien justificadas, deben conservar los mismos valores sobre el mismo conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Solución 36. La expresión

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

está definida cuando

$$x\neq 1, \qquad x\neq -1.$$

Por tanto, su dominio original es

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

La propuesta económica usa

$$(x-1)(x+1).$$

En D, ambos factores son no nulos. Reescribimos:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$$

y

$$\frac{1}{x+1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}.$$

Así,

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}, \qquad x\neq -1,1.$$

La primera propuesta añade el factor $x+5$ y usa el denominador

$$(x-1)(x+1)(x+5).$$

Para construirlo habría que multiplicar por expresiones que contienen

$$\frac{x+5}{x+5},$$

lo que exige $x\neq -5$. Pero $-5\in D$. La ruta queda entonces justificada sólo en

$$D\setminus\{-5\}=\mathbb{R}\setminus\{-5,-1,1\}.$$

Dentro de ese dominio menor el álgebra puede ser correcta y, después de combinar, incluso puede cancelarse $x+5$. Sin embargo, la ruta no constituye una equivalencia sobre todo el dominio original, porque perdió artificialmente el punto $x=-5$.

El factor responsable es exactamente $x+5$.

Solución 37. Sea

$$P(x)=\frac{x^2-9}{x^2-x-6}\cdot\frac{x-2}{x+3}.$$

El dominio original se obtiene de

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

y del segundo denominador $x+3$. Así,

$$\mathrm{Dom}(P)=\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,3\}.$$

Ruta I: factorizar antes de multiplicar.
Como

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3),$$

tenemos

$$P(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x+3}.$$

En el dominio original, $x-3$ y $x+3$ son no nulos. Cancelamos y obtenemos

$$\boxed{P(x) = \frac{x-2}{x+2}, \qquad x \neq -3, -2, 3.}$$

Ruta II: multiplicar primero las formas expandidas.
Podemos escribir

$$P(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}.$$

Esta igualdad sigue siendo correcta sobre el mismo dominio original. Para simplificar debemos volver a factorizar:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x+3)(x-2),$$

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x-3)(x+3)(x+2).$$

Entonces recuperamos nuevamente $(x-2)/(x+2)$ sobre el mismo dominio.

Las dos rutas pueden ser correctas, pero la Ruta I es estratégicamente superior aquí: mantiene visibles desde el comienzo los factores $x-3$, $x+3$ y $x+2$, permite cancelar antes de crear polinomios cúbicos y hace más fácil recordar qué ceros pertenecían a denominadores originales. La Ruta II destruye temporalmente esa información y obliga a refactorizar lo que acabamos de expandir.

Solución 38. Consideramos

$$G(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}.$$

Las fracciones internas exigen

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

Además, el denominador exterior completo debe ser distinto de cero. Lo reducimos:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}.$$

En su dominio este bloque nunca vale cero, porque el numerador es la constante 2. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(G) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Para

$$M_1(x) = x^2 - 1$$

tenemos $M_1(x) \neq 0$ en todo el dominio original. Por tanto, M_1 es un multiplicador válido. En cambio,

$$M_2(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$$

se anula en $x = 4$, y 4 pertenece al dominio original. Usar M_2 reduciría la ruta a un dominio menor e introduciría artificialmente la restricción $x \neq 4$.

Ejecutamos la ruta válida con $M_1 = x^2 - 1$:

$$G(x) = \frac{(x^2 - 1)\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right)}{(x^2 - 1)\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)}.$$

Distribuyendo,

$$(x^2 - 1)\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) = (x+1) + (x-1) = 2x,$$

mientras que

$$(x^2 - 1)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = (x+1) - (x-1) = 2.$$

Así,

$$\boxed{G(x) = x, \qquad x \neq -1, 1.}$$

El multiplicador M_2 no es «más general» por contener más factores. Contener un factor adicional sólo es inocuo si ese factor es no nulo en todo el dominio original; aquí $x - 4$ falla precisamente esa condición.

D. Diagnóstico y primera ruptura

En estas soluciones no basta con exhibir una forma correcta. La tarea consiste en localizar **la primera transición injustificada**, clasificarla y reconstruir la cadena desde el último paso válido. Cuando el resultado visible sea correcto pero la razón dada no lo sea, ambas cosas se distinguirán explícitamente.

Solución 39. Partimos de

$$\frac{x+4}{x+7}.$$

El dominio original exige

$$x + 7 \neq 0,$$

por lo que

$$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}.$$

La primera ruptura aparece cuando se afirma que puede «cancelarse la x». La cancelación sólo actúa sobre **factores** del numerador y del denominador completos. En

$$x + 4 \qquad \text{y} \qquad x + 7,$$

la variable x forma parte de dos sumas; no es un factor común.

Un contraejemplo permitido basta para refutar la igualdad propuesta. Tomando $x = 1$,

$$\frac{1+4}{1+7} = \frac{5}{8},$$

mientras que

$$\frac{4}{7} \neq \frac{5}{8}.$$

Por tanto, no existe la identidad

$$\frac{x+4}{x+7} = \frac{4}{7}.$$

Lo correcto es conservar la expresión tal como está:

$$\boxed{\frac{x+4}{x+7}, \qquad x \neq -7.}$$

Puede ocurrir que ambas expresiones coincidan en algún punto aislado; de hecho, en $x = 0$ ambas valen $4/7$. Esa coincidencia puntual no autoriza una cancelación ni convierte la afirmación en una identidad.

Clasificación del fallo: cancelación ilegal de términos de una suma.

Solución 40. La expresión es

$$E(x) = \frac{(x-2)(x+3)+5}{(x-2)(x+4)}.$$

El denominador original exige

$$x \neq 2, \qquad x \neq -4.$$

La primera transición inválida es

$$\frac{(x-2)(x+3)+5}{(x-2)(x+4)} \longmapsto \frac{x+3+5}{x+4}.$$

Para cancelar $x-2$, ese factor tendría que multiplicar **todo** el numerador. Pero el numerador es una suma:

$$(x-2)(x+3)+5.$$

El término 5 no contiene el factor $x-2$. De hecho, si evaluamos el numerador en $x = 2$, obtenemos $5 \neq 0$, lo que confirma que $x-2$ no es factor del numerador completo.

Podemos además usar un contraejemplo permitido. En $x = 0$,

$$E(0) = \frac{(-2)(3)+5}{(-2)(4)} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8},$$

mientras que la expresión propuesta daría

$$\frac{0+3+5}{0+4} = 2.$$

Por tanto, la transición es falsa.

Una cancelación semejante sería legítima si el numerador pudiera escribirse, por ejemplo, como

$$(x-2)N(x),$$

de modo que la fracción completa tuviera la forma

$$\frac{(x-2)N(x)}{(x-2)(x+4)}.$$

Entonces, bajo $x \neq 2$, sí podríamos cancelar el factor común.

Clasificación del fallo: cancelación a través de una suma; $x-2$ no es factor del numerador total.

Solución 41. Consideramos

$$\frac{x^2+3x}{x^2+5x}.$$

Primero leemos el dominio original. Factorizando el denominador,

$$x^2+5x = x(x+5),$$

obtenemos

$$x \neq 0, \qquad x \neq -5.$$

El resultado final propuesto,

$$\frac{x+3}{x+5},$$

sí es correcto sobre el dominio original. Lo incorrecto es la explicación «cancelé x^2». No existe un factor común x^2 en los dos polinomios. La factorización correcta es

$$x^2+3x = x(x+3),$$

y

$$x^2+5x = x(x+5).$$

Así,

$$\frac{x^2+3x}{x^2+5x} = \frac{x(x+3)}{x(x+5)}.$$

Como el dominio original ya exige $x \neq 0$, podemos cancelar **el factor** x:

$$\boxed{\frac{x^2+3x}{x^2+5x} = \frac{x+3}{x+5}, \qquad x \neq 0, -5.}$$

Por tanto, debemos separar dos juicios:

1. la fórmula final es correcta sobre el dominio declarado;
2. la regla verbal usada para justificarla es falsa.

Un resultado correcto puede alcanzarse mediante una explicación inválida; eso no convierte la explicación en una regla algebraica aceptable.

Clasificación del fallo: justificación falsa de una simplificación cuyo resultado final es correcto.

Solución 42. La expresión original es

$$E(x) = \frac{(x-1)(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+5)}.$$

El denominador exige

$$x \neq 1, \qquad x \neq -5.$$

La fórmula final

$$\frac{x+3}{x+5}$$

puede obtenerse correctamente. La frase «cancelando $x-1$ en cada término» puede expresar una operación válida si significa dividir **todo** el numerador y **todo** el denominador por el mismo factor $x-1 \neq 0$, distribuyendo la división sobre la suma. No basta con tachar símbolos sin declarar esa operación y su hipótesis. Una primera ruta hace explícita la factorización.

Factorizamos $x-1$:

$$(x-1)(x+2)+(x-1) = (x-1)\big((x+2)+1\big) = (x-1)(x+3).$$

Ahora sí la expresión completa tiene la forma

$$E(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+5)}.$$

Como $x \neq 1$ en el dominio original, cancelamos el factor común no nulo $x-1$:

$$\boxed{E(x) = \frac{x+3}{x+5}, \qquad x \neq 1, -5.}$$

Una segunda ruta divide ambos bloques por $x-1 \neq 0$ y usa distributividad:

$$E(x) = \frac{\dfrac{(x-1)(x+2)+(x-1)}{x-1}}{\dfrac{(x-1)(x+5)}{x-1}} = \frac{(x+2)+1}{x+5} = \frac{x+3}{x+5}.$$

Las dos rutas son válidas bajo $x \neq 1, -5$. Factorizar primero ayuda a mostrar el factor común, pero no es la única justificación posible. Aquí todos los sumandos contienen el factor; en el ejercicio 40, el sumando 5 no lo contiene.

Diagnóstico: resultado correcto; la explicación abreviada necesita explicitar la división común y la distributividad, no declararse una regla falsa.

Solución 43. La cadena propuesta comienza con

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{3-x}.$$

El dominio original exige únicamente

$$x \neq 3.$$

La primera ruptura es

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{x-3}.$$

La relación correcta entre los factores es

$$3 - x = -(x - 3).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{x-3}.$$

Reparamos la cadena:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-3} = 0.$$

Así,

$$\boxed{\frac{1}{x-3} + \frac{1}{3-x} = 0, \qquad x \neq 3.}$$

El fallo aparece **antes** de cualquier problema de denominador común. Los dos denominadores ya son factores opuestos y pueden normalizarse inmediatamente; el error consiste en tratarlos como si fueran iguales y perder el factor -1.

Clasificación del fallo: error de signo por factores opuestos.

Solución 44. El primer paso de la cadena es correcto:

$$\frac{2x+1}{x+1} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{(2x+1)(x-2) - (x-3)(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

El dominio original es

$$x \neq -1, \qquad x \neq 2.$$

Las expansiones también son correctas:

$$(2x+1)(x-2) = 2x^2 - 3x - 2,$$

$$(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3.$$

La primera ruptura aparece al retirar el segundo paréntesis. Debemos tener

$$(2x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2x - 3)$$

igual a

$$2x^2 - 3x - 2 - x^2 + 2x + 3,$$

porque el signo menos cambia el signo de **cada término** del segundo polinomio.
Entonces

$$2x^2 - 3x - 2 - x^2 + 2x + 3 = x^2 - x + 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{2x+1}{x+1} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x-2)}, \qquad x \neq -1, 2.}$$

No aparece un factor común que pueda cancelarse con el denominador.

Clasificación del fallo: distribución incorrecta del signo menos sobre un numerador completo.

Solución 45. La expresión original es

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

Su dominio es

$$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

La primera regla falsa aparece al escribir

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)+(x+1)}.$$

No se suman los denominadores. Para sumar fracciones necesitamos un **denominador común**.

Elegimos

$$(x-1)(x+1)=x^2-1.$$

Entonces

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$$

y

$$\frac{1}{x+1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}.$$

Sumando,

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)+(x-1)}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1},\qquad x\neq -1,1.}$$

La fórmula errónea $1/x$ introduciría además la exclusión aparente $x=0$. Pero $x=0$ sí pertenece al dominio original:

$$\frac{1}{-1}+\frac{1}{1}=0.$$

Así, la ruta falsa no sólo produce valores incorrectos; también fabrica una restricción que no pertenecía al problema.

Clasificación del fallo: regla falsa de suma de fracciones, con introducción posterior de una exclusión artificial.

Solución 46. Partimos de

$$Q(x)=\frac{x+1}{x-2}\div\frac{x-3}{x+4}.$$

Antes de operar determinamos el dominio del cociente original.

El dividendo exige

$$x\neq 2.$$

El divisor $(x-3)/(x+4)$ debe estar definido, por lo que

$$x \neq -4.$$

Además, como funciona como divisor, debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq -4$, se anula cuando

$$x - 3 = 0,$$

es decir, en

$$x = 3.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2, 3\}.$$

La primera ruptura de la cadena propuesta consiste en reemplazar la división por una multiplicación **sin invertir el divisor**. El objeto que debe invertirse es el cociente completo

$$\frac{x-3}{x+4},$$

cuyo recíproco es

$$\frac{x+4}{x-3}.$$

Así,

$$Q(x) = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x+4}{x-3}.$$

No hay factores comunes, de modo que

$$\boxed{Q(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x-3)}, \qquad x \neq -4, 2, 3.}$$

Las exclusiones $x = -4$ y $x = 3$ tienen causas distintas: en $x = -4$ el divisor **no está definido**; en $x = 3$ está definido, pero **vale cero**.

Clasificación del fallo: inversión incorrecta del divisor completo.

Solución 47. La expresión original es

$$R(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

Su dominio se fija antes de simplificar:

$$x \neq 4.$$

La factorización

$$x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$$

es correcta, y sobre el dominio original también es correcta la cancelación:

$$R(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x + 4.$$

Por tanto, **no hay una ruptura algebraica** en esos pasos. La primera ruptura aparece después, cuando el estudiante mira la fórmula final $x+4$ y concluye que el dominio original era $\mathbb{R}$.

La afirmación completa correcta es

$$\boxed{\frac{x^2-16}{x-4} = x+4, \qquad x \neq 4.}$$

La fórmula $x+4$ tiene dominio natural $\mathbb{R}$, pero sólo coincide con el cociente original en el conjunto donde éste estaba definido. En $x=4$ la forma final vale 8, mientras que la expresión original contiene división por cero.

Clasificación del fallo: pérdida de dominio al reconstruirlo desde la fórmula simplificada.

Solución 48. Consideramos

$$Q(x) = \frac{x-2}{x+1} \div \frac{x-2}{x-4}.$$

La lista propuesta excluye $x=-1$ y $x=4$, pero falta una tercera condición.

El dividendo exige

$$x \neq -1.$$

El divisor exige

$$x \neq 4$$

para estar definido. Además, debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq 4$,

$$\frac{x-2}{x-4} = 0$$

cuando

$$x = 2.$$

Así, el dominio correcto es

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 4\}.$$

En $x=2$ el divisor está perfectamente definido:

$$\frac{2-2}{2-4} = 0,$$

pero precisamente por valer cero no puede ocupar el lugar de divisor.

Ahora invertimos el divisor completo:

$$Q(x) = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x-4}{x-2}.$$

Como $x \neq 2$ pertenece al dominio original, cancelamos $x-2$:

$$\boxed{Q(x) = \frac{x-4}{x+1}, \qquad x \neq -1, 2, 4.}$$

La fórmula visible propuesta era correcta, pero la afirmación completa era falsa por omitir $x=2$.

Clasificación del fallo: pérdida de una restricción producida por un divisor definido pero nulo.

Solución 49. La suma original es

$$S(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Su dominio es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

El denominador propuesto

$$(x-1)(x+1)(x+5)$$

contiene un factor auxiliar $x+5$ que no procede de ninguno de los denominadores originales. Para introducirlo habría que multiplicar por

$$\frac{x+5}{x+5},$$

operación que sólo representa al número 1 cuando

$$x \neq -5.$$

Pero -5 pertenece al dominio original D. Por tanto, la primera decisión que impide conservar la equivalencia sobre **todo** el dominio es escoger un denominador que obliga a introducir el factor auxiliar $x+5$.

La ruta quedaría restringida artificialmente a

$$\mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 1\}.$$

La reparación consiste en usar el denominador común adecuado

$$(x-1)(x+1).$$

Entonces

$$S(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

y, por tanto,

$$\boxed{S(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \qquad x \neq -1, 1.}$$

Un denominador con más factores no es «más general». Si esos factores poseen ceros dentro del dominio original, la transformación es válida en menos puntos, no en más.

Clasificación del fallo: introducción artificial de una restricción mediante un factor auxiliar.

Solución 50. La expresión es

$$T(x) = \frac{\dfrac{x^2-1}{x-1}}{\dfrac{x+1}{x+2}}.$$

La primera ruptura ocurre ya en la declaración del dominio.

Leemos la expresión por niveles.

El bloque superior

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

exige

$$x \neq 1.$$

El bloque inferior

$$\frac{x+1}{x+2}$$

exige

$$x \neq -2$$

para estar definido. Como además ese bloque funciona como divisor exterior, debe ser distinto de cero; por tanto,

$$x \neq -1.$$

Así, el dominio original completo es

$$\boxed{\mathrm{Dom}(T) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}.}$$

La omisión de $x = 1$ es la primera ruptura. Ocurre **antes** de los pasos algebraicos posteriores.

Ahora, sobre el dominio correcto, podemos simplificar el bloque superior:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \qquad x \neq 1.$$

Entonces

$$T(x) = \frac{x+1}{\dfrac{x+1}{x+2}} = (x+1)\frac{x+2}{x+1}.$$

Como $x \neq -1$ ya pertenece al dominio original, cancelamos $x+1$ y obtenemos

$$\boxed{T(x) = x+2, \qquad x \neq -2, -1, 1.}$$

Los pasos posteriores a la declaración incorrecta del dominio pueden ser algebraicamente válidos **sobre el dominio correcto** o sobre un subconjunto donde sus hipótesis se cumplan. Pero no reparan retroactivamente la omisión inicial. Una cadena no recupera una restricción perdida sólo porque llegue a una fórmula algebraicamente correcta.

Clasificación del fallo: primera ruptura en la lectura del dominio; omisión de una restricción heredada del bloque superior.

E. Estrategia y elección de ruta

Solución 51. La expresión original es

$$\frac{2}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

El dominio se obtiene de los denominadores originales:

$$x \neq 0, \qquad x \neq 1.$$

Por tanto,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Analicemos los tres candidatos.

- $D_1 = x(x-1)^2$ contiene una copia de x y dos de $x-1$, exactamente lo necesario para absorber ambos denominadores. Es **adecuado y económico**.
- $D_2 = x(x-1)^3$ también es no nulo en todo D, porque sus únicos ceros son 0 y 1, ya excluidos. Es **adecuado pero innecesariamente grande**: repite una copia adicional de $x-1$.
- $D_3 = x(x-1)^2(x+2)$ se anula además en $x = -2$, valor que sí pertenece al dominio original. Para usarlo habría que introducir un factor $(x+2)/(x+2)$ y restringir artificialmente la transformación a $x \neq -2$. Por tanto, es **inadecuado para conservar equivalencia en todo el dominio original**.

Elegimos D_1. Entonces

$$\frac{2}{x(x-1)} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)^2}$$

y

$$\frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3x}{x(x-1)^2}.$$

Sumando,

$$\frac{2(x-1)+3x}{x(x-1)^2} = \frac{5x-2}{x(x-1)^2}.$$

No aparece ningún factor común que pueda cancelarse. Así,

$$\boxed{\frac{2}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{5x-2}{x(x-1)^2}, \qquad x \neq 0, 1.}$$

La mejor elección no es simplemente la más pequeña por apariencia: es la que contiene todos los factores necesarios, no introduce ceros nuevos y evita repeticiones inútiles.

Solución 52. La expresión es

$$\frac{1}{(x+2)^2(x-3)} - \frac{4}{(x+2)(x-3)^2}.$$

El dominio original exige

$$x \neq -2, \qquad x \neq 3.$$

En los denominadores aparecen los factores $x+2$ y $x-3$. La mayor potencia necesaria de cada uno es 2, de modo que

$$D_1 = (x+2)^2(x-3)^2$$

contiene exactamente la estructura requerida.

El candidato

$$D_2 = (x+2)^3(x-3)^3$$

es también válido en el dominio original: no introduce ceros nuevos. Sin embargo, añade una copia innecesaria de cada factor y multiplica el trabajo algebraico.

En cambio,

$$D_3 = (x+2)^2(x-3)^2(x-5)$$

introduce el cero $x = 5$, que no estaba excluido originalmente. Por tanto, sólo permitiría una transformación equivalente en un dominio menor.

Usamos D_1. La primera fracción necesita una copia adicional de $x-3$ y la segunda una copia adicional de $x+2$:

$$\frac{x-3}{(x+2)^2(x-3)^2} - \frac{4(x+2)}{(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Así,

$$\frac{(x-3)-4(x+2)}{(x+2)^2(x-3)^2} = \frac{-3x-11}{(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{1}{(x+2)^2(x-3)} - \frac{4}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{-3x-11}{(x+2)^2(x-3)^2}, \qquad x \neq -2, 3.}$$

La potencia correcta de cada factor se obtiene mirando la máxima multiplicidad ya exigida por alguno de los denominadores; no es necesario sumar las potencias de todos ellos.

Solución 53. Tenemos

$$S(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2(x-1)} - \frac{3}{x(x-1)^2}.$$

Todos los denominadores exigen

$$x \neq 0, \qquad x \neq 1.$$

El inventario de factores es:

- para x, la mayor potencia necesaria es x^2;
- para $x-1$, la mayor potencia necesaria es $(x-1)^2$.

Por tanto, un denominador común económico es

$$x^2(x-1)^2.$$

Multiplicar sin inspección los tres denominadores produciría

$$x^4(x-1)^4,$$

que sigue siendo válido en el mismo dominio, pero repite factores muchas veces y obliga a introducir numeradores mucho más grandes para llegar finalmente a una expresión equivalente.

Con el denominador económico,

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)^2},$$
$$\frac{2}{x^2(x-1)} = \frac{2(x-1)}{x^2(x-1)^2},$$

y

$$\frac{3}{x(x-1)^2} = \frac{3x}{x^2(x-1)^2}.$$

Entonces

$$S(x) = \frac{x(x-1) + 2(x-1) - 3x}{x^2(x-1)^2}.$$

El numerador se reduce a

$$x^2 - x + 2x - 2 - 3x = x^2 - 2x - 2.$$

Así,

$$\boxed{S(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2(x-1)^2}, \qquad x \neq 0, 1.}$$

La comparación entre rutas muestra que un denominador bruto puede ser correcto y, aun así, ser una mala elección estratégica.

Solución 54. Consideramos

$$F(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}.$$

Las fracciones internas exigen

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

Además debemos comprobar que el denominador exterior completo no sea cero. Reducimos sólo ese bloque:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}.$$

En el dominio $x \neq \pm 1$, esta expresión nunca vale cero. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Ahora analizamos los multiplicadores.

- $M_1 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ es no nulo en todo el dominio original y contiene exactamente los factores necesarios. Es la mejor elección.
- $M_2 = (x^2-1)^2$ también es no nulo en todo el dominio original, pero repite innecesariamente los factores.
- $M_3 = (x^2-1)(x-4)$ se anula en $x = 4$, punto permitido originalmente. Por tanto, reduce artificialmente el dominio.

Usamos M_1. Multiplicamos los dos bloques exteriores por x^2-1:

$$F(x)=\frac{(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)}{(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)}.$$

Por distributividad y cancelaciones autorizadas,

$$(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=(x+1)+(x-1)=2x,$$

mientras que

$$(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=(x+1)-(x-1)=2.$$

Por tanto,

$$\boxed{F(x)=x,\qquad x\neq -1,1.}$$

La elección estratégica correcta elimina simultáneamente todos los denominadores internos sin introducir ninguna condición ajena a la expresión original.

Solución 55. Sea

$$P(x)=\frac{x^2-25}{x^2-2x-15}\cdot\frac{x-5}{x+5}.$$

Primero fijamos el dominio. Como

$$x^2-2x-15=(x-5)(x+3),$$

el primer factor exige $x\neq 5,-3$. El segundo exige $x\neq -5$. Por tanto,

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,5\}.$$

Ruta A: factorizar antes de multiplicar. Como

$$x^2-25=(x-5)(x+5),$$

obtenemos

$$P(x)=\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+3)}\cdot\frac{x-5}{x+5}.$$

En D, los factores $x-5$ y $x+5$ son no nulos. Cancelando una copia de cada factor adecuado,

$$\boxed{P(x)=\frac{x-5}{x+3},\qquad x\neq -5,-3,5.}$$

Ruta B: expandir primero. Multiplicando las formas visibles obtenemos

$$P(x)=\frac{(x^2-25)(x-5)}{(x^2-2x-15)(x+5)}$$

y luego

$$P(x)=\frac{x^3-5x^2-25x+125}{x^3+3x^2-25x-75}.$$

La expresión sigue siendo correcta sobre el mismo dominio D, pero la estructura útil ha desaparecido. Para simplificar debemos factorizar de nuevo:

$$x^3 - 5x^2 - 25x + 125 = (x-5)^2(x+5),$$

$$x^3 + 3x^2 - 25x - 75 = (x-5)(x+3)(x+5),$$

y volvemos a

$$\frac{x-5}{x+3}.$$

Las dos rutas son válidas. La ruta A es preferible porque conserva visibles tanto los factores cancelables como las restricciones del dominio y evita crear dos polinomios cúbicos que después debemos volver a factorizar.

Solución 56. Consideremos

$$Q(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-6} \div \frac{x-2}{x+3}.$$

El dividendo exige

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \neq 0,$$

así que $x \neq -3, 2$. El divisor exige $x \neq -3$ para estar definido y, además, debe ser no nulo; por tanto $x \neq 2$. El dominio original es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}.$$

Estrategia 1: simplificar primero el dividendo. Factorizamos

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2),$$

por lo que, sobre el dominio original,

$$\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3},$$

manteniendo $x \neq -3, 2$.

Entonces

$$Q(x) = \frac{x+2}{x+3} \div \frac{x-2}{x+3} = \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-2}.$$

Como $x \neq -3$, cancelamos $x+3$:

$$Q(x) = \frac{x+2}{x-2}.$$

Estrategia 2: invertir primero el divisor. Escribimos

$$Q(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-6} \cdot \frac{x+3}{x-2}.$$

Factorizando todos los polinomios,

$$Q(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} \cdot \frac{x+3}{x-2}.$$

Las cancelaciones autorizadas conducen de nuevo a

$$\frac{x+2}{x-2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{Q(x) = \frac{x+2}{x-2}, \qquad x \neq -3, 2.}$$

Las dos rutas son correctas. La primera deja más transparente la procedencia de la primera cancelación: ocurre dentro del dividendo y sólo bajo su dominio heredado. La segunda es algo más compacta, pero concentra varias cancelaciones en un único producto total.

Solución 57. Tenemos

$$H(x) = \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}.$$

Las fracciones internas exigen

$$x \neq 0, \qquad x \neq -1.$$

El denominador exterior es

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)},$$

que nunca vale cero cuando está definido. Por tanto,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Método interior. Reducimos los dos bloques:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)},$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Entonces

$$H(x) = \frac{\dfrac{2x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{1}{x(x+1)}} = 2x + 1.$$

Eliminación de denominadores internos. Elegimos

$$M(x) = x(x+1),$$

que es no nulo en todo D. Entonces

$$H(x) = \frac{x(x+1)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}\right)}{x(x+1)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)}.$$

Distribuyendo,

$$\text{numerador} = (x+1) + x = 2x + 1,$$

$$\text{denominador} = (x+1) - x = 1.$$

Así obtenemos otra vez

$$\boxed{H(x) = 2x + 1, \qquad x \neq -1, 0.}$$

En este ejemplo, eliminar denominadores internos es más corto: evita construir dos fracciones intermedias y la posterior inversión del denominador exterior. El método interior, sin embargo, hace muy explícita la estructura de cada bloque. Ninguna de estas ventajas es universal; en otras fracciones complejas la reducción separada de los bloques puede ser más transparente o más económica.

Solución 58. La expresión es

$$E(x) = \left(\frac{x^2-4}{x-2} \div \frac{x+2}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}.$$

Primero registramos las restricciones por procedencia.

- El dividendo exige $x \neq 2$.
- El divisor exige $x \neq -1$ para estar definido y $x \neq -2$ para ser no nulo.
- El último sumando exige nuevamente $x \neq -1$.

Por tanto,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}.$$

El plan más económico es cerrar primero el cociente entre paréntesis.

En el dominio original,

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2,$$

manteniendo $x \neq 2$. Entonces

$$\frac{x^2-4}{x-2} \div \frac{x+2}{x+1} = (x+2) \cdot \frac{x+1}{x+2}.$$

Como $x \neq -2$ pertenece al dominio original, cancelamos $x + 2$ y el bloque completo se reduce a

$$x + 1.$$

Ahora sólo queda

$$E(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Usamos el denominador $x + 1$:

$$E(x) = \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}.$$

Así,

$$\boxed{E(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}, \qquad x \neq -2, -1, 2.}$$

La alternativa de combinar desde el comienzo todas las fracciones visibles es algebraicamente posible, pero mezcla en una sola cadena la división interior y la suma exterior. Cerrar primero el cociente preserva un bloque natural de la expresión y reduce el número de denominadores que deben gestionarse simultáneamente.

Solución 59. Una construcción que satisface las cuatro condiciones es

$$P(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-3}.$$

Ambos factores son expresiones racionales no constantes y ambos tienen denominador no constante.

El primer factor exige

$$x \neq -1,$$

mientras que el segundo exige

$$x \neq 3.$$

Así, el dominio original del producto es exactamente

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}.$$

En ese dominio,

$$P(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-3)}.$$

Los factores $x+1$ y $x-3$ aparecen en fracciones distintas antes de formar el producto total; por tanto, la simplificación incluye cancelaciones entre factores procedentes de fracciones diferentes. Como ambos son no nulos en D,

$$\boxed{P(x) = x + 2, \qquad x \neq -1, 3.}$$

La fórmula final $x + 2$ está definida para todo real, de modo que ninguna de las dos exclusiones permanece visible. La construcción satisface, por tanto, las cuatro condiciones pedidas.

Solución 60. Partimos de la expresión simple

$$R(x) = \frac{x-1}{x+3}.$$

Queremos construir dos representaciones distintas de R que introduzcan huecos removibles diferentes. Definimos

$$A(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x+2)}$$

y

$$B(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x+3)(x-4)}.$$

Tomamos entonces el cociente

$$Q(x) = A(x) \div B(x).$$

Estudiemos el dominio por partes.

El **dividendo** A exige

$$x \neq -3, -2.$$

La exclusión $x = -2$ procede del factor removible $x + 2$ situado en su denominador.
El **divisor** B exige

$$x \neq -3, 4.$$

La exclusión $x = 4$ procede del factor removible $x - 4$ situado en su denominador.
Además, el divisor completo debe ser distinto de cero. En su dominio,

$$B(x) = \frac{x-1}{x+3},$$

por lo que se anula exactamente en

$$x = 1.$$

Así, el dominio de Q es exactamente

$$\boxed{\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 1, 4\}.}$$

Ahora simplificamos sobre ese dominio. Como los factores removibles son no nulos allí,

$$A(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

y

$$B(x) = \frac{x-1}{x+3}.$$

Por tanto,

$$Q(x) = \frac{\dfrac{x-1}{x+3}}{\dfrac{x-1}{x+3}} = 1,$$

porque $x \neq 1$ garantiza que el divisor no es cero. En consecuencia,

$$\boxed{Q(x) = 1, \qquad x \neq -3, -2, 1, 4.}$$

La forma final 1 no muestra ninguna de las cuatro restricciones. Por eso presentar sólo esa fórmula sería matemáticamente incompleto: se perdería la procedencia de $x = -2$ y $x = 4$ como huecos removibles, de $x = 1$ como cero del divisor y de $x = -3$ como cero del denominador esencial compartido.

F. Transferencia C18–C19 y varias capas

Solución 61. Los parámetros a y b se consideran reales fijos. La expresión es

$$F_{a,b}(x) = \frac{3(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

El dominio se determina **antes** de cancelar. El denominador exige

$$x - a \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x - b \neq 0.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(F_{a,b}) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\},$$

entendiendo que, si $a = b$, el conjunto $\{a, b\}$ contiene un solo punto.

Sobre ese dominio, $x - a$ es no nulo y puede cancelarse:

$$F_{a,b}(x) = \frac{3(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{3}{x-b}.$$

Así,

$$\boxed{F_{a,b}(x) = \frac{3}{x-b}, \qquad x \neq a, b.}$$

Si $a \neq b$, hay dos puntos excluidos. La forma final sólo muestra $x \neq b$, de modo que la exclusión $x = a$ queda oculta por la cancelación.

Si $a = b$, las dos condiciones simbólicas $x \neq a$ y $x \neq b$ describen el mismo punto. En ese caso hay una sola exclusión y la forma final es

$$\frac{3}{x-a}, \qquad x \neq a.$$

No hay aquí dos restricciones geométricamente distintas: hay dos expresiones simbólicas que coinciden porque los parámetros coinciden.

Solución 62. Partimos de

$$S_{a,b}(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}.$$

El dominio original exige

$$x \neq a, \qquad x \neq b.$$

Con denominador común $(x-a)(x-b)$,

$$S_{a,b}(x) = \frac{x-b}{(x-a)(x-b)} - \frac{x-a}{(x-a)(x-b)}.$$

Combinando los numeradores,

$$(x-b) - (x-a) = a - b,$$

por lo que

$$\boxed{S_{a,b}(x) = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}, \qquad x \neq a, b.}$$

Si $a \neq b$, las exclusiones a y b son dos puntos distintos.

Si $a = b$, la expresión original se convierte en

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-a} = 0, \qquad x \neq a.$$

La fórmula combinada también refleja lo mismo:

$$\frac{a-a}{(x-a)^2} = \frac{0}{(x-a)^2} = 0, \qquad x \neq a.$$

Por tanto, el caso $a = b$ no introduce una regla nueva. Sólo hace coincidir los dos factores del denominador y fusiona las dos exclusiones simbólicas en un único punto del dominio.

Solución 63. La expresión es

$$Q_{a,b}(x) = \frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{x-b}{x-a}}.$$

Leemos primero el dominio por niveles.

La fracción del numerador exige

$$x \neq a.$$

El divisor

$$\frac{x-b}{x-a}$$

también exige $x \neq a$ para estar definido. Además, como ocupa el lugar de divisor exterior, debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq a$ se anula exactamente cuando

$$x - b = 0,$$

es decir, cuando $x = b$.

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(Q_{a,b}) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\},$$

con una sola exclusión si $a = b$.

Ahora sí invertimos el divisor completo:

$$Q_{a,b}(x) = \frac{1}{x-a} \cdot \frac{x-a}{x-b}.$$

Como $x \neq a$ ya pertenece al dominio original, cancelamos $x - a$ y obtenemos

$$\boxed{Q_{a,b}(x) = \frac{1}{x-b}, \qquad x \neq a, b.}$$

Si $a \neq b$, la forma final deja visible sólo $x \neq b$ y oculta $x = a$.

Si $a = b$, entonces las dos restricciones se refieren al mismo punto y la fórmula final es

$$\frac{1}{x-a}, \qquad x \neq a.$$

La fusión de restricciones procede de la igualdad de los parámetros, no de una excepción en la regla de división.

Solución 64. Consideremos

$$P_{a,b}(x) = \frac{(x-a)(x+a)}{x-b} \cdot \frac{x-b}{x-a}.$$

Antes de cancelar, los denominadores originales imponen

$$x \neq b \qquad \text{y} \qquad x \neq a.$$

Así,

$$\mathrm{Dom}(P_{a,b}) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}.$$

En ese dominio, tanto $x-b$ como $x-a$ son no nulos. Por tanto,

$$P_{a,b}(x) = \frac{(x-a)(x+a)}{x-b} \cdot \frac{x-b}{x-a} = x+a.$$

La respuesta completa es

$$\boxed{P_{a,b}(x) = x+a, \qquad x \neq a, b.}$$

Si $a \neq b$, la expresión original excluye dos puntos y la fórmula polinómica final no muestra ninguno de ellos.

Si $a = b$, ambos denominadores se anulan en el mismo punto y queda una sola exclusión:

$$\boxed{P_{a,a}(x) = x+a, \qquad x \neq a.}$$

La naturaleza polinómica de la fórmula final no amplía el dominio de procedencia.

Solución 65. Tenemos

$$R_a(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x-a}}.$$

Para que la raíz cuadrada principal sea real necesitamos

$$x - a \geq 0.$$

Pero la raíz aparece además en el denominador, así que debe ser no nula:

$$\sqrt{x-a} \neq 0.$$

Esto equivale a

$$x - a > 0,$$

por lo que

$$\mathrm{Dom}(R_a) = (a, \infty).$$

En ese dominio, la raíz principal satisface

$$x - a = \left(\sqrt{x-a}\right)^2.$$

Por tanto,

$$R_a(x) = \frac{\left(\sqrt{x-a}\right)^2}{\sqrt{x-a}} = \sqrt{x-a},$$

porque $\sqrt{x-a} \neq 0$ en el dominio original. Así,

$$\boxed{R_a(x) = \sqrt{x-a}, \qquad x > a.}$$

La fórmula final $\sqrt{x-a}$ tiene dominio natural $x \geq a$, mientras que la expresión original sólo existe para $x > a$. El punto $x = a$ queda oculto por la cancelación y no puede recuperarse como valor de la expresión inicial.

Solución 66. La propuesta era

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a} = 1, \qquad x \neq a.$$

La regla correcta de C18 es

$$\sqrt{u^2} = |u|.$$

Tomando $u = x - a$,

$$\sqrt{(x-a)^2} = |x-a|.$$

Por tanto, la expresión correcta es

$$\boxed{\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a} = \frac{|x-a|}{x-a}, \qquad x \neq a.}$$

La identidad propuesta se refuta con un solo valor permitido. Si elegimos

$$x = a - 1,$$

entonces

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a} = \frac{\sqrt{(-1)^2}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1,$$

que no es 1.

No necesitamos construir una tabla de signos: basta usar la identidad de raíz principal y un contraejemplo.

La expresión original es **fraccionaria** porque está escrita como un cociente. No debe clasificarse automáticamente como racional: su numerador contiene una raíz cuadrada y no es, en esa forma, una expresión polinómica.

Solución 67. La expresión es

$$A(x) = \frac{x^2 - 16}{(4-x)(x+4)}.$$

El dominio original exige

$$4 - x \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x + 4 \neq 0,$$

por lo que

$$x \neq 4, \qquad x \neq -4.$$

Factorizamos la diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 16 = (x-4)(x+4).$$

Además,

$$4 - x = -(x-4).$$

Así,

$$A(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{-(x-4)(x+4)}.$$

En el dominio original ambos factores son no nulos, de modo que pueden cancelarse y queda

$$\boxed{A(x) = -1, \qquad x \neq -4, 4.}$$

La constante -1 está definida para todo real, pero la expresión original no existe en $x = \pm 4$. El signo negativo procede exactamente de la normalización $4 - x = -(x - 4)$ y no puede perderse durante la cancelación.

Solución 68. Consideremos

$$B(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}.$$

Para trabajar en $\mathbb{R}$, la raíz principal exige

$$x \geq 0.$$

Además, el denominador debe ser no nulo:

$$\sqrt{x} - 3 \neq 0.$$

Como $\sqrt{x} = 3$ exactamente cuando $x = 9$, el dominio original es

$$\boxed{[0, \infty) \setminus \{9\}.}$$

En ese dominio podemos escribir

$$x - 9 = (\sqrt{x})^2 - 3^2 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3).$$

Por tanto,

$$B(x) = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} - 3} = \sqrt{x} + 3,$$

porque $\sqrt{x} - 3 \neq 0$ en el dominio original. Así,

$$\boxed{B(x) = \sqrt{x} + 3, \qquad x \geq 0, \quad x \neq 9.}$$

La fórmula final está definida también en $x = 9$, pero la expresión inicial no. El ejercicio combina la raíz principal de C18 con una diferencia de cuadrados de C19. Sin embargo, la expresión original no es racional en la terminología de C20 porque contiene un radical en el denominador.

Solución 69. La expresión es

$$D(x, h) = \frac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h}.$$

Trabajamos con pares reales (x, h). Antes de operar registramos todas las restricciones:

$$x + h \neq 0, \qquad x \neq 0, \qquad h \neq 0.$$

Combinamos primero las fracciones internas:

$$\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + h)}{x(x + h)} = \frac{-h}{x(x + h)}.$$

Entonces

$$D(x,h) = \frac{-h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h}.$$

Como $h \neq 0$ pertenece al dominio original, cancelamos h:

$$\boxed{D(x,h) = -\frac{1}{x(x+h)}, \qquad x \neq 0, \quad x+h \neq 0, \quad h \neq 0.}$$

La forma final ya no muestra la condición $h \neq 0$, pero esa restricción procede de la división exterior original y debe conservarse.

Solución 70. Partimos de

$$E(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

La única restricción original es

$$h \neq 0.$$

Podemos expandir el numerador:

$$(x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = h(2x+h).$$

Pero la diferencia de cuadrados muestra la estructura más directamente:

$$(x+h)^2 - x^2 = \big((x+h) - x\big)\big((x+h) + x\big) = h(2x+h).$$

Esta segunda ruta hace visible de inmediato el factor que podrá cancelarse. Como $h \neq 0$,

$$E(x,h) = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Por tanto,

$$\boxed{E(x,h) = 2x + h, \qquad h \neq 0.}$$

Ambas rutas son válidas, pero la factorización estructural evita una expansión que luego tendría que reorganizarse. La restricción $h \neq 0$ no aparece en la fórmula final y, sin embargo, sigue siendo parte de la afirmación completa.

Solución 71. La expresión es

$$G(x,h) = \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}.$$

El dominio original exige simultáneamente

$$x + h \neq 0, \qquad x \neq 0, \qquad h \neq 0.$$

Combinamos las fracciones internas:

$$\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}.$$

Antes de expandir, factorizamos el numerador como diferencia de cuadrados:

$$x^2 - (x+h)^2 = \big(x - (x+h)\big)\big(x + (x+h)\big) = (-h)(2x+h).$$

Por tanto,

$$G(x,h) = \frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2} \cdot \frac{1}{h}.$$

Como $h \neq 0$ forma parte del dominio original, cancelamos h y obtenemos

$$\boxed{G(x,h) = -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}, \qquad x \neq 0, \quad x+h \neq 0, \quad h \neq 0.}$$

La factorización antes de cancelar evita perder el signo negativo. La condición $h \neq 0$ deja de ser visible en la fórmula final, pero sigue heredada de la división exterior.

Solución 72. Tenemos

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

y

$$C(x,h) = \frac{\dfrac{x+h+1}{x+h-1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{h}.$$

El dominio original exige tres condiciones independientes:

$$x \neq 1, \qquad x+h \neq 1, \qquad h \neq 0.$$

Las dos primeras garantizan que $f(x)$ y $f(x+h)$ estén definidos; la tercera procede de la división exterior.

Construimos el denominador común conservando completos los dos numeradores:

$$\frac{x+h+1}{x+h-1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+h+1)(x-1) - (x+1)(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}.$$

Ahora simplificamos el numerador. Tenemos

$$(x+h+1)(x-1) = x^2 + xh - h - 1$$

y

$$(x+1)(x+h-1) = x^2 + xh + h - 1.$$

Por tanto,

$$(x+h+1)(x-1) - (x+1)(x+h-1) = -2h.$$

Así,

$$C(x,h) = \frac{-2h}{(x+h-1)(x-1)} \cdot \frac{1}{h}.$$

Como $h \neq 0$, cancelamos h y obtenemos

$$\boxed{C(x,h) = -\frac{2}{(x-1)(x+h-1)}, \qquad x \neq 1, \quad x+h \neq 1, \quad h \neq 0.}$$

Las condiciones $x \neq 1$ y $x+h \neq 1$ siguen visibles en el denominador final. En cambio, $h \neq 0$ desaparece después de la cancelación y debe conservarse por procedencia. Nada en este

cálculo utiliza límites ni derivadas: se trata únicamente de una identidad algebraica sobre el dominio declarado.

G. Síntesis avanzada

En estas soluciones la meta no es encontrar una técnica dominante, sino cerrar la cadena completa: **dominio original, elección de representación, transformación justificada, verificación e interpretación de la forma final**. Cuando una restricción desaparece de la escritura, se conserva por procedencia; cuando una ruta alternativa es correcta pero menos eficiente, se distingue estrategia de validez.

Solución 73. Consideramos

$$E(x) = \left(\frac{x^2-1}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1}\right) \div \frac{x-2}{x+3}.$$

Antes de operar fijamos el dominio original.

La primera fracción exige

$$x \neq 1.$$

La segunda exige

$$x \neq -1.$$

El divisor $(x-2)/(x+3)$ debe estar definido, de modo que

$$x \neq -3,$$

y además debe ser distinto de cero. Bajo $x \neq -3$, se anula en

$$x = 2.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(E) = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 2\}.$$

Las exclusiones tienen dos tipos de procedencia:

- $x = 1$ y $x = -1$ provienen de denominadores internos del bloque multiplicativo;
- $x = -3$ hace indefinido al divisor;
- $x = 2$ hace que el divisor completo exista pero valga cero.

Ahora elegimos una ruta que conserve visibles los factores. Factorizamos

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Así,

$$\frac{x^2-1}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1}.$$

En el dominio original, $x-1$ y $x+1$ son no nulos. Cancelamos ambos factores y obtenemos

$$x - 2.$$

La expresión completa queda

$$E(x) = (x-2) \div \frac{x-2}{x+3}.$$

Como el divisor es no nulo en el dominio original, invertimos:

$$E(x) = (x-2)\frac{x+3}{x-2}.$$

También $x-2 \neq 0$ en el dominio original, por lo que

$$\boxed{E(x) = x+3, \qquad x \neq -3, -1, 1, 2.}$$

La forma final es polinómica y está definida para todo real, pero las cuatro exclusiones continúan perteneciendo a la expresión de procedencia.

Los puntos $x = 1$ y $x = 2$ muestran dos mecanismos distintos. En $x = 1$, la primera fracción original contiene división por cero. En $x = 2$, las fracciones internas están definidas, pero el divisor completo vale cero. En ambos casos la fórmula final $x + 3$ tiene sentido. Por eso el dominio original no puede reconstruirse desde el resultado simplificado.

Solución 74. Sea

$$Q(x) = \frac{x+3}{x-2} \div \frac{x^2-1}{x-1}.$$

La Ruta A comienza por el dominio completo.

El dividendo exige

$$x \neq 2.$$

El divisor exige $x \neq 1$ para estar definido. Además, debe ser distinto de cero. Factorizamos su numerador:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

En el dominio $x \neq 1$, el divisor se anula exactamente cuando

$$x + 1 = 0,$$

es decir, en $x = -1$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}.$$

Ahora, y sólo ahora, simplificamos el divisor:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \qquad x \neq 1.$$

Entonces

$$Q(x) = \frac{x+3}{x-2} \div (x+1) = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}.$$

La conclusión de la Ruta A es

$$\boxed{Q(x) = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}, \qquad x \neq -1, 1, 2.}$$

La Ruta B simplifica inmediatamente el divisor a $x+1$ y después reconstruye sus restricciones mirando sólo esa forma. Así detectaría $x \neq -1$ por la no nulidad del divisor y $x \neq 2$ por el dividendo, pero perdería

$$x \neq 1.$$

Las manipulaciones posteriores pueden ser algebraicamente correctas sobre el dominio ampliado que la Ruta B está usando, y producir la misma fórmula visible

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}.$$

Sin embargo, su afirmación completa sería incorrecta si declarara únicamente

$$x \neq -1, 2.$$

La información perdida es la restricción $x \neq 1$ perteneciente al **dominio de procedencia del divisor antes de simplificarlo**.

Por tanto, las dos rutas pueden llegar a la misma fórmula, pero sólo la Ruta A conserva el dominio original completo.

Solución 75. Consideramos

$$F_{a,b}(x) = \frac{\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}}{\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b}},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ fijos.

Debemos separar los casos $a \neq b$ y $a = b$ porque cambia la estructura del denominador exterior.

Caso 1: $a \neq b$. Las fracciones internas exigen

$$x \neq a, \qquad x \neq b.$$

Sobre ese dominio, el numerador exterior es

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{(x-b)+(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}.$$

El denominador exterior es

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}.$$

Como $a \neq b$, el numerador constante $a-b$ no es cero. Por tanto, el denominador exterior nunca se anula en el dominio donde está definido y no añade una exclusión nueva.

Así,

$$\mathrm{Dom}(F_{a,b}) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}, \qquad a \neq b.$$

Ejecutamos la división exterior:

$$F_{a,b}(x) = \frac{\dfrac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}}{\dfrac{a-b}{(x-a)(x-b)}}.$$

Como $(x-a)(x-b) \neq 0$ en el dominio original,

$$\boxed{F_{a,b}(x) = \frac{2x-a-b}{a-b}, \qquad x \neq a, b, \quad a \neq b.}$$

La fórmula final es afín en x y ya no muestra ninguna de las dos exclusiones.

Caso 2: $a = b$. Ahora las dos restricciones simbólicas

$$x \neq a, \qquad x \neq b$$

describen un único punto, porque $a = b$.

Pero aparece un fenómeno más fuerte. Para todo $x \neq a$,

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-a} = 0.$$

Es decir, el denominador exterior completo vale cero **en todo punto donde las fracciones internas están definidas**.

Por tanto, no existe ningún valor real admisible:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(F_{a,a}) = \varnothing.}$$

En este caso no hay una fórmula simplificada que represente a la fracción compleja sobre un dominio no vacío: la división exterior nunca está definida.

La distinción entre «dos restricciones simbólicas» y «dos puntos distintos» sigue siendo importante, pero aquí no basta con fusionar $\{a, b\}$ en $\{a\}$; también debemos comprobar la no nulidad del denominador exterior, que elimina todos los puntos restantes.

Solución 76. Queremos construir una expresión racional cuyo dominio original sea exactamente

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$$

y cuya forma simplificada sea

$$x^2 + 1.$$

Una construcción directa es

$$R(x) = \frac{(x^2+1)(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)}.$$

El numerador y el denominador son ambos no constantes. El denominador se anula exactamente cuando

$$x = -2 \qquad \text{o} \qquad x = 3.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

En ese dominio, los factores $x + 2$ y $x - 3$ son no nulos y pueden cancelarse:

$$R(x) = \frac{(x^2+1)(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = x^2 + 1.$$

Así,

$$\boxed{R(x) = x^2 + 1, \qquad x \neq -2, 3.}$$

No aparece ninguna exclusión adicional: todos los ceros del denominador son precisamente los dos prescritos.

La función polinómica natural

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p(x) = x^2 + 1,$$

no es la misma función que la función natural definida por R, porque sus dominios son distintos. Coinciden en todos los puntos de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, pero p también está definida en -2 y 3, mientras que R no.

Solución 77. La expresión es

$$S(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{2}{x^2(x-1)} - \frac{3}{x(x-1)^3}.$$

Todos los denominadores contienen sólo los factores x y $x-1$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(S) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Comparación de denominadores comunes. El **plan bruto** multiplica los tres denominadores:

$$x(x-1)^2 \cdot x^2(x-1) \cdot x(x-1)^3 = x^4(x-1)^6.$$

Ese denominador es común y es válido sobre el mismo dominio original, pero repite muchas copias innecesarias.

El **plan estructural** conserva la mayor potencia necesaria de cada factor:

- para x, la mayor potencia es x^2;
- para $x-1$, la mayor potencia es $(x-1)^3$.

Por tanto elegimos

$$L = x^2(x-1)^3.$$

Reescribimos cada término.

Para el primero falta el factor $x(x-1)$:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)^3}.$$

Para el segundo falta $(x-1)^2$:

$$\frac{2}{x^2(x-1)} = \frac{2(x-1)^2}{x^2(x-1)^3}.$$

Para el tercero falta x:

$$\frac{3}{x(x-1)^3} = \frac{3x}{x^2(x-1)^3}.$$

Estas tres reescrituras pueden verificarse por recomposición: en el dominio $x \neq 0, 1$, cancelando respectivamente $x(x-1)$, $(x-1)^2$ y x se recuperan exactamente las fracciones originales.

Ahora combinamos:

$$S(x) = \frac{x(x-1) + 2(x-1)^2 - 3x}{x^2(x-1)^3}.$$

Simplificamos el numerador:

$$x(x-1) + 2(x-1)^2 - 3x = x^2 - x + 2x^2 - 4x + 2 - 3x = 3x^2 - 8x + 2.$$

No aparece un factor x ni $x-1$ que pueda cancelarse. Por tanto,

$$\boxed{S(x) = \frac{3x^2 - 8x + 2}{x^2(x-1)^3}, \qquad x \neq 0, 1.}$$

Los dos planes pueden ser algebraicamente válidos sobre el mismo dominio. La ventaja del plan estructural no es lógica sino estratégica: evita introducir $x^4(x-1)^6$ y reduce drásticamente la cantidad de productos y simplificaciones posteriores.

Solución 78. Consideramos

$$R(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \div \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}}.$$

Leemos las restricciones en tres capas.

Primero, la raíz principal exige

$$x - 1 \geq 0,$$

es decir,

$$x \geq 1.$$

Segundo, el denominador $x-1$ de la primera fracción debe ser no nulo y el denominador $\sqrt{x-1}$ del divisor también debe ser no nulo. Ambas condiciones fuerzan

$$x > 1.$$

Tercero, el divisor completo debe ser distinto de cero. En $x > 1$, su denominador ya es no nulo, así que se anula exactamente cuando

$$\sqrt{x-1} - 2 = 0.$$

Esto ocurre cuando

$$\sqrt{x-1} = 2,$$

y por tanto

$$x = 5.$$

Así,

$$\mathrm{Dom}(R) = (1, \infty) \setminus \{5\}.$$

Sólo ahora invertimos el divisor:

$$R(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-2}.$$

Como

$$x - 1 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

para $x \geq 1$, el numerador total de los dos primeros factores contiene precisamente $x-1$:

$$\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-1} = x - 1.$$

Por tanto, sobre el dominio original,

$$R(x) = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x-1}-2)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}.$$

Así,

$$\boxed{R(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}, \qquad x > 1, \quad x \neq 5.}$$

La fórmula final tiene dominio natural

$$[1, \infty) \setminus \{5\},$$

porque en $x = 1$ vale $-1/2$. Ese punto, sin embargo, no pertenecía al dominio original: allí los denominadores $x - 1$ y $\sqrt{x-1}$ se anulaban.

La expresión de partida es fraccionaria, pero no racional en el sentido de §20.2, porque contiene radicales y no es un cociente de polinomios.

Solución 79. Partimos de

$$T(x) = \left(\frac{x^2-1}{x-1} \div \frac{x+1}{x+2}\right) \frac{x+2}{x+3} - \frac{1}{x+3}.$$

Antes de auditar la cadena fijamos el dominio original.

La primera fracción exige

$$x \neq 1.$$

El divisor $(x+1)/(x+2)$ exige

$$x \neq -2$$

para estar definido y

$$x \neq -1$$

para ser no nulo.

El factor $(x+2)/(x+3)$ y el último término exigen

$$x \neq -3.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(T) = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 1\}.$$

Ahora auditamos la cadena propuesta.

La factorización

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

es correcta. También es correcto pasar de

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

a

$$x + 1$$

sobre el dominio vigente, porque $x \neq 1$.

La **primera ruptura** aparece en la transición

$$(x+1) \div \frac{x+1}{x+2} \longmapsto (x+1)\frac{x+1}{x+2}.$$

Al transformar una división en multiplicación debía invertirse el **divisor completo**. El recíproco correcto es

$$\frac{x+2}{x+1}.$$

Desde la expresión equivocada obtenida en esa línea, varias operaciones posteriores del estudiante —multiplicar fracciones, cancelar $x+2$, combinar sobre $x+3$ y expandir— pueden ser algebraicamente correctas. Pero ya describen otra expresión. La equivalencia con T se perdió en la primera inversión incorrecta.

Reparamos desde ese punto:

$$T(x) = (x+1)\frac{x+2}{x+1}\frac{x+2}{x+3} - \frac{1}{x+3}.$$

Como $x \neq -1$, cancelamos $x+1$:

$$T(x) = \frac{(x+2)^2}{x+3} - \frac{1}{x+3}.$$

Combinamos:

$$T(x) = \frac{(x+2)^2 - 1}{x+3}.$$

Factorizamos la diferencia de cuadrados:

$$(x+2)^2 - 1 = \big((x+2)-1\big)\big((x+2)+1\big) = (x+1)(x+3).$$

Como $x \neq -3$, cancelamos $x+3$:

$$\boxed{T(x) = x+1, \qquad x \neq -3, -2, -1, 1.}$$

La cadena defectuosa terminaba en

$$\frac{x(x+2)}{x+3},$$

que no coincide con el resultado correcto. Por ejemplo, $x = 0$ pertenece al dominio original: la expresión correcta vale 1, mientras que la forma defectuosa vale 0.

Ese control puntual detecta la discrepancia, pero la causa matemática ya quedó localizada antes: la primera inversión del divisor fue incorrecta.

Solución 80. Consideramos

$$S(x) = \left(\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \div \frac{x+3}{x-2}\right) + \frac{4}{x+2}.$$

1. Lectura por bloques y dominio. El primer bloque es un cociente entre dos expresiones racionales; después aparece una suma con $4/(x+2)$.

Factorizamos el denominador del dividendo sólo para leer sus restricciones:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

Por tanto, el dividendo exige

$$x \neq 3, \qquad x \neq -2.$$

El divisor $(x+3)/(x-2)$ exige

$$x \neq 2$$

para estar definido y

$$x \neq -3$$

para ser no nulo.

El último sumando vuelve a exigir $x \neq -2$.

Así,

$$\mathrm{Dom}(S) = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}.$$

2. Primera ruta: simplificar el dividendo antes de invertir. Factorizamos también el numerador:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Sobre el dominio original,

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}.$$

La restricción $x \neq 3$ debe seguir viajando con este bloque aunque haya desaparecido de su fórmula visible.

Ahora ejecutamos la división:

$$\frac{x+3}{x+2} \div \frac{x+3}{x-2} = \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x-2}{x+3}.$$

Como $x \neq -3$, cancelamos $x+3$:

$$\frac{x-2}{x+2}.$$

La suma final tiene ya denominador común $x+2$:

$$S(x) = \frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{x+2} = \frac{x+2}{x+2}.$$

Como $x \neq -2$,

$$\boxed{S(x) = 1, \qquad x \neq -3, -2, 2, 3.}$$

3. Segunda ruta: invertir antes de simplificar el dividendo. Partimos del mismo dominio original y transformamos primero la división en producto:

$$S(x) = \frac{x^2-9}{x^2-x-6} \cdot \frac{x-2}{x+3} + \frac{4}{x+2}.$$

Ahora factorizamos:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3),$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

Entonces

$$S(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x+3} + \frac{4}{x+2}.$$

En el dominio original, $x-3$ y $x+3$ son no nulos. Cancelamos:

$$S(x) = \frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{x+2} = 1.$$

Las dos rutas producen la misma fórmula sobre el mismo dominio. La primera hace más visible la historia del bloque simplificado; la segunda exhibe directamente todas las cancelaciones dentro de un único producto. Ninguna es válida sin el dominio fijado al comienzo.

4. Interpretación y verificación. La forma final 1 tiene dominio natural $\mathbb{R}$, por lo que **todas** las restricciones originales han quedado ocultas:

$$x \neq -3, -2, 2, 3.$$

Cada una sigue siendo necesaria por procedencia.

Como control adicional podemos evaluar en un punto permitido, por ejemplo $x = 0$. La expresión original da

$$\left(\frac{-9}{-6} \div \frac{3}{-2}\right) + \frac{4}{2} = \left(\frac{3}{2} \div -\frac{3}{2}\right) + 2 = -1 + 2 = 1.$$

Coincide con la forma final. Esta comprobación puntual puede detectar un error, pero no demuestra la identidad general. La equivalencia para todo x del dominio original está justificada por las dos cadenas algebraicas anteriores.

H. Soluciones de profundización y reconstrucción

Solución 081. El denominador debe anularse en los dos reales distintos, así no puede ser constante ni lineal. El grado mínimo es dos y el único denominador mónico cuadrático con esos ceros es $D = (x-a)(x-b)$. La identidad formal impuesta fija entonces $N = (x+1)(x-a)(x-b)$ de manera única. Para comprobar la unicidad sin usar el futuro teorema del resto, comparar un denominador $x^2 + ux + v$ en los dos ceros y restar las ecuaciones da $u = -(a+b)$, $v = ab$. La fracción construida tiene exactamente los dos huecos y cancela a $x+1$ en su dominio.

Solución 082. Tomemos $R = [(x-a)/(x-b)] \div [(x-a)/(x-b)^2]$. Ambas fracciones exigen $x \neq b$; la segunda, como divisor, debe ser no nula y exige $x \neq a$. Allí invertirla produce $[(x-a)/(x-b)][(x-b)^2/(x-a)] = x-b$. La multiplicación inversa comprueba el cálculo. En a la segunda fracción es cero; en b está indefinida. Son dos razones diferentes que deben conservarse aunque la fórmula final sea polinómica.

Solución 083. Si $a \neq b$, el dominio es $x \neq a, b$. La resta es $(a-b)/[(x-a)(x-b)]$, idéntica al divisor no nulo, así que $E = 1$. Invertir primero da $[1/(x-a)-1/(x-b)](x-a)(x-b)/(a-b) = [(x-b)-(x-a)]/(a-b) = 1$. Ambas rutas usan las mismas tres condiciones no nulas. Si $a = b$, el divisor es cero en todos los puntos donde está definido, luego el dominio completo es vacío. No existe entonces una función constante obtenida por cancelación.

Solución 084. El dominio exige $x \neq 0, a$. La segunda fracción vale 1 allí; la primera es $|x|/x$. Para $x > 0$ resulta 1 y para $x < 0$ resulta -1, siempre quitando a si pertenece a la región. Si $a = 0$, las dos exclusiones coinciden y solo se retira cero. Una ruta por casos sustituye desde el principio $\sqrt{x^2}$ por x o $-x$ y llega a los mismos valores. Sustituir siempre por x falla en cada punto negativo permitido.

Solución 085. En el caso genérico los tres factores distintos requieren $D = (x-t)(x+t)(x-1)$ y $F_t = 2x/[(x^2-t^2)(x-1)]$, con $x \neq t, -t, 1$. Si $t = 0$, ambas fracciones son iguales y $F_0 = 2/[x(x-1)]$, con $x \neq 0, 1$. Si $t = 1$ o -1, los sumandos tienen denominadores $(x-1)^2$ y $(x+1)(x-1)$, en orden intercambiado: $F_t = 2x/[(x-1)^2(x+1)]$, con $x \neq \pm 1$. La suma reconstruye cada numerador; tomar solo factores distintos en los últimos casos perdería la potencia necesaria.

Solución 086. Como $t - x = -(x-t)$, los dos primeros términos suman cero sobre $x \neq t$. Queda $1/(x+t)$, conservando $x \neq t, -t$. Para $t \neq 0$, la fórmula final solo excluye $-t$ y ocultó el hueco t. Para $t = 0$, ambas exclusiones coinciden y el dominio sigue siendo $x \neq 0$, igual al natural final. Reunir los dos primeros términos con denominador $x - t$ produce numerador $1 - 1 = 0$, una verificación sin atribuir cancelación a una suma.

Solución 087. Se canceló un sumando, no un factor del numerador completo. Las fracciones interiores requieren $x, y \neq 0$ y el denominador exterior exige $y - x \neq 0$. Multiplicar ambos bloques por $xy \neq 0$ da $(x+y)/(y-x)$ sobre ese dominio. Como comprobación, $x = 1, y = 2$ da 3, refutando la constante propuesta. La reconstrucción $(1/x - 1/y)(x+y)/(y-x) = (x+y)/(xy) = 1/x + 1/y$ certifica la igualdad en todos los puntos permitidos, no solo en el ejemplo.

Solución 088. Se exigen $x \neq 0, -a$ por el primer denominador, y $x \neq a$ porque el divisor debe ser no nulo. En ese dominio el primer bloque es $(x-a)/x$; dividido por el segundo vale 1. Queda $H = 1 - a/x = (x-a)/x$, con $x \notin \{0, a, -a\}$. Si $a = 0$, solo se excluye cero y el resultado es 1. Para reconstruir, la suma de la forma final y a/x es 1; multiplicada por el divisor devuelve $(x-a)/x$, que al multiplicar por $x(x+a)$ devuelve $x^2 - a^2$. Cada multiplicación usa los denominadores ya registrados.

Capítulo 21

Ecuaciones, equivalencias y conjuntos solución

En C20 aprendimos que una transformación algebraica debe conservar algo más que una fórmula: también debe conservar las condiciones bajo las cuales esa fórmula tenía sentido. Al pasar de expresiones a ecuaciones aparece una exigencia nueva.

Considere

$$x^2 = 4.$$

Si trabajamos con números reales, hay dos valores que hacen verdadera la igualdad:

$$x = -2 \qquad \text{y} \qquad x = 2.$$

Pero si el problema declara desde el comienzo que $x \geq 0$, entonces sólo uno de ellos es admisible:

$$x = 2.$$

La fórmula de la ecuación no cambió. Lo que cambió fue el conjunto en el que preguntamos por su verdad.

Este ejemplo muestra la idea que gobernará todo el capítulo:

> **Resolver una ecuación no consiste en aislar una letra. Consiste en determinar exactamente qué valores, dentro del dominio declarado, hacen verdadera la igualdad.**

A partir de ahora, cada paso de una resolución tendrá que responder una pregunta que en cursos más elementales suele permanecer oculta: **¿este paso conserva exactamente el conjunto solución, o sólo produce candidatos que después habrá que filtrar?**

21.1. Ecuación, dominio y conjunto solución

Una ecuación es una afirmación cuyo valor de verdad depende de la variable. Compare las expresiones

$$2x + 1 \qquad \text{y} \qquad 7.$$

Por sí solas son expresiones. En cambio,

$$2x + 1 = 7$$

es una afirmación acerca de x. Mientras x permanezca sin fijar, no podemos asignarle simplemente el valor de verdad «verdadero» o «falso»: eso dependerá del valor que sustituyamos.

Si ponemos $x = 3$, obtenemos

$$2(3) + 1 = 7,$$

que es verdadera. Si ponemos $x = 4$, obtenemos

$$2(4) + 1 = 7,$$

que es falsa.

Diremos que una **ecuación en la variable x sobre un dominio D** es una igualdad

$$E(x) = F(x)$$

donde ambos miembros están definidos para todo $x \in D$. La ecuación se interpreta entonces como una afirmación acerca de los valores de x que pertenecen a ese dominio.

El dominio no es decoración. Forma parte del problema. Cuando un enunciado propone primero un dominio ambiente más amplio, las restricciones de las expresiones determinarán después el dominio efectivo sobre el que realmente se interpreta la ecuación.

Qué significa ser solución. Un valor $a \in D$ es una **solución** de la ecuación

$$E(x) = F(x)$$

si, al sustituir $x = a$, ambos miembros están definidos y la igualdad resultante es verdadera.

En el ejemplo

$$2x + 1 = 7, \qquad x \in \mathbb{R},$$

el número 3 es solución porque

$$2(3) + 1 = 7.$$

El número 4 no lo es porque

$$2(4) + 1 \neq 7.$$

Pero observar que 3 funciona todavía no resuelve por completo la ecuación. Resolver exige saber si existen otros valores que también funcionen.

El conjunto solución. Llamaremos **conjunto solución** de la ecuación $E(x) = F(x)$ sobre el dominio D al conjunto

$$\mathrm{Sol}_D(E = F) = \{x \in D : E(x) = F(x)\}.$$

Esta notación convierte la tarea de resolver en un problema preciso de conjuntos: debemos describir exactamente el subconjunto de D donde la igualdad es verdadera.

Para

$$2x + 1 = 7, \qquad x \in \mathbb{R},$$

obtenemos

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(2x + 1 = 7) = \{3\}.$$

Una solución individual es un elemento. El **conjunto solución** es el objeto completo que buscamos.

La misma ecuación, dominios distintos. Volvamos a

$$x^2 = 4.$$

Sobre los reales,

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 = 4) = \{-2, 2\}.$$

Si el dominio declarado es

$$D = [0, \infty),$$

entonces

$$\mathrm{Sol}_{[0,\infty)}(x^2 = 4) = \{2\}.$$

Y si el dominio fuera

$$D = (0, 2),$$

entonces ningún valor admisible satisface la ecuación:

$$\mathrm{Sol}_{(0,2)}(x^2 = 4) = \varnothing.$$

La igualdad escrita es la misma en los tres casos. El problema de resolución no lo es.

Ésta es la primera razón por la que nunca debemos separar una ecuación del dominio sobre el que se interpreta.

El dominio puede venir de la propia expresión. En C20 aprendimos a detectar restricciones de dominio antes de simplificar. Esa disciplina entra ahora directamente en la resolución de ecuaciones.

Considere

$$\frac{x-1}{x-1} = 1.$$

La expresión del lado izquierdo sólo está definida cuando

$$x - 1 \neq 0,$$

es decir,

$$x \neq 1.$$

Por tanto, si no se ha declarado otro dominio ambiente, el dominio natural de la ecuación es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Para todo $x \in D$ podemos cancelar el factor no nulo $x - 1$ y obtener

$$1 = 1.$$

Eso significa que **todos los valores del dominio original** son soluciones:

$$\mathrm{Sol}_D\left(\frac{x-1}{x-1} = 1\right) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Sería incorrecto concluir que el conjunto solución es $\mathbb{R}$. La fórmula simplificada $1 = 1$ ya no muestra la exclusión $x = 1$, pero esa exclusión pertenece al problema con el que comenzamos.

La conexión con C20 es directa:

> **Una transformación puede hacer desaparecer de la escritura una restricción sin hacer desaparecer esa restricción del problema.**

Dominio ambiente y dominio efectivo. A veces el problema declara un conjunto en el que desea trabajar, pero las expresiones introducen restricciones adicionales.

Por ejemplo, suponga que se pide resolver

$$\frac{1}{x-2} = 3, \qquad x \in [0,5].$$

El dominio ambiente es $[0,5]$, pero el cociente exige además $x \neq 2$. El dominio efectivo del problema es entonces

$$D = [0,5] \setminus \{2\}.$$

Sólo dentro de ese conjunto tiene sentido preguntar si la igualdad es verdadera o falsa.

La distinción será útil durante todo el capítulo:

- el **dominio ambiente** dice dónde queremos buscar;
- las expresiones pueden imponer restricciones adicionales;
- el **dominio efectivo** es el conjunto de valores admisibles sobre el que realmente se interpreta la ecuación.

Una ecuación puede tener una, varias, ninguna o todas las soluciones del dominio. El lenguaje de conjuntos permite tratar de manera uniforme situaciones que, vistas sólo como «despejes», parecen muy distintas.

Ecuación sobre $\mathbb{R}$	Conjunto solución
$x+2=5$	$\{3\}$
$x^2=9$	$\{-3,3\}$
$x^2+1=0$	$\varnothing$
$x+1=x+1$	$\mathbb{R}$

Por ahora no necesitamos clasificar sistemáticamente estas formas; eso se hará en §21.5. Lo importante es observar que **resolver** siempre significa describir correctamente el conjunto que aparece en la segunda columna.

Comprobar un valor no es resolver una ecuación. Si alguien propone $x=3$ para

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

podemos comprobar:

$$3^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0.$$

Así sabemos que 3 es una solución.

Pero eso no demuestra que sea la única. De hecho,

$$2^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0,$$

por lo que 2 también es solución.

La comprobación responde a la pregunta

> «¿este valor pertenece al conjunto solución?»

Resolver responde a otra más fuerte:

«¿cuál es **todo** el conjunto solución?»

Esta diferencia será esencial cuando aparezcan transformaciones que producen candidatos adicionales.

Un primer protocolo de lectura. Antes de manipular una ecuación, haremos tres preguntas:

1. **¿Cuál es el dominio declarado o efectivo?**
2. **¿Qué significa que un valor sea solución?**
3. **¿Qué conjunto exacto debemos determinar?**

Todavía no hemos discutido qué transformaciones pueden usarse para encontrar ese conjunto. Ése será el tema de las secciones siguientes.

Recuperación breve. Determine el dominio efectivo y el conjunto solución de

$$\frac{x+2}{x-3} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Respuesta razonada. La expresión está definida sólo si $x - 3 \neq 0$, por lo que

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Una fracción definida vale cero exactamente cuando su numerador vale cero. Por tanto,

$$x + 2 = 0,$$

de donde

$$x = -2.$$

Como $-2 \in D$, el valor es admisible. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}\setminus\{3\}}\left(\frac{x+2}{x-3} = 0\right) = \{-2\}.}$$

Obsérvese que $x = 3$ no es una «solución que falla»: ni siquiera pertenece al dominio en el que la ecuación está definida.

Qué debemos conservar de esta sección. Una ecuación debe leerse siempre junto con el conjunto en el que se interpreta:

dominio + igualdad + conjunto solución.

El dominio determina qué valores son admisibles; la igualdad determina cuáles de ellos hacen verdadera la proposición; el conjunto solución recoge exactamente esos valores.

En §21.2 estudiaremos la pregunta decisiva para resolver ecuaciones mediante álgebra: **¿cuándo dos ecuaciones tienen exactamente el mismo conjunto solución y cuándo una transformación conserva sólo una dirección lógica?**

21.2. Equivalencia de ecuaciones e implicación

En §21.1 fijamos el objeto que queremos conservar: el conjunto solución. Ahora podemos formular la pregunta que gobierna toda resolución algebraica:

> **Si reemplazamos una ecuación por otra, ¿hemos conservado exactamente sus soluciones?**

No basta con que la nueva ecuación sea más simple. Tampoco basta con que toda solución de la ecuación original siga funcionando en la nueva. Para poder sustituir una ecuación por otra sin cambiar el problema necesitamos una condición más fuerte: que ambas tengan exactamente el mismo conjunto solución sobre el mismo dominio vigente.

Ecuaciones equivalentes. Sean dos ecuaciones definidas sobre un mismo dominio D:

$$E_1(x) = F_1(x)$$

y

$$E_2(x) = F_2(x).$$

Diremos que son **equivalentes sobre** D cuando tienen exactamente el mismo conjunto solución:

$$\mathrm{Sol}_D(E_1 = F_1) = \mathrm{Sol}_D(E_2 = F_2).$$

Cuando esta igualdad de conjuntos está justificada, podemos escribir

$$E_1(x) = F_1(x) \iff E_2(x) = F_2(x) \qquad (x \in D).$$

La doble flecha no significa «ahora hago el siguiente paso». Significa algo lógico preciso: si un valor de D satisface la primera ecuación, también satisface la segunda, y recíprocamente. Están justificadas **ambas direcciones**.

Un ejemplo completamente reversible. Considere

$$3x - 5 = 7, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sumar 5 en ambos miembros produce $3x = 12$. Restar 5 deshace exactamente ese paso. Después podemos dividir ambos miembros por 3; como $3 \neq 0$, esa operación también es reversible. Por tanto,

$$3x - 5 = 7 \iff 3x = 12 \iff x = 4.$$

Cada ecuación tiene el mismo conjunto solución, $\{4\}$. Aquí la doble flecha está justificada paso por paso.

Implicación: una sola dirección. Ahora considere $x = 1$. Si elevamos ambos miembros al cuadrado obtenemos $x^2 = 1$. Todo valor que satisface $x = 1$ satisface también $x^2 = 1$, de modo que

$$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1.$$

Pero la vuelta falla, porque $x^2 = 1$ tiene soluciones $\{-1, 1\}$, mientras que la ecuación original sólo tiene $\{1\}$. No podemos escribir una equivalencia. En términos de conjuntos,

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x = 1) \subsetneq \mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 = 1).$$

La transformación creó un **candidato adicional**.

La dirección de la flecha importa. Si

$$E_1 = F_1 \Longrightarrow E_2 = F_2,$$

entonces

$$\mathrm{Sol}_D(E_1 = F_1) \subseteq \mathrm{Sol}_D(E_2 = F_2).$$

Si, en cambio, sólo sabemos

$$E_1 = F_1 \Longleftarrow E_2 = F_2,$$

entonces

$$\mathrm{Sol}_D(E_2 = F_2) \subseteq \mathrm{Sol}_D(E_1 = F_1).$$

La orientación de la flecha registra así qué conjunto puede contener al otro.

Cómo se puede perder una solución. Considere

$$x(x-2) = 0.$$

Su conjunto solución es $\{0, 2\}$. Si dividimos ambos miembros por x, obtenemos $x - 2 = 0$, cuya única solución es 2. El paso no es reversible porque dividir por x exige $x \neq 0$, y $x = 0$ era precisamente una solución original.

No es correcto escribir

$$x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x - 2 = 0.$$

Sí es cierto, en cambio, que

$$x - 2 = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0.$$

En términos de conjuntos, $\{2\} \subsetneq \{0, 2\}$. La operación no creó candidatos: **borró una solución**.

Dos fallas diferentes. Conviene separar dos fenómenos:

1. una transformación puede **crear candidatos adicionales**;
2. una transformación puede **perder soluciones originales**.

Elevar al cuadrado suele ilustrar el primer peligro. Dividir por una expresión que puede anularse ilustra el segundo. En el primer caso, una comprobación final puede filtrar candidatos extraños. En el segundo, comprobar lo que sobrevivió no recupera automáticamente lo que ya fue eliminado. Por eso debemos controlar la lógica durante la transformación y no sólo al final.

La equivalencia depende también del dominio. Volvamos a

$$\frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Sobre el dominio efectivo $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, podemos escribir

$$\frac{x-1}{x-1} = 1 \Longleftrightarrow 1 = 1 \qquad (x \in D),$$

porque dentro de D el factor $x - 1$ nunca es cero. Sería incorrecto reinterpretar la ecuación de la derecha sobre todo $\mathbb{R}$ y reinsertar $x = 1$. La equivalencia se afirmó **sobre** D.

Una cadena mixta. Considere

$$\sqrt{x+1} = x - 1.$$

No la resolveremos todavía; eso corresponde a §21.11. Pero si elevamos ambos miembros al cuadrado, la flecha segura es

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \Longrightarrow x + 1 = (x-1)^2.$$

Al cuadrar podemos perder información de signo y generar candidatos. Más adelante veremos cómo añadir condiciones de admisibilidad para recuperar una equivalencia exacta.

Un protocolo para leer cadenas de resolución. En cada transición preguntaremos:

1. **¿la transformación es reversible sobre el dominio vigente?**
2. **si lo es, puedo escribir $\Longleftrightarrow$?**
3. **si sólo conservo una dirección, cuál es la flecha correcta?**
4. **el nuevo conjunto es igual, mayor o menor que el anterior?**
5. **aparecieron candidatos o pudieron perderse soluciones?**

Recuperación breve. Clasifique cada transición sobre $\mathbb{R}$.

a) $x + 4 = 9 \to x = 5$.

b) $x = 3 \to x^2 = 9$.

c) $x(x+1) = 0 \to x + 1 = 0$, obtenida dividiendo por x.

Respuesta razonada. En **a)** restar 4 es reversible, por lo que

$$x + 4 = 9 \Longleftrightarrow x = 5.$$

En **b)** se conserva sólo una dirección:

$$x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9,$$

porque la ecuación cuadrada también admite $x = -3$.

En **c)** la ecuación original tiene soluciones $\{-1, 0\}$, mientras que la transformada sólo conserva -1; la dirección segura es

$$x + 1 = 0 \Longrightarrow x(x+1) = 0.$$

Qué debemos conservar de esta sección. La fuerza lógica de una transformación se lee en su efecto sobre el conjunto solución:

> **equivalencia = mismo conjunto solución; implicación = inclusión en una sola dirección.**

La doble flecha $\Longleftrightarrow$ exige reversibilidad sobre el dominio vigente. Una flecha simple puede señalar candidatos adicionales o soluciones perdidas, según su orientación.

En §21.3 estudiaremos sistemáticamente qué operaciones aplicadas a ambos miembros son reversibles y qué hipótesis —en especial la no nulidad— permiten escribir una equivalencia.

21.3. Operaciones reversibles en ambos miembros

En §21.2 vimos que una doble flecha sólo está justificada cuando el paso conserva exactamente el conjunto solución. Ahora podemos estudiar las operaciones que usamos con más frecuencia al resolver ecuaciones y preguntar, para cada una:

> **¿qué hipótesis hacen que aplicar la misma operación a ambos miembros sea realmente reversible?**

La respuesta tiene dos capas. Primero, todas las expresiones nuevas deben estar definidas sobre el dominio vigente. Segundo, cuando aparece una multiplicación o una división, debemos controlar además si el factor puede valer cero.

Sumar la misma expresión. Suponga que, sobre un dominio D, tenemos la ecuación

$$A(x) = B(x),$$

y que $G(x)$ está definida para todo $x \in D$. Entonces

$$A(x) = B(x) \iff A(x) + G(x) = B(x) + G(x) \qquad (x \in D).$$

La razón es simple pero importante: si sumamos G podemos deshacer el paso restando exactamente la misma expresión. No hay una condición de no nulidad.

Por ejemplo,

$$2x - 7 = 5 \iff 2x = 12,$$

porque se sumó 7 a ambos miembros y la operación inversa consiste en restar 7.

Lo mismo vale para restar una expresión definida en todo el dominio, ya que restar G equivale a sumar $-G$.

La condición de definida no debe olvidarse. La frase «sumar lo mismo en ambos miembros» no autoriza a introducir una expresión que no esté definida en todo el dominio vigente.

Considere, sobre $D = \mathbb{R}$,

$$x = 2.$$

Si intentáramos sumar $1/(x-1)$ a ambos miembros, obtendríamos una nueva escritura que ni siquiera está definida en $x = 1$. Aunque $x = 1$ no sea solución de la ecuación original, hemos cambiado el dominio de la ecuación transformada.

Por eso, la regla correcta no es simplemente «se puede sumar lo mismo». Es:

> **se puede sumar o restar la misma expresión siempre que esa expresión esté definida en todo el dominio sobre el que afirmamos la equivalencia.**

Multiplicar por una constante no nula. Si c es una constante real con $c \neq 0$, entonces

$$A = B \iff cA = cB.$$

La vuelta se obtiene dividiendo por c, operación permitida porque c no es cero.

Por ejemplo,

$$\frac{x}{3} = 4 \iff x = 12.$$

Aquí hemos multiplicado ambos miembros por 3, y el paso es reversible porque $3 \neq 0$.

¿Qué ocurre si multiplicamos por 0? Toda ecuación se transforma en

$$0 = 0,$$

que es verdadera para todos los valores del dominio. La información sobre el conjunto solución desaparece por completo. Ésta es la primera señal de que la multiplicación necesita una hipótesis adicional que la suma no requería.

Multiplicar por una expresión variable. Sea ahora $M(x)$ una expresión definida sobre D. Siempre se cumple la implicación

$$A(x) = B(x) \Longrightarrow A(x)M(x) = B(x)M(x).$$

Pero para poder escribir la equivalencia

$$A(x) = B(x) \Longleftrightarrow A(x)M(x) = B(x)M(x),$$

una condición suficiente que garantiza la reversibilidad para cualquier ecuación es

$$M(x) \neq 0 \qquad \text{para todo } x \in D.$$

Para una ecuación concreta, esta condición no es necesaria: si todos los ceros de M ya satisfacen $A = B$, multiplicar no añade soluciones. En efecto, la ecuación multiplicada equivale a $M = 0$ o $A = B$, por el producto nulo. Así, su conjunto solución es la unión de las soluciones originales con los ceros de M en D. El ejercicio 87 examina precisamente esa excepción.

Si M puede anularse, la ecuación multiplicada puede adquirir soluciones nuevas precisamente en los ceros de M.

Por ejemplo,

$$x = 2$$

tiene conjunto solución $\{2\}$. Multiplicando ambos miembros por x obtenemos

$$x^2 = 2x,$$

es decir,

$$x(x - 2) = 0,$$

cuyo conjunto solución es $\{0, 2\}$. El cero apareció porque el factor por el que multiplicamos podía anularse.

Así,

$$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 2x,$$

pero no hay equivalencia sobre $\mathbb{R}$.

El dominio puede convertir un factor variable en un factor seguro. Que $M(x)$ dependa de x no es, por sí solo, un problema. Lo decisivo es si puede valer cero en el dominio vigente.

Considere

$$\frac{1}{x - 2} = 3.$$

Su dominio efectivo es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Dentro de D, el factor $x - 2$ está garantizado como no nulo. Por eso podemos multiplicar ambos miembros por $x - 2$ y escribir legítimamente

$$\frac{1}{x - 2} = 3 \Longleftrightarrow 1 = 3(x - 2) \qquad (x \in D).$$

La operación es reversible **sobre ese dominio**. La misma multiplicación no podría declararse automáticamente reversible sobre todo $\mathbb{R}$, porque en $x = 2$ el factor se anula y, además, la ecuación original ni siquiera está definida.

Dividir por una expresión. Dividir por $M(x)$ equivale a multiplicar por su recíproco. Por tanto, la operación sólo tiene sentido donde

$$M(x) \neq 0.$$

Si sabemos que M es no nula en todo el dominio D, entonces

$$A = B \iff \frac{A}{M} = \frac{B}{M} \qquad (x \in D).$$

Pero si M puede anularse en una solución original, dividir sin separar ese caso puede borrar soluciones.

Por ejemplo,

$$x(x+3) = 2x$$

se puede escribir como

$$x(x+1) = 0,$$

de modo que sus soluciones son $x = 0$ y $x = -1$.

Si dividimos desde el comienzo por x, obtenemos

$$x + 3 = 2,$$

y sólo recuperamos $x = -1$. La solución $x = 0$ desapareció porque la división no estaba autorizada allí.

La dirección segura es

$$x + 3 = 2 \Longrightarrow x(x+3) = 2x,$$

no una equivalencia sobre todo $\mathbb{R}$.

Dividir exige una decisión previa. Cuando aparece un factor variable que quisiéramos cancelar o usar como divisor, debemos decidir antes entre dos situaciones:

1. **sabemos que el factor es no nulo en todo el dominio vigente**: podemos dividir y conservar equivalencia;
2. **el factor puede valer cero**: debemos separar el caso $M(x) = 0$ antes de dividir, o usar otra ruta que no lo elimine.

Este principio aparecerá repetidamente en ecuaciones factorizadas, racionales, paramétricas y sistemas.

Una forma general de recordar las reglas. Sobre un dominio D donde todas las expresiones involucradas están definidas:

- sumar o restar la misma expresión preserva equivalencia;
- multiplicar por una expresión M preserva equivalencia si $M \neq 0$ en todo D;
- dividir por M preserva equivalencia si $M \neq 0$ en todo D;
- si M puede anularse, multiplicar puede crear candidatos y dividir puede perder soluciones.

La asimetría de los dos últimos casos es importante. Multiplicar por cero destruye información porque varias igualdades distintas pueden convertirse en la misma igualdad. Dividir por una expresión que vale cero en una solución descarta directamente ese caso.

Recuperación breve. Clasifique cada transformación sobre el dominio indicado.

a) Sobre $\mathbb{R}$,

$$x - 5 = 8 \quad \longrightarrow \quad x = 13,$$

sumando 5 a ambos miembros.

b) Sobre $\mathbb{R}$,

$$x = 3 \quad \longrightarrow \quad x^2 = 3x,$$

multiplicando por x.

c) Sobre $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$$\frac{2}{x-4} = 5 \quad \longrightarrow \quad 2 = 5(x-4),$$

multiplicando por $x - 4$.

Respuesta razonada. En **a)** sumar 5 es reversible y no introduce restricciones nuevas, por lo que

$$x - 5 = 8 \iff x = 13.$$

En **b)** el factor x puede valer cero. La ecuación original tiene solución $\{3\}$, mientras que $x^2 = 3x$ tiene soluciones $\{0, 3\}$. Por tanto,

$$x = 3 \Longrightarrow x^2 = 3x,$$

pero no hay equivalencia sobre $\mathbb{R}$.

En **c)** el dominio ya excluye $x = 4$, así que $x - 4 \neq 0$ en todo D. La multiplicación es reversible sobre ese dominio:

$$\frac{2}{x-4} = 5 \iff 2 = 5(x-4) \qquad (x \in D).$$

Qué debemos conservar de esta sección. Las operaciones sobre ambos miembros no se justifican por una regla gráfica de «hacer lo mismo a ambos lados». Se justifican porque son reversibles bajo hipótesis precisas.

> **Sumar o restar exige que la expresión añadida esté definida; multiplicar o dividir exige además controlar la no nulidad del factor.**

La condición $M(x) \neq 0$ es lo que permite recuperar la ecuación anterior y, por tanto, conservar exactamente el conjunto solución.

En §21.4 estudiaremos qué ocurre cuando esas hipótesis fallan y aprenderemos a localizar con precisión la primera transformación que crea candidatos o pierde soluciones.

21.4. Transformaciones que crean o pierden candidatos

En §21.3 identificamos las hipótesis que hacen reversibles las operaciones más comunes. Ahora estudiaremos el caso complementario: **qué ocurre cuando usamos una transformación sin disponer de esas hipótesis**.

La pregunta cambia ligeramente. Ya no preguntaremos sólo

> **¿la transformación es correcta como cálculo?**

sino, de manera más precisa,

> **¿qué ocurrió con el conjunto solución en el primer paso que dejó de ser reversible?**

Ésta será nuestra idea de **primera ruptura**. Una cadena puede contener muchos pasos algebraicamente impecables después de una transición no equivalente. Si el conjunto solución ya cambió en esa transición, los pasos posteriores no reparan por sí solos la pérdida de información.

Tres comportamientos posibles. Suponga que una ecuación E_0 se transforma en otra E_1 sobre un dominio D.

Pueden ocurrir tres situaciones:

1. **equivalencia**:
$$\mathrm{Sol}_D(E_0) = \mathrm{Sol}_D(E_1);$$
2. **creación de candidatos**:
$$\mathrm{Sol}_D(E_0) \subsetneq \mathrm{Sol}_D(E_1);$$
3. **pérdida de soluciones**:
$$\mathrm{Sol}_D(E_1) \subsetneq \mathrm{Sol}_D(E_0).$$

En el primer caso podemos escribir $\Longleftrightarrow$. En el segundo, la dirección segura es $E_0 \Longrightarrow E_1$. En el tercero, la dirección segura es $E_1 \Longrightarrow E_0$.

La dificultad práctica consiste en reconocer **qué operación produjo la inclusión estricta**.

Multiplicar por un factor que puede anularse: aparecen candidatos. Considere, sobre $\mathbb{R}$,

$$2x = 6.$$

Su conjunto solución es

$$\{3\}.$$

Multipliquemos ambos miembros por $x - 4$:

$$2x(x-4) = 6(x-4).$$

Toda solución de la ecuación original satisface la nueva, de modo que

$$2x = 6 \Longrightarrow 2x(x-4) = 6(x-4).$$

Pero la ecuación transformada se puede escribir como

$$2(x-4)(x-3) = 0,$$

y entonces admite

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = 4.$$

El valor 4 no apareció por un error de expansión ni por una factorización incorrecta. Apareció porque, cuando $x = 4$, el factor multiplicativo $x - 4$ convierte **ambos miembros** en cero, aunque la igualdad original $2x = 6$ sea falsa.

Por tanto,

$$\{3\} \subsetneq \{3, 4\}.$$

La primera ruptura fue exactamente la multiplicación por un factor que podía anularse.

Dividir por un factor que puede anularse: desaparecen soluciones. Ahora considere

$$(x-1)(x+2)=0.$$

Por la propiedad del producto nulo, su conjunto solución es

$$\{-2,1\}.$$

Si dividimos por $x-1$, obtenemos

$$x+2=0,$$

cuya única solución es

$$-2.$$

El valor $x=1$ no se volvió falso. Fue eliminado porque la división por $x-1$ no estaba definida precisamente en ese valor.

Así,

$$\{-2\}\subsetneq\{-2,1\}.$$

La dirección segura es

$$x+2=0\Longrightarrow(x-1)(x+2)=0,$$

pero no la equivalencia.

Este fenómeno es más peligroso que la mera aparición de un candidato extra: **una comprobación final de los valores que sobrevivieron no recupera una solución que ya fue borrada de la cadena**.

Elevar al cuadrado: una transformación que puede borrar el signo. Considere la ecuación

$$x+1=-1.$$

Su única solución es

$$x=-2.$$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado,

$$(x+1)^2=1.$$

La ecuación cuadrada admite

$$x+1=1 \qquad \text{o} \qquad x+1=-1,$$

es decir,

$$x=0 \qquad \text{o} \qquad x=-2.$$

Por tanto,

$$\{-2\}\subsetneq\{-2,0\}.$$

El cuadrado no recuerda si antes de elevar ambos miembros éstos eran iguales o eran opuestos. Por eso, en general,

$$A = B \Longrightarrow A^2 = B^2,$$

pero no podemos invertir la flecha sin información adicional.

En §21.11 aplicaremos esta idea a ecuaciones radicales. Aquí sólo necesitamos identificar la estructura lógica: **elevar al cuadrado puede ampliar el conjunto de candidatos porque destruye información de signo**.

Un candidato extra no es lo mismo que un valor excluido por dominio. Considere

$$\frac{x+1}{x-2} = 0.$$

El dominio efectivo excluye desde el principio $x = 2$. Si al eliminar denominadores apareciera después el número 2 como raíz de alguna ecuación auxiliar, ese valor no sería una solución «creada» por la transformación en el mismo sentido que el 4 del ejemplo anterior: 2 **nunca fue admisible en el problema original**.

Conviene mantener separados los dos diagnósticos:

- **candidato extraño por transformación**: pertenece al dominio original, pero aparece sólo después de una implicación no reversible;
- **valor inadmisible por dominio**: nunca perteneció al conjunto donde se interpretaba la ecuación original.

En ambos casos el valor debe descartarse, pero la causa lógica es distinta.

La primera ruptura en una cadena larga. Considere la cadena

$$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 2x \Longleftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0.$$

Los dos últimos pasos son equivalencias: restar $2x$ y factorizar no cambian el conjunto solución de la ecuación que reciben.

Sin embargo, la ecuación final tiene soluciones

$$\{0, 2\},$$

mientras que la inicial sólo tenía

$$\{2\}.$$

¿Dónde nació $x = 0$? No en la factorización. No al pasar todos los términos a un miembro. La primera ruptura fue

$$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 2x,$$

obtenida al multiplicar por x, que podía valer cero.

Este modo de leer una cadena será fundamental en el laboratorio de errores de §21.15:

> **cuando el resultado final contiene una solución incorrecta o falta una solución correcta, busque la primera transición donde dejó de haber equivalencia.**

Filtrar candidatos cuando sólo hemos avanzado por implicación. Si una cadena tiene la forma

$$E_0 \Longrightarrow E_1 \Longleftrightarrow E_2 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow E_n,$$

las soluciones de E_n son, en principio, **candidatos** para E_0. La primera flecha sólo garantiza

$$\mathrm{Sol}(E_0) \subseteq \mathrm{Sol}(E_n).$$

Para decidir cuáles candidatos pertenecen realmente al conjunto solución original debemos volver a E_0 o utilizar condiciones de admisibilidad equivalentes que hayamos conservado.

Esto justifica la comprobación final en ecuaciones donde hubo pasos sólo implicativos.

Por qué verificar al final no basta para todo. La verificación final es muy poderosa para eliminar candidatos adicionales. Si una transformación amplió el conjunto, probar cada candidato en la ecuación original permite distinguir cuáles sobreviven.

Pero no resuelve el problema opuesto.

Si una transformación perdió una solución, esa solución ya no aparece entre los candidatos finales. Verificar los valores restantes no puede advertirnos automáticamente de que falta uno.

Por eso la disciplina correcta tiene dos niveles:

1. **durante la cadena**, controlar la fuerza lógica de cada paso;
2. **al final**, verificar los candidatos cuando hubo alguna transformación sólo implicativa.

La verificación complementa el control lógico; no lo sustituye.

Una tabla de diagnóstico.

Transformación	Efecto posible	Señal lógica
operación reversible bajo sus hipótesis	conserva exactamente	$\Longleftrightarrow$
multiplicar por factor que puede ser cero	añade candidatos	$\Longrightarrow$ desde la original
dividir por factor que puede ser cero	pierde soluciones	$\Longleftarrow$ desde la original
elevar al cuadrado	puede añadir candidatos	$\Longrightarrow$ desde la original
olvidar una restricción de dominio	admite valores que nunca fueron válidos	cambio indebido del dominio

Esta tabla no sustituye el análisis del caso concreto. Sirve para saber **qué pregunta hacer** cuando una cadena parece sospechosa.

Recuperación breve. En cada cadena, localice la primera ruptura de equivalencia y describa su efecto sobre el conjunto solución.

a)

$$x = 5 \Longrightarrow x(x-5) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 5.$$

b)

$$(x+1)(x-3) = 0 \longrightarrow x - 3 = 0,$$

donde la flecha se obtuvo dividiendo por $x + 1$.

c)

$$x - 2 = -2 \Longrightarrow (x-2)^2 = 4 \Longleftrightarrow x - 2 = 2 \text{ o } x - 2 = -2.$$

Respuesta razonada. En **a)** la ruptura está en la primera transición: multiplicar la ecuación $x = 5$ por x permite que $x = 0$ satisfaga la ecuación transformada. El conjunto pasa de $\{5\}$ a $\{0, 5\}$.

En **b)** la ecuación original tiene soluciones $\{-1, 3\}$. Dividir por $x + 1$ elimina $x = -1$, por lo que la transformada conserva sólo $\{3\}$. La ruptura es una pérdida de solución.

En **c)** la ecuación original tiene solución $\{0\}$. Al cuadrar obtenemos $(x - 2)^2 = 4$, cuyas soluciones son $\{0, 4\}$. El nuevo valor 4 es un candidato adicional creado por la pérdida de información de signo.

Qué debemos conservar de esta sección. Cuando una resolución deja de ser una cadena de equivalencias, debemos saber **cómo** cambió el conjunto solución.

> **Crear candidatos y perder soluciones son fallas lógicas distintas, y ambas pueden localizarse buscando la primera ruptura de equivalencia.**

Si una transformación sólo amplía el conjunto, los resultados finales deben tratarse como candidatos y filtrarse. Si una transformación reduce el conjunto, una comprobación final de los sobrevivientes no basta: debemos volver al paso donde se perdió información.

En §21.5 aplicaremos esta disciplina a las ecuaciones lineales, incluidas identidades, contradicciones y casos degenerados sencillos.

La comprobación filtra; la cobertura conserva. Si una ecuación original tiene soluciones S y una transformación produce candidatos T con $S \subseteq T$, comprobar todos los elementos de T en la original puede recuperar exactamente S. Si, en cambio, se perdió una parte de S, comprobar los sobrevivientes solo prueba que son soluciones. **Control resuelto:** dividir $(x - a)(x - b) = 0$ por $x - a$ entrega $x = b$ donde la división existe, pero no examina $x = a$. Debemos separar primero $x = a$ y $x \neq a$; en la primera rama el producto es cero, y en la segunda obtenemos $x = b$, sujeto a la rama. Si $a = b$, la segunda rama no aporta nada y la primera da la única solución. Comprobar un resultado y demostrar que no falta ninguno son obligaciones diferentes.

21.5. Ecuaciones lineales, identidades y contradicciones

Hasta ahora hemos estudiado la lógica de las transformaciones sin concentrarnos en una familia particular de ecuaciones. Podemos aplicar ahora esa disciplina al caso más elemental y, precisamente por eso, más importante para fijar hábitos correctos: las ecuaciones lineales.

La pregunta de esta sección no será sólo «¿cómo despejo x?», sino una más completa:

> **¿qué conjunto solución puede producir una ecuación lineal una vez que todas las transformaciones equivalentes han sido realizadas?**

La respuesta incluye tres posibilidades fundamentales: una única solución, ninguna solución o todos los valores del dominio.

La forma lineal básica. Consideremos, sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, una ecuación de la forma

$$ax + b = c,$$

donde a, b y c son constantes reales.

Restar b en ambos miembros es una transformación reversible, de modo que

$$ax + b = c \iff ax = c - b.$$

Es natural querer dividir inmediatamente por a. Pero §21.3 nos obliga a formular antes la pregunta correcta:

¿sabemos que $a \neq 0$?

Si la respuesta es sí, podemos dividir por a y conservar equivalencia. Si la respuesta es no, debemos separar casos.

Caso 1: el coeficiente de la variable es no nulo. Supongamos primero que

$$a \neq 0.$$

Entonces

$$ax = c - b \Longleftrightarrow x = \frac{c-b}{a}.$$

Si trabajamos sobre $D = \mathbb{R}$, el conjunto solución es el singleton

$$\left\{ \frac{c-b}{a} \right\}.$$

Sobre un dominio general D, todavía hay que comprobar que el valor obtenido pertenece a D. Por tanto,

$$\mathrm{Sol}_D(ax + b = c) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{c-b}{a} \right\}, & \text{si } \dfrac{c-b}{a} \in D, \\ \varnothing, & \text{si } \dfrac{c-b}{a} \notin D. \end{cases}$$

Incluso una ecuación lineal puede quedar sin solución si el dominio declarado excluye el único valor algebraicamente posible.

Un ejemplo con una solución única. Resolvamos

$$5x - 7 = 2x + 8$$

sobre $\mathbb{R}$.

Restamos $2x$ en ambos miembros:

$$5x - 7 = 2x + 8 \Longleftrightarrow 3x - 7 = 8.$$

Sumamos 7:

$$3x - 7 = 8 \Longleftrightarrow 3x = 15.$$

Como $3 \neq 0$, dividimos por 3:

$$3x = 15 \Longleftrightarrow x = 5.$$

Cada paso fue reversible, por lo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(5x - 7 = 2x + 8) = \{5\}.}$$

Aquí el procedimiento habitual de «reunir las x a un lado y las constantes al otro» funciona porque, detrás de cada movimiento, hay operaciones reversibles ya justificadas.

El dominio puede eliminar la única solución algebraica. Considere ahora

$$2x = 6, \qquad x \in [0, 2].$$

Algebraicamente,

$$2x = 6 \iff x = 3.$$

Pero $3 \notin [0, 2]$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{[0,2]}(2x = 6) = \varnothing.}$$

No hay contradicción entre «la ecuación da $x = 3$» y «el conjunto solución es vacío». La primera frase identifica el único candidato producido por el álgebra; la segunda incorpora además el dominio del problema.

Caso 2: el coeficiente de la variable se anula. Supongamos ahora que

$$a = 0.$$

La ecuación

$$ax + b = c$$

se reduce a

$$b = c.$$

La variable ha desaparecido. Ya no estamos ante una condición que seleccione un valor particular de x, sino ante una proposición constante.

Pueden ocurrir dos cosas.

Si

$$b = c,$$

la igualdad es verdadera para **todo** $x \in D$. Entonces

$$\mathrm{Sol}_D(0x + b = b) = D.$$

Si, en cambio,

$$b \neq c,$$

la igualdad es falsa para **todo** $x \in D$. Entonces

$$\mathrm{Sol}_D(0x + b = c) = \varnothing.$$

Ésta es la razón por la que no se debe dividir por el coeficiente de x antes de saber que ese coeficiente es distinto de cero.

Identidad sobre el dominio. Considere

$$3(x-2) = 3x - 6.$$

Al desarrollar el lado izquierdo obtenemos

$$3x - 6 = 3x - 6.$$

Restando $3x$ y sumando 6 en ambos miembros llegamos a

$$0 = 0.$$

No hemos «perdido la variable por accidente». Hemos descubierto que la igualdad es verdadera para todo número real. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}\big(3(x-2) = 3x - 6\big) = \mathbb{R}.}$$

Diremos que la ecuación es una **identidad sobre el dominio considerado**: todos los valores admisibles la satisfacen.

Si el dominio hubiera sido un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, el conjunto solución sería exactamente D, no necesariamente todo $\mathbb{R}$.

Contradicción sobre el dominio. Considere ahora

$$2(x+1) = 2x + 5.$$

Desarrollamos:

$$2x + 2 = 2x + 5.$$

Restamos $2x$ en ambos miembros:

$$2 = 5.$$

La proposición final es falsa. Ningún valor de x puede hacer verdadera la ecuación original, porque todas las transformaciones utilizadas fueron equivalencias. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}\big(2(x+1) = 2x + 5\big) = \varnothing.}$$

Diremos que la ecuación es una **contradicción sobre el dominio considerado**.

Tres resultados posibles después de reducir una ecuación lineal. Una ecuación lineal con la variable en ambos miembros puede escribirse, después de transformaciones equivalentes, en la forma

$$ax = b.$$

Sobre un dominio D, la clasificación completa es:

Condición	Forma final	Conjunto solución
$a \neq 0$	$x = b/a$	$\{b/a\}$ si $b/a \in D$; en otro caso $\varnothing$
$a = 0$ y $b = 0$	$0 = 0$	D
$a = 0$ y $b \neq 0$	$0 = b$	$\varnothing$

Esta tabla contiene más información que la receta «despejar x». En particular, explica por qué algunas ecuaciones lineales no tienen una única solución.

Variable en ambos miembros. Consideremos la forma más general

$$ax + b = cx + d.$$

Restar cx y luego b produce

$$ax + b = cx + d \iff (a - c)x = d - b.$$

La clasificación depende ahora del coeficiente

$$a - c.$$

Si $a - c \neq 0$, obtenemos una única solución algebraica:

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

Si $a - c = 0$, la variable desaparece y debemos comparar $d - b$ con cero:

- si $d - b = 0$, la ecuación es verdadera para todo el dominio;
- si $d - b \neq 0$, no hay soluciones.

El punto lógico es el mismo que antes. La desaparición de la variable no es un error: es información sobre la relación entre los dos miembros.

Un contraste muy cercano. Compare las ecuaciones

$$4x + 3 = 4x + 3$$

y

$$4x + 3 = 4x + 5.$$

En ambas desaparece x al restar $4x$. Pero las conclusiones son opuestas:

$$4x + 3 = 4x + 3 \iff 3 = 3,$$

por lo que todas las x del dominio son soluciones; mientras que

$$4x + 3 = 4x + 5 \iff 3 = 5,$$

por lo que ninguna lo es.

La expresión «se canceló la x» no basta para diagnosticar el problema. Hay que leer la proposición constante que queda.

Un primer caso degenerado con parámetro. Los parámetros se estudiarán sistemáticamente en §21.13. Aquí basta un ejemplo mínimo para mostrar por qué la separación de casos es obligatoria.

Considere

$$(a - 1)x = 2(a - 1)$$

sobre $\mathbb{R}$.

Si $a \neq 1$, entonces $a - 1 \neq 0$ y podemos dividir:

$$(a - 1)x = 2(a - 1) \iff x = 2.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{2\}.$$

Pero si $a = 1$, la ecuación se convierte en

$$0 = 0,$$

y entonces

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$

Dividir inmediatamente por $a - 1$ habría borrado por completo el caso $a = 1$. Éste es exactamente el tipo de pérdida que aprendimos a detectar en §§21.3–21.4.

No toda desaparición de la variable significa lo mismo. Después de simplificar una ecuación lineal pueden aparecer escrituras como

$$0 = 0, \qquad 0 = 7, \qquad 0x = 0, \qquad 0x = 7.$$

Las dos primeras parejas expresan la misma distinción:

- una proposición verdadera independiente de x;
- una proposición falsa independiente de x.

Por eso, ante una ecuación lineal, la pregunta final no es simplemente «¿quedó x aislada?». Es:

> **¿qué proposición equivalente quedó y qué conjunto de valores del dominio la satisface?**

Un protocolo para ecuaciones lineales. Podemos resumir el procedimiento sin convertirlo en una receta ciega:

1. fijar el dominio vigente;
2. usar sólo transformaciones equivalentes para reunir los términos con x y las constantes;
3. reducir a una forma $ax = b$;
4. preguntar si a es cero;
5. si $a \neq 0$, dividir y comprobar que el valor obtenido pertenece al dominio;
6. si $a = 0$, decidir si la proposición restante es verdadera o falsa;
7. declarar explícitamente el conjunto solución.

Este protocolo evita dos errores frecuentes: dividir por un coeficiente que podría ser cero y confundir una identidad con una «ecuación sin respuesta».

Recuperación breve. Determine el conjunto solución sobre $\mathbb{R}$ en cada caso.

a)

$$7x + 4 = 2x + 19.$$

b)

$$5(x - 2) = 5x - 10.$$

c)

$$4(x + 1) = 4x + 7.$$

Respuesta razonada. En **a)**,

$$7x + 4 = 2x + 19 \iff 5x = 15 \iff x = 3,$$

por lo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{3\}.}$$

En **b)**,

$$5(x-2) = 5x - 10 \iff 5x - 10 = 5x - 10 \iff 0 = 0.$$

La igualdad es verdadera para todo real, así que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.}$$

En **c)**,

$$4(x+1) = 4x + 7 \iff 4x + 4 = 4x + 7 \iff 4 = 7.$$

La igualdad es falsa para todo real, de modo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Una ecuación lineal no siempre produce «un valor de x». Después de transformaciones equivalentes puede quedar una ecuación con coeficiente no nulo, una identidad o una contradicción.

> **La forma $ax = b$ debe leerse por casos: si $a \neq 0$, hay a lo sumo una solución; si $a = 0$, la ecuación puede ser verdadera para todo el dominio o falsa para todo el dominio.**

La obligación de separar el caso $a = 0$ no es una precaución técnica menor: evita dividir por cero y perder familias completas de soluciones.

En §21.6 estudiaremos ecuaciones cuya estructura multiplicativa permite reemplazar una igualdad por una disyunción de casos mediante la propiedad del producto nulo.

21.6. Producto nulo y ecuaciones factorizadas

En §21.5 vimos que una ecuación puede resolverse reduciéndola mediante transformaciones equivalentes hasta una forma sencilla. Ahora estudiaremos una estructura diferente: una ecuación cuyo lado izquierdo aparece como un **producto** y cuyo lado derecho es cero.

La forma básica es

$$A(x)B(x) = 0.$$

Aquí no necesitamos dividir por ninguno de los factores. En cambio, podemos usar una propiedad elemental de los números reales que transforma una sola ecuación en una **disyunción de casos**.

La propiedad del producto nulo. Para números reales u y v,

$$uv = 0 \iff u = 0 \text{ o } v = 0.$$

Aplicada a expresiones definidas sobre un dominio D, esta propiedad da

$$A(x)B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ o } B(x) = 0.$$

La doble flecha es importante. No estamos produciendo candidatos adicionales: estamos describiendo exactamente cuándo el producto vale cero.

En términos de conjuntos solución,

$$\mathrm{Sol}_D(AB = 0) = \mathrm{Sol}_D(A = 0) \cup \mathrm{Sol}_D(B = 0).$$

Resolver una ecuación factorizada consiste, por tanto, en resolver cada factor igualado a cero y **unir** los conjuntos obtenidos.

Un primer ejemplo. Resolvamos

$$(x - 4)(2x + 3) = 0$$

sobre $\mathbb{R}$.

Por producto nulo,

$$(x - 4)(2x + 3) = 0 \iff x - 4 = 0 \text{ o } 2x + 3 = 0.$$

De la primera rama obtenemos

$$x = 4,$$

y de la segunda,

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}((x - 4)(2x + 3) = 0) = \left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}.}$$

El conjunto final es la unión de las soluciones de las dos ramas.

Factorizar puede revelar la estructura lógica. Considere ahora

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Tal como vimos en C19,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

La factorización es una identidad algebraica, de modo que reemplazar el polinomio por su forma factorizada no cambia el conjunto solución:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x - 2)(x - 3) = 0.$$

Ahora la propiedad del producto nulo produce

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ o } x - 3 = 0.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 - 5x + 6 = 0) = \{2, 3\}.}$$

La factorización no es aquí sólo una reescritura conveniente. **Hace visible una disyunción que estaba escondida en la forma expandida.**

Primero llevar la ecuación a cero. La propiedad del producto nulo se aplica a una igualdad de la forma

$$\text{producto} = 0.$$

Por eso, ante

$$x^2 = 5x - 6,$$

no podemos factorizar cada miembro por separado y declarar casos. Primero llevamos todos los términos a un miembro mediante una transformación equivalente:

$$x^2 = 5x - 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Después factorizamos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0,$$

y recién entonces usamos el producto nulo.

La secuencia lógica es

$$\text{ecuación} \iff \text{expresión} = 0 \iff \text{producto} = 0 \iff \text{disyunción de factores nulos.}$$

No se debe dividir por un factor. Considere nuevamente

$$(x-1)(x+2) = 0.$$

El producto nulo da inmediatamente

$$x = 1 \text{ o } x = -2.$$

Si, en cambio, dividimos por $x - 1$, obtenemos sólo

$$x + 2 = 0,$$

y perdemos la solución $x = 1$.

La razón ya fue estudiada en §§21.3–21.4: el factor $x - 1$ puede ser cero precisamente en una solución de la ecuación.

Por eso, cuando tenemos

$$A(x)B(x) = 0,$$

la propiedad del producto nulo es estructuralmente superior a cancelar un factor. **La disyunción conserva todas las ramas; la división puede borrar una de ellas.**

Más de dos factores. La propiedad se extiende a cualquier producto finito. Sobre los reales,

$$A_1 A_2 \cdots A_n = 0 \iff A_1 = 0 \text{ o } A_2 = 0 \text{ o } \cdots \text{ o } A_n = 0.$$

Por ejemplo,

$$x(x-2)(x+5) = 0$$

es equivalente a

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2 \quad \text{o} \quad x = -5.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}\big(x(x-2)(x+5)=0\big)=\{-5,0,2\}.}$$

En términos de conjuntos, cada factor aporta una posible rama y el conjunto solución final es la unión de todas ellas.

Factores repetidos no crean soluciones nuevas. Considere

$$(x-2)^2(x+1)=0.$$

Podemos leerlo como

$$(x-2)(x-2)(x+1)=0.$$

El producto nulo produce las ramas

$$x-2=0, \qquad x-2=0, \qquad x+1=0.$$

Las dos primeras son la misma condición. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}\big((x-2)^2(x+1)=0\big)=\{-1,2\}.}$$

Que un factor aparezca repetido puede ser algebraicamente relevante en otros contextos, pero **no duplica un elemento del conjunto solución**.

El dominio sigue gobernando la respuesta. La propiedad del producto nulo identifica qué valores hacen cero el producto, pero sólo los valores pertenecientes al dominio vigente pueden ser soluciones.

Por ejemplo, sobre

$$D=[0,\infty),$$

la ecuación

$$(x+2)(x-3)=0$$

produce algebraicamente los valores

$$x=-2 \qquad \text{y} \qquad x=3.$$

Pero $-2\notin D$. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{[0,\infty)}\big((x+2)(x-3)=0\big)=\{3\}.}$$

La factorización y el producto nulo no suspenden la disciplina de dominio establecida desde §21.1.

La propiedad no se aplica a una suma. Una confusión frecuente consiste en intentar convertir

$$A(x) + B(x) = 0$$

en

$$A(x) = 0 \text{ o } B(x) = 0.$$

Eso es falso en general.
Por ejemplo,

$$x + (2 - x) = 0$$

se reduce a

$$2 = 0,$$

por lo que no tiene soluciones. Sin embargo, las ecuaciones separadas

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad 2 - x = 0$$

producirían los valores 0 y 2, que no satisfacen la ecuación original.
La estructura decisiva no es «hay dos términos». Es específicamente

$$\boxed{\text{producto} = 0}.$$

Factorizar antes de resolver las ramas. Considere

$$2x^2 + 7x + 3 = 0.$$

Buscamos primero una factorización:

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3).$$

Entonces

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \iff (2x + 1)(x + 3) = 0$$

y, por producto nulo,

$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0.$$

De aquí,

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = -3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}}(2x^2 + 7x + 3 = 0) = \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}.}$$

La dificultad de esta ruta reside en encontrar la factorización. Una vez que el producto está visible, la lógica de resolución está completamente determinada.

Una lectura conjuntista de la factorización. Si

$$P(x) = A(x)B(x),$$

entonces resolver

$$P(x) = 0$$

sobre D equivale a resolver las dos ramas

$$A(x) = 0, \qquad B(x) = 0,$$

y formar

$$\mathrm{Sol}_D(P = 0) = \mathrm{Sol}_D(A = 0) \cup \mathrm{Sol}_D(B = 0).$$

Esta perspectiva explica por qué la factorización es tan poderosa para ecuaciones: transforma una condición global en una unión de condiciones más simples.

También explica por qué cancelar un factor es conceptualmente peligroso. Cancelar sustituye una **unión de ramas** por una sola de ellas.

Un protocolo para ecuaciones factorizables. Cuando una ecuación parece resoluble por factorización, seguiremos esta secuencia:

1. fijar el dominio vigente;
2. transformar equivaléntemente la ecuación hasta obtener una expresión igual a cero;
3. factorizar usando identidades válidas;
4. aplicar la propiedad del producto nulo;
5. resolver cada rama por separado;
6. unir las soluciones obtenidas;
7. intersectar con el dominio si es necesario;
8. declarar explícitamente el conjunto solución.

Este protocolo evita dos errores distintos: aplicar producto nulo a una expresión que no es un producto igualado a cero y dividir por un factor que puede representar una solución.

Recuperación breve. Determine el conjunto solución sobre $\mathbb{R}$.

a)

$$(x + 4)(x - 1) = 0.$$

b)

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

c)

$$x^2(x - 5) = 0.$$

Respuesta razonada. En **a)**,

$$(x + 4)(x - 1) = 0 \iff x + 4 = 0 \text{ o } x - 1 = 0,$$

por lo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-4, 1\}.}$$

En **b)** factorizamos

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2),$$

de modo que

$$(x + 3)(x - 2) = 0 \iff x = -3 \text{ o } x = 2.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, 2\}.}$$

En **c)**,

$$x^2(x - 5) = 0 \iff x^2 = 0 \text{ o } x - 5 = 0.$$

La primera rama da $x = 0$ y la segunda $x = 5$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{0, 5\}.}$$

El factor x^2 no hace que 0 aparezca dos veces en el conjunto solución.

Qué debemos conservar de esta sección. La propiedad del producto nulo convierte una ecuación factorizada en una disyunción exacta de casos:

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ o } B = 0.$$

En términos de conjuntos,

$$\boxed{\mathrm{Sol}(AB = 0) = \mathrm{Sol}(A = 0) \cup \mathrm{Sol}(B = 0).}$$

Factorizar hace visible la unión de ramas; dividir por un factor puede borrar una de ellas.

En §21.7 usaremos esta estructura para resolver ecuaciones cuadráticas por factorización y la compararemos con otra transformación equivalente fundamental: completar cuadrados.

21.7. Ecuaciones cuadráticas por factorización y completar cuadrados

En §21.6 vimos que una ecuación factorizada puede resolverse separando ramas mediante la propiedad del producto nulo. Las ecuaciones cuadráticas ofrecen ahora un primer contexto en el que **la misma ecuación puede admitir más de una ruta de resolución**.

Una ecuación cuadrática sobre los reales tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con

$$a \neq 0.$$

La condición $a \neq 0$ no es accesoria: si $a = 0$, la ecuación deja de ser cuadrática y vuelve al caso lineal estudiado en §21.5.

En esta sección compararemos dos rutas:

1. **factorizar**, cuando la estructura puede reconocerse con facilidad;
2. **completar cuadrados**, cuando conviene transformar la expresión en una forma

$$(x-h)^2 = k.$$

Las dos rutas deben producir el mismo conjunto solución porque ambas se construyen mediante transformaciones equivalentes.

Primera ruta: factorizar. Considere

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Reconocemos la factorización

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Por tanto,

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x-3) = 0.$$

Aplicando producto nulo,

$$(x-2)(x-3) = 0 \Longleftrightarrow x-2 = 0 \text{ o } x-3 = 0.$$

Así,

$$x = 2 \qquad \text{o} \qquad x = 3,$$

y

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 - 5x + 6 = 0) = \{2, 3\}.}$$

Aquí la factorización es la ruta natural porque la estructura multiplicativa aparece de inmediato.

Una condición previa que no debe omitirse. La propiedad del producto nulo sólo puede aplicarse cuando el producto está igualado a cero.

Por ejemplo,

$$x^2 - 5x = 6$$

no autoriza escribir directamente

$$x(x-5) = 0.$$

Primero debemos obtener una ecuación equivalente con cero en uno de los miembros:

$$x^2 - 5x = 6 \Longleftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Ahora sí podemos factorizar:

$$x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1),$$

y concluir

$$x = 6 \qquad \text{o} \qquad x = -1.$$

La secuencia correcta es entonces

$$\text{ecuación} \longrightarrow \text{cero en un miembro} \longrightarrow \text{factorización} \longrightarrow \text{producto nulo}.$$

Segunda ruta: construir un cuadrado perfecto. No toda cuadrática revela de inmediato una factorización conveniente. Una segunda posibilidad es **completar el cuadrado**.

La identidad fundamental es

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

La razón se obtiene expandiendo:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Por tanto, para convertir $x^2 + px$ en un cuadrado perfecto debemos añadir

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Cuando estamos dentro de una ecuación, ese término debe añadirse **a ambos miembros**, de modo que la transformación siga siendo reversible.

Completar cuadrados paso a paso. Resolvamos

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

Primero aislamos los términos que contienen x:

$$x^2 + 6x = 7.$$

La mitad de 6 es 3, y

$$3^2 = 9.$$

Sumamos 9 en ambos miembros:

$$x^2 + 6x + 9 = 16.$$

El lado izquierdo es ahora un cuadrado perfecto:

$$(x + 3)^2 = 16.$$

Hasta aquí todos los pasos fueron equivalencias. Sobre los reales,

$$(x + 3)^2 = 16 \iff x + 3 = 4 \text{ o } x + 3 = -4.$$

Por tanto,

$$x = 1 \qquad \text{o} \qquad x = -7.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 + 6x - 7 = 0) = \{-7, 1\}.}$$

Completar cuadrados no consiste en «inventar» un término. Consiste en añadir exactamente la cantidad que convierte el trinomio en el cuadrado de un binomio, compensándola en el otro miembro para conservar equivalencia.

El paso desde un cuadrado hasta sus raíces. Cuando alcanzamos una ecuación de la forma

$$U(x)^2 = k,$$

debemos distinguir el signo de k si trabajamos sobre $\mathbb{R}$.

Si $k > 0$,

$$U(x)^2 = k \Longleftrightarrow U(x) = \sqrt{k} \text{ o } U(x) = -\sqrt{k}.$$

Si $k = 0$,

$$U(x)^2 = 0 \Longleftrightarrow U(x) = 0.$$

Si $k < 0$, no existen soluciones reales, porque el cuadrado de un número real nunca es negativo.

Este paso no es la misma operación lógica que elevar al cuadrado estudiada en §21.4. Aquí partimos de una igualdad ya escrita como $U^2 = k$ y describimos exactamente todos los reales que la satisfacen.

Un ejemplo que no factoriza de manera inmediata sobre los enteros. Considere

$$x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Podríamos buscar una factorización real, pero no es visible con coeficientes enteros sencillos. Completar cuadrados da una ruta directa:

$$x^2 + 4x = 1.$$

Añadimos 4 a ambos miembros:

$$x^2 + 4x + 4 = 5.$$

Entonces

$$(x + 2)^2 = 5.$$

Por tanto,

$$x + 2 = \sqrt{5} \qquad \text{o} \qquad x + 2 = -\sqrt{5},$$

y finalmente

$$x = -2 + \sqrt{5} \qquad \text{o} \qquad x = -2 - \sqrt{5}.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 + 4x - 1 = 0) = \{-2 - \sqrt{5},\ -2 + \sqrt{5}\}.}$$

Este ejemplo muestra una ventaja estratégica: completar cuadrados no depende de que podamos reconocer de antemano factores simples.

Si el coeficiente principal no es uno. Considere

$$2x^2 + 8x - 10 = 0.$$

Como el coeficiente principal es $2 \neq 0$, podemos dividir toda la ecuación por 2:

$$2x^2 + 8x - 10 = 0 \iff x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Ahora completamos cuadrados:

$$x^2 + 4x = 5,$$

$$x^2 + 4x + 4 = 9,$$

$$(x + 2)^2 = 9.$$

Luego,

$$x + 2 = 3 \qquad \text{o} \qquad x + 2 = -3,$$

de donde

$$x = 1 \qquad \text{o} \qquad x = -5.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}}(2x^2 + 8x - 10 = 0) = \{-5, 1\}.}$$

Dividir primero por el coeficiente principal no es una maniobra automática aplicable a cualquier expresión simbólica: aquí está justificada porque, por definición de ecuación cuadrática, $a \neq 0$.

La misma ecuación por dos rutas. Consideremos

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Ruta A: factorización.

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5),$$

de modo que

$$(x - 1)(x - 5) = 0 \iff x = 1 \text{ o } x = 5.$$

Ruta B: completar cuadrados.

$$x^2 - 6x = -5.$$

Añadimos 9:

$$x^2 - 6x + 9 = 4,$$

por lo que

$$(x - 3)^2 = 4.$$

Entonces

$$x-3=2 \qquad \text{o} \qquad x-3=-2,$$

y nuevamente

$$x=5 \qquad \text{o} \qquad x=1.$$

Ambas rutas producen

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}=\{1,5\}.}$$

No son dos respuestas distintas. Son dos representaciones de la misma estructura y, por tanto, dos cadenas equivalentes que deben terminar en el mismo conjunto solución.

Qué ruta conviene elegir. No existe una regla que obligue a resolver toda cuadrática de una sola manera.

La factorización suele ser preferible cuando:

- los factores se reconocen con rapidez;
- el producto nulo deja visibles inmediatamente las ramas;
- la ecuación ya viene parcialmente factorizada.

Completar cuadrados suele ser preferible cuando:

- la factorización simple no es evidente;
- queremos construir una forma $(x-h)^2=k$;
- necesitamos hacer visible la estructura de cuadrado perfecto.

En ambos casos la pregunta estratégica es la misma:

> **¿qué representación hace más visible la estructura que permite resolver sin perder ni añadir soluciones?**

Completar cuadrados como transformación general. La identidad

$$x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$$

permite reescribir cualquier expresión cuadrática mónico-lineal de la forma

$$x^2+px+q$$

como

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Ésta es una identidad algebraica, no una operación que cambie el conjunto solución.

Cuando la usamos dentro de una ecuación, podemos mover después la constante al otro miembro mediante operaciones reversibles y llegar a una forma

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=k.$$

En §21.8 aplicaremos este mecanismo a la cuadrática general y veremos cómo de él emerge la fórmula cuadrática.

Un caso sin soluciones reales, sin usar todavía el discriminante. Considere

$$x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Completando cuadrados,

$$x^2 + 2x = -5,$$

$$x^2 + 2x + 1 = -4,$$

y por tanto

$$(x + 1)^2 = -4.$$

Sobre $\mathbb{R}$ esto es imposible. Luego,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 + 2x + 5 = 0) = \varnothing.}$$

No necesitamos todavía una fórmula ni un criterio basado en el discriminante para justificar esta conclusión: basta la propiedad elemental de que un cuadrado real es siempre no negativo.

En §21.8 organizaremos sistemáticamente este fenómeno mediante una expresión que permitirá clasificar las soluciones reales de cualquier cuadrática.

Protocolo para elegir y justificar una ruta. Ante una ecuación cuadrática elemental:

1. fijar el dominio;
2. llevar la ecuación a una forma equivalente con cero en un miembro si queremos factorizar;
3. buscar primero una estructura visible;
4. si factorizamos, aplicar producto nulo y unir las ramas;
5. si completamos cuadrados, añadir la misma cantidad a ambos miembros hasta construir $(x - h)^2 = k$;
6. resolver exactamente la ecuación cuadrada resultante;
7. intersectar con el dominio cuando corresponda;
8. declarar el conjunto solución;
9. si se comparan dos rutas, comprobar que ambas terminan en el mismo conjunto.

Recuperación breve. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ usando la ruta indicada.

a) Factorización

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

b) Completar cuadrados

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

c) Elija la ruta que considere más eficiente

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Respuesta razonada. En **a)**,

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3),$$

por lo que

$$(x + 4)(x - 3) = 0 \iff x = -4 \text{ o } x = 3.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-4, 3\}.}$$

En **b)**,

$$x^2 - 8x = -7.$$

Añadimos 16:

$$x^2 - 8x + 16 = 9,$$

de modo que

$$(x-4)^2 = 9.$$

Por tanto,

$$x - 4 = 3 \qquad \text{o} \qquad x - 4 = -3,$$

y

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{1, 7\}.}$$

En **c)** la factorización es inmediata:

$$x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2),$$

de modo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-4, 2\}.}$$

Completar cuadrados también sería correcto, pero aquí requiere más pasos. La elección de ruta no cambia la solución; cambia la eficiencia y la visibilidad de la estructura.

Qué debemos conservar de esta sección. Las ecuaciones cuadráticas pueden admitir varias rutas equivalentes.

> **Factorizar explota una estructura multiplicativa ya visible; completar cuadrados construye deliberadamente una estructura de cuadrado perfecto.**

La factorización conduce al producto nulo y a una unión de ramas. Completar cuadrados conduce a una ecuación de la forma $(x-h)^2 = k$, que puede resolverse exactamente sobre los reales.

Ninguna de las dos rutas debe tratarse como una receta opaca. Cada transformación debe conservar el conjunto solución y cada elección debe justificarse por la estructura que hace visible.

En §21.8 derivaremos la fórmula cuadrática a partir de completar cuadrados y usaremos el discriminante para clasificar sistemáticamente el número de soluciones reales.

21.8. Fórmula cuadrática y discriminante real

En §21.7 vimos que completar cuadrados transforma una ecuación cuadrática en una ecuación de la forma $(x-h)^2 = k$. Podemos aplicar ahora esa misma idea a la cuadrática general y obtener, sin memorizar una regla externa, una fórmula que resuelve todos los casos reales.

Partimos de

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con

$$a \neq 0.$$

La condición $a \neq 0$ pertenece a la definición misma de ecuación cuadrática. También es exactamente la hipótesis que permitirá dividir por a durante la derivación.

Derivación desde completar cuadrados. Dividimos toda la ecuación por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Movemos el término constante al segundo miembro:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Para completar el cuadrado, tomamos la mitad del coeficiente de x:

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a} = \frac{b}{2a},$$

y añadimos su cuadrado a ambos miembros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

El primer miembro es

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

En el segundo miembro usamos denominador común $4a^2$:

$$-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}.$$

Por tanto,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Esta igualdad es el punto estructural de toda la derivación. La cantidad

$$b^2 - 4ac$$

no aparece por convención: surge exactamente como el numerador que queda después de completar cuadrados en la cuadrática general.

Del cuadrado a la fórmula. Supongamos primero que el lado derecho es no negativo, de modo que existen raíces cuadradas reales. Entonces

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}.$$

Para mantener la forma algebraica habitual resulta más cómodo volver a la equivalencia

$$U^2 = K \iff U = \sqrt{K} \text{ o } U = -\sqrt{K},$$

cuando $K \geq 0$. Aplicada a nuestra ecuación,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La notación $\pm$ permite reemplazar el denominador $2|a|$ por $2a$: cuando $a < 0$, ese reemplazo sólo intercambia las dos ramas de la misma ecuación. No estamos cambiando el coeficiente a de la ecuación original.

Restando $b/(2a)$ obtenemos

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Ésta es la **fórmula cuadrática**. No es una receta independiente de §21.7: es el resultado de completar cuadrados una vez en forma general.

El discriminante. Definimos

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

La expresión Δ se llama **discriminante** porque discrimina, sobre los números reales, qué tipo de conjunto solución puede tener la cuadrática.

La ecuación obtenida al completar cuadrados puede escribirse como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Como $a \neq 0$, tenemos $4a^2 > 0$. Por tanto, el signo del lado derecho depende exclusivamente del signo de Δ.

Caso $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas. Si

$$\Delta > 0,$$

entonces

$$\sqrt{\Delta} > 0.$$

Las dos ramas

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

y

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

son distintas. En consecuencia, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Por ejemplo,

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Aquí

$$a = 1, \qquad b = -5, \qquad c = 6,$$

y

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0.$$

La fórmula da

$$x = \frac{5 \pm 1}{2},$$

de donde

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 - 5x + 6 = 0) = \{2, 3\}.}$$

Coincide, como debe, con la factorización usada en §§21.6–21.7.

Caso $\Delta = 0$: una única solución real. Si

$$\Delta = 0,$$

las dos ramas de la fórmula coinciden:

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

El conjunto solución contiene un solo elemento:

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}.}$$

En lenguaje algebraico suele decirse que existe una **raíz real doble**. La palabra «doble» describe la multiplicidad algebraica, no significa que el conjunto solución contenga el mismo número dos veces.

Por ejemplo,

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Tenemos

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0,$$

y

$$x = \frac{6}{2} = 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 - 6x + 9 = 0) = \{3\}.}$$

Esto coincide con la forma

$$(x-3)^2 = 0.$$

Caso $\Delta < 0$: no hay soluciones reales. Si

$$\Delta < 0,$$

entonces

$$\frac{\Delta}{4a^2} < 0.$$

Pero un cuadrado real no puede ser negativo. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(ax^2+bx+c=0) = \varnothing.}$$

Por ejemplo,

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

tiene

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Así, no tiene soluciones reales.

En C21 detenemos aquí el análisis. La ecuación sí podrá estudiarse en un dominio más amplio, pero las soluciones complejas de cuadráticas con $\Delta < 0$ pertenecen a C25.

La clasificación real completa. Para

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

la clasificación sobre $\mathbb{R}$ es:

Discriminante	Soluciones reales	Conjunto solución
$\Delta > 0$	dos distintas	$\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
$\Delta = 0$	una raíz doble	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta < 0$	ninguna	$\varnothing$

Esta tabla no reemplaza la derivación: la resume. La razón de los tres casos está en la ecuación cuadrada

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

La fórmula no elimina la elección estratégica. Disponer de una fórmula general no significa que deba usarse siempre.

Considere

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

La fórmula funciona. Sin embargo, la factorización

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

hace visible inmediatamente el conjunto solución

$$\{3, 4\}.$$

En cambio, para

$$3x^2 + 2x - 7 = 0,$$

la factorización elemental no es evidente. La fórmula da directamente

$$\Delta = 2^2 - 4(3)(-7) = 4 + 84 = 88,$$

y

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{88}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{22}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{22}}{3}.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(3x^2 + 2x - 7 = 0) = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{22}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{22}}{3} \right\}.}$$

La fórmula es universal; la elección de usarla sigue siendo estratégica.

El dominio puede filtrar soluciones de la fórmula. La fórmula determina las soluciones reales de la ecuación cuadrática como igualdad algebraica. Si el problema impone un dominio más pequeño, debemos conservar únicamente las soluciones que pertenezcan a ese dominio.

Por ejemplo,

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \qquad x \in [0, 2].$$

La ecuación tiene raíces reales 2 y 3, pero sólo 2 pertenece al dominio declarado. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{[0,2]}(x^2 - 5x + 6 = 0) = \{2\}.}$$

Ni la fórmula cuadrática ni el discriminante suspenden la disciplina de dominio establecida en §21.1.

No olvidar la hipótesis $a \neq 0$. La expresión

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sólo tiene sentido como fórmula cuadrática cuando

$$a \neq 0.$$

Si $a = 0$, la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se reduce a una ecuación lineal o a un caso degenerado de §21.5. Aplicar la fórmula sin separar este caso introduciría una división por cero.

La condición $a \neq 0$ no es una nota al pie: es una hipótesis estructural de la fórmula.

Comprobación mediante relaciones entre las raíces. Cuando $\Delta \geq 0$, las raíces dadas por la fórmula son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Sumando,

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

y multiplicando,

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Estas relaciones sirven como control estructural de una resolución:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.}$$

No sustituyen la resolución, pero permiten detectar errores de signo o de simplificación.

Un protocolo para usar la fórmula con sentido. Ante una cuadrática general:

1. escribirla en la forma $ax^2 + bx + c = 0$;
2. comprobar que $a \neq 0$;
3. identificar correctamente a, b y c, incluidos sus signos;
4. calcular $\Delta = b^2 - 4ac$;
5. clasificar primero el caso real según el signo de Δ;
6. si $\Delta \geq 0$, aplicar la fórmula cuadrática;
7. simplificar radicales cuando corresponda;
8. intersectar con el dominio declarado;
9. declarar explícitamente el conjunto solución;
10. cuando sea útil, verificar suma y producto de raíces.

El orden importa: calcular primero Δ permite saber qué tipo de respuesta real debemos esperar antes de manipular la raíz cuadrada.

Recuperación breve. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ usando la fórmula cuadrática y clasifique cada caso mediante el discriminante.

a)

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

b)

$$4x^2 + 4x + 1 = 0.$$

c)

$$2x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Respuesta razonada. En **a)**,

$$a = 2, \qquad b = -5, \qquad c = -3,$$

y

$$\Delta = 25 - 4(2)(-3) = 49 > 0.$$

Por tanto,

$$x = \frac{5 \pm 7}{4},$$

de donde

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{1}{2}.$$

Así,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}.}$$

En **b)**,

$$\Delta = 4^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0.$$

Hay una única solución real:

$$x = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}.}$$

En **c)**,

$$\Delta = 2^2 - 4(2)(5) = 4 - 40 = -36 < 0.$$

Luego no existen soluciones reales:

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. La fórmula cuadrática no aparece por magia: se obtiene completando cuadrados en

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

La cantidad

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

surge durante esa derivación y controla la existencia de raíces reales.

> **Sobre $\mathbb{R}$: $\Delta > 0$ produce dos soluciones distintas, $\Delta = 0$ una única solución real y $\Delta < 0$ ninguna solución real.**

La fórmula es una herramienta universal, pero no vuelve innecesarias la elección de representación, la atención al dominio ni la comprobación de hipótesis.

En §21.9 estudiaremos ecuaciones que no parecen cuadráticas en la variable original, pero que pueden reducirse a una cuadrática mediante una sustitución adecuada.

21.9. Sustituciones y ecuaciones cuadráticas en forma

Hasta ahora hemos resuelto ecuaciones que eran lineales o cuadráticas de manera visible. Sin embargo, una ecuación puede tener grado mayor y conservar, escondida dentro de su escritura, una estructura cuadrática.

Considere

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

No es cuadrática en x, pero sí lo es en la expresión x^2. Si introducimos

$$u = x^2,$$

entonces

$$x^4 = (x^2)^2 = u^2,$$

y la ecuación se convierte en

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

La sustitución ha comprimido la estructura. Pero todavía no hemos resuelto la ecuación original: sólo hemos resuelto una ecuación auxiliar en una variable nueva.

La pregunta decisiva de esta sección será:

> **¿qué valores obtenidos para la variable auxiliar provienen realmente de valores admisibles de la variable original, y cuántas preimágenes produce cada uno?**

Una cuadrática en una expresión. Muchas ecuaciones elementales tienen la forma

$$a\,[\phi(x)]^2 + b\,\phi(x) + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Si definimos

$$u = \phi(x),$$

obtenemos la cuadrática

$$au^2 + bu + c = 0.$$

Podemos resolverla mediante cualquiera de las herramientas de §§21.7–21.8. Supongamos que la ecuación auxiliar produce los valores

$$u_1, \ldots, u_k.$$

El trabajo no termina allí. Para volver a la variable original debemos resolver, para cada valor realizable,

$$\phi(x) = u_i.$$

La sustitución es completa sólo cuando hemos reconstruido **todas** las preimágenes admisibles en el dominio original.

Primer ejemplo: una ecuación bicuadrada. Resolvamos sobre $\mathbb{R}$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Definimos

$$u = x^2.$$

La ecuación auxiliar es

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

Factorizamos:

$$u^2 - 5u + 4 = (u - 1)(u - 4).$$

Por tanto,

$$u = 1 \qquad \text{o} \qquad u = 4.$$

Ahora regresamos a x.
Si

$$x^2 = 1,$$

entonces

$$x = \pm 1.$$

Si

$$x^2 = 4,$$

entonces

$$x = \pm 2.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^4 - 5x^2 + 4 = 0) = \{-2, -1, 1, 2\}.}$$

La ecuación auxiliar tenía dos soluciones. La ecuación original tiene cuatro porque cada valor positivo de $u = x^2$ posee dos preimágenes reales.

La variable auxiliar no vive necesariamente en todo $\mathbb{R}$. Cuando escribimos

$$u = x^2,$$

no estamos introduciendo un real arbitrario. Sobre $\mathbb{R}$ se cumple necesariamente

$$u \geq 0.$$

Por tanto, la variable auxiliar tiene una restricción heredada de la sustitución.
Considere

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

Con

$$u = x^2,$$

obtenemos

$$u^2 + 3u - 4 = 0,$$

y factorizando,

$$(u + 4)(u - 1) = 0.$$

La ecuación auxiliar tiene soluciones

$$u = -4 \qquad \text{o} \qquad u = 1.$$

Pero $u = -4$ no es realizable como cuadrado de un número real. No corresponde a ningún $x \in \mathbb{R}$.
La única rama realizable es

$$x^2 = 1,$$

de donde

$$x = \pm 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^4 + 3x^2 - 4 = 0) = \{-1, 1\}.}$$

El valor auxiliar $u = -4$ no es una «solución extraña en x». Es un valor de la ecuación auxiliar que queda fuera de la imagen de la sustitución $u = x^2$.

Imagen y preimagen. Conviene formular el proceso de manera precisa.
Sea

$$\phi : D \to \mathbb{R}$$

una expresión definida sobre el dominio D. Si queremos resolver

$$Q(\phi(x)) = 0,$$

introducimos

$$u = \phi(x).$$

Primero resolvemos

$$Q(u) = 0,$$

pero sólo interesan los valores auxiliares que pertenecen a la imagen

$$\phi(D).$$

Si

$$U = \{u \in \phi(D) : Q(u) = 0\},$$

entonces el conjunto solución original es

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D(Q(\phi(x)) = 0) = \bigcup_{u \in U} \{x \in D : \phi(x) = u\}.}$$

Esta fórmula describe exactamente las dos tareas de una sustitución:

1. resolver la ecuación en la variable auxiliar;
2. recuperar todas las preimágenes válidas en la variable original.

La sustitución puede no ser biyectiva. La aplicación

$$x \longmapsto x^2$$

no es inyectiva sobre $\mathbb{R}$, porque

$$x^2 = (-x)^2.$$

Tampoco es sobreyectiva sobre todo $\mathbb{R}$, porque ningún cuadrado real es negativo.

Por eso el regreso desde u hacia x debe distinguir:

Valor auxiliar	Preimágenes reales bajo $u = x^2$
$u > 0$	$x = \pm\sqrt{u}$
$u = 0$	$x = 0$
$u < 0$	ninguna

Escribir sólo

$$x = \sqrt{u}$$

perdería la rama negativa cuando $u > 0$. En cambio, escribir automáticamente $x = \pm\sqrt{u}$ para $u < 0$ introduciría símbolos que no representan soluciones reales.

La sustitución exige, por tanto, conocer la estructura de la aplicación utilizada.

Un caso en que una solución auxiliar produce una sola preimagen. Considere

$$x^4 - 4x^2 = 0.$$

Con $u = x^2$ obtenemos

$$u^2 - 4u = 0,$$

es decir,

$$u(u - 4) = 0.$$

Por tanto,

$$u = 0 \qquad \text{o} \qquad u = 4.$$

Al regresar a x:

$$x^2 = 0 \iff x = 0,$$

y

$$x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Así,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}}(x^4 - 4x^2 = 0) = \{-2, 0, 2\}.}$$

El valor auxiliar $u = 0$ tiene una sola preimagen real, no dos.

La misma idea con una expresión desplazada. La sustitución no tiene por qué ser exactamente $u = x^2$.

Considere

$$(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 4 = 0.$$

La estructura repetida es

$$(x-1)^2.$$

Definimos

$$u = (x-1)^2.$$

La ecuación auxiliar vuelve a ser

$$u^2 - 5u + 4 = 0,$$

por lo que

$$u = 1 \qquad \text{o} \qquad u = 4.$$

Ahora debemos resolver dos ecuaciones en x.

Para $u = 1$,

$$(x-1)^2 = 1 \iff x - 1 = \pm 1,$$

de donde

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

Para $u = 4$,

$$(x-1)^2 = 4 \iff x - 1 = \pm 2,$$

de donde

$$x = -1 \qquad \text{o} \qquad x = 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}}\big((x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 4 = 0\big) = \{-1, 0, 2, 3\}.}$$

La sustitución no depende del grado visible de x, sino de reconocer una expresión que se repite con potencias compatibles.

Sustituciones biyectivas y no biyectivas. Compare dos elecciones auxiliares.

Si

$$u = 2x - 1,$$

entonces, sobre $\mathbb{R}$, cada valor real de u corresponde a un único valor de x:

$$x = \frac{u+1}{2}.$$

La sustitución es biyectiva y el regreso no ramifica.

En cambio, si

$$u = x^2,$$

la sustitución no es biyectiva sobre $\mathbb{R}$. El regreso puede producir dos, una o ninguna preimagen.

Esta diferencia será importante en problemas más complejos: una sustitución conveniente simplifica la ecuación, pero también cambia la forma en que debemos reconstruir el conjunto solución.

Un ejemplo con sustitución lineal. Considere

$$(2x-1)^2 - 5(2x-1) + 6 = 0.$$

Definimos

$$u = 2x - 1.$$

Entonces

$$u^2 - 5u + 6 = 0,$$

y

$$(u-2)(u-3) = 0.$$

Por tanto,

$$u = 2 \qquad \text{o} \qquad u = 3.$$

Al regresar,

$$2x - 1 = 2 \iff x = \frac{3}{2},$$

y

$$2x - 1 = 3 \iff x = 2.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}\big((2x-1)^2 - 5(2x-1) + 6 = 0\big) = \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}.}$$

Aquí cada solución auxiliar produce exactamente una solución original.

El dominio original sigue siendo decisivo. Suponga que resolvemos

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

pero sobre

$$D = [0, \infty).$$

La ecuación auxiliar con $u = x^2$ sigue produciendo

$$u = 1 \qquad \text{o} \qquad u = 4.$$

Sobre $\mathbb{R}$ las preimágenes serían ± 1 y ± 2. Sin embargo, al intersectar con D sólo sobreviven

$$1 \qquad \text{y} \qquad 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{[0,\infty)}(x^4 - 5x^2 + 4 = 0) = \{1, 2\}.}$$

La sustitución no sustituye el control de dominio: simplemente añade una capa intermedia de representación.

Qué errores puede producir una sustitución incompleta. Hay tres fallas especialmente frecuentes.

1. Detenerse en la variable auxiliar.

De

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

concluir

$$u \in \{1, 4\}$$

no resuelve todavía una ecuación cuyo problema original estaba formulado en x.

2. Olvidar la imagen de la sustitución.

Si $u = x^2$, un valor auxiliar negativo no posee preimagen real.

3. Recuperar sólo una preimagen.

De

$$x^2 = 9$$

no se sigue sólo $x = 3$, sino

$$x = \pm 3.$$

Estas tres fallas tienen una misma causa: tratar la sustitución como un simple cambio de letra en lugar de verla como una aplicación entre conjuntos de valores.

No estamos abriendo todavía la teoría general de ecuaciones polinómicas. La sustitución puede resolver algunas ecuaciones polinómicas de grado mayor cuando presentan una estructura repetida sencilla, como

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

o

$$[\phi(x)]^2 + p\phi(x) + q = 0.$$

Esto no significa que cualquier ecuación de grado cuatro o superior pueda resolverse por la misma técnica. En C21 sólo trabajaremos con patrones elementales reducibles a herramientas ya construidas.

La división polinómica sistemática, la teoría de raíces y otras estructuras más generales quedan para C23–C24.

Un protocolo para sustituciones. Cuando una ecuación sugiera una variable auxiliar:

1. fijar el dominio original D;
2. identificar una expresión repetida $\phi(x)$;
3. definir $u = \phi(x)$ y determinar, cuando sea relevante, qué valores puede tomar u;
4. reescribir completamente la ecuación en términos de u;
5. resolver la ecuación auxiliar;
6. descartar valores auxiliares que no pertenezcan a $\phi(D)$;
7. para cada valor auxiliar restante, resolver $\phi(x) = u$;
8. reunir **todas** las preimágenes obtenidas;
9. intersectar con el dominio original;
10. declarar explícitamente el conjunto solución en la variable original.

La etapa 7 es tan importante como la 5. Resolver la ecuación auxiliar y olvidar el regreso produce una respuesta incompleta.

Recuperación breve. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ usando una sustitución adecuada.

a)

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

b)

$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0.$$

c)

$$(x+2)^4 - 5(x+2)^2 + 4 = 0.$$

Respuesta razonada. En **a)** definimos $u = x^2$. Entonces

$$u^2 - 13u + 36 = 0,$$

y

$$(u-4)(u-9) = 0.$$

Así,

$$u = 4 \qquad \text{o} \qquad u = 9.$$

Al regresar,

$$x = \pm 2 \qquad \text{o} \qquad x = \pm 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, -2, 2, 3\}.}$$

En **b)**, con $u = x^2$,

$$u^2 + 5u + 4 = 0,$$

y

$$(u + 1)(u + 4) = 0.$$

Los únicos valores auxiliares son

$$u = -1 \qquad \text{o} \qquad u = -4,$$

pero ninguno pertenece a la imagen real de $x \mapsto x^2$. Luego,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

En **c)** definimos

$$u = (x + 2)^2.$$

La ecuación auxiliar es otra vez

$$u^2 - 5u + 4 = 0,$$

por lo que

$$u = 1 \qquad \text{o} \qquad u = 4.$$

De

$$(x + 2)^2 = 1$$

obtenemos

$$x = -3 \qquad \text{o} \qquad x = -1,$$

y de

$$(x + 2)^2 = 4$$

obtenemos

$$x = -4 \qquad \text{o} \qquad x = 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-4, -3, -1, 0\}.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Una sustitución útil hace visible una ecuación conocida dentro de una expresión más compleja.

> **Resolver la ecuación auxiliar no basta: hay que conservar sólo los valores auxiliares realizables y reconstruir todas sus preimágenes válidas en la variable original.**

Para $u = x^2$, la condición $u \geq 0$ y la vuelta $x = \pm\sqrt{u}$ cuando $u > 0$ forman parte del método, no son correcciones opcionales al final.

En §21.10 trasladaremos nuevamente la disciplina de dominio de C20 a la resolución de ecuaciones racionales: allí la transformación central será eliminar denominadores sin olvidar los valores que estaban excluidos desde el comienzo.

21.10. Ecuaciones racionales: dominio, eliminación y filtrado

En C20 aprendimos a transformar expresiones racionales sin perder las restricciones que pertenecían a su dominio original. Al resolver ecuaciones racionales, esa misma disciplina adquiere una función lógica adicional: las restricciones determinan **qué valores pueden pertenecer al conjunto solución**.

La pregunta central de esta sección será:

> **¿Cuándo podemos eliminar los denominadores sin cambiar el conjunto solución y qué debemos hacer con los valores que la ecuación algebraica resultante parece admitir?**

La respuesta tiene tres etapas inseparables:

```
DOMINIO
   ↓
ELIMINACIÓN JUSTIFICADA DE DENOMINADORES
   ↓
FILTRADO EN EL DOMINIO ORIGINAL
```

No debemos invertir este orden.

Una ecuación racional debe leerse primero como una ecuación sobre un dominio. Considere

$$\frac{x+1}{x-2} = 3.$$

Antes de multiplicar por $x - 2$, declaramos

$$x \neq 2.$$

Por tanto, el dominio efectivo es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Dentro de D, el factor $x - 2$ nunca es cero. Por §21.3, multiplicar ambos miembros por ese factor es reversible **sobre** D:

$$\frac{x+1}{x-2} = 3 \iff x + 1 = 3(x-2) \qquad (x \in D).$$

Resolviendo,

$$x + 1 = 3x - 6 \iff 7 = 2x \iff x = \frac{7}{2}.$$

Como $7/2 \in D$,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D\left(\frac{x+1}{x-2}=3\right)=\left\{\frac{7}{2}\right\}.}$$

La eliminación del denominador fue una equivalencia porque el dominio ya garantizaba la no nulidad del factor multiplicador.

El principio general de eliminación. Suponga que una ecuación racional está definida sobre un dominio efectivo D y que $M(x)$ es un múltiplo común de todos sus denominadores. Si la construcción de D garantiza

$$M(x)\neq 0 \qquad \text{para todo } x\in D,$$

entonces

$$E(x)=F(x)\iff M(x)E(x)=M(x)F(x) \qquad (x\in D).$$

Ésta es la formulación correcta de la frase informal «eliminar denominadores».

No estamos borrando símbolos. Estamos multiplicando ambos miembros por una expresión conocida como no nula **en el dominio vigente**.

Por eso el orden lógico es:

1. encontrar el dominio efectivo;
2. elegir un múltiplo común de los denominadores;
3. comprobar que ese múltiplo es no nulo en el dominio;
4. multiplicar ambos miembros;
5. resolver la ecuación resultante;
6. conservar sólo los valores que pertenecen al dominio original.

Un candidato algebraico puede estar excluido desde el comienzo. Considere

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}.$$

El dominio efectivo es

$$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Sobre D podemos multiplicar por $x-1$:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}\iff x+1=2 \qquad (x\in D).$$

La ecuación algebraica resultante produce

$$x=1.$$

Pero

$$1\notin D.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D=\varnothing.}$$

El valor 1 no es una solución «creada» por una transformación ilegítima. La multiplicación por $x-1$ fue perfectamente reversible **sobre** D. Lo que ocurre es que la ecuación transformada, si se leyera fuera de D, tendría una solución que nunca fue admisible en el problema original.

Ésta es la distinción que ya anticipamos en §21.4:

un valor excluido por dominio no es lo mismo que un candidato extraño producido por una transformación no reversible.

La ecuación transformada debe seguir interpretándose sobre el mismo dominio. El ejemplo anterior puede escribirse como

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} \iff x+1=2 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

Observe que la ecuación $x+1=2$, considerada por sí sola sobre todo $\mathbb{R}$, tiene solución 1. Pero **ésa no es la ecuación transformada que hemos obtenido**. La afirmación correcta conserva el dominio:

$$x+1=2, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Sobre ese dominio, tampoco tiene soluciones.

La restricción puede desaparecer de la fórmula visible sin desaparecer del problema.

Varios denominadores: usar un múltiplo común no nulo. Resolvamos

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1.$$

Primero,

$$x \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

Así,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Un múltiplo común de los denominadores es

$$M(x) = (x-1)(x+1).$$

En todo D se cumple $M(x) \neq 0$. Podemos multiplicar la ecuación completa por $M(x)$:

$$(x+1) + (x-1) = (x-1)(x+1).$$

Entonces

$$2x = x^2 - 1,$$

y por tanto

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

La fórmula cuadrática da

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ninguno de esos valores es 1 ni -1, de modo que ambos pertenecen a D. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{1-\sqrt{2},\, 1+\sqrt{2}\}.}$$

Aquí no hubo que «comprobar por desconfianza» la ecuación polinómica obtenida: cada paso fue una equivalencia sobre D. El control final consiste en verificar que las soluciones obtenidas pertenecen al dominio sobre el que afirmamos esas equivalencias.

El múltiplo común no necesita ser el más pequeño, pero debe ser seguro. En el ejemplo anterior podríamos multiplicar por

$$2(x-1)(x+1)$$

en lugar de $(x-1)(x+1)$. El factor extra 2 no cambia nada porque nunca es cero.

En cambio, introducir un factor variable adicional puede ser peligroso. Si multiplicáramos innecesariamente por

$$x(x-1)(x+1),$$

entonces $x=0$ anularía el multiplicador aunque $0 \in D$. La transformación ya no sería reversible en todo el dominio y podría crear candidatos adicionales.

Por tanto:

> **Un multiplicador común puede contener factores auxiliares sólo si sabemos que también son no nulos en todo el dominio vigente.**

La forma más segura suele ser usar el producto de los factores de denominador necesarios, simplificado únicamente cuando esa simplificación no introduce ambigüedad sobre la no nulidad.

Simplificar antes de resolver puede ser útil, pero el dominio se fija antes. Considere

$$\frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

El dominio original exige

$$x \neq 3.$$

Factorizamos el numerador:

$$x^2-9 = (x-3)(x+3).$$

Sobre

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\},$$

podemos cancelar $x-3$ y escribir

$$\frac{x^2-9}{x-3} = 6 \iff x+3 = 6 \qquad (x \in D).$$

La ecuación lineal da

$$x = 3,$$

pero ese valor no pertenece a D. Luego,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \varnothing.}$$

Este ejemplo es especialmente importante porque la fórmula simplificada

$$x+3 = 6$$

parece tener una solución obvia. El problema no está en la simplificación: está en olvidar que la equivalencia fue demostrada sólo para $x \neq 3$.

Eliminar denominadores puede producir una ecuación de grado mayor. Considere

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}=3.$$

El dominio efectivo es

$$D=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$$

Multiplicamos por

$$x(x-1),$$

que es no nulo en todo D:

$$2(x-1)+x=3x(x-1).$$

Entonces

$$3x-2=3x^2-3x,$$

y

$$3x^2-6x+2=0.$$

Su discriminante es

$$\Delta=(-6)^2-4(3)(2)=36-24=12.$$

Por tanto,

$$x=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ambos valores son distintos de 0 y 1. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D=\left\{1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.}$$

Una ecuación racional puede transformarse en una ecuación lineal, cuadrática o de otro tipo. La eliminación de denominadores no determina el método final; sólo elimina una capa de representación conservando el problema sobre D.

Denominadores factorizables: leer las restricciones antes de expandir. Considere

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}.$$

Antes de operar, factorizamos el denominador para leer su dominio:

$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Por tanto,

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}.$$

Sobre D, multiplicar por $(x-2)(x+2)$ es reversible:

$$1=x+2.$$

La ecuación resultante da

$$x = -1,$$

que pertenece a D. Luego,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{-1\}.}$$

La factorización del denominador cumplió aquí dos funciones distintas:

- permitió leer correctamente el dominio;
- mostró un multiplicador común eficiente.

Cancelación y eliminación de denominadores no son el mismo paso. Considere

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 5.$$

El dominio exige $x \neq 2$.

Podemos simplificar primero:

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 5 \iff x+1 = 5 \qquad (x \neq 2),$$

porque cancelar $x-2$ significa dividir numerador y denominador por un factor no nulo en el dominio.

También podríamos multiplicar toda la ecuación por $x-2$:

$$(x-2)(x+1) = 5(x-2).$$

Sobre $x \neq 2$ ambas rutas son equivalentes. La primera reduce la expresión antes; la segunda elimina el denominador exterior.

La elección es estratégica, pero la lógica común es la misma: **el factor $x-2$ está garantizado como no nulo por el dominio original**.

Una identidad racional puede tener como solución todo el dominio, no todo $\mathbb{R}$. Considere

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1.$$

La expresión racional del lado izquierdo exige

$$x \neq 1.$$

Sobre

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

factorizamos

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

y obtenemos

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \iff x+1 = x+1.$$

La igualdad final es verdadera para todo valor de D. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$$

No es correcto responder $\mathbb{R}$. El punto $x = 1$ continúa excluido aunque la identidad final tenga sentido allí.

Filtrar no significa probar al azar. En ecuaciones racionales, «filtrar» puede significar dos cosas distintas.

1. Filtrado por dominio. Si la cadena fue completamente equivalente sobre D, basta descartar cualquier valor final que no pertenezca a D.

2. Filtrado después de una implicación. Si en algún punto usamos una transformación no reversible, entonces los valores finales son sólo candidatos y debemos comprobarlos en la ecuación original o recuperar condiciones equivalentes suficientes.

En la eliminación estándar de denominadores **bien hecha**, sobre un dominio ya fijado, estamos en el primer caso. Multiplicar por un común denominador que sabemos no nulo es una equivalencia.

Esta distinción evita un hábito confuso: comprobar siempre al final sin saber por qué. La comprobación tiene una función lógica concreta; no reemplaza el análisis de las flechas.

Un protocolo para ecuaciones racionales. Podemos condensar la estrategia de esta sección en nueve pasos:

1. fijar el dominio ambiente;
2. factorizar denominadores cuando sea necesario para localizar sus ceros;
3. formar el dominio efectivo excluyendo todos los ceros de denominador;
4. simplificar sólo mediante equivalencias válidas sobre ese dominio;
5. elegir un múltiplo común de los denominadores que sea no nulo en todo el dominio efectivo;
6. multiplicar **la ecuación completa** por ese múltiplo;
7. resolver la ecuación resultante con las herramientas ya conocidas;
8. descartar valores que no pertenezcan al dominio original;
9. declarar explícitamente el conjunto solución sobre ese dominio.

Si durante la ruta aparece una transformación que no sea reversible, añadimos un décimo paso:

10. comprobar en la ecuación original los candidatos que hayan sobrevivido.

Recuperación breve. Resuelva sobre $\mathbb{R}$.

a)

$$\frac{3}{x-2} = 1.$$

b)

$$\frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x+1}.$$

c)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 1.$$

Respuesta razonada. En **a)** el dominio exige $x \neq 2$. Sobre ese dominio,

$$\frac{3}{x-2} = 1 \iff 3 = x - 2,$$

por lo que

$$x = 5.$$

Como $5 \neq 2$,

$$\boxed{\text{Sol} = \{5\}.}$$

En **b)** el dominio exige $x \neq -1$. Multiplicando por $x + 1$,

$$x = -1.$$

Ese valor está excluido del dominio. Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol} = \varnothing.}$$

En **c)**,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Multiplicamos por $(x - 1)(x + 1)$:

$$(x + 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 1).$$

Así,

$$3x - 1 = x^2 - 1,$$

y por tanto

$$x^2 - 3x = 0.$$

Factorizamos:

$$x(x - 3) = 0,$$

de donde

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = 3.$$

Ambos pertenecen a D. Luego,

$$\boxed{\text{Sol} = \{0, 3\}.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Las ecuaciones racionales no se resuelven «quitando denominadores» y recordando después algunas excepciones. El dominio es parte del problema desde el comienzo.

> **Si un común denominador es no nulo en todo el dominio efectivo, multiplicar la ecuación por él es una equivalencia sobre ese dominio.**

Los valores excluidos no vuelven a ser admisibles aunque desaparezcan los denominadores de la escritura. Una ecuación algebraica resultante debe seguir leyéndose sobre el mismo dominio de procedencia.

En §21.11 estudiaremos ecuaciones radicales. Allí aparecerá una dificultad lógica distinta: elevar al cuadrado puede dejar de ser una equivalencia y producir candidatos verdaderamente adicionales, por lo que el control final tendrá una función diferente de la que tuvo aquí.

21.11. Ecuaciones radicales: implicación, signo y verificación

En §21.10 eliminamos denominadores mediante una transformación que podía conservar exactamente el conjunto solución: una vez fijado el dominio efectivo, multiplicábamos por una expresión conocida como no nula en ese dominio. Las ecuaciones radicales introducen una dificultad lógica diferente.

Considere

$$\sqrt{x+1} = x - 1.$$

Es natural querer elevar ambos miembros al cuadrado. El cálculo produce

$$x + 1 = (x-1)^2.$$

Pero aquí aparece la pregunta que guiará toda la sección:

> **¿Cuadrar conserva exactamente el conjunto solución o sólo produce una ecuación que toda solución original debe satisfacer?**

La respuesta depende del signo. Una raíz cuadrada principal es siempre no negativa. El cuadrado, en cambio, no recuerda el signo de la expresión que fue elevada.

La raíz principal lleva información de signo. C18 estableció dos hechos que ahora se vuelven decisivos:

$$\sqrt{u} \geq 0$$

siempre que la raíz cuadrada principal esté definida, y

$$\boxed{\sqrt{u^2} = |u|}.$$

Por tanto, una igualdad de la forma

$$\sqrt{R(x)} = S(x)$$

contiene inmediatamente una condición necesaria:

$$S(x) \geq 0.$$

Si para algún valor $S(x) < 0$, ese valor no puede satisfacer la ecuación, aunque una ecuación obtenida después de cuadrar sí pudiera admitirlo.

Esta condición de signo no abre todavía la teoría sistemática de inequaciones de C22. Aquí funciona sólo como una **condición de admisibilidad** impuesta por la raíz principal.

Cuadrar conserva una dirección. Para números reales,

$$A = B \Longrightarrow A^2 = B^2.$$

La vuelta no es cierta en general, porque

$$A^2 = B^2 \Longleftrightarrow A = B \text{ o } A = -B.$$

Así, de

$$\sqrt{R(x)} = S(x)$$

podemos concluir siempre

$$R(x) = S(x)^2,$$

pero la ecuación cuadrada puede admitir valores para los cuales

$$\sqrt{R(x)} = -S(x)$$

en lugar de $\sqrt{R(x)} = S(x)$.

La flecha segura, si no conservamos ninguna condición adicional, es

$$\sqrt{R(x)} = S(x) \Longrightarrow R(x) = S(x)^2.$$

Por eso los resultados de la ecuación cuadrada deben considerarse **candidatos** para la ecuación original.

Recuperar la equivalencia completa. Cuando la raíz principal está aislada, podemos describir exactamente qué condición falta.

Sobre el dominio efectivo en el que $R(x)$ y $S(x)$ están definidos y $R(x) \geq 0$,

$$\boxed{\sqrt{R(x)} = S(x) \Longleftrightarrow (R(x) = S(x)^2 \text{ y } S(x) \geq 0).}$$

La demostración contiene las dos direcciones.

Si

$$\sqrt{R(x)} = S(x),$$

entonces al cuadrar obtenemos

$$R(x) = S(x)^2,$$

y además $S(x) \geq 0$ porque una raíz principal nunca es negativa.

Recíprocamente, si

$$R(x) = S(x)^2$$

y

$$S(x) \geq 0,$$

entonces

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{S(x)^2} = |S(x)| = S(x).$$

La última igualdad usa precisamente la condición $S(x) \geq 0$.

Observe además que $R(x) = S(x)^2$ ya garantiza $R(x) \geq 0$. Por ello, también podemos hallar las soluciones resolviendo las dos condiciones de la derecha en el dominio ambiente donde R y S existen: todo valor que las cumpla pertenece automáticamente al dominio efectivo de la raíz. Esto es una igualdad de conjuntos solución; no asigna un valor de verdad a la expresión radical en los puntos donde no está definida.

Ejemplo rector: un candidato creado al cuadrar. Resolvamos

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

sobre $\mathbb{R}$.

Podemos usar directamente la equivalencia completa:

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \iff \begin{cases} x + 1 = (x-1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

La ecuación cuadrada da

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1,$$

por lo que

$$x^2 - 3x = 0,$$

y entonces

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = 3.$$

Pero la condición de signo exige

$$x - 1 \geq 0.$$

De los dos candidatos, sólo $x = 3$ cumple esa condición. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(\sqrt{x+1} = x - 1) = \{3\}.}$$

La comprobación directa muestra qué ocurrió con $x = 0$:

$$\sqrt{0+1} = 1, \qquad 0 - 1 = -1.$$

El candidato 0 no estaba excluido por dominio. **Fue creado por una transformación que perdió información de signo.** Ésta es exactamente la situación que distinguimos de los valores inadmisibles por dominio en §§21.4 y 21.10.

El signo puede descartar una rama antes de cuadrar. Considere

$$\sqrt{2x+3} = -x.$$

La raíz principal es no negativa, así que cualquier solución debe cumplir

$$-x \geq 0.$$

Si cuadramos obtenemos

$$2x + 3 = x^2,$$

o equivalentemente

$$(x-3)(x+1) = 0.$$

Los candidatos son

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = -1.$$

La condición $-x \geq 0$ elimina inmediatamente $x = 3$. El valor $x = -1$ sí satisface la ecuación original:

$$\sqrt{2(-1)+3} = 1 = -(-1).$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(\sqrt{2x+3} = -x) = \{-1\}.}$$

Aquí la condición de signo no es un control posterior accidental: forma parte de una formulación equivalente del problema.

Cuando ambos miembros son raíces principales. Hay situaciones en que cuadrar sí puede ser reversible porque el signo está controlado automáticamente.

Considere

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+1}.$$

En el dominio común de ambas raíces, los dos miembros son no negativos. Para números no negativos, la función $t \mapsto t^2$ es inyectiva. Por tanto,

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+1} \iff x+5 = 2x+1$$

sobre el dominio donde ambas raíces están definidas.

La ecuación lineal da

$$x = 4,$$

que pertenece al dominio. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+1}) = \{4\}.}$$

No es el acto gráfico de «cuadrar» lo que decide si hay equivalencia. Lo que importa es si el signo de ambos miembros permite recuperar la igualdad original a partir de la igualdad de cuadrados.

Dos radicales pueden exigir más de una etapa. Considere ahora

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5.$$

El dominio exige

$$x \geq 0.$$

Los dos miembros de la igualdad son no negativos, así que podemos cuadrar la igualdad completa de manera reversible dentro de ese dominio:

$$\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{x}\right)^2 = 25.$$

Desarrollando,

$$2x + 5 + 2\sqrt{x(x+5)} = 25,$$

y por tanto

$$\sqrt{x(x+5)} = 10 - x.$$

Aparece de nuevo una raíz principal aislada. Para mantener equivalencia debemos conservar

$$10 - x \geq 0.$$

Ahora sí cuadramos una segunda vez:

$$x(x+5) = (10-x)^2.$$

Al desarrollar,

$$x^2 + 5x = x^2 - 20x + 100,$$

de modo que

$$25x = 100$$

y

$$x = 4.$$

El valor satisface $x \geq 0$ y $10 - x \geq 0$, y además

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5) = \{4\}.}$$

Este ejemplo muestra que una ecuación con varios radicales puede exigir aislar un radical después de la primera transformación y repetir el procedimiento. Cada nuevo cuadrado debe auditarse con sus propias condiciones de signo.

Una condición de signo puede ahorrar un segundo cuadrado inútil. Compare el ejemplo anterior con

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 1.$$

El dominio vuelve a exigir $x \geq 0$. Si cuadramos la igualdad completa,

$$2x + 5 + 2\sqrt{x(x+5)} = 1,$$

de donde

$$\sqrt{x(x+5)} = -x - 2.$$

Pero para $x \geq 0$ el segundo miembro cumple

$$-x - 2 < 0,$$

mientras que una raíz principal nunca es negativa. Podemos concluir inmediatamente

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

Si ignoráramos el signo y eleváramos de nuevo al cuadrado, obtendríamos

$$x(x+5) = (x+2)^2,$$

lo que produce el candidato $x = 4$. Ese valor no satisface la ecuación original:

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5 \neq 1.$$

La condición de signo no sólo aporta rigor: puede evitar trabajo algebraico que conduciría únicamente a candidatos falsos.

Verificar tiene aquí una función lógica específica. En §21.10 vimos que, si eliminábamos denominadores mediante equivalencias sobre el dominio efectivo, el filtrado final podía limitarse a comprobar pertenencia al dominio. En una ecuación radical la situación puede ser distinta.

Si en algún momento usamos

$$A = B \Longrightarrow A^2 = B^2$$

sin conservar condiciones suficientes para recuperar la equivalencia, el conjunto solución de la ecuación transformada puede ser mayor que el original. Entonces los valores finales son **candidatos** y deben comprobarse en la ecuación de partida.

La verificación final cumple así una función bien determinada:

- no sustituye el análisis de dominio;
- no repara una solución perdida por una transformación reductiva;
- **filtra candidatos creados por una transformación sólo implicativa**.

Cuando conservamos en cada etapa las condiciones de signo que restituyen equivalencia, la comprobación final sigue siendo un buen control independiente, pero ya no es la única razón por la que sabemos que el conjunto solución es correcto.

Aislar antes de cuadrar. Cuando aparece un solo radical junto con otros términos, suele ser preferible aislarlo antes de elevar al cuadrado.

Por ejemplo, ante

$$\sqrt{x+7} + 2 = x,$$

la forma útil es

$$\sqrt{x+7} = x - 2.$$

En ese punto la estructura lógica es visible:

$$\sqrt{x+7} = x - 2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 7 = (x-2)^2, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Cuadrar la ecuación antes de aislar el radical produciría términos cruzados y una representación menos transparente sin aportar ninguna ventaja lógica.

La regla estratégica es:

> **Aísle un radical principal siempre que eso haga visible la condición de signo que deberá acompañar al cuadrado.**

Un protocolo para ecuaciones radicales. Para las ecuaciones radicales elementales de C21 seguiremos este orden:

1. fijar el dominio ambiente y las condiciones de existencia de todos los radicales;
2. simplificar sólo mediante equivalencias válidas en ese dominio;
3. aislar un radical cuando sea posible;
4. registrar la condición de signo del miembro opuesto;
5. elevar al cuadrado, indicando si el paso es equivalencia o sólo implicación;
6. resolver la ecuación algebraica resultante;
7. si quedan radicales, aislar de nuevo uno de ellos y repetir el control de signo antes del siguiente cuadrado;

8. conservar sólo los candidatos que satisfacen todas las condiciones acumuladas;
9. comprobar en la ecuación original cuando haya existido algún paso sólo implicativo o cuando se desee un control independiente;
10. declarar explícitamente el conjunto solución.

Este protocolo mantiene separadas tres obligaciones que a menudo se mezclan:

$$\boxed{\text{dominio} \quad + \text{signo} \quad + \text{fuerza lógica de cada cuadrado.}}$$

Recuperación breve. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ y explique en qué pasos hay equivalencia y en cuáles sólo implicación.

a)

$$\sqrt{x+6} = 4.$$

b)

$$\sqrt{3x+4} = x.$$

c)

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5.$$

Respuesta razonada. En **a)** el segundo miembro es la constante positiva 4, de modo que

$$\sqrt{x+6} = 4 \iff x + 6 = 16.$$

Así,

$$x = 10,$$

y

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{10\}.}$$

En **b)** la raíz principal exige que el segundo miembro sea no negativo en cualquier solución. Por tanto,

$$\sqrt{3x+4} = x \iff \begin{cases} 3x + 4 = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

La ecuación cuadrada factoriza como

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \iff (x-4)(x+1) = 0.$$

Los candidatos son 4 y -1, pero la condición $x \geq 0$ conserva sólo 4. En efecto,

$$\sqrt{16} = 4.$$

Luego,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{4\}.}$$

Si hubiéramos escrito sólo la implicación obtenida al cuadrar, -1 habría aparecido como candidato adicional.

En **c)** el dominio exige $x \geq 0$. Como ambos miembros de

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$$

son no negativos, el primer cuadrado puede leerse como equivalencia en ese dominio y produce

$$\sqrt{x(x+5)}=10-x.$$

Debemos conservar además $10-x\geq 0$. El segundo cuadrado da

$$x(x+5)=(10-x)^2,$$

de donde $x=4$. Ese valor satisface todas las condiciones acumuladas y la ecuación original, por lo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}=\{4\}.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Elevar al cuadrado no debe tratarse como una operación automáticamente reversible.

> **En general, $A=B$ implica $A^2=B^2$, pero la vuelta requiere información de signo. Para una raíz principal aislada, esa información se expresa exactamente mediante $S(x)\geq 0$.**

Por eso,

$$\boxed{\sqrt{R(x)}=S(x)\iff \big(R(x)=S(x)^2 \text{ y } S(x)\geq 0\big).}$$

Las raíces extrañas no son valores que «casi sirven». Son candidatos producidos porque una transformación perdió información. El control de signo permite prevenir muchos de ellos; la verificación en la ecuación original permite filtrarlos cuando la cadena incluyó pasos sólo implicativos.

En §21.12 estudiaremos ecuaciones con valor absoluto. Allí volverá a aparecer una estructura de casos, pero ahora no a causa de una transformación no reversible, sino porque el valor absoluto codifica desde el comienzo dos posibilidades de signo.

21.12. Ecuaciones con valor absoluto

En §21.11 apareció una estructura de casos porque elevar al cuadrado puede borrar información de signo. En las ecuaciones con valor absoluto también aparecerán dos casos, pero por una razón distinta: las dos posibilidades están contenidas desde el comienzo en el significado mismo del valor absoluto.

Considere

$$|2x-1|=5.$$

La igualdad afirma que $2x-1$ está a distancia 5 de 0. En los reales hay exactamente dos números con esa propiedad, 5 y -5. Por tanto,

$$|2x-1|=5\iff 2x-1=5 \quad \text{o} \quad 2x-1=-5.$$

La palabra **o** será esencial. Resolver una ecuación con valor absoluto no consiste en escoger uno de los signos, sino en reunir todas las posibilidades permitidas por una equivalencia.

El valor absoluto codifica dos posibilidades de signo. Para un número real u y una constante real c, la ecuación $|u| = c$ presenta tres comportamientos.

Si $c < 0$, no hay soluciones, porque el valor absoluto nunca es negativo.

Si $c = 0$, entonces

$$|u| = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$$

Si $c > 0$, entonces

$$\boxed{|u| = c \Longleftrightarrow u = c \quad \text{o} \quad u = -c.}$$

Estas posibilidades no constituyen una receta añadida desde fuera. Se desprenden del significado del valor absoluto: $|u|$ mide la distancia de u al origen, y hay dos puntos de la recta a distancia positiva c de 0.

Hay aquí una diferencia importante respecto de las ecuaciones radicales. Al pasar de $|u| = c$ a $u = c$ o $u = -c$ no estamos aplicando una transformación sólo implicativa. Estamos escribiendo una condición **equivalente**.

Ejemplo rector: abrir las dos ramas. Resolvamos

$$|2x - 1| = 5$$

sobre $\mathbb{R}$.

Como $5 > 0$,

$$|2x - 1| = 5 \Longleftrightarrow 2x - 1 = 5 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = -5.$$

La primera ecuación da $x = 3$; la segunda, $x = -2$. Como las dos ramas proceden de una equivalencia,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}\big(|2x - 1| = 5\big) = \{-2, 3\}.}$$

No hemos «probado dos signos» de manera heurística. Hemos reemplazado una condición por otra exactamente equivalente.

Un segundo miembro negativo cierra el problema antes de operar. Considere

$$|3x + 2| = -4.$$

Para todo número real x,

$$|3x + 2| \geq 0.$$

El lado derecho es negativo. Luego la igualdad nunca puede cumplirse:

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}\big(|3x + 2| = -4\big) = \varnothing.}$$

Leer primero la estructura evita álgebra innecesaria. No tendría sentido «quitar las barras» antes de advertir que la igualdad contradice una propiedad básica del valor absoluto.

Aislar el valor absoluto antes de abrir casos. Cuando el valor absoluto aparece acompañado por otras operaciones, suele ser preferible aislarlo primero mediante transformaciones equivalentes.

Resolvamos

$$2|x-3|+1=9.$$

Restamos 1 y dividimos por 2:

$$2|x-3|=8 \iff |x-3|=4.$$

Ahora sí abrimos los casos:

$$|x-3|=4 \iff x-3=4 \quad \text{o} \quad x-3=-4.$$

Por tanto,

$$x=7 \qquad \text{o} \qquad x=-1,$$

y

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}=\{-1,7\}.}$$

Aislar primero reduce el cálculo y deja visible cuál es exactamente la cantidad cuyo valor absoluto estamos interpretando.

Cuando el segundo miembro depende de la variable. La situación merece más cuidado si tenemos

$$|A(x)|=B(x).$$

El lado izquierdo es siempre no negativo. Por tanto, toda solución debe cumplir $B(x)\geq 0$. Conservando esa condición, obtenemos la equivalencia completa

$$\boxed{|A(x)|=B(x) \iff (B(x)\geq 0 \quad \text{y} \quad (A(x)=B(x) \text{ o } A(x)=-B(x)))\,.}$$

No estamos abriendo todavía la teoría de inequaciones de C22. La condición $B(x)\geq 0$ aparece sólo como requisito de admisibilidad impuesto por el valor absoluto.

Resolvamos

$$|x-2|=x.$$

Toda solución debe satisfacer $x\geq 0$. Bajo esa condición,

$$|x-2|=x \iff x-2=x \quad \text{o} \quad x-2=-x.$$

La primera rama produce la contradicción $-2=0$. La segunda da $2x=2$, de modo que $x=1$. Este valor cumple la condición de admisibilidad y satisface la ecuación original. Luego

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(|x-2|=x)=\{1\}.}$$

La no negatividad del segundo miembro no es un filtro añadido al final: forma parte de la caracterización equivalente del problema.

Dos valores absolutos: la igualdad de distancias. Si ambos miembros son valores absolutos, la condición de no negatividad está incorporada automáticamente. Para números reales,

$$\boxed{|A(x)| = |B(x)| \iff A(x) = B(x) \quad \text{o} \quad A(x) = -B(x).}$$

La equivalencia también puede verse algebraicamente. De $|A| = |B|$ se obtiene $A^2 = B^2$, y entonces

$$(A - B)(A + B) = 0.$$

Por el producto nulo, $A = B$ o $A = -B$. La vuelta es inmediata.

Resolvamos

$$|2x - 3| = |x + 1|.$$

Tenemos

$$2x - 3 = x + 1 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = -(x + 1).$$

La primera rama da $x = 4$. La segunda da $3x = 2$, por lo que $x = 2/3$. Así,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}.}$$

El caso cero colapsa las dos ramas. El patrón «positivo y negativo» no significa que toda ecuación con valor absoluto deba producir dos ramas distintas.

Considere

$$|x^2 - 5x + 6| = 0.$$

Como $|u| = 0$ si y sólo si $u = 0$,

$$|x^2 - 5x + 6| = 0 \iff x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Factorizando,

$$(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{2, 3\}.}$$

Las dos soluciones proceden aquí de la factorización de la expresión interior, no de dos signos del valor absoluto.

Valor absoluto anidado: abrir de afuera hacia adentro. Una ecuación puede contener valores absolutos anidados. En ese caso conviene empezar por el más exterior.

Resolvamos

$$||x| - 2| = 1.$$

La ecuación exterior equivale a

$$|x| - 2 = 1 \quad \text{o} \quad |x| - 2 = -1.$$

La primera rama da $|x| = 3$, luego $x = \pm 3$. La segunda da $|x| = 1$, luego $x = \pm 1$. Al reunir todas las soluciones,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, -1, 1, 3\}.}$$

Cada apertura fue una equivalencia. El conjunto solución final se obtiene uniendo las soluciones de todas las ramas, no comprobando una lista de candidatos producida por pasos irreversibles.

La unión de ramas es parte de la lógica. Si una ecuación E es equivalente a

$$E_1 \quad \text{o} \quad E_2,$$

entonces

$$\mathrm{Sol}(E) = \mathrm{Sol}(E_1) \cup \mathrm{Sol}(E_2).$$

Esto evita dos errores frecuentes: resolver sólo una rama y perder soluciones, o intersectar accidentalmente las ramas como si ambas condiciones tuvieran que cumplirse a la vez.

Para $c > 0$, la afirmación

$$|A(x)| = c$$

significa

$$A(x) = c \quad \text{o} \quad A(x) = -c,$$

no ambas simultáneamente.

El dominio anterior a las barras sigue vigente. El valor absoluto no borra las restricciones de la expresión que contiene.

Considere

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 2.$$

El dominio original es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Sobre ese dominio,

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 2 \iff \frac{x+1}{x-1} = 2 \quad \text{o} \quad \frac{x+1}{x-1} = -2.$$

En la primera rama, multiplicar por $x - 1$ es reversible porque $x \neq 1$:

$$x + 1 = 2x - 2,$$

de donde $x = 3$.

En la segunda,

$$x + 1 = -2x + 2,$$

de donde $3x = 1$ y $x = 1/3$.

Ambos valores pertenecen a D. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}.}$$

Las barras exteriores no protegen de una división por cero. El dominio se fija desde la expresión original y acompaña todas las ramas posteriores.

Comparación con las ecuaciones radicales. La comparación con §21.11 aclara el papel lógico de los casos.

Para una raíz principal aislada,

$$\sqrt{R(x)} = S(x) \iff \big(R(x) = S(x)^2 \text{ y } S(x) \geq 0\big).$$

Si olvidamos la condición de signo y sólo cuadramos, podemos crear candidatos adicionales.

En cambio, para $c > 0$,

$$|A(x)| = c \iff A(x) = c \quad \text{o} \quad A(x) = -c.$$

Abrir las dos ramas no pierde información. Expresa exactamente la condición inicial.

Por eso la «verificación al final» no debe convertirse en un ritual independiente de la lógica. Si toda la resolución está formada por equivalencias y se conserva el dominio, las ramas finales ya describen exactamente el conjunto solución. La verificación sigue siendo útil como control, pero no es lo que convierte la respuesta en correcta.

No hace falta construir tablas de signos. También podríamos resolver $|2x - 1| = 5$ separando los intervalos donde $2x - 1$ es positivo o negativo. Ese método es válido, pero aquí sería innecesario y adelantaría herramientas de C22.

Las ecuaciones de esta sección se resuelven mediante equivalencias en casos. En C22 necesitaremos describir regiones completas del dominio donde una expresión sea positiva, negativa o nula; allí las tablas de signos y los intervalos tendrán una función propia.

Un protocolo para ecuaciones con valor absoluto. Para las ecuaciones elementales de C21 seguiremos este orden:

1. fijar el dominio antes de transformar;
2. aislar, cuando sea posible, la expresión con valor absoluto;
3. si el otro miembro es una constante negativa, concluir que no hay soluciones;
4. si aparece $|A(x)| = 0$, reemplazarlo por $A(x) = 0$;
5. si aparece $|A(x)| = c$ con $c > 0$, abrir las ramas equivalentes $A(x) = c$ o $A(x) = -c$;
6. si aparece $|A(x)| = B(x)$, conservar $B(x) \geq 0$ como condición de admisibilidad;
7. si aparece $|A(x)| = |B(x)|$, usar $A(x) = B(x)$ o $A(x) = -B(x)$;
8. resolver cada rama conservando las restricciones de dominio heredadas;
9. unir los conjuntos solución de las ramas válidas;
10. comprobar en la ecuación original si alguna rama contiene además un paso sólo implicativo, o como control independiente cuando sea útil.

La estructura es

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dominio} \longrightarrow \text{aislar} \\ \longrightarrow \text{equivalencia en casos} \longrightarrow \text{resolver ramas} \\ \longrightarrow \text{unir soluciones.}\end{array}}$$

Recuperación breve. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ y haga explícita la equivalencia que abre cada caso.

a)

$$|3x+1| = 7.$$

b)

$$2|x-1| - 3 = 5.$$

c)

$$|x+2| = |2x-1|.$$

Respuesta razonada. En **a)**,

$$|3x+1| = 7 \iff 3x+1 = 7 \quad \text{o} \quad 3x+1 = -7.$$

Las ramas dan $x = 2$ y $x = -8/3$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{8}{3}, 2\right\}.}$$

En **b)**,

$$2|x-1| - 3 = 5 \iff |x-1| = 4.$$

Entonces

$$x - 1 = 4 \quad \text{o} \quad x - 1 = -4,$$

de modo que $x = 5$ o $x = -3$. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, 5\}.}$$

En **c)**,

$$|x+2| = |2x-1| \iff x+2 = 2x-1 \quad \text{o} \quad x+2 = -(2x-1).$$

La primera rama da $x = 3$. La segunda da $3x = -1$, luego $x = -1/3$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Una ecuación con valor absoluto se resuelve interpretando lo que las barras afirman, no suprimiéndolas de manera formal.

Para una constante real c, la ecuación $|A| = c$ tiene tres regímenes: ninguna solución si $c < 0$, la condición $A = 0$ si $c = 0$, y dos ramas equivalentes $A = c$ o $A = -c$ si $c > 0$.

Además,

$$\boxed{|A| = |B| \iff A = B \quad \text{o} \quad A = -B.}$$

Cuando el segundo miembro depende de la variable, su no negatividad debe conservarse como condición de admisibilidad. Si la expresión interior tiene restricciones de dominio, esas restricciones pasan intactas a todas las ramas.

Las ramas de una ecuación con valor absoluto describen una unión de posibilidades equivalentes. El rigor consiste en conservarlas todas, conservar el dominio y reunir exactamente sus conjuntos solución.

En §21.13 estudiaremos qué ocurre cuando los coeficientes de una ecuación dependen de parámetros. Allí una misma forma podrá cambiar su conjunto solución según el valor del parámetro: en algunos casos habrá una solución, en otros ninguna y, en situaciones degeneradas, podrá aparecer todo el dominio.

21.13. Parámetros y familias de conjuntos solución

Hasta ahora, las letras que aparecían en una ecuación representaban casi siempre cantidades que debíamos determinar. Sin embargo, una misma forma algebraica puede describir muchas ecuaciones distintas cuando alguno de sus coeficientes queda sin fijar.

Considere

$$(a-1)x = 2(a-1).$$

Aquí x será la **incógnita** y a será un **parámetro**. No preguntamos por todos los pares (a, x) que satisfacen la igualdad. La pregunta es otra:

Para cada valor fijo de a, ¿cuál es el conjunto solución en la variable x?

Si $a \neq 1$, podemos dividir por $a-1$ y obtenemos $x = 2$. Pero si $a = 1$, la misma división sería imposible y la ecuación se transforma en $0 = 0$, verdadera para todo real.

La expresión escrita es una sola. El conjunto solución cambia con el parámetro.

Incógnita y parámetro cumplen funciones distintas. Una **incógnita** es la variable cuyos valores queremos determinar. Un **parámetro** es una cantidad que se considera fija mientras resolvemos una ecuación particular, aunque después estudiemos qué ocurre al cambiar ese valor fijo.

Podemos escribir una familia de ecuaciones como

$$E_a(x),$$

donde a recorre un conjunto de parámetros P. Para cada $a \in P$, la ecuación $E_a(x)$ tiene su propio conjunto solución.

Si trabajamos sobre un dominio D, resulta natural definir

$$S(a) = \mathrm{Sol}_D(E_a).$$

Resolver la familia significa describir la correspondencia

$$a \longmapsto S(a).$$

La respuesta ya no es necesariamente un único número ni un único conjunto. Es una **familia de conjuntos solución**.

Un primer ejemplo: el caso genérico y el caso degenerado. Volvamos a

$$(a-1)x = 2(a-1)$$

sobre $\mathbb{R}$.

El factor por el que querríamos dividir es $a-1$. Por tanto, antes de dividir separamos el valor que lo anula.

Si

$$a \neq 1,$$

entonces $a - 1 \neq 0$ y

$$(a-1)x = 2(a-1) \iff x = 2.$$

Así,

$$S(a) = \{2\}.$$

Si, en cambio,

$$a = 1,$$

la ecuación se convierte en

$$0 \cdot x = 0,$$

es decir,

$$0 = 0.$$

Todos los reales la satisfacen:

$$S(1) = \mathbb{R}.$$

La familia completa queda descrita por

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{2\}, & a \neq 1, \\ \mathbb{R}, & a = 1. \end{cases}}$$

El valor $a = 1$ es **degenerado** para esta familia porque hace desaparecer el coeficiente de la incógnita y cambia la naturaleza de la ecuación.

La clasificación general de una ecuación lineal paramétrica. El ejemplo anterior pertenece a una forma más general. Supongamos que, para cada parámetro a, debemos resolver

$$A(a)x = B(a)$$

sobre $\mathbb{R}$.

La decisión central es si el coeficiente de x se anula.

Si

$$A(a) \neq 0,$$

podemos dividir y obtenemos una única solución:

$$x = \frac{B(a)}{A(a)}.$$

Si

$$A(a) = 0,$$

la variable desaparece y queda la proposición

$$0 = B(a).$$

Entonces hay dos posibilidades:

- si además $B(a) = 0$, todos los reales son soluciones;
- si $B(a) \neq 0$, no hay ninguna solución.

Por tanto,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{B(a)}{A(a)} \right\}, & A(a) \neq 0, \\ \mathbb{R}, & A(a) = 0 \text{ y } B(a) = 0, \\ \varnothing, & A(a) = 0 \text{ y } B(a) \neq 0. \end{cases}}$$

Esta clasificación resume la lógica de §21.5, pero ahora el coeficiente puede cambiar de régimen al variar el parámetro.

Un caso con los tres tipos de conjunto solución. Queremos ahora una familia en la que aparezcan, para distintos valores del parámetro, los tres comportamientos posibles.

Considere

$$a(a-1)x = a - 1$$

sobre $\mathbb{R}$.

Los valores potencialmente excepcionales son aquellos que anulan el coeficiente de x:

$$a(a-1) = 0.$$

Por producto nulo,

$$a = 0 \qquad \text{o} \qquad a = 1.$$

Éstos son exactamente los valores que debemos separar antes de dividir.

Si

$$a \notin \{0, 1\},$$

entonces $a(a-1) \neq 0$ y podemos escribir

$$a(a-1)x = a - 1 \iff x = \frac{a-1}{a(a-1)} = \frac{1}{a}.$$

Por tanto,

$$S(a) = \left\{ \frac{1}{a} \right\}.$$

Si

$$a = 0,$$

la ecuación se convierte en

$$0 \cdot x = -1,$$

es decir,

$$0 = -1.$$

No hay soluciones:

$$S(0) = \varnothing.$$

Si

$$a = 1,$$

obtenemos

$$0 \cdot x = 0,$$

por lo que

$$S(1) = \mathbb{R}.$$

La clasificación completa es

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \varnothing, & a = 0, \\ \mathbb{R}, & a = 1, \\ \left\{ \dfrac{1}{a} \right\}, & a \notin \{0, 1\}. \end{cases}}$$

Una sola familia exhibe así tres cardinalidades radicalmente distintas: ninguna solución, una solución y todo el dominio.

El caso genérico no autoriza a borrar los casos excepcionales. En el ejemplo anterior sería tentador cancelar el factor $a - 1$ desde el comienzo:

$$a(a-1)x = a - 1 \quad \rightsquigarrow \quad ax = 1.$$

Esa transformación presupone

$$a - 1 \neq 0.$$

Por tanto, describe correctamente sólo el caso $a \neq 1$. Si se utiliza sin registrar la restricción, desaparece precisamente el caso $a = 1$, donde el conjunto solución es $\mathbb{R}$.

Después podríamos dividir por a, pero eso introduciría una segunda condición:

$$a \neq 0.$$

La cadena correcta para el caso genérico es

$$a(a-1)x = a - 1 \iff ax = 1 \iff x = \frac{1}{a}, \qquad a \notin \{0, 1\}.$$

Los valores 0 y 1 no son molestias que se agregan al final. Son los puntos donde las transformaciones genéricas dejan de ser reversibles.

No toda familia necesita una separación de casos. La presencia de un parámetro no obliga a dividir automáticamente el problema en ramas.

Considere

$$3x = a + 4.$$

El coeficiente de x es la constante 3, que nunca se anula. Para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$3x = a + 4 \iff x = \frac{a+4}{3}.$$

Por tanto,

$$\boxed{S(a) = \left\{\frac{a+4}{3}\right\} \qquad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.}$$

Aquí el parámetro mueve la posición de la solución, pero no cambia ni la licitud de la división ni el tipo de conjunto solución.

Este contraste fija una regla importante:

> **Separamos casos cuando cambia la validez de una transformación, el dominio efectivo o la estructura del conjunto solución; no sólo porque aparece un parámetro.**

Un parámetro puede cambiar el número de soluciones reales. Las familias paramétricas no se limitan a ecuaciones lineales.

Considere

$$x^2 = a$$

sobre $\mathbb{R}$, con a fijo.

Si

$$a > 0,$$

hay dos soluciones reales:

$$x = \sqrt{a} \qquad \text{o} \qquad x = -\sqrt{a}.$$

Si

$$a = 0,$$

la única solución es $x = 0$.

Si

$$a < 0,$$

no hay soluciones reales, porque ningún cuadrado real es negativo.

Por tanto,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}, & a > 0, \\ \{0\}, & a = 0, \\ \varnothing, & a < 0. \end{cases}}$$

Aquí no estamos resolviendo una inequación en x. Sólo usamos el signo del parámetro fijo para decidir qué forma puede tener el conjunto solución de la ecuación.

El parámetro también puede modificar el dominio efectivo. Hasta ahora el parámetro alteraba coeficientes. También puede aparecer en una expresión cuyo dominio depende de él.

Considere

$$\frac{x-1}{x-a}=0$$

sobre los reales.

Para cada valor fijo de a, el denominador exige

$$x \neq a.$$

Así, el dominio efectivo es

$$D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}.$$

Una fracción definida vale cero exactamente cuando su numerador vale cero. El único valor algebraicamente posible es

$$x = 1.$$

Si $a \neq 1$, entonces $1 \in D_a$, de modo que

$$S(a) = \{1\}.$$

Si $a = 1$, el único valor que anularía el numerador está excluido por el denominador. En ese caso,

$$S(1) = \varnothing.$$

Por tanto,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{1\}, & a \neq 1, \\ \varnothing, & a = 1. \end{cases}}$$

Este ejemplo muestra una segunda fuente de valores excepcionales: no sólo debemos vigilar los coeficientes por los que queremos dividir; también debemos observar cuándo el parámetro cambia el dominio de la ecuación.

Simplificar una familia no borra el dominio paramétrico. En el caso $a = 1$, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{x-1}{x-1}=0, \qquad x \neq 1.$$

Sobre su dominio,

$$\frac{x-1}{x-1}=1,$$

de modo que la ecuación equivale a $1 = 0$. No hay soluciones.

Sería incorrecto cancelar $x - 1$, olvidar la exclusión y después considerar $x = 1$ como candidato. La disciplina de C20 permanece intacta: el parámetro puede hacer coincidir

factores, pero una simplificación no recupera puntos que nunca pertenecieron al dominio original.

Una ecuación literal sigue siendo una ecuación en la variable elegida. Considere

$$ax + b = c.$$

Si la incógnita es x, entonces a, b y c se tratan como parámetros.

Restando b,

$$ax = c - b.$$

La clasificación depende de a.

Si $a \neq 0$,

$$x = \frac{c-b}{a}.$$

Si $a = 0$, la ecuación se reduce a $b = c$.

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \begin{cases} \left\{\dfrac{c-b}{a}\right\}, & a \neq 0, \\ \mathbb{R}, & a = 0 \text{ y } b = c, \\ \varnothing, & a = 0 \text{ y } b \neq c. \end{cases}}$$

Si el problema hubiera pedido despejar a en vez de x, la clasificación sería distinta. La palabra «parámetro» no pertenece para siempre a una letra concreta: depende de qué variable se declare como incógnita.

Valores excepcionales y valores ordinarios. En una familia paramétrica suele ser útil distinguir dos tipos de valores.

Los **valores ordinarios** son aquellos para los cuales el procedimiento general funciona sin cambio de lógica.

Los **valores excepcionales** son aquellos en los que ocurre alguna de estas situaciones:

- se anula un coeficiente por el que el caso genérico quería dividir;
- cambia el dominio efectivo;
- desaparece la incógnita;
- una ecuación cambia de grado o de tipo;
- cambia el número o la forma de las soluciones.

No toda excepción produce una dificultad algebraica. Su importancia está en que obliga a revisar el conjunto solución por separado.

Cómo localizar los valores excepcionales antes de resolver. Considere una familia lineal

$$A(a)x = B(a).$$

Antes de dividir por $A(a)$ preguntamos

$$A(a) = 0?$$

Los valores de a que resuelven esa ecuación son candidatos naturales a casos excepcionales.

Si además la familia contiene denominadores, radicales u otras expresiones con dominio restringido, debemos localizar también los valores del parámetro que alteran esas restricciones.

La estrategia consiste en analizar primero **dónde puede fallar el método genérico**. Sólo después resolvemos el caso ordinario.

Esta inversión del orden evita un error frecuente: obtener una fórmula válida bajo una condición y presentarla después como si describiera toda la familia.

Una clasificación no es una lista de ejemplos aislados. Cuando terminamos un problema paramétrico, la respuesta debe describir todos los valores permitidos del parámetro sin huecos ni superposiciones ambiguas.

En el ejemplo

$$a(a-1)x = a-1,$$

la respuesta $x = 1/a$ es incompleta, aunque sea correcta para la mayoría de los valores de a.

La respuesta completa debe especificar

$$a = 0, \qquad a = 1, \qquad a \notin \{0, 1\}.$$

Estos tres casos son:

- exhaustivos: todo real pertenece a uno de ellos;
- mutuamente excluyentes: ningún real pertenece simultáneamente a dos;
- suficientes para determinar $S(a)$.

Una buena clasificación paramétrica no deja valores sin tratar y no divide en más casos de los necesarios.

Un protocolo para ecuaciones con parámetros. Para las familias elementales de C21 seguiremos este orden:

1. identificar con claridad la incógnita y los parámetros;
2. fijar el conjunto de valores permitido para cada parámetro;
3. determinar el dominio efectivo de la ecuación para un parámetro fijo;
4. localizar las expresiones por las que el procedimiento genérico querría dividir;
5. identificar los valores del parámetro que anulan esas expresiones o cambian el dominio;
6. resolver primero el caso genérico bajo sus condiciones explícitas;
7. volver a cada valor excepcional y resolverlo sin usar la operación que allí dejó de ser válida;
8. escribir el conjunto solución correspondiente a cada caso;
9. comprobar que los casos son exhaustivos y mutuamente excluyentes;
10. presentar la familia completa como una descripción por casos de $a \longmapsto S(a)$.

La estructura conceptual es

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{parámetro fijo} \longrightarrow \text{dominio} \\ \longrightarrow \text{valores excepcionales} \longrightarrow \text{caso genérico} + \text{casos degenerados} \\ \longrightarrow S(a).\end{array}}$$

Recuperación breve. Para cada familia, resuelva en x sobre $\mathbb{R}$ y describa el conjunto solución según el parámetro.

a)

$$(a+2)x = 6.$$

b)

$$a(a-2)x = a-2.$$

c)

$$\frac{x-3}{x-a} = 0.$$

Respuesta razonada. En **a)** el único valor excepcional es $a = -2$.
Si $a \neq -2$,

$$x = \frac{6}{a+2},$$

por lo que

$$S(a) = \left\{\frac{6}{a+2}\right\}.$$

Si $a = -2$, la ecuación se convierte en $0 = 6$, que es falsa. Así,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \left\{\dfrac{6}{a+2}\right\}, & a \neq -2, \\ \varnothing, & a = -2. \end{cases}}$$

En **b)** el coeficiente $a(a-2)$ se anula para $a = 0$ y $a = 2$.
Si $a \notin \{0, 2\}$,

$$a(a-2)x = a-2 \iff x = \frac{1}{a}.$$

Si $a = 0$, obtenemos $0 = -2$, de modo que no hay soluciones.
Si $a = 2$, obtenemos $0 = 0$, de modo que todos los reales son soluciones.
Por tanto,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \varnothing, & a = 0, \\ \mathbb{R}, & a = 2, \\ \left\{\dfrac{1}{a}\right\}, & a \notin \{0, 2\}. \end{cases}}$$

En **c)** el dominio depende del parámetro:

$$D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}.$$

La fracción puede valer cero sólo si $x - 3 = 0$, es decir, si $x = 3$.
Cuando $a \neq 3$, ese valor pertenece al dominio y $S(a) = \{3\}$.
Cuando $a = 3$, el valor $x = 3$ está excluido y no queda ninguna solución. Por tanto,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{3\}, & a \neq 3, \\ \varnothing, & a = 3. \end{cases}}$$

Qué debemos conservar de esta sección. En una ecuación paramétrica no buscamos un único conjunto solución independiente de los coeficientes. Buscamos una familia

$$a \longmapsto S(a).$$

El caso genérico sólo es válido bajo las condiciones que hacen reversibles sus transformaciones. Los valores donde esas condiciones fallan deben resolverse por separado.

Un parámetro puede cambiar la posición de las soluciones, su número, la aparición de una identidad o una contradicción e incluso el dominio efectivo de la ecuación. Por eso una clasificación completa debe cubrir todos los valores del parámetro y distinguir únicamente los casos que realmente cambian la lógica o el conjunto solución.

En §21.14 llevaremos esta disciplina a ecuaciones simultáneas en dos variables. Allí el objeto solución ya no será un número real, sino un par ordenado, y estudiaremos sistemas algebraicos elementales no lineales mediante sustitución, eliminación y simetría.

Un árbol de casos debe cubrir también los dominios. Resolver $A(t)x = B(t)$ obliga a separar $A(t) = 0$ antes de dividir. En una ecuación racional hay otra pregunta: ¿el candidato genérico pertenece a su dominio? Para $(t-1)x/(x-t) = 0$, el dominio es $x \neq t$. Si $t = 1$, la ecuación es verdadera en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $t \neq 1$, el numerador exige $x = 0$, admitido solo cuando $t \neq 0$. Por tanto, $t = 0$ da conjunto vacío y los demás valores distintos de 1 dan $\{0\}$. **Control resuelto:** separar únicamente $t = 1$ y $t \neq 1$ es insuficiente; el segundo caso todavía contiene un candidato excluido. Las ramas deben ser disjuntas, cubrir todos los parámetros y conservar las restricciones de la ecuación original.

21.14. Sistemas algebraicos elementales no lineales

Hasta ahora, resolver una ecuación significaba determinar un subconjunto de $\mathbb{R}$: los valores de una incógnita que hacían verdadera una igualdad. En un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el objeto solución cambia.

Considere

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Un valor aislado de x o de y ya no basta. Necesitamos encontrar **pares ordenados** (x, y) que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones.

La pregunta rectora de esta sección será:

¿cómo reducimos un sistema no lineal elemental a ecuaciones ya conocidas sin perder ni añadir pares solución?

Trabajaremos sólo con sistemas que puedan resolverse mediante sustitución, eliminación elemental o simetría básica. No desarrollaremos matrices, eliminación gaussiana ni teoría sistemática de sistemas lineales.

El conjunto solución vive en $\mathbb{R}^2$. Sea un sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Diremos que $(a, b) \in D$ es una **solución del sistema** si satisface simultáneamente

$$F(a, b) = 0$$

y

$$G(a,b)=0.$$

El conjunto solución es

$$\mathrm{Sol}_D(F=0,G=0)=\{(x,y)\in D: F(x,y)=0 \text{ y } G(x,y)=0\}.$$

La conjunción es decisiva. Un par debe satisfacer las dos ecuaciones a la vez.

Por eso, si

$$S_F=\{(x,y)\in D: F(x,y)=0\}$$

y

$$S_G=\{(x,y)\in D: G(x,y)=0\},$$

entonces

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D(F=0,G=0)=S_F\cap S_G.}$$

Resolver un sistema consiste en encontrar la intersección de dos condiciones, no en unir las soluciones de cada ecuación por separado.

Una primera advertencia: resolver ecuaciones por separado no basta. Considere

$$\begin{cases} x+y=5,\\ xy=6. \end{cases}$$

La primera ecuación, por sí sola, tiene infinitos pares solución. La segunda también.

Pero el sistema exige los pares que satisfacen ambas simultáneamente.

No sería correcto resolver una ecuación, resolver la otra y formar una unión. La lógica del sistema es

$$\boxed{\text{ecuación 1 y ecuación 2}},$$

no

$$\text{ecuación 1 o ecuación 2.}$$

Esta diferencia será el equivalente bidimensional de la disciplina de conjuntos solución que ha guiado todo C21.

Sustitución: reemplazar una variable por una expresión equivalente. Supongamos que una de las ecuaciones permite expresar una variable en función de la otra.

Considere

$$\begin{cases} y=x^2,\\ y=2x+3. \end{cases}$$

Como ambas expresiones son iguales a y, todo par solución debe satisfacer

$$x^2=2x+3.$$

Podemos escribir el sistema de manera equivalente como

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 = 2x + 3. \end{cases}$$

La segunda ecuación se reduce a

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

y factoriza como

$$(x - 3)(x + 1) = 0.$$

Por tanto,

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = -1.$$

Ahora reconstruimos y.
Si $x = 3$,

$$y = 3^2 = 9.$$

Si $x = -1$,

$$y = (-1)^2 = 1.$$

Así,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(3, 9), (-1, 1)\}.}$$

Conviene verificar el orden de los pares: la primera coordenada corresponde a x y la segunda a y.

Sustituir no es eliminar información. La sustitución es segura cuando reemplazamos una variable mediante una igualdad equivalente ya contenida en el sistema.

Si tenemos

$$y = H(x),$$

entonces el sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ y = H(x) \end{cases}$$

puede reducirse a

$$F(x, H(x)) = 0,$$

pero la reconstrucción del par requiere volver después a

$$y = H(x).$$

Resolver sólo la ecuación reducida produce valores de x, no soluciones completas del sistema.

La estructura del método es

$$\boxed{(x, y) \longrightarrow x \longrightarrow \text{resolver en } x \longrightarrow \text{reconstruir } y \longrightarrow (x, y).}$$

Una sustitución puede ramificar. Considere

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Sustituimos $y = x^2$ en la segunda ecuación:

$$x + x^2 = 6.$$

Por tanto,

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

y

$$(x + 3)(x - 2) = 0.$$

Así,

$$x = -3 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

Volvemos a $y = x^2$:

$$x = -3 \Longrightarrow y = 9,$$

mientras que

$$x = 2 \Longrightarrow y = 4.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(-3, 9), (2, 4)\}.}$$

Una sola ecuación sustituida puede producir varias ramas. Cada valor de x debe llevarse de vuelta al sistema para reconstruir el par correspondiente.

Eliminación elemental: combinar ecuaciones para borrar una expresión. La sustitución no es la única ruta. A veces dos ecuaciones contienen expresiones que pueden eliminarse al sumarlas o restarlas.

Considere

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 25 - 7.$$

Entonces

$$2y^2 = 18,$$

y por tanto

$$y^2 = 9.$$

Así,

$$y = 3 \qquad \text{o} \qquad y = -3.$$

Sustituimos $y^2 = 9$ en la primera ecuación:

$$x^2 + 9 = 25,$$

de donde

$$x^2 = 16.$$

Por tanto,

$$x = 4 \qquad \text{o} \qquad x = -4.$$

Como las ecuaciones originales sólo contienen x^2 y y^2, las elecciones de signo son independientes. Los cuatro pares

$$(4, 3), \quad (4, -3), \quad (-4, 3), \quad (-4, -3)$$

satisfacen ambas ecuaciones.

Luego,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)\}.}$$

La eliminación redujo el sistema, pero no reemplazó la necesidad de reconstruir todas las combinaciones válidas.

Combinar ecuaciones debe conservar el sistema. Si de un sistema

$$\begin{cases} E_1, \\ E_2 \end{cases}$$

reemplazamos E_2 por una combinación reversible como

$$E_2 - E_1,$$

conservamos el conjunto solución siempre que mantengamos además una de las ecuaciones originales.

Por ejemplo,

$$\begin{cases} E_1, \\ E_2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} E_1, \\ E_2 - E_1. \end{cases}$$

La vuelta es posible porque

$$E_2 = (E_2 - E_1) + E_1.$$

En cambio, conservar sólo la ecuación combinada puede perder información. Una consecuencia del sistema no suele ser equivalente al sistema completo.

Esta observación conecta la eliminación con el eje lógico de todo el capítulo: no basta con obtener una ecuación verdadera para toda solución; debemos conservar suficiente información para recuperar el sistema original.

El caso simétrico $x+y=s$, $xy=p$. Algunos sistemas no lineales tienen una simetría especial.

Considere

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Las ecuaciones no distinguen entre (x,y) y (y,x). Si un par es solución, intercambiar sus coordenadas produce otra solución.

Podemos usar la primera ecuación para escribir

$$y=5-x.$$

Sustituyendo en $xy=6$,

$$x(5-x)=6.$$

Entonces

$$5x-x^2=6,$$

o

$$x^2-5x+6=0.$$

Factorizamos:

$$(x-2)(x-3)=0.$$

Así,

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=3.$$

Si $x=2$, entonces $y=3$.

Si $x=3$, entonces $y=2$.

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}^2}=\{(2,3),(3,2)\}.}$$

La simetría anticipaba que las soluciones debían aparecer intercambiadas.

La misma solución mediante una lectura simétrica. El sistema anterior admite otra lectura.

Si

$$x+y=5$$

y

$$xy=6,$$

entonces x e y son dos números cuya suma es 5 y cuyo producto es 6.

Considere el polinomio

$$t^2-5t+6.$$

Factoriza como

$$(t-2)(t-3).$$

Sus raíces son 2 y 3. Por tanto, las coordenadas x e y deben ser precisamente esos dos valores, en algún orden.

Obtenemos nuevamente

$$\boxed{\{(2,3),(3,2)\}.}$$

Esta segunda ruta no introduce una teoría nueva de polinomios. Usa únicamente la relación ya conocida entre una cuadrática factorizada y sus raíces.

La comparación de ambas rutas muestra la función de la simetría: puede permitirnos pensar primero en el **conjunto de valores de las coordenadas** y sólo después recuperar su orden.

Simetría no significa que siempre haya dos soluciones. Considere

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=4. \end{cases}$$

El polinomio asociado es

$$t^2-4t+4=(t-2)^2.$$

Sólo aparece el valor

$$t=2.$$

Por tanto,

$$x=y=2,$$

y el conjunto solución es

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}^2}=\{(2,2)\}.}$$

Intercambiar las coordenadas no produce un par nuevo porque ambas coinciden.

Un sistema puede no tener soluciones reales. Considere

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=-1. \end{cases}$$

Sustituyendo,

$$x^2=-1.$$

No existe ningún real que satisfaga esa igualdad. Luego,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}^2}=\varnothing.}$$

El hecho de que cada ecuación por separado tenga soluciones no garantiza que exista un par que satisfaga ambas simultáneamente.

La ausencia de solución corresponde a una intersección vacía de las dos condiciones.

Una ecuación reducida puede producir candidatos que deben reconstruirse como pares. Considere

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ y = 1. \end{cases}$$

Sustituyendo $y = 1$,

$$x^2 + 1 = 5,$$

de donde

$$x^2 = 4.$$

Así,

$$x = 2 \qquad \text{o} \qquad x = -2.$$

Pero la respuesta del sistema no es

$$\{-2, 2\}.$$

Ése sería un subconjunto de $\mathbb{R}$, mientras que el sistema vive en $\mathbb{R}^2$.
Debemos reconstruir los pares:

$$(2, 1) \qquad \text{y} \qquad (-2, 1).$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(2, 1), (-2, 1)\}.}$$

Este cambio de tipo de objeto es una de las obligaciones conceptuales centrales de la sección.

El orden de las coordenadas importa. Un par ordenado

$$(a, b)$$

no es, en general, igual a

$$(b, a).$$

Por ejemplo,

$$(2, 3) \neq (3, 2).$$

En el sistema

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases}$$

ambos pares son soluciones porque el sistema es simétrico.
Pero en

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 6, \end{cases}$$

el par $(-3, 9)$ es solución, mientras que $(9, -3)$ ni siquiera satisface la primera ecuación.

Por eso cada reconstrucción debe respetar qué valor pertenece a cada variable.

Elegir entre sustitución, eliminación y simetría. No existe una ruta única para todo sistema elemental.

La **sustitución** suele ser natural cuando:

- una ecuación ya tiene una variable aislada;
- una variable aparece mediante una expresión sencilla;
- sustituir reduce el sistema a una ecuación de una sola variable.

La **eliminación elemental** suele ser natural cuando:

- las ecuaciones contienen términos iguales u opuestos;
- sumarlas o restarlas borra directamente una expresión;
- la combinación resultante conserva una ecuación original suficiente para reconstruir el sistema.

La **simetría** suele ser útil cuando:

- las ecuaciones permanecen invariantes al intercambiar x e y;
- aparecen $x + y$ y xy;
- interesa comparar pares intercambiados o detectar que $x = y$ en un caso degenerado.

La elección debe responder a la estructura del sistema, no a una receta universal.

Un protocolo para sistemas no lineales elementales. Para los sistemas de C21 seguiremos este orden:

1. fijar el dominio del sistema en $\mathbb{R}^2$ o en el subconjunto declarado;
2. recordar que una solución es un **par ordenado** que satisface todas las ecuaciones;
3. buscar la estructura más visible: variable aislada, términos eliminables o simetría;
4. reducir el sistema a una ecuación en una sola variable mediante una transformación equivalente o una consecuencia acompañada de información suficiente;
5. resolver esa ecuación con las herramientas ya construidas;
6. reconstruir la otra variable para cada rama;
7. formar todos los pares ordenados obtenidos;
8. comprobar que cada par satisface simultáneamente todas las ecuaciones originales;
9. eliminar duplicados si distintas ramas producen el mismo par;
10. declarar el conjunto solución como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

La estructura puede resumirse como

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{sistema} \longrightarrow \text{reducción a una variable} \\ \longrightarrow \text{ramas} \longrightarrow \text{reconstrucción de pares} \\ \longrightarrow \text{Sol} \subseteq \mathbb{R}^2.\end{array}}$$

Recuperación breve. Resuelva cada sistema sobre $\mathbb{R}^2$.

a)

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

Respuesta razonada. En **a)** sustituimos $y = x^2$:

$$x + x^2 = 2.$$

Entonces

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

y

$$(x + 2)(x - 1) = 0.$$

Así,

$$x = -2 \qquad \text{o} \qquad x = 1.$$

Reconstruimos y:

$$x = -2 \Longrightarrow y = 4,$$

y

$$x = 1 \Longrightarrow y = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(-2, 4), (1, 1)\}.}$$

En **b)** usamos la simetría. Los valores x e y deben tener suma 7 y producto 12, por lo que son raíces de

$$t^2 - 7t + 12 = 0.$$

Factorizando,

$$(t - 3)(t - 4) = 0.$$

Así, las coordenadas son 3 y 4 en algún orden:

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(3, 4), (4, 3)\}.}$$

En **c)** restamos la segunda ecuación de la primera:

$$2y^2 = 2,$$

por lo que

$$y^2 = 1$$

y

$$y = \pm 1.$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$x^2 + 1 = 10,$$

de modo que

$$x^2 = 9$$

y

$$x = \pm 3.$$

Como las ecuaciones sólo dependen de los cuadrados, las elecciones de signo son independientes. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(3,1), (3,-1), (-3,1), (-3,-1)\}.}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Un sistema no lineal elemental cambia el tipo de objeto que buscamos:

$$\boxed{\text{una ecuación en } x \longrightarrow \mathrm{Sol} \subseteq \mathbb{R}, \qquad \text{un sistema en } x, y \longrightarrow \mathrm{Sol} \subseteq \mathbb{R}^2.}$$

Resolver un sistema significa determinar todos los pares ordenados que satisfacen simultáneamente todas sus ecuaciones.

La sustitución reduce una variable y obliga a reconstruir la otra. La eliminación debe conservar información suficiente para recuperar el sistema. La simetría puede revelar pares intercambiados o reducir el problema a una cuadrática conocida.

En §21.15 volveremos sobre todas las técnicas del capítulo desde otra perspectiva: ya no preguntaremos primero cómo resolver, sino cómo diagnosticar una resolución incorrecta localizando la **primera ruptura** donde cambió indebidamente el conjunto solución.

21.15. Laboratorio de errores y primera ruptura

En las secciones anteriores aprendimos a resolver distintos tipos de ecuaciones y sistemas. Ahora cambiaremos deliberadamente de tarea. En vez de comenzar con un problema correcto y buscar su solución, comenzaremos con **resoluciones defectuosas** y preguntaremos:

¿cuál fue el primer paso en que el conjunto solución dejó de estar bajo control?

Ésta es una habilidad distinta de calcular. Una cadena puede contener varios pasos algebraicamente impecables después de un error lógico. Si sólo miramos el final, podemos culpar a la factorización, a la fórmula cuadrática o a una simplificación que en realidad estaban bien hechas. El diagnóstico correcto exige retroceder hasta la **primera ruptura**.

Qué llamaremos primera ruptura. Considere una cadena de ecuaciones

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots, E_n$$

sobre un dominio vigente D.

Si cada transición satisface

$$E_i \Longleftrightarrow E_{i+1}$$

sobre D, todas las ecuaciones tienen el mismo conjunto solución.

Llamaremos **primera ruptura** al primer índice i en que una transición deja de conservar exactamente el problema que pretendíamos resolver: puede cambiar el conjunto solución,

cambiar indebidamente el dominio, omitir una rama o convertir la respuesta en un objeto de tipo distinto.

La pregunta diagnóstica no es sólo

> «¿este cálculo está bien hecho?»,

sino

> **«¿esta transición conserva exactamente el conjunto de valores —o pares— que todavía representan soluciones del problema original?»**

Cuatro diagnósticos básicos. A lo largo del capítulo han aparecido cuatro fallas fundamentales.

1. Creación de candidatos. La ecuación transformada admite valores adicionales:

$$\mathrm{Sol}(E_0) \subsetneq \mathrm{Sol}(E_1).$$

Esto puede ocurrir al multiplicar por una expresión que puede anularse o al elevar al cuadrado sin conservar información suficiente.

2. Pérdida de soluciones. La transformación elimina valores que sí resolvían el problema original:

$$\mathrm{Sol}(E_1) \subsetneq \mathrm{Sol}(E_0).$$

Dividir o cancelar un factor que puede ser cero es el ejemplo rector.

3. Cambio indebido de dominio. La fórmula transformada puede ser correcta sobre el dominio original, pero se la reinterpreta después sobre un dominio mayor y se readmiten valores que nunca fueron admisibles.

4. Pérdida de estructura de la respuesta. En una sustitución o en un sistema se resuelve correctamente una ecuación auxiliar, pero no se reconstruyen las preimágenes o los pares ordenados que exige el problema original.

Estas cuatro fallas no se reparan del mismo modo.

Laboratorio 1: dividir y perder una solución. Considere la resolución

$$x(x-2) = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$x = 2.$$

El cálculo de las dos últimas líneas es correcto. El problema está antes.

La ecuación original satisface

$$x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{0, 2\}.$$

La transición

$$x(x-2)=0 \quad \longrightarrow \quad x-2=0$$

se obtuvo dividiendo por x. Pero x puede valer cero, y precisamente $x=0$ es una solución original.

La primera ruptura es, por tanto, la división no autorizada.

El efecto es una pérdida:

$$\{2\} \subsetneq \{0,2\}.$$

La reparación correcta es no dividir por el factor. Podemos usar producto nulo o separar previamente el caso $x=0$ del caso $x \neq 0$.

Por qué la verificación final no detecta este error. Suponga que, al terminar, comprobamos el único valor obtenido:

$$2(2-2)=0.$$

La comprobación confirma que 2 es solución. Pero no informa que falta 0.

Éste es el límite esencial de la verificación final:

> **comprobar candidatos puede eliminar valores sobrantes; no recupera automáticamente soluciones que fueron borradas antes de llegar al final.**

Por eso las pérdidas deben detectarse durante la cadena.

Laboratorio 2: multiplicar por un posible cero y crear un candidato. Considere ahora

$$x=3.$$

Alguien multiplica ambos miembros por $x-1$ y escribe

$$x(x-1)=3(x-1).$$

Después desarrolla y factoriza:

$$x^2-x=3x-3,$$

$$x^2-4x+3=0,$$

$$(x-1)(x-3)=0.$$

Finalmente obtiene

$$x=1 \qquad \text{o} \qquad x=3.$$

Todos los cálculos posteriores a la multiplicación son correctos. La primera ruptura está en interpretar

$$x=3$$

y

$$x(x-1)=3(x-1)$$

como ecuaciones equivalentes sobre $\mathbb{R}$.

La dirección segura es sólo

$$x = 3 \Longrightarrow x(x-1) = 3(x-1).$$

Cuando $x = 1$, el factor $x - 1$ convierte ambos miembros de la ecuación transformada en cero, aunque la ecuación original $x = 3$ sea falsa.

Por tanto,

$$\{3\} \subsetneq \{1, 3\}.$$

El valor 1 es un candidato creado en la primera transición.

Aquí sí sirve la verificación final:

$$1 \neq 3,$$

de modo que 1 se descarta.

La misma operación puede ser segura sobre otro dominio. El diagnóstico siempre depende del dominio.

Si el problema estuviera restringido a

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

entonces $x - 1$ sería no nulo en todo D, y multiplicar por ese factor sí sería reversible sobre ese dominio.

No existe una lista de operaciones «buenas» y «malas» separada de las hipótesis. Lo que auditamos es la operación **junto con el dominio vigente**.

Laboratorio 3: cuadrar y aceptar una raíz extraña. Considere la resolución

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x + 1 = (x-1)^2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ o } x = 3.$$

La factorización es correcta. También lo es el desarrollo del cuadrado. La falsa afirmación aparece en la primera doble flecha.

Elevar al cuadrado garantiza

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \Longrightarrow x + 1 = (x-1)^2,$$

pero la vuelta requiere información de signo.

La equivalencia completa es

$$\sqrt{x+1} = x-1 \iff \begin{cases} x+1 = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$$

La ecuación cuadrada produce los candidatos 0 y 3, pero la condición $x-1 \geq 0$ conserva sólo 3.

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(\sqrt{x+1} = x-1) = \{3\}.}$$

El candidato 0 no estaba prohibido por el dominio. Fue creado por pérdida de información de signo.

No toda raíz rechazada es una raíz extraña del mismo tipo. Compare el ejemplo anterior con una ecuación racional donde un valor final queda fuera del dominio.

En una ecuación radical, un valor puede pertenecer al dominio original y aparecer sólo porque una transformación implicativa amplió el conjunto de candidatos.

En una ecuación racional bien tratada, un valor puede surgir al resolver la fórmula simplificada, pero haber estado excluido desde el principio por el dominio.

Ambos valores se descartan, pero el diagnóstico lógico es diferente.

Laboratorio 4: borrar el dominio sin cometer un error de cancelación. Considere

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

El dominio original es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Factorizamos:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Sobre D podemos cancelar $x-1$:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2 \iff x+1 = 2 \qquad (x \in D).$$

Hasta aquí **no hay error**. La cancelación es legítima porque en D sabemos que $x-1 \neq 0$.

La ecuación lineal produce

$$x = 1.$$

Pero

$$1 \notin D.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \varnothing.}$$

La ruptura aparece sólo si, después de simplificar, olvidamos el dominio y reinterpretamos

$$x+1 = 2$$

como una ecuación sobre todo $\mathbb{R}$.

Éste es un diagnóstico importante:

la fórmula puede simplificarse correctamente y, sin embargo, el problema puede quedar mal resuelto si se borra el dominio sobre el que se afirmó la equivalencia.

Laboratorio 5: tomar una sola rama de una ecuación cuadrada. Considere

$$x^2 = 9.$$

Una resolución defectuosa escribe

$$x = \sqrt{9}$$

y concluye

$$x = 3.$$

La primera ruptura está en reemplazar $\sqrt{x^2}$ por x.

En realidad,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Por tanto,

$$x^2 = 9 \iff |x| = 3 \iff x = 3 \text{ o } x = -3.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x^2 = 9) = \{-3, 3\}.}$$

El error perdió una rama completa. No produjo un candidato adicional: eliminó una solución válida.

La misma estructura aparece cuando se resuelve un producto nulo y se conserva sólo uno de los factores.

Laboratorio 6: dividir por un parámetro y borrar el caso degenerado. Considere la familia

$$(a-1)x = 2(a-1).$$

Una resolución automática divide por $a-1$ y concluye

$$x = 2$$

para todo a.

La primera ruptura está en la división, porque no sabemos todavía que

$$a - 1 \neq 0.$$

Si $a \neq 1$, la división es lícita y

$$S(a) = \{2\}.$$

Pero si $a = 1$, la ecuación original se convierte en

$$0 = 0,$$

de modo que

$$S(1) = \mathbb{R}.$$

La clasificación correcta es

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{2\}, & a \neq 1, \\ \mathbb{R}, & a = 1. \end{cases}}$$

La fórmula genérica no era falsa. Era **condicional**. El error consistió en olvidar la condición que autorizaba la división.

Laboratorio 7: resolver la ecuación reducida y olvidar el objeto original. Considere el sistema

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Sustituyendo correctamente obtenemos

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

y por tanto

$$x = -2 \qquad \text{o} \qquad x = 1.$$

Una respuesta defectuosa termina allí y declara

$$\{-2, 1\}$$

como conjunto solución del sistema.

No se ha cometido un error al resolver la cuadrática. La ruptura aparece al confundir las soluciones de la ecuación reducida con las soluciones del problema original.

El sistema busca pares de $\mathbb{R}^2$.

Debemos reconstruir y:

$$x = -2 \Longrightarrow y = 4,$$

$$x = 1 \Longrightarrow y = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}^2} = \{(-2, 4), (1, 1)\}.}$$

Este error no amplía ni reduce simplemente un subconjunto del mismo espacio: cambia el **tipo de objeto** que se está reportando.

Una cadena puede tener un único error y muchos pasos correctos después. Considere

$$x = 3$$

$$\Longrightarrow$$

$$x(x - 1) = 3(x - 1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ o } x = 3.$$

Después de la primera transición, todos los pasos son equivalencias de la ecuación que reciben.

El resultado incorrecto no autoriza a afirmar que la factorización «introdujo» 1. El valor 1 ya estaba presente en el conjunto solución de la segunda ecuación.

El diagnóstico correcto es:

la primera ruptura fue multiplicar por $x-1$ y tratar el paso como equivalencia.

La localización temporal del error es parte del razonamiento matemático.

Qué puede y qué no puede reparar la verificación final. Podemos resumir el papel de la verificación.

Falla	Efecto	¿La verificación final puede repararla por sí sola?
cuadrar sin conservar signo	crea candidatos	sí, puede filtrar candidatos
multiplicar por posible cero	crea candidatos	sí, puede filtrar candidatos
dividir por posible cero	pierde soluciones	no
tomar una sola rama de $U^2 = k$	pierde soluciones	no
olvidar el dominio	readmite valores inadmisibles	una comprobación de dominio sí los detecta
olvidar reconstruir una sustitución o un sistema	respuesta incompleta o de tipo incorrecto	no; hay que volver a la variable o al objeto original
dividir por parámetro sin separar el caso nulo	pierde un régimen completo	no; hay que reabrir el caso excepcional

Por eso la regla «compruebe siempre al final» es insuficiente como método universal.

La disciplina completa es:

control lógico durante la cadena + verificación final cuando corresponde.

Un protocolo de auditoría de resoluciones. Ante una resolución sospechosa, seguiremos este orden:

1. **recuperar el problema original**, incluido su dominio;
2. **identificar el tipo de objeto buscado**: número, conjunto de números, familia paramétrica o conjunto de pares;
3. **leer la cadena desde el comienzo**, no desde el resultado final;
4. **clasificar cada flecha** como equivalencia, implicación o transición condicionada;
5. **detenerse en la primera transición no justificada**;
6. **describir su efecto**: candidatos extra, soluciones perdidas, dominio borrado, rama omitida o reconstrucción incompleta;
7. **reparar localmente ese paso**, sin reescribir innecesariamente toda la resolución;
8. **continuar desde la reparación** conservando dominio y condiciones;
9. **verificar candidatos** si alguna transición sólo amplió el conjunto;
10. **declarar el conjunto solución exacto** en el espacio correcto.

Este protocolo puede representarse como

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{problema original} \longrightarrow \text{auditar flechas} \\ \longrightarrow \text{primera ruptura} \longrightarrow \text{clasificar el daño} \\ \longrightarrow \text{reparar} \longrightarrow \text{solución exacta.}\end{array}}$$

Recuperación breve. En cada resolución defectuosa, localice la primera ruptura, clasifique el error y dé el conjunto solución correcto.

a)

$$x(x+4)=0 \quad \longrightarrow \quad x+4=0 \quad \longrightarrow \quad x=-4,$$

donde el primer paso se obtuvo dividiendo por x.

b)

$$\sqrt{x+2}=x \Longleftrightarrow x+2=x^2 \Longleftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Longleftrightarrow x=2 \text{ o } x=-1.$$

c)

$$\frac{x^2-4}{x-2}=4 \Longleftrightarrow x+2=4 \Longleftrightarrow x=2,$$

sin conservar ninguna restricción de dominio.

d)

$$(m-1)x=m-1 \Longleftrightarrow x=1$$

para todo m.

Respuesta razonada. En **a)** la ecuación original satisface

$$x(x+4)=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ o } x=-4.$$

Dividir por x elimina la rama $x=0$. La primera ruptura es una **pérdida de solución**. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}=\{-4,0\}.}$$

En **b)** cuadrar sin conservar la condición $x \geq 0$ sólo produce una implicación. La ecuación cuadrada da los candidatos 2 y -1, pero

$$\sqrt{-1+2} = 1 \neq -1.$$

El valor -1 es un **candidato extra**. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{2\}.}$$

En **c)** el dominio original es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Sobre ese dominio, cancelar $x-2$ es válido:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = 4 \Longleftrightarrow x+2 = 4 \qquad (x \in D).$$

La ecuación reducida produce $x = 2$, pero $2 \notin D$. El error fue **borrar el dominio después de simplificar**, no la cancelación misma. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \varnothing.}$$

En **d)** dividir por $m-1$ sólo está permitido cuando $m \neq 1$.

Si $m \neq 1$,

$$x = 1.$$

Si $m = 1$, la ecuación original se convierte en $0 = 0$ y todo real es solución. Luego,

$$\boxed{S(m) = \begin{cases} \{1\}, & m \neq 1, \\ \mathbb{R}, & m = 1. \end{cases}}$$

Qué debemos conservar de esta sección. Una resolución incorrecta no se diagnostica buscando «el último lugar donde algo parece raro». Debemos localizar la primera transición donde la cadena dejó de conservar el problema original.

> **La primera ruptura explica el error; los pasos correctos que vienen después sólo propagan sus consecuencias.**

Crear candidatos, perder soluciones, borrar el dominio, omitir una rama y olvidar reconstruir el objeto original son fallas diferentes. También requieren reparaciones diferentes.

La idea que resume todo el laboratorio es

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dominio} + \text{tipo de objeto} + \text{fuerza lógica de cada transición} \\ = \text{trazabilidad del conjunto solución.}\end{array}}$$

En §21.16 reuniremos todo C21 en un protocolo único de resolución autónoma. El objetivo ya no será aprender una nueva clase de ecuaciones, sino decidir por cuenta propia qué estructura usar, qué transformaciones son equivalentes, cuándo aparecen candidatos y cómo entregar un conjunto solución completamente justificado antes de pasar a las inequaciones de C22.

21.16. Síntesis y puente a C22

C21 comenzó con una pregunta aparentemente elemental: ¿qué significa resolver una ecuación? A lo largo de quince secciones la respuesta se volvió más precisa. Resolver no es simplemente «despejar» una incógnita ni ejecutar una secuencia de operaciones aprendidas de memoria.

Resolver significa **determinar exactamente un conjunto solución y conservar su trazabilidad durante todas las transformaciones**.

La pregunta final del capítulo será, por tanto, más estratégica:

> **Cuando el método no viene anunciado, ¿cómo decidimos qué hacer sin perder el dominio, las soluciones ni la lógica de la transformación?**

Esta sección reunirá las herramientas de C21 en un único protocolo autónomo.

El objeto final gobierna todo el proceso. Antes de elegir una técnica debemos saber qué objeto buscamos.

Para una ecuación en una variable sobre un dominio D,

$$\mathrm{Sol}_D(E = F) = \{x \in D : E(x) = F(x)\}.$$

Para una familia paramétrica $E_a(x)$ buscamos una correspondencia

$$a \longmapsto S(a).$$

Para un sistema en dos variables, el conjunto solución vive en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Esta distinción parece elemental, pero evita varias respuestas incompletas: terminar en una variable auxiliar, olvidar las preimágenes de una sustitución, entregar sólo valores de x para un sistema o presentar una fórmula genérica sin los casos excepcionales del parámetro.

La primera pregunta de una resolución autónoma será siempre:

> **¿qué tipo de objeto debe aparecer en la respuesta final?**

El dominio se fija antes de transformar. La segunda pregunta es:

> **¿dónde tiene sentido el problema original?**

Si aparecen denominadores, radicales u otras expresiones restringidas, el dominio efectivo debe establecerse antes de simplificar.

Por ejemplo,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$$

no es una ecuación sobre todo $\mathbb{R}$, sino sobre

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

La factorización

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

permite escribir, sobre D,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 4 \Longleftrightarrow x + 1 = 4.$$

Entonces

$$x = 3,$$

y como $3 \in D$,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{3\}.}$$

La simplificación hizo desaparecer el denominador de la escritura, pero no el dominio del problema.

Reconocer estructura antes de elegir una técnica. Una ecuación no debería resolverse buscando de inmediato «qué fórmula usar». Primero conviene preguntar qué estructura está visible.

Estructura visible	Herramienta natural	Control principal
forma lineal	reunir términos y despejar	coeficiente no nulo / casos degenerados
producto igualado a cero	producto nulo	conservar todas las ramas
cuadrática	factorizar, completar cuadrados o fórmula	dominio y discriminante real
expresión repetida	sustitución	imagen y preimágenes
cocientes	dominio y eliminación de denominadores	denominadores no nulos
radical principal	aislar, controlar signo, cuadrar	equivalencia frente a implicación
valor absoluto	equivalencia en casos	unión de ramas y admisibilidad
parámetros	separar valores excepcionales	no dividir por expresiones que pueden anularse
sistema elemental	sustitución, eliminación o simetría	reconstruir pares ordenados

La tabla no es un algoritmo rígido. Es un **mapa de reconocimiento**.

Una misma ecuación puede admitir varias rutas. El criterio de elección es qué representación hace visible la estructura con menor riesgo lógico y menor carga algebraica.

La técnica y la fuerza lógica son preguntas diferentes. Después de elegir una transformación debemos preguntar algo independiente:

¿el paso es reversible sobre el dominio vigente?

Si lo es, podemos escribir

$$E_0 \iff E_1.$$

Entonces ambos problemas tienen exactamente el mismo conjunto solución.

Si sólo sabemos

$$E_0 \implies E_1,$$

las soluciones de E_1 son, en principio, candidatos para E_0.

Si sólo conocemos la implicación inversa,

$$E_1 \implies E_0,$$

la transformación puede haber perdido soluciones originales.

Esta distinción acompaña cualquier técnica. Factorizar puede ser una equivalencia; dividir por un factor puede no serlo. Eliminar denominadores puede ser una equivalencia sobre el dominio efectivo; elevar al cuadrado puede ser sólo una implicación si no conservamos las condiciones de signo.

No existe una «técnica correcta» separada de su justificación lógica.

El protocolo rector de C21. Podemos condensar el capítulo completo en diez decisiones.

1. **Identificar el objeto buscado.** Determinar si la respuesta será un subconjunto de $\mathbb{R}$, una familia de conjuntos solución o un conjunto de pares.
2. **Fijar el dominio original.** Registrar todas las restricciones antes de transformar.
3. **Reconocer la estructura.** Buscar linealidad, producto nulo, cuadrática, expresión repetida, cociente, radical, valor absoluto, parámetro o sistema.
4. **Elegir una representación útil.** Factorizar, aislar, sustituir, completar cuadrados o combinar ecuaciones sólo cuando la nueva forma haga más visible el problema.
5. **Clasificar cada transición.** Escribir $\Longleftrightarrow$ sólo cuando la transformación sea reversible bajo las hipótesis vigentes.
6. **Conservar condiciones laterales.** No nulidad, dominio, signo, imagen de una sustitución y valores excepcionales de parámetros acompañan la cadena.
7. **Resolver todas las ramas.** Una disyunción exige unión de soluciones; un sistema exige simultaneidad; una sustitución exige volver a la variable original.
8. **Tratar los resultados finales según la fuerza lógica de la cadena.** Si hubo sólo implicaciones, los resultados son candidatos hasta ser filtrados.
9. **Verificar cuando corresponda.** La comprobación sirve para candidatos creados, pero no reemplaza el control de pérdidas de soluciones.
10. **Declarar el conjunto solución exacto.** La respuesta final debe conservar dominio, tipo de objeto y condiciones relevantes.

La estructura global es

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{objeto} \longrightarrow \text{dominio} \\ \longrightarrow \text{estructura} \longrightarrow \text{representación} \\ \longrightarrow \text{fuerza lógica} \longrightarrow \text{ramas/candidatos} \\ \longrightarrow \text{reconstrucción} \longrightarrow \text{conjunto solución.}\end{array}}$$

Una resolución de síntesis. Resolvamos sobre los reales

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \sqrt{2x+8}.$$

Este problema combina dominio racional, simplificación y una ecuación radical.

1. Dominio. El denominador exige

$$x \neq 1.$$

La raíz exige

$$2x + 8 \geq 0,$$

es decir,

$$x \geq -4.$$

Por tanto,

$$D = [-4, \infty) \setminus \{1\}.$$

2. Simplificación sobre el dominio. Factorizamos

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Como $x \neq 1$ en D,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1.$$

Así,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \sqrt{2x+8} \iff x+1 = \sqrt{2x+8} \qquad (x \in D).$$

3. Condición de signo. La raíz principal es no negativa. Para conservar equivalencia al cuadrar necesitamos

$$x+1 \geq 0.$$

Por tanto,

$$x+1 = \sqrt{2x+8} \iff \begin{cases} (x+1)^2 = 2x+8, \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$$

sobre D.

4. Ecuación algebraica. Desarrollamos:

$$x^2+2x+1 = 2x+8,$$

de donde

$$x^2 = 7.$$

Así,

$$x = \sqrt{7} \qquad \text{o} \qquad x = -\sqrt{7}.$$

5. Filtrado por las condiciones conservadas.

Ambos valores pertenecen al dominio D, porque son mayores que -4 y ninguno es 1.

Pero

$$-\sqrt{7}+1 < 0,$$

por lo que $-\sqrt{7}$ no satisface la condición $x+1 \geq 0$.

En cambio,

$$\sqrt{7}+1 > 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{\sqrt{7}\}.}$$

Aquí no fue necesario realizar una comprobación ciega de todos los resultados en la ecuación original: la cadena conservó explícitamente el dominio y la condición de signo que restauraba equivalencia. Una comprobación directa sigue siendo un control independiente válido.

Qué aprendemos del ejemplo de síntesis. En la resolución anterior aparecieron varias herramientas, pero sólo un principio rector.

- El dominio se fijó antes de cancelar.
- La cancelación fue equivalente porque el factor era no nulo en el dominio.
- El radical se aisló antes de cuadrar.
- La condición de signo se conservó para recuperar una equivalencia exacta.
- La ecuación cuadrada produjo dos valores, pero sólo uno sobrevivió a las condiciones del problema.
- La respuesta se declaró como conjunto solución sobre el dominio original.

La técnica cambió durante la resolución; la obligación lógica permaneció constante.

Cuando dos rutas son posibles. Considere

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Podemos factorizar:

$$(x - 2)(x - 3) = 0,$$

y obtener

$$\{2, 3\}.$$

También podemos usar la fórmula cuadrática. El discriminante es

$$\Delta = 25 - 24 = 1,$$

y obtenemos nuevamente

$$\{2, 3\}.$$

La existencia de dos rutas no significa que debamos ejecutar ambas siempre.

Una segunda ruta es especialmente útil cuando:

- queremos verificar un resultado independiente;
- una primera ruta contiene una transformación delicada;
- la estructura permite comparar eficiencia;
- el problema pide justificar una estrategia.

En otros casos, una sola ruta completamente trazable es suficiente.

Elegir la ruta más segura puede ser mejor que elegir la más corta. Una resolución con menos líneas no es automáticamente mejor.

Dividir por un factor para «ahorrar pasos» puede perder una solución. Cuadrar antes de aislar un radical puede ocultar la condición de signo. Aplicar la fórmula cuadrática a una expresión fácilmente factorizable puede aumentar el cálculo sin aportar claridad.

Por eso, en C21 la eficiencia no significa minimizar símbolos. Significa minimizar trabajo **sin sacrificar trazabilidad**.

Podemos expresar el criterio así:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{buena estrategia} = \text{estructura visible} + \text{transformaciones seguras} \\ + \text{reconstrucción completa.}\end{array}}$$

Un árbol de preguntas para problemas no anunciados. Cuando una ecuación nueva no indique método, puede ser útil recorrer este árbol conceptual:

1. ¿Cuál es el dominio?
2. ¿Qué objeto debo entregar al final?
3. ¿Puedo simplificar sin cambiar el dominio?
4. ¿Hay un producto igualado a cero?
5. ¿La ecuación es lineal o cuadrática, o se vuelve una de ellas mediante sustitución?
6. ¿Hay denominadores que conviene eliminar sobre un dominio ya fijado?
7. ¿Hay un radical que conviene aislar?
8. ¿Hay valor absoluto que exija abrir ramas equivalentes?
9. ¿Hay un parámetro que pueda anular un coeficiente o divisor?
10. ¿Es un sistema que permite reducir una variable?
11. ¿La transformación que quiero hacer es reversible?
12. Si no lo es, ¿estoy creando candidatos o perdiendo soluciones?
13. ¿Debo reconstruir preimágenes, ramas o pares?
14. ¿Qué conjunto solución exacto queda al final?

Estas preguntas no reemplazan el conocimiento técnico. Lo organizan.

El puente conceptual hacia C22. Hasta ahora hemos preguntado principalmente **dónde una expresión es igual a otra**.

Una ecuación

$$E(x) = F(x)$$

puede escribirse como

$$E(x) - F(x) = 0.$$

El conjunto solución está formado por los puntos donde una diferencia se anula.

En C22 cambia la relación lógica. Preguntaremos, por ejemplo, dónde

$$E(x) - F(x) > 0,$$

dónde

$$E(x) - F(x) < 0,$$

o dónde se cumple una condición no estricta.

La transición es profunda: ya no bastará localizar puntos aislados donde una expresión vale cero. Tendremos que describir **regiones completas del dominio** en las que una expresión conserve determinado signo u orden.

Los ceros seguirán siendo importantes, pero cambiará su función. Considere un producto

$$(x - 2)(x + 1).$$

En C21, la ecuación

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

se resuelve localizando sus ceros:

$$x = 2 \qquad \text{o} \qquad x = -1.$$

En C22, si preguntamos cuándo

$$(x-2)(x+1) > 0,$$

los ceros seguirán siendo puntos críticos, pero ya no serán por sí solos la respuesta. Habrá que estudiar qué ocurre **entre** ellos y fuera de ellos.

Éste es el lugar natural para introducir intervalos, particiones del dominio y tablas de signos.

C21 no desarrollará todavía ese método.

Las condiciones de signo dejan de ser auxiliares. En §21.11 usamos condiciones como

$$S(x) \geq 0$$

para garantizar la admisibilidad de una raíz principal.

En §21.12 usamos la no negatividad del segundo miembro para interpretar ecuaciones con valor absoluto.

Hasta ahora esas condiciones de orden aparecían como auxiliares dentro de problemas cuyo objetivo final era una igualdad.

En C22 pasarán a ser el objeto principal:

> ya no preguntaremos sólo qué valores hacen verdadera una igualdad, sino qué subconjuntos del dominio hacen verdadera una relación de orden.

Éste es el puente entre ambos capítulos.

Recuperación breve. En cada caso, identifique primero el dominio y la estructura; después resuelva justificando las transformaciones.

a)

$$\frac{x^2-4}{x-2} = 5.$$

b)

$$\sqrt{x+5} = x-1.$$

c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, resuelva en x:

$$(a-2)x = a-2.$$

Respuesta razonada. En **a)** el dominio es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Factorizamos

$$x^2-4 = (x-2)(x+2).$$

Sobre D podemos cancelar $x-2$ y escribir

$$\frac{x^2-4}{x-2} = 5 \iff x+2 = 5.$$

Entonces $x = 3$, que pertenece a D. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{3\}.}$$

En **b)** la raíz principal exige que el segundo miembro sea no negativo en cualquier solución:

$$x - 1 \geq 0.$$

Con esa condición,

$$\sqrt{x+5} = x - 1 \iff \begin{cases} x + 5 = (x-1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

La ecuación cuadrada da

$$x + 5 = x^2 - 2x + 1,$$

por lo que

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Factorizamos:

$$(x - 4)(x + 1) = 0.$$

Los candidatos algebraicos son 4 y -1, pero sólo 4 satisface $x - 1 \geq 0$. Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{4\}.}$$

En **c)** debemos separar el valor del parámetro que anula el coeficiente.
Si $a \neq 2$, podemos dividir por $a - 2$:

$$x = 1.$$

Si $a = 2$, la ecuación se convierte en

$$0 = 0,$$

y todos los reales son soluciones.
Por tanto,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{1\}, & a \neq 2, \\ \mathbb{R}, & a = 2. \end{cases}}$$

Qué debemos conservar de C21. El capítulo entero puede resumirse en una sola obligación:

> **Resolver significa preservar y determinar exactamente el conjunto solución sobre el dominio correcto.**

Para lograrlo debemos conservar simultáneamente:

- el dominio de procedencia;
- el tipo de objeto buscado;
- la estructura algebraica útil;
- las hipótesis que hacen reversibles las operaciones;
- la diferencia entre equivalencia e implicación;
- todas las ramas válidas;
- las condiciones de admisibilidad;
- las preimágenes y pares que deban reconstruirse;
- la distinción entre candidatos y soluciones.

La síntesis final es

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dominio} \longrightarrow \text{estructura} \\ \longrightarrow \text{transformaciones justificadas} \longrightarrow \text{candidatos o ramas} \\ \longrightarrow \text{filtrado/reconstrucción} \longrightarrow \text{conjunto solución.}\end{array}}$$

C22 conservará esta disciplina, pero cambiará la pregunta. En vez de buscar solamente los puntos donde una expresión se anula o dos expresiones coinciden, estudiaremos regiones del dominio determinadas por relaciones de orden. Allí los ceros, los intervalos y el signo se convertirán en herramientas centrales.

Ejercicios

A. Lectura: dominio, verdad y equivalencia

En este primer bloque no se busca todavía velocidad de cálculo. El objetivo es leer con precisión qué afirma cada ecuación, sobre qué dominio se interpreta y qué relación lógica existe entre distintas escrituras.

1. Considere la ecuación

$$2x + 1 = 7$$

sobre $\mathbb{R}$.

a) Determine si la proposición es verdadera o falsa cuando $x = 3$.
b) Determine si es verdadera o falsa cuando $x = 4$.
c) Explique cuál de esos valores pertenece al conjunto solución y por qué comprobar un solo valor no basta, en general, para resolver una ecuación.

2. Considere la misma ecuación

$$x^2 = 4$$

en cada uno de los siguientes dominios:

a) $D_1 = \mathbb{R}$;
b) $D_2 = [0, \infty)$;
c) $D_3 = (0, 2)$.

Escriba el conjunto solución en cada caso y explique qué cambia entre los tres problemas aunque la igualdad escrita sea la misma.

3. Se pide estudiar

$$\frac{1}{x-2} = 3, \qquad x \in [0, 5].$$

a) Identifique el dominio ambiente.
b) Determine el dominio efectivo.
c) Explique por qué $x = 2$ no debe describirse como una «solución que no funciona».

No resuelva todavía la ecuación.

4. Considere

$$\frac{x-1}{x-1} = 1.$$

a) Determine su dominio natural.
b) Simplifique la expresión sobre ese dominio.
c) Escriba el conjunto solución exacto.

d) Explique por qué la respuesta no es $\mathbb{R}$ aunque la fórmula simplificada sea $1 = 1$.

5. Para cada par de ecuaciones sobre $\mathbb{R}$, compare sus conjuntos solución y decida si corresponde escribir $\iff$, sólo $\implies$ desde la primera ecuación, o sólo $\impliedby$ desde la primera.

a)

$$x + 4 = 9 \qquad \text{y} \qquad x = 5.$$

b)

$$x = 3 \qquad \text{y} \qquad x^2 = 9.$$

c)

$$x(x + 1) = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 1 = 0.$$

En cada caso, justifique la dirección de la flecha mediante inclusión o igualdad de conjuntos solución.

6. Compare, sobre $\mathbb{R}$, las ecuaciones

$$x = 2$$

y

$$x^2 = 2x.$$

a) Determine el conjunto solución de cada una.
b) Decida cuál conjunto está contenido en cuál.
c) Explique qué valor aparece al pasar de la primera ecuación a la segunda y por qué debe llamarse **candidato adicional** si la segunda se obtuvo multiplicando por x.

7. Sea

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Compare las ecuaciones

$$\frac{2}{x - 4} = 5$$

y

$$2 = 5(x - 4).$$

a) Explique por qué son equivalentes sobre D.
b) Explique por qué la afirmación de equivalencia debe conservar explícitamente el dominio D.
c) ¿Qué problema tendría afirmar sin más que ambas ecuaciones son equivalentes «sobre $\mathbb{R}$»?

8. Considere

$$\frac{x + 1}{x - 2} = 0$$

sobre su dominio natural.

Clasifique cada uno de los valores -1, 2 y 0 como:

- solución;
- valor admisible que no es solución;

- valor inadmisible.

Justifique cada clasificación distinguiendo con claridad «no satisface la ecuación» de «no pertenece al dominio».

9. Una estudiante escribe

$$x = 1 \Longleftrightarrow x^2 = 1.$$

a) Determine el conjunto solución de cada ecuación sobre $\mathbb{R}$.
b) Explique por qué la doble flecha es incorrecta.
c) Reemplace la doble flecha por la flecha correcta.
d) Indique qué inclusión entre conjuntos solución expresa esa flecha.

10. Considere la transformación

$$x(x-2) = 0 \quad \longrightarrow \quad x - 2 = 0,$$

obtenida dividiendo por x.

a) Determine el conjunto solución de la ecuación original.
b) Determine el conjunto solución de la ecuación transformada.
c) Explique por qué la transformación no conserva equivalencia.
d) Escriba la dirección de implicación que sí es válida.
e) Indique qué solución se pierde y por qué una comprobación final del valor que sobrevivió no permitiría recuperarla.

B. Fluidez: lineales, producto nulo y cuadráticas

En los ejercicios 11–26 el objetivo principal es ejecutar con soltura procedimientos ya justificados en la teoría. Salvo que se indique otra cosa, trabaje sobre $\mathbb{R}$ y declare siempre el conjunto solución.

11. Resuelva:

$$7x - 11 = 24.$$

12. Resuelva:

$$5x + 8 = 2x - 13.$$

13. Resuelva:

$$\frac{3x-2}{4} - \frac{x+1}{2} = 5.$$

14. Determine el conjunto solución de

$$6(x-2) + 3 = 6x - 9.$$

Clasifique el resultado como ecuación con solución única, identidad o contradicción.

15. Determine el conjunto solución de

$$4(2x+1) = 8x + 11.$$

Clasifique el resultado como ecuación con solución única, identidad o contradicción.

16. Resuelva mediante la propiedad del producto nulo:

$$(3x-2)(x+5) = 0.$$

17. Resuelva:

$$x(x-4)(2x+3)=0.$$

18. Resuelva sin dividir por ningún factor:

$$(x-1)^2(x+6)=0.$$

19. Lleve primero la ecuación a cero y resuelva por factorización:

$$x^2=7x-12.$$

20. Resuelva por factorización:

$$6x^2-x-2=0.$$

21. Resuelva completando cuadrados:

$$x^2+8x+7=0.$$

22. Resuelva completando cuadrados:

$$x^2-6x-2=0.$$

23. Resuelva la ecuación

$$x^2-10x+21=0$$

por dos rutas:

a) factorización;
b) completar cuadrados.

Compruebe que ambas rutas producen el mismo conjunto solución.

24. Use la fórmula cuadrática para resolver

$$3x^2-2x-8=0.$$

Calcule primero el discriminante.

25. Use el discriminante para clasificar el número de soluciones reales y luego resuelva:

$$9x^2+12x+4=0.$$

26. Calcule el discriminante y determine el conjunto solución real de

$$2x^2-4x+7=0.$$

C. Justificación: hipótesis y transformaciones

En los ejercicios 27–38 no basta con obtener el conjunto solución. En cada resolución deberá indicarse **por qué** la transformación usada es equivalente, o qué condición adicional permite recuperar la equivalencia.

27. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$x(x-3)=2x.$$

No divida directamente por x. Transforme primero la ecuación mediante equivalencias y explique por qué su procedimiento conserva todas las soluciones.

28. Sea

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Resuelva sobre D:

$$(x-1)(2x+3) = 7(x-1).$$

Justifique explícitamente por qué dividir ambos miembros por $x-1$ es una transformación equivalente sobre este dominio.

29. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ mediante la sustitución

$$u = x^2 :$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Indique:

a) qué restricción hereda la variable auxiliar u;
b) cuáles soluciones de la ecuación en u son realizables;
c) todas las preimágenes reales que deben reconstruirse.

30. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ mediante

$$u = 2x - 1 :$$

$$(2x-1)^2 - 7(2x-1) + 10 = 0.$$

Explique por qué cada valor real de u produce una única preimagen real en x y por qué la sustitución no introduce ramificación adicional.

31. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+2}{x-3} = 4.$$

Antes de eliminar el denominador:

a) determine el dominio efectivo;
b) explique por qué multiplicar por $x-3$ es una equivalencia sobre ese dominio;
c) declare el conjunto solución sobre el dominio original.

32. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 1.$$

Debe indicar el dominio efectivo, elegir un multiplicador común y justificar por qué dicho multiplicador es no nulo en todo el dominio vigente antes de eliminar denominadores.

33. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Fije primero el dominio y después simplifique. Explique por qué la cancelación es válida sobre el dominio efectivo aunque la ecuación simplificada produzca un valor que no pertenece a ese dominio.

34. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{2x+3} = 5.$$

Determine primero el dominio y explique por qué, en este caso, elevar al cuadrado puede escribirse como una equivalencia y no sólo como una implicación.

35. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+4} = x.$$

Use la equivalencia completa para una raíz principal aislada:

$$\sqrt{R(x)} = S(x) \iff \big(R(x) = S(x)^2 \text{ y } S(x) \geq 0\big).$$

Identifique con precisión la condición de signo que debe acompañar al cuadrado y úsela para filtrar la ecuación algebraica resultante.

36. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+8} = \sqrt{3x+2}.$$

Determine el dominio común de ambas raíces y justifique por qué, dentro de ese dominio, elevar ambos miembros al cuadrado es reversible.

37. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$3|2x-1| - 2 = 10.$$

Aísle primero el valor absoluto y escriba explícitamente la equivalencia que abre las dos ramas. Explique por qué aquí no se están generando candidatos adicionales.

38. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$|x-3| = x+1.$$

Antes de abrir las ramas:

a) indique la condición de admisibilidad que debe satisfacer el segundo miembro;
b) escriba una formulación equivalente del problema usando esa condición;
c) resuelva las ramas y conserve sólo los valores que satisfacen todas las condiciones acumuladas.

D. Diagnóstico: localizar la primera ruptura

En los ejercicios 39–50 se presenta una resolución defectuosa. No basta con indicar que «está mal». En cada caso:

1. localice la **primera ruptura**;
2. clasifique el daño: candidato adicional, solución perdida, dominio omitido, rama omitida o reconstrucción incompleta;
3. escriba la relación lógica correcta en el paso problemático;
4. repare la resolución y declare el conjunto solución exacto.

39. Se propone:

$$(x-4)(x+1) = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1,$$

donde el primer paso se obtuvo dividiendo por $x-4$.

Diagnostique la resolución. Compare los conjuntos solución antes y después de la división e identifique qué solución se perdió.

40. Se propone:

$$x(x-5) = 0 \iff x-5 = 0 \iff x = 5.$$

Luego se verifica

$$5(5-5)=0$$

y se concluye que la respuesta es correcta.

Explique por qué la verificación final de $x=5$ no basta para detectar el error cometido en la primera transición. Repare la resolución completa.

41. Partiendo de

$$2x=8,$$

una estudiante multiplica ambos miembros por $x-3$ y escribe

$$2x=8 \Longleftrightarrow 2x(x-3)=8(x-3).$$

Después factoriza y obtiene dos valores.

Determine qué valor adicional puede aparecer, explique por qué la doble flecha es incorrecta y escriba la dirección de implicación válida.

42. Se resuelve

$$\sqrt{x+6}=x$$

mediante la cadena

$$\sqrt{x+6}=x \Longleftrightarrow x+6=x^2 \Longleftrightarrow (x-3)(x+2)=0 \Longleftrightarrow x=3 \text{ o } x=-2.$$

Localice la primera ruptura. Distinga el dominio de la ecuación de la condición de signo que se pierde al cuadrar y determine cuál valor es sólo un candidato.

43. Se propone:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=6 \Longleftrightarrow x+3=6 \Longleftrightarrow x=3.$$

Una estudiante afirma: «la cancelación de $x-3$ fue ilegítima porque produjo una respuesta falsa».

Analice esa afirmación. Determine el dominio original, explique si la cancelación es o no válida sobre ese dominio y localice con precisión dónde aparece el error de la resolución.

44. En la ecuación

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1},$$

se multiplica por $x-1$, se obtiene $x+1=2$ y después $x=1$. El resolutor dice: «$x=1$ es una raíz extraña creada al eliminar denominadores».

Decida si ese diagnóstico es correcto. Distinga entre **candidato creado por una transformación no reversible** y **valor inadmisible por el dominio original**.

45. Se escribe

$$x-2=-3 \Longleftrightarrow (x-2)^2=9 \Longleftrightarrow x-2=3 \text{ o } x-2=-3.$$

Determine el conjunto solución de la primera y de la segunda ecuación de la cadena. Localice la primera falsa equivalencia y escriba la flecha correcta.

46. Para resolver

$$(x-1)+(x+2)=0,$$

un estudiante razona:

$$(x-1)+(x+2)=0 \Longleftrightarrow x-1=0 \text{ o } x+2=0,$$

y concluye $x=1$ o $x=-2$.

Explique qué propiedad se aplicó fuera de su hipótesis estructural. Resuelva correctamente la ecuación y compare el conjunto obtenido con los dos valores propuestos.

47. Para

$$x^4-5x^2+4=0,$$

se define $u=x^2$, se resuelve

$$u^2-5u+4=0$$

y se obtiene

$$u \in \{1,4\}.$$

La resolución termina declarando

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}=\{1,4\}.$$

Explique por qué el cálculo auxiliar puede ser correcto y, sin embargo, la respuesta final tener el tipo de objeto equivocado. Reconstruya todas las preimágenes reales.

48. Para

$$x^4-10x^2+9=0,$$

se usa $u=x^2$. La ecuación auxiliar da $u=1$ o $u=9$, y se concluye

$$x=1 \text{ o } x=3.$$

Localice la pérdida de soluciones. Explique qué propiedad de la sustitución $x \mapsto x^2$ obliga a reconstruir más de una preimagen para cada valor auxiliar positivo.

49. Se estudia la familia

$$(a-2)x=a-2$$

en la incógnita x. Una resolución divide inmediatamente por $a-2$ y concluye

$$S(a)=\{1\} \qquad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Localice la primera ruptura, determine el valor excepcional del parámetro y describa la familia correcta de conjuntos solución.

50. Para el sistema

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=2, \end{cases}$$

se sustituye correctamente y se obtiene

$$x^2+x-2=0,$$

de donde

$$x=-2 \qquad \text{o} \qquad x=1.$$

La resolución termina con

$$\text{Sol} = \{-2, 1\}.$$

Explique por qué no hay error en la ecuación reducida pero sí en la respuesta final. Identifique el espacio en el que vive el conjunto solución del sistema y reconstruya los pares ordenados correspondientes.

E. Estrategia: elegir ruta y decidir cuándo verificar

En los ejercicios 51–60 no se anuncia de antemano el método óptimo. El objetivo es **elegir una ruta**, justificar por qué conviene y distinguir entre una verificación final lógicamente necesaria y una comprobación meramente independiente.

51. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Antes de operar:

a) compare factorización, completar cuadrados y fórmula cuadrática;
b) elija la ruta que considere más eficiente y justifique la elección;
c) resuelva por esa ruta;
d) indique una segunda ruta válida sin desarrollarla por completo y explique por qué debe producir el mismo conjunto solución.

52. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$x^2 + 6x - 2 = 0.$$

Compare específicamente estas dos estrategias:

- completar cuadrados;
- fórmula cuadrática.

Ejecute la que considere más transparente para esta ecuación y explique qué estructura hace menos natural una factorización elemental con coeficientes enteros.

53. Considere

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

Resuelva por dos rutas:

a) factorización;
b) fórmula cuadrática.

Después compare:

- número de pasos;
- cantidad de cálculo numérico;
- visibilidad de las soluciones;
- oportunidades de error de signo.

Concluya cuál ruta preferiría si sólo necesitara el conjunto solución.

54. Considere

$$x^2 - 8x + 16 = 0.$$

Sin resolver inmediatamente, identifique qué rasgo visible debería gobernar la elección de método. Resuelva por la ruta más económica y use el discriminante únicamente como control estructural independiente.

Explique por qué aplicar directamente la fórmula cuadrática sería correcto pero estratégicamente innecesario.

55. Considere sobre $\mathbb{R}$:

$$2x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Entre las siguientes posibilidades,

- intentar factorizar;
- completar cuadrados;
- calcular primero el discriminante;

elija la que permita decidir con menor trabajo si existen soluciones reales. Justifique la elección y determine el conjunto solución real sin introducir raíces complejas.

56. Resuelva

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

por:

a) completar cuadrados;
b) fórmula cuadrática.

Compare ambas rutas y responda: ¿cuál hace más visible la forma $(x-h)^2 = k$ y cuál es más mecánica? Explique por qué «más mecánica» no significa necesariamente «más conveniente».

57. Considere

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Un estudiante propone esta estrategia:

1. fijar el dominio;
2. factorizar $x^2 - 9$;
3. cancelar $x - 3$ sobre el dominio efectivo;
4. resolver la ecuación lineal resultante;
5. filtrar por pertenencia al dominio.

Analice la estrategia antes de efectuarla. Decida si, después del paso 5, sustituir de nuevo cada valor en la ecuación original es **lógicamente necesario** o sólo un control opcional. Fundamente su respuesta mediante la fuerza lógica de las transformaciones usadas y luego resuelva.

58. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x + 4} = x.$$

Compare estas dos rutas.

Ruta A. Cuadrar usando sólo

$$\sqrt{x + 4} = x \Longrightarrow x + 4 = x^2,$$

y verificar al final todos los candidatos.

Ruta B. Conservar desde el comienzo la condición de signo y usar

$$\sqrt{x + 4} = x \Longleftrightarrow (x + 4 = x^2 \text{ y } x \geq 0).$$

Resuelva por ambas rutas. Explique por qué la verificación final es necesaria en A, mientras que en B las condiciones conservadas ya restablecen equivalencia.

59. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$|2x-3| = 7.$$

Antes de resolver, responda:

a) ¿abrir las dos ramas produce una equivalencia o sólo una implicación?;
b) ¿la verificación final en la ecuación original es necesaria para recuperar corrección lógica?;
c) ¿en qué se diferencia este caso de una ecuación radical que fue simplemente elevada al cuadrado?

Después resuelva mediante la ruta que considere conceptualmente más directa.

60. Para cada una de las siguientes resoluciones planificadas, decida **antes de calcular** si la verificación final en la ecuación original es:

- necesaria para filtrar candidatos;
- innecesaria si se conserva correctamente el dominio o las condiciones equivalentes;
- útil sólo como control independiente.

Justifique cada decisión.

a) Factorizar y aplicar producto nulo a

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

b) Fijar $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y multiplicar por $x-1$ en

$$\frac{x+2}{x-1} = 3.$$

c) Cuadrar sin registrar condición de signo en

$$\sqrt{x+1} = x - 1.$$

d) Abrir las ramas equivalentes de

$$|3x+1| = 5.$$

No basta con escribir «sí» o «no»: relacione cada decisión con $\iff$, $\implies$, dominio vigente y conjunto de candidatos.

F. Transferencia: parámetros, dominios heredados, sustituciones y sistemas

En los ejercicios 61–72 las herramientas ya no aparecen aisladas. El objetivo es transferir a problemas nuevos la disciplina desarrollada en C18–C20 y en las secciones anteriores de C21: conservar dominios, reconocer valores excepcionales, reconstruir preimágenes y declarar el objeto solución correcto.

61. Para cada $a \in \mathbb{R}$, resuelva en x:

$$(a-2)x = a^2 - 4.$$

a) Identifique el valor excepcional del parámetro.
b) Resuelva el caso genérico sin cancelar antes de justificarlo.
c) Resuelva por separado el caso excepcional.
d) Escriba la familia completa $a \mapsto S(a)$.

62. Para cada $a \in \mathbb{R}$, resuelva en x:

$$a(a+1)x = a + 1.$$

La clasificación debe distinguir todos los valores del parámetro que cambian la validez de una división. Presente el resultado de modo que aparezcan, si corresponde, los regímenes

$$\varnothing, \qquad \mathbb{R}, \qquad \text{y un conjunto unitario.}$$

63. Para cada $a \in \mathbb{R}$, considere la ecuación

$$\frac{x-2}{x-a} = 0.$$

a) Determine el dominio efectivo D_a.
b) Localice el valor del parámetro para el cual el único cero posible del numerador deja de ser admisible.
c) Describa completamente $S(a)$.
d) Explique por qué este ejercicio es simultáneamente un problema paramétrico y una transferencia directa de la disciplina de dominio de C20.

64. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = 0.$$

Factorice numerador y denominador antes de decidir qué valores pueden ser soluciones. Debe distinguir:

- ceros del numerador;
- ceros del denominador;
- valores algebraicamente posibles que son inadmisibles por el dominio.

Declare el conjunto solución sobre el dominio efectivo.

65. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{(x-1)^2} = 3.$$

No eleve al cuadrado de manera automática. Use primero la identidad heredada de C18

$$\sqrt{u^2} = |u|$$

y reduzca el problema a una ecuación con valor absoluto. Haga explícitas las equivalencias hasta obtener el conjunto solución.

66. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 7.$$

Compare dos lecturas:

a) convertir la raíz principal mediante $\sqrt{u^2} = |u|$ y resolver por ramas equivalentes;
b) elevar al cuadrado y tratar los resultados como candidatos.

Explique cuál ruta conserva mejor la información de signo y por qué ambas deben terminar en el mismo conjunto solución después del control lógico correspondiente.

67. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$(x^2-1)^2 - 5(x^2-1) + 4 = 0.$$

Use una sustitución adecuada. La resolución debe mostrar tres niveles:

1. ecuación original en x;
2. ecuación auxiliar en una variable u;
3. reconstrucción completa de todas las preimágenes reales en x.

No se detenga en los valores de u.

68. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$(x-1)^4 - 10(x-1)^2 + 9 = 0.$$

Introduzca una variable auxiliar que haga visible una cuadrática. Después de resolverla, reconstruya **todas** las soluciones de la variable original y explique por qué cada valor auxiliar positivo puede producir más de una preimagen.

69. Resuelva sobre

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

la ecuación

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 6 = 0.$$

Use

$$u = \frac{x+1}{x-1}.$$

Debe:

a) conservar el dominio original durante toda la sustitución;
b) resolver la cuadrática auxiliar;
c) reconstruir x para cada valor admisible de u;
d) comprobar que las preimágenes obtenidas pertenecen a D.

70. Resuelva sobre $\mathbb{R}^2$ el sistema

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

Use sustitución, reduzca a una ecuación en una variable y reconstruya después la segunda coordenada. La respuesta final debe ser un conjunto de pares ordenados.

71. Resuelva sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 10. \end{cases}$$

Puede usar sustitución o la simetría suma–producto. Explique por qué, si aparece una solución (r, s) con $r \neq s$, la simetría del sistema hace esperable también (s, r).

72. Resuelva sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

Use una combinación reversible de las ecuaciones para determinar primero x^2 y y^2. Después reconstruya todas las combinaciones de signos y verifique cuáles pares satisfacen simultáneamente el sistema original.

G. Síntesis avanzada: problemas no rutinarios y trazabilidad completa

Los ejercicios 73–80 constituyen el bloque avanzado del capítulo. El método no viene anunciado. En cada problema deberá conservarse la trazabilidad completa del conjunto solución: dominio, fuerza lógica de las transformaciones, candidatos, ramas, reconstrucciones y objeto final.

73. Considere sobre $\mathbb{R}$ la ecuación

$$\sqrt{3x+10} = x+2.$$

Un borrador de resolución propone la cadena

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+10} = x+2 \quad &\to \quad 3x+10 = (x+2)^2 \\ \to \quad x^2+x-6=0 \quad &\to \quad (x-2)(x+3)=0 \\ \to \quad x=2 \text{ o } x=-3. & \end{aligned}$$

a) Determine primero el dominio de la ecuación original.
b) Sustituya cada flecha $\to$ por $\iff$ o $\implies$, según corresponda, y justifique cada elección.
c) Identifique el primer paso en que el conjunto puede ampliarse.
d) Distinga el **conjunto de candidatos** del **conjunto solución**.
e) Explique qué información adicional permitiría convertir el primer cuadrado en una equivalencia completa.

74. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

La solución debe comenzar por el dominio efectivo.

Después:

a) elimine denominadores mediante una transformación equivalente sobre ese dominio;
b) resuelva la ecuación polinómica resultante;
c) explique por qué uno de los valores algebraicos obtenidos sigue siendo inadmisible;
d) justifique por qué ese valor **no** debe describirse como un candidato extraño creado por una transformación no reversible.

El objetivo es separar con precisión **equivalencia sobre el dominio** y **filtrado por dominio original**.

75. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+8} + \sqrt{x} = 2.$$

Desarrolle dos lecturas de la misma resolución.

Ruta A — control lógico. Fije el dominio, eleve al cuadrado la igualdad completa cuando esté justificado y aísle el radical restante. Examine el signo del miembro opuesto antes de volver a cuadrar.

Ruta B — continuación algebraica. Ignore provisionalmente esa señal de signo, eleve al cuadrado una segunda vez y determine el valor candidato que aparece.

Después:

a) verifique el candidato en la ecuación original;
b) explique en qué paso se volvió posible que apareciera una raíz extraña;
c) compare por qué la Ruta A puede cerrar el problema antes que la Ruta B.

76. Para cada $a \in \mathbb{R}$, resuelva en x:

$$(a-1)(x^2-a)=0.$$

La clasificación final debe distinguir, cuando corresponda, los cuatro tipos siguientes de conjunto solución:

$$\varnothing, \qquad \text{un singleton}, \qquad \text{un conjunto finito con más de un elemento}, \qquad \mathbb{R}.$$

Debe:

a) localizar primero el valor del parámetro que hace degenerar toda la ecuación;
b) resolver después el caso no degenerado;
c) separar los regímenes que dependen del signo de a sin abrir teoría sistemática de inequaciones;
d) comprobar que los casos finales son exhaustivos y mutuamente excluyentes.

77. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$(x-1)^4+3(x-1)^2-4=0.$$

El método no está anunciado.

Si introduce una variable auxiliar, deberá justificar:

a) qué expresión conviene sustituir;
b) cuál es la imagen real de esa sustitución;
c) cuáles soluciones de la ecuación auxiliar son realizables;
d) cuántas preimágenes reales produce cada valor auxiliar admisible;
e) por qué el conjunto solución debe expresarse finalmente en la variable x y no en la variable auxiliar.

78. Resuelva sobre $\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right|=\frac{1}{2}.$$

La resolución debe integrar dos estructuras distintas.

a) Determine el dominio efectivo antes de abrir las barras.
b) Use una equivalencia exacta para convertir el valor absoluto en ramas.
c) Resuelva cada ecuación racional conservando el dominio heredado.
d) Una las ramas válidas y declare el conjunto solución.
e) Explique por qué no fue necesario construir una tabla de signos ni verificar como si las ramas hubieran surgido de una transformación sólo implicativa.

79. Resuelva sobre $\mathbb{R}^2$ el sistema

$$\begin{cases} x+y=6, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$$

Debe resolverlo por **dos rutas**.

Ruta A. Sustitución directa de una variable en la otra ecuación.

Ruta B. Use la identidad

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

para determinar primero xy y convertir el problema en uno de suma–producto.

Después:

a) reconstruya todos los pares ordenados en cada ruta;
b) compruebe que ambas rutas producen exactamente el mismo subconjunto de $\mathbb{R}^2$;

c) explique qué papel desempeña la simetría bajo el intercambio $x \leftrightarrow y$.

80. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ sin método anunciado:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \sqrt{x+7}.$$

La solución debe ser una síntesis completa del capítulo.

1. Determine el dominio original, conservando simultáneamente la restricción racional y la existencia del radical.
2. Simplifique la expresión racional sólo sobre ese dominio.
3. Decida qué fuerza lógica tiene elevar al cuadrado si no registra ninguna condición adicional.
4. Resuelva la ecuación algebraica resultante y obtenga el conjunto de candidatos.
5. Distinga:
   - valores excluidos desde el dominio original;
   - candidatos creados por pérdida de información de signo;
   - soluciones efectivas.
6. Realice una verificación independiente en la ecuación original.
7. Reescriba después la etapa radical mediante una **equivalencia completa con condición de signo** y explique cómo esa segunda ruta filtra el mismo conjunto sin depender únicamente de la comprobación final.
8. Declare el conjunto solución exacto y señale la primera transición que habría sido sólo implicativa en la ruta menos informativa.

H. Profundización y reconstrucción

Intente cada tarea antes de consultar su solución. Los parámetros son reales salvo indicación distinta.

Ejercicio 081. Diseñar exactamente dos soluciones. Dados $r < s$ y $h \notin \{r, s\}$, construya una ecuación racional cuyo conjunto solución real sea exactamente $\{r, s\}$ y cuyo dominio excluya h.

Ejercicio 082. Diseñar un intervalo solución con un radical. Dados $r < s$, construya una ecuación con raíz principal cuyo conjunto solución sea $[r, s]$.

Ejercicio 083. Una identidad sobre un dominio perforado. Dados $r \neq s$, diseñe una ecuación verdadera exactamente en $\mathbb{R} \setminus \{r, s\}$, sin que los puntos excluidos sean soluciones falsas.

Ejercicio 084. Parámetro, grado y candidato excluido. Resuelva $\dfrac{(t-1)x(x-2)}{x-t} = 0$ para cada real t.

Ejercicio 085. Una cuadrática que se vuelve lineal. Clasifique todas las soluciones reales de $tx^2 + (1-t)x - 1 = 0$.

Ejercicio 086. Dos causas distintas de degeneración. Resuelva $(t-1)x/(x-t) = t-1$ para todo real t.

Ejercicio 087. Multiplicar por un factor: medir los candidatos añadidos. Compare $x = r$ con $(x-h)(x-r) = 0$. Determine sus conjuntos solución y cuándo la multiplicación es una equivalencia sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 088. Cuadrar con y sin condición de signo. Compare $\sqrt{x+2} = x$ con $x + 2 = x^2$ sobre $x \geq -2$. Localice el cambio del conjunto solución y repare la equivalencia.

Ejercicio 089. Una división que pierde una solución y otra que conserva el dominio. Resuelva $(x-r)^2 = (x-r)(x-s)$ y compare dividir por $x-r$ con separar sus ceros, para todos los r, s.

Ejercicio 090. Reconstruir todos los pares de un sistema simétrico. Para reales s, p, resuelva $x + y = s$, $xy = p$, y clasifique el número de pares ordenados reales.

Ejercicio 091. Un sistema con una región imposible. Clasifique las soluciones reales de $x - y = a$, $xy = b$ según los parámetros reales a, b.

Ejercicio 092. Un sistema donde dividir borra una rama. Resuelva $x + y = s$, $x(y - r) = 0$ para todos los reales r, s. Indique cuándo coinciden las ramas.

Soluciones razonadas

Las soluciones conservan la función cognitiva del banco. En el bloque A la meta no es acelerar el cálculo, sino distinguir con precisión **dominio, valor de verdad, conjunto solución y fuerza lógica de una transformación**. Cuando dos ecuaciones se comparan, la dirección de la flecha se justifica mediante igualdad o inclusión de sus conjuntos solución; cuando interviene una expresión parcial, el dominio efectivo se fija antes de operar.

A. Lectura: dominio, verdad y equivalencia

Solución 1. La ecuación es

$$2x + 1 = 7.$$

Para $x = 3$,

$$2(3) + 1 = 6 + 1 = 7,$$

por lo que la proposición es **verdadera**.

Para $x = 4$,

$$2(4) + 1 = 8 + 1 = 9 \neq 7,$$

por lo que la proposición es **falsa**.

Así, entre los dos valores examinados, sólo 3 pertenece al conjunto solución. De hecho, resolviendo la ecuación,

$$2x + 1 = 7 \iff 2x = 6 \iff x = 3,$$

de modo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{3\}.}$$

Comprobar un valor sólo decide si **ese valor concreto** satisface la ecuación. Una comprobación positiva no demuestra, en general, que no existan otras soluciones; una comprobación negativa tampoco determina cuáles son las que sí funcionan. Resolver exige caracterizar el conjunto completo de valores que hacen verdadera la proposición.

Solución 2. La igualdad escrita es siempre

$$x^2 = 4,$$

pero el conjunto solución depende del dominio sobre el que se interpreta.

En $D_1 = \mathbb{R}$,

$$x^2 = 4 \iff x = 2 \text{ o } x = -2,$$

por lo que

$$\boxed{S_{D_1} = \{-2, 2\}.}$$

En $D_2 = [0, \infty)$, el valor -2 no pertenece al dominio. Por tanto,

$$\boxed{S_{D_2} = \{2\}.}$$

En $D_3 = (0, 2)$, ni -2 ni 2 pertenecen al dominio: -2 queda fuera por ser negativo y 2 queda fuera porque el extremo derecho es abierto. Así,

$$\boxed{S_{D_3} = \varnothing.}$$

La fórmula $x^2 = 4$ no ha cambiado. Lo que cambia es el universo de valores admisibles. Por eso una ecuación no queda completamente especificada sólo por la igualdad escrita: el dominio forma parte del problema.

Solución 3. El problema declara

$$x \in [0, 5],$$

por lo que el **dominio ambiente** es

$$\boxed{D_{\text{amb}} = [0, 5].}$$

La expresión

$$\frac{1}{x - 2}$$

no está definida cuando

$$x - 2 = 0,$$

es decir, cuando $x = 2$. Por tanto, el **dominio efectivo** es

$$\boxed{D_{\text{ef}} = [0, 5] \setminus \{2\}.}$$

El valor $x = 2$ no es una «solución que no funciona». Para poder preguntar si un valor satisface una ecuación, primero debe pertenecer al dominio efectivo. En $x = 2$ el miembro izquierdo ni siquiera está definido; por ello 2 es un **valor inadmisible**, no un candidato que se prueba y falla.

No es necesario resolver la ecuación para establecer esta distinción.

Solución 4. La ecuación es

$$\frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Su dominio natural excluye el cero del denominador:

$$x - 1 \neq 0,$$

de modo que

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$$

Sobre este dominio, $x - 1$ es no nulo y puede cancelarse:

$$\frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Por tanto la ecuación se reduce, **sobre** D, a

$$1 = 1,$$

que es verdadera para todo valor admisible. Luego

$$\boxed{\text{Sol} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$$

La respuesta no es $\mathbb{R}$ porque la simplificación no modifica retroactivamente el dominio de la expresión original. En $x = 1$ aparece $0/0$, que no está definido. La fórmula simplificada oculta esa exclusión, pero no la elimina.

Solución 5. Conviene comparar los conjuntos solución de cada par.
a). Para

$$x + 4 = 9$$

se obtiene $x = 5$, y la segunda ecuación es precisamente

$$x = 5.$$

Por tanto,

$$S_1 = S_2 = \{5\},$$

y corresponde escribir

$$\boxed{x + 4 = 9 \iff x = 5.}$$

b). La primera ecuación tiene

$$S_1 = \{3\},$$

mientras que

$$x^2 = 9$$

tiene

$$S_2 = \{-3, 3\}.$$

Se cumple la inclusión propia

$$\{3\} \subsetneq \{-3, 3\}.$$

Todo valor que satisface $x = 3$ satisface $x^2 = 9$, pero la recíproca falla en $x = -3$. Así,

$$\boxed{x = 3 \implies x^2 = 9.}$$

c). Por la propiedad del producto nulo,

$$x(x+1)=0$$

tiene

$$S_1=\{0,-1\}.$$

En cambio,

$$x+1=0$$

tiene

$$S_2=\{-1\}.$$

Ahora

$$\{-1\}\subsetneq\{0,-1\},$$

de modo que toda solución de la segunda ecuación es solución de la primera, pero no al revés. Por tanto,

$$\boxed{x(x+1)=0 \iff x+1=0.}$$

La doble flecha corresponde exactamente a igualdad de conjuntos solución. Una sola flecha corresponde a una inclusión en la dirección apropiada.

Solución 6. La primera ecuación es

$$x=2,$$

por lo que

$$S_1=\{2\}.$$

La segunda puede escribirse como

$$x^2=2x \iff x^2-2x=0 \iff x(x-2)=0.$$

Por la propiedad del producto nulo,

$$x=0 \qquad \text{o} \qquad x=2.$$

Así,

$$S_2=\{0,2\}.$$

Por tanto,

$$\boxed{S_1\subsetneq S_2.}$$

Si se obtiene la segunda ecuación multiplicando

$$x=2$$

por x, entonces

$$x=2 \Longrightarrow x^2=2x.$$

La transformación no es reversible para todo real porque el factor usado para multiplicar puede ser cero. En $x = 0$, la ecuación multiplicada se convierte en $0 = 0$, aunque la ecuación original $x = 2$ sea falsa. Por eso 0 es un **candidato adicional** creado por la transformación.

Solución 7. Trabajamos sobre

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

En todo punto de D se cumple

$$x - 4 \neq 0.$$

Por ello podemos multiplicar ambos miembros de

$$\frac{2}{x-4} = 5$$

por $x - 4$ sin perder ni crear soluciones:

$$\frac{2}{x-4} = 5 \iff 2 = 5(x-4), \qquad x \in D.$$

La reversibilidad es inmediata: partiendo de $2 = 5(x - 4)$, como $x - 4 \neq 0$ en D, podemos dividir otra vez por $x - 4$ y recuperar la ecuación original.

El dominio debe conservarse explícitamente porque la primera ecuación no está definida en $x = 4$, mientras que la segunda expresión

$$2 = 5(x-4)$$

sí tiene sentido como proposición para todo número real. Por tanto, afirmar sin más que son equivalentes «sobre $\mathbb{R}$» ignoraría que en $x = 4$ una de las dos ecuaciones ni siquiera está definida.

La afirmación correcta es

$$\boxed{\frac{2}{x-4} = 5 \iff 2 = 5(x-4) \quad \text{sobre } D = \mathbb{R} \setminus \{4\}.}$$

Solución 8. La ecuación es

$$\frac{x+1}{x-2} = 0.$$

Su dominio natural es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Examinamos los tres valores pedidos.

Para $x = -1$, el valor es admisible y

$$\frac{-1+1}{-1-2} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{-1 \text{ es solución.}}$$

Para $x = 2$, el denominador se anula. La expresión no está definida, así que

$$\boxed{2 \text{ es un valor inadmisible.}}$$

Para $x = 0$, el valor pertenece al dominio, pero

$$\frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{0 \text{ es admisible, pero no es solución.}}$$

La diferencia conceptual es esencial: en $x = 0$ la ecuación tiene un valor de verdad y resulta falsa; en $x = 2$ la expresión del miembro izquierdo no existe, por lo que el valor queda excluido antes de preguntar si satisface la igualdad.

Solución 9. Sobre $\mathbb{R}$, la primera ecuación

$$x = 1$$

tiene conjunto solución

$$S_1 = \{1\}.$$

La segunda ecuación

$$x^2 = 1$$

equivale a

$$x^2 - 1 = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0,$$

y por tanto

$$S_2 = \{-1, 1\}.$$

Los conjuntos no son iguales:

$$\{1\} \neq \{-1, 1\}.$$

Así, la doble flecha es incorrecta. Sí se cumple

$$\boxed{x = 1 \implies x^2 = 1,}$$

porque

$$\boxed{\{1\} \subsetneq \{-1, 1\}.}$$

La implicación inversa falla: $x = -1$ satisface $x^2 = 1$, pero no satisface $x = 1$.

Solución 10. La ecuación original es

$$x(x-2) = 0.$$

Por la propiedad del producto nulo,

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = 2,$$

de modo que

$$S_{\text{orig}} = \{0, 2\}.$$

La ecuación transformada es

$$x - 2 = 0,$$

y por tanto

$$S_{\text{trans}} = \{2\}.$$

La división por x no conserva equivalencia porque x puede ser cero en la ecuación original. Precisamente en $x = 0$ el factor por el que se pretende dividir se anula. Ese valor satisface la ecuación original y desaparece al efectuar la división.

La relación válida es

$$\boxed{x(x-2) = 0 \iff x - 2 = 0,}$$

o, equivalentemente,

$$x - 2 = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0.$$

En términos de conjuntos solución,

$$\{2\} \subsetneq \{0, 2\}.$$

La solución perdida es

$$\boxed{x = 0.}$$

Si al final sólo comprobamos el valor superviviente $x = 2$, verificaremos correctamente que

$$2(2-2) = 0.$$

Pero esa comprobación únicamente confirma que 2 es una solución verdadera; no demuestra que sea **la única**. Una verificación final puede eliminar candidatos falsos, pero no puede recuperar por sí sola una solución que ya fue descartada por una transformación no reversible.

B. Fluidez: lineales, producto nulo y cuadráticas

En este bloque el objetivo es consolidar procedimientos ya justificados sin perder la estructura lógica del capítulo. Como todos los ejercicios se resuelven sobre $\mathbb{R}$, no aparecen restricciones adicionales de dominio; las transformaciones lineales usadas son equivalencias, la factorización conserva la ecuación y la propiedad del producto nulo describe exactamente la unión de las ramas.

Solución 11. Partimos de

$$7x - 11 = 24.$$

Sumamos 11 en ambos miembros:

$$7x = 35.$$

Como $7 \neq 0$, dividir por 7 es reversible:

$$x = 5.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{5\}.}$$

Solución 12. Tenemos

$$5x + 8 = 2x - 13.$$

Restamos $2x$ y después 8 en ambos miembros:

$$5x + 8 = 2x - 13 \iff 3x + 8 = -13 \iff 3x = -21.$$

Dividiendo por la constante no nula 3,

$$x = -7.$$

Así,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-7\}.}$$

Solución 13. La ecuación es

$$\frac{3x - 2}{4} - \frac{x + 1}{2} = 5.$$

Multiplicamos toda la ecuación por 4. Como $4 \neq 0$, el paso conserva equivalencia:

$$3x - 2 - 2(x + 1) = 20.$$

Desarrollando,

$$3x - 2 - 2x - 2 = 20,$$

de donde

$$x - 4 = 20 \iff x = 24.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{24\}.}$$

Solución 14. Partimos de

$$6(x - 2) + 3 = 6x - 9.$$

Desarrollamos el miembro izquierdo:

$$6x - 12 + 3 = 6x - 9,$$

es decir,

$$6x - 9 = 6x - 9.$$

Restando $6x - 9$ en ambos miembros obtenemos

$$0 = 0.$$

La proposición final es verdadera para todo número real. Como todas las transformaciones fueron equivalentes, la ecuación original también es verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.}$$

La ecuación es una **identidad sobre** $\mathbb{R}$.

Solución 15. Tenemos

$$4(2x+1) = 8x + 11.$$

Desarrollamos:

$$8x + 4 = 8x + 11.$$

Restando $8x$ en ambos miembros queda

$$4 = 11.$$

Esta proposición es falsa, independientemente del valor de x. Como llegamos a ella mediante transformaciones equivalentes, ningún real satisface la ecuación original.

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

La ecuación es una **contradicción sobre** $\mathbb{R}$.

Solución 16. La ecuación ya tiene la estructura apropiada para aplicar producto nulo:

$$(3x-2)(x+5) = 0.$$

Sobre los reales,

$$(3x-2)(x+5) = 0 \iff 3x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0.$$

La primera rama da

$$x = \frac{2}{3},$$

y la segunda,

$$x = -5.$$

Al unir ambas ramas,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-5, \frac{2}{3}\right\}.}$$

No fue necesario dividir por ninguno de los factores: la propiedad del producto nulo conserva exactamente las dos posibilidades.

Solución 17. Tenemos un producto de tres factores:

$$x(x-4)(2x+3) = 0.$$

La propiedad del producto nulo da la equivalencia

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 3 = 0.$$

Por tanto,

$$x = 0, \qquad x = 4, \qquad x = -\frac{3}{2}.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{3}{2}, 0, 4\right\}.}$$

Cada factor aporta una rama posible y el conjunto solución final es la unión de las tres.

Solución 18. La ecuación es

$$(x-1)^2(x+6) = 0.$$

Sin dividir por ningún factor, aplicamos producto nulo:

$$(x-1)^2 = 0 \quad \text{o} \quad x+6 = 0.$$

La primera rama equivale a

$$x - 1 = 0,$$

de donde $x = 1$. La segunda produce $x = -6$.

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-6, 1\}.}$$

El factor $(x-1)$ aparece con multiplicidad 2, pero un conjunto no repite elementos: 1 aparece una sola vez en el conjunto solución. Dividir por $(x-1)^2$ habría sido una mala estrategia, pues eliminaría precisamente la rama $x = 1$.

Solución 19. Primero llevamos todos los términos a un mismo miembro:

$$x^2 = 7x - 12 \iff x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Factorizamos:

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4).$$

Entonces

$$(x-3)(x-4) = 0 \iff x = 3 \quad \text{o} \quad x = 4.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{3, 4\}.}$$

La propiedad del producto nulo sólo se aplicó después de obtener una ecuación equivalente de la forma producto igual a cero.

Solución 20. Buscamos una factorización de

$$6x^2 - x - 2.$$

Se tiene

$$6x^2 - x - 2 = (3x-2)(2x+1),$$

pues

$$(3x-2)(2x+1) = 6x^2 + 3x - 4x - 2 = 6x^2 - x - 2.$$

Así,

$$6x^2 - x - 2 = 0 \iff (3x - 2)(2x + 1) = 0.$$

Por producto nulo,

$$3x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 1 = 0,$$

de donde

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Luego,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}.}$$

Solución 21. Completamos cuadrados en

$$x^2 + 8x + 7 = 0.$$

Aislamos primero los términos con x:

$$x^2 + 8x = -7.$$

La mitad de 8 es 4 y $4^2 = 16$. Añadimos 16 a ambos miembros:

$$x^2 + 8x + 16 = 9.$$

Por tanto,

$$(x + 4)^2 = 9.$$

Sobre $\mathbb{R}$,

$$(x + 4)^2 = 9 \iff x + 4 = 3 \quad \text{o} \quad x + 4 = -3.$$

Así,

$$x = -1 \quad \text{o} \quad x = -7,$$

y finalmente

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-7, -1\}.}$$

Solución 22. Partimos de

$$x^2 - 6x - 2 = 0.$$

Aislamos los términos variables:

$$x^2 - 6x = 2.$$

La mitad de -6 es -3 y $(-3)^2 = 9$. Sumamos 9 a ambos miembros:

$$x^2 - 6x + 9 = 11.$$

Entonces

$$(x-3)^2 = 11.$$

Como $11 > 0$,

$$x - 3 = \sqrt{11} \quad \text{o} \quad x - 3 = -\sqrt{11}.$$

Por tanto,

$$x = 3 + \sqrt{11} \quad \text{o} \quad x = 3 - \sqrt{11},$$

y

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{3 - \sqrt{11},\, 3 + \sqrt{11}\}.}$$

Solución 23. Debemos resolver

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

por dos rutas.

Ruta a: factorización. Buscamos dos números cuyo producto sea 21 y cuya suma sea 10. Son 3 y 7. Por tanto,

$$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7).$$

Así,

$$(x-3)(x-7) = 0 \iff x = 3 \quad \text{o} \quad x = 7.$$

Ruta b: completar cuadrados. Partimos de

$$x^2 - 10x = -21.$$

La mitad de -10 es -5 y $(-5)^2 = 25$. Sumando 25 a ambos miembros,

$$x^2 - 10x + 25 = 4,$$

de modo que

$$(x-5)^2 = 4.$$

Entonces

$$x - 5 = 2 \quad \text{o} \quad x - 5 = -2,$$

y otra vez

$$x = 7 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

Ambas cadenas están formadas por equivalencias y terminan en el mismo conjunto:

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{3, 7\}.}$$

La coincidencia no es accidental: las dos rutas resuelven la misma ecuación mediante representaciones distintas que preservan su conjunto solución.

Solución 24. Para

$$3x^2 - 2x - 8 = 0,$$

tenemos

$$a = 3, \qquad b = -2, \qquad c = -8.$$

Calculamos primero el discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-8) = 4 + 96 = 100.$$

Como

$$\Delta > 0,$$

esperamos dos soluciones reales distintas. Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 10}{6}.$$

Las dos ramas son

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

y

$$x = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}.}$$

Solución 25. En

$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

tenemos

$$a = 9, \qquad b = 12, \qquad c = 4.$$

El discriminante es

$$\Delta = 12^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0.$$

Por tanto, la ecuación posee **una única solución real** —una raíz doble en sentido algebraico—. La fórmula da

$$x = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}.}$$

Como control estructural,

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2,$$

por lo que la misma solución se hace visible directamente desde $(3x + 2)^2 = 0$.

Solución 26. Para

$$2x^2 - 4x + 7 = 0,$$

tenemos

$$a = 2, \qquad b = -4, \qquad c = 7.$$

Calculamos

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(7) = 16 - 56 = -40.$$

Como

$$\Delta < 0,$$

la ecuación no tiene soluciones reales: al completar cuadrados se obtendría un cuadrado real igual a una cantidad negativa.

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

En C21 la resolución termina aquí, porque el dominio es $\mathbb{R}$; las soluciones complejas pertenecen al tratamiento posterior correspondiente.

C. Justificación: hipótesis y transformaciones

En este bloque no basta con llegar a un conjunto solución correcto. Cada transformación debe acompañarse de la hipótesis que la hace reversible o, cuando aparece una estructura de casos, de la equivalencia exacta que justifica la ramificación. La meta es que el cálculo y la lógica permanezcan visibles al mismo tiempo.

Solución 27. Partimos de

$$x(x - 3) = 2x.$$

No dividimos por x, porque todavía no sabemos si x puede valer cero. En cambio, restamos $2x$ en ambos miembros, operación reversible sobre todo $\mathbb{R}$:

$$x(x - 3) = 2x \iff x(x - 3) - 2x = 0.$$

Extraemos factor común:

$$x(x - 5) = 0.$$

La factorización es una identidad algebraica, por lo que no altera el conjunto solución. Aplicamos ahora la propiedad del producto nulo:

$$x(x - 5) = 0 \iff x = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0.$$

Así,

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 5,$$

y por tanto

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{0, 5\}.}$$

La ruta conserva todas las soluciones porque sólo usamos equivalencias. Dividir directamente por x habría exigido $x \neq 0$ y habría eliminado precisamente la solución $x = 0$.

Solución 28. Trabajamos sobre el dominio declarado

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

La ecuación es

$$(x - 1)(2x + 3) = 7(x - 1).$$

Para todo $x \in D$ se cumple

$$x - 1 \neq 0.$$

Por eso dividir ambos miembros por $x - 1$ es una transformación reversible **sobre** D:

$$(x - 1)(2x + 3) = 7(x - 1) \iff 2x + 3 = 7, \qquad x \in D.$$

Resolviendo,

$$2x = 4 \iff x = 2.$$

Como $2 \in D$, obtenemos

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{2\}.}$$

La hipótesis decisiva no es que el factor dependa o no de x, sino que **no puede anularse en el dominio vigente**. Si el dominio fuera todo $\mathbb{R}$, la división no sería automáticamente equivalente, porque $x = 1$ sería un valor posible antes de separar casos.

Solución 29. La ecuación es

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Introducimos

$$u = x^2.$$

Como $x \in \mathbb{R}$, la variable auxiliar hereda la restricción

$$\boxed{u \geq 0.}$$

Además,

$$x^4 = (x^2)^2 = u^2,$$

de modo que la ecuación auxiliar es

$$u^2 - 10u + 9 = 0.$$

Factorizamos:

$$u^2 - 10u + 9 = (u - 1)(u - 9).$$

Por producto nulo,

$$u = 1 \quad \text{o} \quad u = 9.$$

Ambos valores son realizables porque pertenecen a $[0, \infty)$, la imagen de la sustitución $u = x^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Ahora reconstruimos **todas** las preimágenes.

Si $u = 1$,

$$x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Si $u = 9$,

$$x^2 = 9 \iff x = \pm 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, -1, 1, 3\}.}$$

La sustitución no estaría completa si termináramos en $u \in \{1, 9\}$: ésas son soluciones de la ecuación auxiliar, no todavía del problema original en x.

Solución 30. Definimos

$$u = 2x - 1.$$

La ecuación se transforma en

$$u^2 - 7u + 10 = 0.$$

Factorizamos:

$$u^2 - 7u + 10 = (u - 2)(u - 5),$$

de modo que

$$u = 2 \quad \text{o} \quad u = 5.$$

La sustitución

$$x \longmapsto 2x - 1$$

es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$: para cada $u \in \mathbb{R}$ existe exactamente un

$$x = \frac{u + 1}{2}.$$

Por tanto, no hay restricción adicional sobre la variable auxiliar ni ramificación al regresar.

Para $u = 2$,

$$2x - 1 = 2 \iff x = \frac{3}{2}.$$

Para $u = 5$,

$$2x - 1 = 5 \iff x = 3.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{2}, 3\right\}.}$$

A diferencia de $u = x^2$, aquí cada solución auxiliar posee una sola preimagen real.

Solución 31. La ecuación es

$$\frac{x+2}{x-3} = 4.$$

Antes de eliminar el denominador fijamos el dominio efectivo:

$$x - 3 \neq 0,$$

de modo que

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.}$$

En todo D el factor $x - 3$ está definido y es no nulo. Por ello podemos multiplicar ambos miembros por $x - 3$ y conservar equivalencia:

$$\frac{x+2}{x-3} = 4 \iff x + 2 = 4(x - 3), \qquad x \in D.$$

Resolvemos:

$$x + 2 = 4x - 12 \iff 14 = 3x \iff x = \frac{14}{3}.$$

Como

$$\frac{14}{3} \neq 3,$$

el valor pertenece al dominio original. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \left\{\frac{14}{3}\right\}.}$$

La eliminación del denominador no fue un paso meramente formal: fue una equivalencia autorizada por la no nulidad de $x - 3$ en todo el dominio vigente.

Solución 32. Consideramos

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 1.$$

Los denominadores exigen

$$x \neq 2, \qquad x \neq -2.$$

Así,

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.}$$

Tomamos como multiplicador común

$$M(x) = (x - 2)(x + 2).$$

Por la definición de D,

$$M(x) \neq 0 \qquad \text{para todo } x \in D.$$

Multiplicar la ecuación completa por $M(x)$ es, por tanto, reversible sobre D:

$$(x+2) + (x-2) = (x-2)(x+2).$$

Simplificando,

$$2x = x^2 - 4,$$

y entonces

$$x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Completamos cuadrados:

$$x^2 - 2x = 4 \iff x^2 - 2x + 1 = 5 \iff (x-1)^2 = 5.$$

Por tanto,

$$x = 1 - \sqrt{5} \quad \text{o} \quad x = 1 + \sqrt{5}.$$

Ninguno de estos valores es -2 ni 2, por lo que ambos pertenecen a D. Así,

$$\boxed{\text{Sol}_D = \{1 - \sqrt{5},\, 1 + \sqrt{5}\}.}$$

No aparecen candidatos extraños por la eliminación de denominadores: cada paso fue una equivalencia sobre el dominio fijado al comienzo.

Solución 33. La ecuación original es

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

El denominador exige

$$x \neq 2,$$

de modo que

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.}$$

Factorizamos el numerador:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Como $x - 2 \neq 0$ en todo D, podemos cancelar ese factor y conservar equivalencia **sobre** D:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \iff x + 2 = 4, \qquad x \in D.$$

La ecuación algebraica simplificada produce

$$x = 2.$$

Pero

$$2 \notin D.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \varnothing.}$$

La cancelación fue completamente válida: la equivalencia se afirmó desde el principio sólo para $x \neq 2$. El error aparecería si, después de simplificar, reinterpretáramos $x + 2 = 4$ sobre todo $\mathbb{R}$ y olvidáramos el dominio de procedencia. El valor 2 no es un candidato extraño creado por una transformación no reversible; es un valor **inadmisible desde el problema original**.

Solución 34. La ecuación es

$$\sqrt{2x+3} = 5.$$

La raíz exige

$$2x + 3 \geq 0,$$

de modo que el dominio es

$$\boxed{D = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).}$$

En este dominio el miembro izquierdo es una raíz principal y, por tanto, es no negativo. El miembro derecho es la constante positiva 5. Así, ambos miembros pertenecen a $[0, \infty)$, donde la función $t \mapsto t^2$ es inyectiva. Por eso elevar al cuadrado es reversible:

$$\sqrt{2x+3} = 5 \iff 2x + 3 = 25, \qquad x \in D.$$

Equivalentemente, la formulación completa sería

$$\sqrt{2x+3} = 5 \iff (2x + 3 = 25 \text{ y } 5 \geq 0),$$

y la condición de signo es automática.

Resolvemos:

$$2x = 22 \iff x = 11.$$

Como $11 \in D$,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{11\}.}$$

Solución 35. Consideramos

$$\sqrt{x+4} = x.$$

La raíz está definida cuando

$$x + 4 \geq 0,$$

es decir,

$$x \geq -4.$$

Pero una raíz principal es siempre no negativa. Para que pueda ser igual a x, necesitamos además

$$\boxed{x \geq 0.}$$

Usamos la equivalencia completa para una raíz principal aislada:

$$\sqrt{x+4} = x \iff \begin{cases} x+4 = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

La ecuación algebraica es

$$x^2 - x - 4 = 0.$$

Su discriminante es

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-4) = 17,$$

de modo que

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ahora aplicamos la condición de signo. Como $\sqrt{17} > 1$,

$$\frac{1 - \sqrt{17}}{2} < 0,$$

por lo que esa raíz no puede satisfacer la ecuación original. En cambio,

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{2} > 0.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right\}.}$$

El valor negativo sí pertenece al dominio de existencia de $\sqrt{x+4}$, pero viola la condición $x \geq 0$. Si hubiéramos cuadrado sin conservar esa condición, habría aparecido como candidato adicional.

Solución 36. La ecuación es

$$\sqrt{x+8} = \sqrt{3x+2}.$$

Para que ambas raíces estén definidas necesitamos

$$x + 8 \geq 0$$

y

$$3x + 2 \geq 0.$$

Esto equivale a

$$x \geq -8$$

y

$$x \geq -\frac{2}{3}.$$

El dominio común es, por tanto,

$$\boxed{D = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right).}$$

En D ambos miembros son raíces principales y, por tanto, son no negativos. Como el cuadrado es inyectivo sobre $[0, \infty)$, podemos escribir la equivalencia

$$\sqrt{x+8} = \sqrt{3x+2} \iff x + 8 = 3x + 2, \qquad x \in D.$$

Resolviendo,

$$6 = 2x \iff x = 3.$$

Como $3 \in D$,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{3\}.}$$

Aquí cuadrar no crea candidatos porque el signo de **ambos** miembros está controlado automáticamente por tratarse de raíces principales.

Solución 37. Partimos de

$$3|2x - 1| - 2 = 10.$$

Primero aislamos el valor absoluto mediante transformaciones reversibles:

$$3|2x - 1| - 2 = 10 \iff 3|2x - 1| = 12 \iff |2x - 1| = 4.$$

Como $4 > 0$, la definición del valor absoluto da una equivalencia exacta en dos ramas:

$$|2x - 1| = 4 \iff 2x - 1 = 4 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = -4.$$

La primera rama produce

$$2x = 5 \iff x = \frac{5}{2},$$

y la segunda,

$$2x = -3 \iff x = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}.}$$

No se generan candidatos adicionales porque abrir las barras mediante

$$|A| = c \iff A = c \text{ o } A = -c \qquad (c > 0)$$

no es una aproximación ni una implicación unilateral: describe exactamente todas las posibilidades de la ecuación original.

Solución 38. La ecuación es

$$|x-3| = x+1.$$

El miembro izquierdo es siempre no negativo. Por tanto, toda solución debe satisfacer la condición de admisibilidad

$$\boxed{x+1 \geq 0,}$$

es decir,

$$x \geq -1.$$

Conservando esa condición, la ecuación admite la formulación equivalente

$$|x-3| = x+1 \iff \left(x \geq -1 \text{ y } \left(x-3 = x+1 \text{ o } x-3 = -(x+1)\right)\right).$$

Resolvemos las ramas.

La primera da

$$x-3 = x+1 \iff -3 = 1,$$

que es una contradicción y no aporta soluciones.

La segunda da

$$x-3 = -x-1 \iff 2x = 2 \iff x = 1.$$

El valor obtenido satisface la condición acumulada $x \geq -1$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{1\}.}$$

La no negatividad de $x+1$ no es un filtro improvisado al final: forma parte de la equivalencia que permite reemplazar correctamente la ecuación con valor absoluto por sus ramas.

D. Diagnóstico: localizar la primera ruptura

En este bloque la prioridad no es sólo obtener la respuesta correcta, sino reconstruir **dónde** dejó de conservarse el problema original. Para cada caso se identifica la primera ruptura, se clasifica su efecto sobre el conjunto solución y se repara la cadena desde ese punto. La verificación final se usa cuando corresponde, pero nunca como sustituto del control lógico durante la resolución.

Solución 39. La ecuación original es

$$(x-4)(x+1) = 0.$$

Por producto nulo,

$$(x-4)(x+1) = 0 \iff x-4 = 0 \quad \text{o} \quad x+1 = 0,$$

de modo que

$$S_{\text{orig}} = \{-1, 4\}.$$

La resolución defectuosa divide por $x-4$ y conserva sólo

$$x+1 = 0,$$

cuyo conjunto solución es

$$S_{\text{trans}} = \{-1\}.$$

La primera ruptura está, por tanto, en

$$(x-4)(x+1) = 0 \not\Longleftarrow x+1 = 0.$$

Dividir por $x-4$ exige $x \neq 4$, pero $x = 4$ es precisamente una solución de la ecuación original. El daño es una **solución perdida**.

La relación lógica segura es

$$x+1 = 0 \Longrightarrow (x-4)(x+1) = 0,$$

o, con la orientación de la cadena original,

$$(x-4)(x+1) = 0 \Longleftarrow x+1 = 0.$$

La reparación correcta evita la división:

$$(x-4)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 4 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-1, 4\}.}$$

Solución 40. La ecuación es

$$x(x-5) = 0.$$

La propiedad del producto nulo da inmediatamente

$$x(x-5) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x-5 = 0.$$

Por tanto,

$$S_{\text{orig}} = \{0, 5\}.$$

La cadena propuesta divide implícitamente por x y pasa a

$$x-5 = 0,$$

cuyo conjunto solución es sólo

$$\{5\}.$$

La primera ruptura es esa división: como x puede valer cero en una solución original, el paso no es reversible. La relación correcta es

$$x-5 = 0 \Longrightarrow x(x-5) = 0,$$

pero no la recíproca.

La verificación

$$5(5-5) = 0$$

demuestra únicamente que 5 **sí** es solución. No demuestra que sea la única. La solución $x = 0$ ya desapareció de la cadena antes de la verificación, y comprobar el valor superviviente no puede recuperarla.

La resolución completa es

$$x(x-5) = 0 \iff x = 0 \quad \text{o} \quad x = 5,$$

de modo que

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{0, 5\}.}$$

El daño es una **solución perdida**; la verificación final no detecta por sí sola pérdidas de este tipo.

Solución 41. La ecuación original

$$2x = 8$$

tiene una única solución:

$$x = 4.$$

Por tanto,

$$S_{\text{orig}} = \{4\}.$$

Se multiplica por $x - 3$:

$$2x(x-3) = 8(x-3).$$

Todo valor que satisface $2x = 8$ satisface también esta nueva ecuación, así que la dirección siempre válida es

$$\boxed{2x = 8 \Longrightarrow 2x(x-3) = 8(x-3).}$$

Sin embargo, la vuelta no está garantizada porque el factor $x - 3$ puede anularse. Reescribiendo la ecuación transformada,

$$2x(x-3) - 8(x-3) = 0,$$

$$(x-3)(2x-8) = 0,$$

$$2(x-3)(x-4) = 0.$$

Por producto nulo,

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = 4.$$

Así,

$$S_{\text{trans}} = \{3, 4\},$$

y

$$\{4\} \subsetneq \{3, 4\}.$$

El valor adicional es

$$\boxed{x = 3.}$$

La primera ruptura es haber escrito una doble flecha al multiplicar por un factor que podía valer cero. El daño es la **creación de un candidato adicional**.

Solución 42. Consideramos

$$\sqrt{x+6} = x.$$

La raíz existe cuando

$$x + 6 \geq 0,$$

por lo que el dominio de existencia es

$$D = [-6, \infty).$$

Pero la ecuación contiene además una condición que no proviene del dominio: como una raíz principal es no negativa, toda solución debe satisfacer

$$\boxed{x \geq 0.}$$

La cadena propuesta escribe

$$\sqrt{x+6} = x \Longleftrightarrow x + 6 = x^2.$$

Ésta es la primera ruptura. Sin conservar la condición $x \geq 0$, elevar al cuadrado sólo garantiza

$$\sqrt{x+6} = x \Longrightarrow x + 6 = x^2.$$

La equivalencia completa es

$$\sqrt{x+6} = x \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 6 = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

La ecuación algebraica resultante es

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

y factoriza como

$$(x - 3)(x + 2) = 0.$$

Por tanto, los candidatos algebraicos son

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -2.$$

Ambos pertenecen al dominio $[-6, \infty)$, pero sólo 3 satisface la condición acumulada $x \geq 0$. En efecto,

$$\sqrt{3+6} = 3,$$

mientras que una raíz principal no puede ser igual a -2.

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{3\}.}$$

El valor -2 es un **candidato adicional creado al perder la información de signo**, no un valor excluido por el dominio.

Solución 43. La ecuación es

$$\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

Antes de simplificar fijamos el dominio:

$$x-3\neq 0,$$

de modo que

$$\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{3\}.}$$

Factorizamos el numerador:

$$x^2-9=(x-3)(x+3).$$

Como $x-3\neq 0$ para todo $x\in D$, la cancelación es perfectamente válida **sobre ese dominio**:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6\iff x+3=6,\qquad x\in D.$$

Resolviendo la ecuación simplificada obtenemos

$$x=3.$$

Pero

$$3\notin D.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D=\varnothing.}$$

La afirmación de que «la cancelación fue ilegítima porque produjo una respuesta falsa» es incorrecta. La cancelación conservó equivalencia en el dominio efectivo. El error aparece **después**, cuando se olvida que la ecuación simplificada sigue interpretándose sobre $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

El daño es un **dominio omitido**. El valor 3 no fue creado por una transformación no reversible: nunca fue admisible en el problema original.

Solución 44. La ecuación es

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}.$$

Su dominio efectivo es

$$\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}.}$$

En todo D se cumple $x-1\neq 0$. Por ello multiplicar ambos miembros por $x-1$ es una equivalencia legítima:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}\iff x+1=2,\qquad x\in D.$$

La ecuación lineal produce

$$x = 1.$$

Sin embargo,

$$1 \notin D.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \varnothing.}$$

El diagnóstico «$x = 1$ es una raíz extraña creada al eliminar denominadores» no es correcto. La eliminación de denominadores fue reversible sobre el dominio vigente y no creó soluciones nuevas.

El valor 1 es un **valor inadmisible por el dominio original**. La distinción es:

- un candidato extraño por transformación pertenece al dominio original y aparece porque una implicación no reversible amplió el conjunto;
- un valor inadmisible por dominio nunca perteneció al universo en que la ecuación original estaba definida.

Aquí ocurre lo segundo.

Solución 45. La primera ecuación es

$$x - 2 = -3,$$

y equivale a

$$x = -1.$$

Por tanto,

$$S_1 = \{-1\}.$$

La segunda ecuación es

$$(x - 2)^2 = 9.$$

Ésta equivale a

$$x - 2 = 3 \quad \text{o} \quad x - 2 = -3,$$

de donde

$$x = 5 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

Así,

$$S_2 = \{-1, 5\}.$$

Como

$$S_1 \subsetneq S_2,$$

la primera falsa equivalencia es

$$x - 2 = -3 \not\Longleftrightarrow (x - 2)^2 = 9.$$

La flecha correcta es

$$\boxed{x-2=-3 \Longrightarrow (x-2)^2=9.}$$

El cuadrado borra la información de signo y crea el candidato adicional $x=5$.

Para resolver correctamente la ecuación original no necesitamos conservar ese candidato:

$$x-2=-3 \Longleftrightarrow x=-1,$$

por lo que

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}=\{-1\}.}$$

Solución 46. La ecuación es

$$(x-1)+(x+2)=0.$$

El paso defectuoso fue

$$(x-1)+(x+2)=0 \Longleftrightarrow x-1=0 \text{ o } x+2=0.$$

Aquí se aplicó fuera de su hipótesis estructural la **propiedad del producto nulo**. Esa propiedad afirma

$$AB=0 \Longleftrightarrow A=0 \text{ o } B=0,$$

pero no existe una regla análoga para una suma $A+B=0$.

Resolvemos la ecuación original mediante equivalencias:

$$(x-1)+(x+2)=0 \Longleftrightarrow 2x+1=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}.}$$

La resolución defectuosa proponía $\{1,-2\}$. Ninguno de esos valores satisface la ecuación original:

$$(1-1)+(1+2)=3\neq 0,$$

y

$$(-2-1)+(-2+2)=-3\neq 0.$$

En este caso la falsa equivalencia produce **candidatos falsos** y, al mismo tiempo, elimina la solución verdadera $-1/2$. No hay una inclusión simple entre los dos conjuntos: el problema es una sustitución estructuralmente inválida de una suma por una disyunción de ceros.

Solución 47. La sustitución

$$u = x^2$$

transforma correctamente

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

en

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

Factorizamos:

$$(u - 1)(u - 4) = 0,$$

de modo que

$$u \in \{1, 4\}.$$

Hasta aquí el cálculo auxiliar es correcto.

La ruptura aparece al declarar

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{1, 4\}.$$

Los números 1 y 4 son soluciones para la **variable auxiliar** u. El problema original pide valores de x. La respuesta final tiene, por tanto, el tipo de objeto equivocado y la reconstrucción está incompleta.

Debemos hallar todas las preimágenes reales.

Si

$$u = 1,$$

entonces

$$x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1.$$

Si

$$u = 4,$$

entonces

$$x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = \pm 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-2, -1, 1, 2\}.}$$

El daño se clasifica como **reconstrucción incompleta**: la ecuación auxiliar fue resuelta correctamente, pero no se volvió de la variable u a la variable original x.

Solución 48. Usamos

$$u = x^2$$

en

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

La ecuación auxiliar es

$$u^2 - 10u + 9 = 0,$$

que factoriza como

$$(u-1)(u-9) = 0.$$

Por tanto,

$$u = 1 \quad \text{o} \quad u = 9.$$

El error ocurre al reconstruir sólo

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

La función

$$x \longmapsto x^2$$

no es inyectiva sobre $\mathbb{R}$: para todo $u > 0$ existen dos preimágenes reales,

$$x = \sqrt{u} \quad \text{y} \quad x = -\sqrt{u}.$$

Así, de

$$x^2 = 1$$

obtenemos

$$x = \pm 1,$$

y de

$$x^2 = 9$$

obtenemos

$$x = \pm 3.$$

La solución correcta es

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, -1, 1, 3\}.}$$

La pérdida de -1 y -3 es una **rama omitida durante la reconstrucción de preimágenes**.

Solución 49. Estudiamos, para cada parámetro real a,

$$(a-2)x = a-2.$$

La resolución defectuosa divide inmediatamente por $a-2$. Ésa es la primera ruptura, porque todavía no se ha establecido que

$$a-2 \neq 0.$$

Debemos separar casos.

Si

$$a \neq 2,$$

entonces $a-2 \neq 0$ y la división es reversible:

$$(a-2)x = a-2 \iff x = 1.$$

Por tanto,

$$S(a) = \{1\} \qquad (a \neq 2).$$

Si

$$a = 2,$$

la ecuación original se convierte en

$$0 \cdot x = 0,$$

es decir,

$$0 = 0.$$

Esta igualdad es verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que

$$S(2) = \mathbb{R}.$$

La familia correcta es

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{1\}, & a \neq 2, \\ \mathbb{R}, & a = 2. \end{cases}}$$

El valor excepcional del parámetro es

$$\boxed{a = 2.}$$

Dividir sin separar ese caso borra una familia completa de soluciones; el daño es una **pérdida del caso paramétrico degenerado**.

Solución 50. El sistema es

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

La sustitución

$$y = x^2$$

en la segunda ecuación es correcta y produce

$$x + x^2 = 2,$$

es decir,

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Factorizamos:

$$(x + 2)(x - 1) = 0,$$

de donde

$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

No hay error en esta ecuación reducida. La ruptura aparece al declarar

$$\text{Sol} = \{-2, 1\}.$$

Un sistema en las variables (x, y) no tiene como solución un subconjunto de $\mathbb{R}$, sino un conjunto de **pares ordenados** en $\mathbb{R}^2$. Falta reconstruir y.

Para

$$x = -2,$$

tenemos

$$y = x^2 = 4,$$

y obtenemos el par

$$(-2, 4).$$

Para

$$x = 1,$$

tenemos

$$y = x^2 = 1,$$

y obtenemos

$$(1, 1).$$

Ambos pares satisfacen además $x + y = 2$:

$$-2 + 4 = 2, \qquad 1 + 1 = 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol} = \{(-2,4),(1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2.}$$

El daño es una **reconstrucción incompleta** y, además, una declaración del conjunto solución en el espacio equivocado.

E. Estrategia: elegir ruta y decidir cuándo verificar

En este bloque la resolución incluye una decisión previa: no sólo importa obtener el conjunto solución, sino elegir una representación adecuada y saber si la cadena usada conserva equivalencia. La verificación final se distingue de acuerdo con su función lógica: puede ser necesaria para filtrar candidatos, innecesaria cuando ya se conservaron todas las condiciones equivalentes, o útil sólo como control independiente.

Solución 51. Consideramos

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Antes de operar conviene leer la estructura. La **factorización** parece especialmente prometedora porque buscamos dos enteros cuyo producto sea 20 y cuya suma sea 9. Completar cuadrados también es válido, pero introduce fracciones o un paso intermedio menos directo. La fórmula cuadrática es universal, aunque aquí exige calcular un discriminante para obtener información que la factorización ya hace visible.

Buscamos entonces 4 y 5:

$$x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5).$$

Por tanto,

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \iff (x-4)(x-5) = 0$$

y, por producto nulo,

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = 5.$$

Así,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{4,5\}.}$$

La factorización es la ruta más eficiente porque la estructura entera es visible inmediatamente y cada paso conserva equivalencia.

Una segunda ruta válida sería la fórmula cuadrática. En efecto, con $a = 1$, $b = -9$ y $c = 20$ se obtendría el mismo conjunto solución. Debe ocurrir así porque ambas rutas resuelven la **misma ecuación** mediante transformaciones o teoremas equivalentes sobre $\mathbb{R}$; la elección de método cambia el recorrido, no el conjunto solución.

Solución 52. La ecuación es

$$x^2 + 6x - 2 = 0.$$

Una factorización elemental con coeficientes enteros no es natural: si escribiéramos

$$(x+r)(x+s),$$

necesitaríamos

$$rs = -2, \qquad r + s = 6,$$

y ningún par de enteros con producto -2 tiene suma 6.

Entre completar cuadrados y usar la fórmula cuadrática, completar cuadrados hace especialmente visible la estructura de esta ecuación porque el coeficiente de x^2 ya es 1 y el término lineal es par.

Partimos de

$$x^2 + 6x - 2 = 0 \iff x^2 + 6x = 2.$$

Añadimos 9 a ambos miembros:

$$x^2 + 6x + 9 = 11,$$

de donde

$$(x + 3)^2 = 11.$$

Sobre $\mathbb{R}$,

$$(x + 3)^2 = 11 \iff x + 3 = \sqrt{11} \quad \text{o} \quad x + 3 = -\sqrt{11}.$$

Por tanto,

$$x = -3 + \sqrt{11} \quad \text{o} \quad x = -3 - \sqrt{11},$$

y

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3 - \sqrt{11},\ -3 + \sqrt{11}\}.}$$

La fórmula cuadrática habría sido igualmente válida y habría producido las mismas dos raíces. Completar cuadrados resulta aquí más transparente porque revela directamente la forma

$$(x - h)^2 = k.$$

Solución 53. Consideramos

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

Ruta a: factorización. Buscamos una descomposición del trinomio. Se verifica que

$$6x^2 + x - 2 = (3x + 2)(2x - 1),$$

porque

$$(3x + 2)(2x - 1) = 6x^2 - 3x + 4x - 2 = 6x^2 + x - 2.$$

Entonces

$$(3x + 2)(2x - 1) = 0 \iff 3x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = 0.$$

Así,

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ruta b: fórmula cuadrática. Aquí

$$a = 6, \qquad b = 1, \qquad c = -2.$$

El discriminante es

$$\Delta = 1^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49.$$

Por tanto,

$$x = \frac{-1 \pm 7}{12}.$$

Las dos ramas dan

$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

y

$$x = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

En ambos casos,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}.}$$

La factorización usa menos cálculo numérico una vez reconocida la descomposición y hace visibles las dos ramas en cuanto aparece el producto nulo. La fórmula cuadrática es sistemática, pero obliga a identificar a, b, c, calcular Δ, extraer su raíz y manejar cuidadosamente los signos en $-b \pm \sqrt{\Delta}$.

Si sólo necesitara el conjunto solución, preferiría **factorizar**: en esta ecuación la factorización es corta, exacta y expone las raíces con menos oportunidades de error aritmético o de signo.

Solución 54. La ecuación es

$$x^2 - 8x + 16 = 0.$$

Antes de calcular debe gobernar la elección de método un rasgo visible: el trinomio es un **cuadrado perfecto**, pues

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2.$$

La ruta más económica es, por tanto,

$$(x - 4)^2 = 0 \iff x - 4 = 0 \iff x = 4.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{4\}.}$$

Usamos ahora el discriminante sólo como control estructural independiente:

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0.$$

El valor $\Delta = 0$ confirma que la cuadrática tiene una única solución real, o una raíz doble en sentido algebraico, exactamente lo que mostraba la forma $(x - 4)^2$.

Aplicar directamente la fórmula cuadrática habría sido correcto, pero estratégicamente innecesario: habría introducido más notación y más operaciones para recuperar una estructura que ya estaba visible en el polinomio original.

Solución 55. Consideramos

$$2x^2 + 4x + 7 = 0$$

sobre $\mathbb{R}$.

Como la pregunta principal es decidir con el menor trabajo si existen soluciones reales, conviene calcular primero el **discriminante**. Con

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad c = 7,$$

obtenemos

$$\Delta = 4^2 - 4(2)(7) = 16 - 56 = -40.$$

Como

$$\Delta < 0,$$

la ecuación no tiene soluciones reales. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

Intentar factorizar sobre los reales no aporta una decisión más rápida. Completar cuadrados también funciona —de hecho,

$$2x^2 + 4x + 7 = 2(x + 1)^2 + 5 > 0$$

para todo real x—, pero el discriminante decide inmediatamente el régimen real sin necesidad de continuar hasta calcular raíces complejas, que quedan fuera del dominio de este capítulo.

Solución 56. Resolvemos

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

por dos rutas.

Ruta a: completar cuadrados. Movemos la constante:

$$x^2 - 2x = 1.$$

Añadimos 1 a ambos miembros:

$$x^2 - 2x + 1 = 2,$$

de modo que

$$(x - 1)^2 = 2.$$

Entonces

$$x - 1 = \pm\sqrt{2},$$

y por tanto

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ruta b: fórmula cuadrática. Tenemos

$$a = 1, \qquad b = -2, \qquad c = -1.$$

El discriminante es

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8.$$

Por la fórmula,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

En ambas rutas,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{1 - \sqrt{2},\, 1 + \sqrt{2}\}.}$$

Completar cuadrados hace visible de manera inmediata la forma

$$(x - h)^2 = k,$$

aquí con $h = 1$ y $k = 2$. La fórmula cuadrática es más mecánica porque puede aplicarse siguiendo un algoritmo uniforme a cualquier cuadrática con $a \neq 0$.

Pero «más mecánica» no significa necesariamente «más conveniente»: una estrategia puede ser general y, sin embargo, introducir más cálculo del necesario o esconder una estructura que la ecuación ya sugiere. La elección óptima depende de la forma concreta del problema.

Solución 57. La ecuación es

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

La estrategia propuesta es lógicamente sólida **si el dominio se conserva durante toda la cadena**.

Primero fijamos

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Factorizamos el numerador mediante una identidad:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Por tanto,

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = 6, \qquad x \in D.$$

Como $x - 3 \neq 0$ para todo $x \in D$, la cancelación es reversible sobre el dominio efectivo:

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = 6 \iff x + 3 = 6, \qquad x \in D.$$

La ecuación lineal da

$$x = 3.$$

Pero

$$3 \notin D.$$

Luego

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \varnothing.}$$

Después de filtrar por pertenencia al dominio, sustituir de nuevo cada valor en la ecuación original **no es lógicamente necesario**. Todas las transformaciones utilizadas fueron equivalencias sobre D, y el único valor algebraico obtenido fue descartado porque nunca perteneció al dominio original. Una sustitución final puede servir como control independiente cuando quedan valores admisibles, pero no es lo que restaura la corrección lógica de esta resolución: la corrección ya está garantizada por haber conservado el dominio y usado equivalencias válidas.

Solución 58. Consideramos

$$\sqrt{x+4} = x.$$

La raíz está definida para

$$x \geq -4.$$

Compararemos las dos rutas propuestas.

Ruta A: cuadrar por implicación y verificar candidatos. De la ecuación original se sigue

$$\sqrt{x+4} = x \Longrightarrow x + 4 = x^2.$$

No escribimos una equivalencia, porque al cuadrar se pierde la información de que el miembro derecho debe ser no negativo.

La ecuación cuadrática es

$$x^2 - x - 4 = 0,$$

y produce los candidatos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Debemos verificar ambos en la ecuación original.

Sea

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Tenemos $\alpha > 0$ y, como satisface $\alpha^2 = \alpha + 4$,

$$\sqrt{\alpha + 4} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha.$$

Por tanto, α sí es solución.

Sea ahora

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Entonces $\beta < 0$, mientras que $\sqrt{\beta + 4} \geq 0$. Por ello no puede cumplirse

$$\sqrt{\beta + 4} = \beta.$$

Así, β es un candidato extraño generado por el cuadrado.

Ruta B: conservar la condición de signo. Usamos la equivalencia completa

$$\sqrt{x+4} = x \iff \begin{cases} x+4 = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

La misma cuadrática da

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$

pero la condición $x \geq 0$ conserva solamente

$$x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Por tanto, por ambas rutas,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right\}.}$$

En la ruta A la verificación final es **necesaria** porque la cadena contiene una implicación que puede ampliar el conjunto de candidatos. En la ruta B la condición de signo forma parte de la transformación y restablece una equivalencia exacta; una comprobación final puede hacerse como control, pero ya no es necesaria para reparar la lógica de la resolución.

Solución 59. La ecuación es

$$|2x-3| = 7.$$

Como $7 > 0$, la definición del valor absoluto proporciona una **equivalencia exacta**:

$$|2x-3| = 7 \iff 2x-3 = 7 \quad \text{o} \quad 2x-3 = -7.$$

Por tanto, abrir las dos ramas no crea candidatos adicionales ni pierde soluciones. En consecuencia, una verificación final en la ecuación original **no es necesaria para recuperar corrección lógica**. Puede usarse como control independiente.

Esto difiere de una ecuación radical simplemente elevada al cuadrado. En ese caso, en general sólo tenemos una implicación

$$A = B \Longrightarrow A^2 = B^2,$$

porque el cuadrado puede borrar información de signo y ampliar el conjunto de candidatos. Aquí, en cambio, las dos ramas son precisamente la caracterización completa de $|A| = c$ cuando $c > 0$.

Resolvemos:

$$2x-3 = 7 \iff 2x = 10 \iff x = 5,$$

y

$$2x-3 = -7 \iff 2x = -4 \iff x = -2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-2, 5\}.}$$

Solución 60. La función de la verificación depende de la fuerza lógica de la cadena que la precede. Clasificamos cada planificación **antes** de calcular.

a) Factorizar y aplicar producto nulo. La ecuación es

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

La identidad

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

y la propiedad del producto nulo producen equivalencias:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x - 2)(x - 3) = 0 \iff x = 2 \text{ o } x = 3.$$

Así,

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \{2, 3\}.$$

La verificación final es **útil sólo como control independiente**. No es necesaria para filtrar candidatos, porque no hubo ninguna ampliación del conjunto solución.

b) Eliminar un denominador sobre el dominio efectivo. Consideramos

$$\frac{x + 2}{x - 1} = 3,$$

con

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Como $x - 1 \neq 0$ en todo D, multiplicar por $x - 1$ conserva equivalencia:

$$\frac{x + 2}{x - 1} = 3 \iff x + 2 = 3(x - 1), \qquad x \in D.$$

Entonces

$$x + 2 = 3x - 3 \iff 5 = 2x \iff x = \frac{5}{2}.$$

Como $5/2 \in D$,

$$\mathrm{Sol}_D = \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$$

La verificación final es **innecesaria si se conserva correctamente el dominio**. La eliminación del denominador fue reversible sobre D. Sustituir $5/2$ en la ecuación original sería sólo un control adicional.

c) Cuadrar sin registrar la condición de signo. Tenemos

$$\sqrt{x + 1} = x - 1.$$

Si se cuadra sin conservar la condición $x - 1 \geq 0$, sólo podemos escribir

$$\sqrt{x + 1} = x - 1 \Longrightarrow x + 1 = (x - 1)^2.$$

La ecuación cuadrada da

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1 \iff x(x - 3) = 0,$$

de modo que aparecen los candidatos

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

Aquí la verificación final es **necesaria para filtrar candidatos**. En efecto,

$$\sqrt{0+1} = 1 \neq -1,$$

por lo que 0 es extraño, mientras que

$$\sqrt{3+1} = 2 = 3 - 1.$$

Así, el conjunto solución original es

$$\{3\}.$$

d) Abrir ramas equivalentes de un valor absoluto. Consideramos

$$|3x + 1| = 5.$$

Como $5 > 0$,

$$|3x + 1| = 5 \iff 3x + 1 = 5 \quad \text{o} \quad 3x + 1 = -5.$$

La ramificación es una equivalencia exacta. Resolvemos:

$$x = \frac{4}{3} \quad \text{o} \quad x = -2.$$

Por tanto,

$$\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \left\{-2, \frac{4}{3}\right\}.$$

La verificación final es **útil sólo como control independiente**. No es necesaria para restablecer la corrección lógica porque la apertura de ramas ya preserva exactamente el conjunto solución.

En resumen, la pregunta decisiva no es «¿conviene comprobar siempre?», sino **qué relación lógica produjo la cadena**. Una cadena de equivalencias ya caracteriza exactamente el conjunto solución; una implicación no reversible puede dejar candidatos y exige filtrarlos; conservar explícitamente dominio y condiciones de signo puede convertir una ruta aparentemente peligrosa en una cadena nuevamente equivalente.

F. Transferencia: parámetros, dominios heredados, sustituciones y sistemas

En este bloque las técnicas anteriores se transfieren a situaciones donde el cálculo debe convivir con parámetros, dominios heredados, sustituciones no biyectivas y reconstrucción de pares ordenados. En cada ejercicio distinguimos el problema original de las ecuaciones auxiliares y regresamos al objeto solución correcto.

Solución 61. Consideramos, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$(a - 2)x = a^2 - 4.$$

Factorizamos el miembro derecho:

$$a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2).$$

El factor que querríamos cancelar es $a - 2$, de modo que el valor excepcional es

$$\boxed{a = 2.}$$

Si $a \neq 2$, entonces $a - 2 \neq 0$ y podemos dividir ambos miembros por ese factor conservando equivalencia:

$$(a-2)x = (a-2)(a+2) \iff x = a + 2.$$

Por tanto,

$$S(a) = \{a + 2\} \qquad (a \neq 2).$$

Si $a = 2$, la ecuación original se convierte en

$$0 \cdot x = 0,$$

es decir,

$$0 = 0.$$

Esta proposición es verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que

$$S(2) = \mathbb{R}.$$

La familia completa es

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{a+2\}, & a \neq 2, \\ \mathbb{R}, & a = 2. \end{cases}}$$

El caso excepcional no puede obtenerse cancelando primero y «sustituyendo después»: la cancelación sólo estaba autorizada bajo la hipótesis $a \neq 2$.

Solución 62. Estudiamos

$$a(a+1)x = a + 1.$$

Los valores que pueden cambiar la validez de una división son aquellos que anulan a o $a + 1$:

$$a = 0 \qquad \text{y} \qquad a = -1.$$

Conviene separar ambos antes de dividir.

Si $a = -1$, obtenemos

$$(-1)(0)x = 0,$$

es decir,

$$0 = 0.$$

Por tanto,

$$S(-1) = \mathbb{R}.$$

Si $a = 0$, la ecuación se transforma en

$$0 \cdot 1 \cdot x = 1,$$

esto es,

$$0 = 1,$$

una contradicción. Luego

$$S(0) = \varnothing.$$

Supongamos ahora

$$a \neq 0, -1.$$

Entonces $a \neq 0$ y $a + 1 \neq 0$, por lo que podemos dividir por $a + 1$:

$$a(a + 1)x = a + 1 \iff ax = 1.$$

Como además $a \neq 0$,

$$ax = 1 \iff x = \frac{1}{a}.$$

Así,

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \mathbb{R}, & a = -1, \\ \varnothing, & a = 0, \\ \left\{\dfrac{1}{a}\right\}, & a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}. \end{cases}}$$

Aparecen exactamente los tres regímenes solicitados: todo $\mathbb{R}$, el conjunto vacío y un singleton.

Solución 63. Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos

$$\frac{x - 2}{x - a} = 0.$$

El denominador exige

$$x - a \neq 0,$$

de modo que el dominio efectivo depende del parámetro:

$$\boxed{D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}.}$$

Una fracción definida vale cero exactamente cuando su numerador vale cero. Por tanto, el único valor algebraicamente posible es

$$x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

Ahora debemos preguntar si $2 \in D_a$. Esto ocurre si y sólo si

$$a \neq 2.$$

Por consiguiente, si $a \neq 2$,

$$S(a) = \{2\}.$$

En cambio, si $a = 2$, el único cero posible del numerador coincide con el valor excluido por el denominador. Entonces

$$S(2) = \varnothing.$$

La familia completa es

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \{2\}, & a \neq 2, \\ \varnothing, & a = 2. \end{cases}}$$

Este ejercicio es paramétrico porque a modifica la familia $S(a)$ y, simultáneamente, es una transferencia directa de C20 porque el parámetro modifica también el **dominio efectivo**. El valor $x = 2$ no «deja de satisfacer» el numerador cuando $a = 2$; deja de ser admisible en el problema original.

Solución 64. Consideramos

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = 0.$$

Factorizamos numerador y denominador:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

y

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

El denominador se anula en

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = -2,$$

de modo que el dominio efectivo es

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.}$$

Los ceros del numerador son

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = -3.$$

Para que la fracción sea cero, además del numerador nulo el denominador debe estar definido. El valor

$$x = 3$$

es algebraicamente cero del numerador, pero

$$3 \notin D,$$

por lo que es inadmisible. En cambio,

$$-3 \in D.$$

Así,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{-3\}.}$$

El factor común $x - 3$ podría cancelarse **sobre** D, pero esa simplificación no reintroduciría $x = 3$: la restricción pertenece al problema original y debe conservarse.

Solución 65. La ecuación es

$$\sqrt{(x-1)^2} = 3.$$

Usamos la identidad heredada de C18

$$\sqrt{u^2} = |u| \qquad (u \in \mathbb{R}).$$

Con $u = x - 1$ obtenemos la equivalencia

$$\sqrt{(x-1)^2} = 3 \iff |x-1| = 3.$$

Como $3 > 0$,

$$|x-1| = 3 \iff x - 1 = 3 \quad \text{o} \quad x - 1 = -3.$$

La primera rama da

$$x = 4,$$

y la segunda,

$$x = -2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-2, 4\}.}$$

Toda la resolución se construyó mediante equivalencias. No fue necesario elevar al cuadrado ni introducir candidatos que después debieran filtrarse.

Solución 66. Debemos resolver

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 7.$$

Ruta a: convertir la raíz principal en valor absoluto. Por

$$\sqrt{u^2} = |u|,$$

tenemos

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 7 \iff |2x-1| = 7.$$

Como $7 > 0$,

$$|2x-1| = 7 \iff 2x - 1 = 7 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = -7.$$

De la primera rama,

$$2x = 8 \iff x = 4,$$

y de la segunda,

$$2x = -6 \iff x = -3.$$

Así,

$$\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, 4\}.$$

Ruta b: cuadrar y tratar los resultados como candidatos. Si usamos únicamente la dirección siempre segura,

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 7 \Longrightarrow (2x-1)^2 = 49.$$

La ecuación cuadrada es equivalente a

$$2x - 1 = 7 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = -7,$$

y produce los candidatos

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -3.$$

Los verificamos en la ecuación original:

$$\sqrt{(2 \cdot 4 - 1)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

y

$$\sqrt{(2(-3) - 1)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Ambos sobreviven, de modo que nuevamente

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-3, 4\}.}$$

La primera ruta conserva mejor la información porque la identidad $\sqrt{u^2} = |u|$ registra de inmediato las dos posibilidades de signo. En este caso particular, como el otro miembro es $7 \geq 0$, también puede justificarse que el cuadrado sea reversible; pero si se adopta la lectura conservadora de la ruta b, la verificación final recupera exactamente el mismo conjunto solución.

Solución 67. Partimos de

$$(x^2 - 1)^2 - 5(x^2 - 1) + 4 = 0.$$

Nivel 1: ecuación original en x. La expresión repetida sugiere la sustitución

$$u = x^2 - 1.$$

Como $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 \geq 0,$$

y por tanto la imagen de la sustitución satisface

$$u \geq -1.$$

Nivel 2: ecuación auxiliar. Sustituyendo,

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

Factorizamos:

$$(u-1)(u-4) = 0,$$

de modo que

$$u = 1 \quad \text{o} \quad u = 4.$$

Ambos valores pertenecen a la imagen permitida $[-1, \infty)$.

Nivel 3: reconstrucción de preimágenes. Si $u = 1$,

$$x^2 - 1 = 1 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}.$$

Si $u = 4$,

$$x^2 - 1 = 4 \iff x^2 = 5 \iff x = \pm\sqrt{5}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}.}$$

Los valores $u = 1$ y $u = 4$ resuelven sólo la ecuación auxiliar. El problema original queda resuelto únicamente después de reconstruir **todas** sus preimágenes reales.

Solución 68. Consideramos

$$(x-1)^4 - 10(x-1)^2 + 9 = 0.$$

La cantidad repetida es $(x-1)^2$, así que definimos

$$u = (x-1)^2.$$

Como x es real,

$$\boxed{u \geq 0.}$$

Además,

$$(x-1)^4 = u^2,$$

de modo que la ecuación auxiliar es

$$u^2 - 10u + 9 = 0.$$

Factorizamos:

$$(u-1)(u-9) = 0.$$

Así,

$$u = 1 \quad \text{o} \quad u = 9.$$

Ambos valores son positivos y, por tanto, realizables.

Reconstruimos ahora todas las preimágenes.

Para $u = 1$,

$$(x-1)^2 = 1 \iff x-1 = \pm 1,$$

de donde

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2.$$

Para $u = 9$,

$$(x-1)^2 = 9 \iff x-1 = \pm 3,$$

y entonces

$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 4.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{-2, 0, 2, 4\}.}$$

La razón por la que cada valor auxiliar positivo produce dos preimágenes es que

$$(x-1)^2 = u > 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{u}.$$

La sustitución no es biyectiva: comprime dos valores simétricos alrededor de 1 en un mismo valor de u.

Solución 69. Trabajamos desde el comienzo sobre

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

La ecuación es

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 6 = 0.$$

Definimos

$$u = \frac{x+1}{x-1}, \qquad x \in D.$$

La sustitución no borra el dominio de procedencia: durante toda la resolución seguimos exigiendo $x \neq 1$.

La ecuación auxiliar es

$$u^2 - 5u + 6 = 0,$$

y factoriza como

$$(u-2)(u-3) = 0.$$

Por tanto,

$$u = 2 \quad \text{o} \quad u = 3.$$

Reconstruimos x.

Si $u = 2$,

$$\frac{x+1}{x-1} = 2.$$

Como $x \in D$, podemos multiplicar por $x-1$ conservando equivalencia:

$$x+1=2(x-1) \iff x+1=2x-2 \iff x=3.$$

Y

$$3 \in D.$$

Si $u=3$,

$$\frac{x+1}{x-1}=3 \iff x+1=3(x-1) \iff x+1=3x-3 \iff x=2.$$

También

$$2 \in D.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D=\{2,3\}.}$$

El dominio heredado cumple dos funciones: autoriza las multiplicaciones por $x-1$ durante la reconstrucción y evita que una ecuación auxiliar se interprete fuera del problema original.

Solución 70. Consideramos el sistema sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=12. \end{cases}$$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$x+x^2=12.$$

Por tanto,

$$x^2+x-12=0.$$

Factorizamos:

$$(x+4)(x-3)=0,$$

de modo que

$$x=-4 \quad \text{o} \quad x=3.$$

Reconstruimos ahora la segunda coordenada mediante $y=x^2$.
Si $x=-4$,

$$y=16,$$

y obtenemos

$$(-4,16).$$

Si $x=3$,

$$y=9,$$

y obtenemos

$$(3,9).$$

Ambos pares satisfacen $x + y = 12$. Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol} = \{(-4, 16), (3, 9)\} \subseteq \mathbb{R}^2.}$$

Los valores $x = -4$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación reducida, no todavía soluciones completas del sistema hasta reconstruir y.

Solución 71. El sistema es

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 10. \end{cases}$$

De la primera ecuación,

$$y = 7 - x.$$

Sustituimos en $xy = 10$:

$$x(7 - x) = 10.$$

Entonces

$$7x - x^2 = 10 \iff x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Factorizamos:

$$(x - 2)(x - 5) = 0.$$

Por tanto,

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 5.$$

Reconstruimos y.
Si $x = 2$,

$$y = 7 - 2 = 5,$$

y obtenemos $(2, 5)$. Si $x = 5$,

$$y = 7 - 5 = 2,$$

y obtenemos $(5, 2)$.
Así,

$$\boxed{\text{Sol} = \{(2, 5), (5, 2)\}.}$$

La aparición de los dos pares es también esperable por simetría. Las ecuaciones

$$x + y = 7 \qquad \text{y} \qquad xy = 10$$

no cambian si intercambiamos x e y. Por eso, si (r, s) es solución con $r \neq s$, entonces (s, r) satisface automáticamente el mismo sistema.

Solución 72. Consideramos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$2x^2 = 32,$$

de donde

$$x^2 = 16.$$

Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$2y^2 = 8,$$

y por tanto

$$y^2 = 4.$$

Estas combinaciones son reversibles: a partir de $x^2 = 16$ y $y^2 = 4$ recuperamos

$$x^2 + y^2 = 20$$

y

$$x^2 - y^2 = 12.$$

Reconstruimos ahora los signos:

$$x = \pm 4, \qquad y = \pm 2.$$

Como las ecuaciones originales sólo dependen de x^2 y y^2, las cuatro combinaciones satisfacen simultáneamente el sistema:

$$(-4, -2), \quad (-4, 2), \quad (4, -2), \quad (4, 2).$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Sol} = \{(-4, -2), (-4, 2), (4, -2), (4, 2)\}.}$$

Aquí la reconstrucción de signos es parte esencial de la resolución: conocer sólo x^2 y y^2 no determina todavía los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$.

G. Síntesis avanzada: trazabilidad completa

En este bloque final la resolución no viene gobernada por una técnica única. Cada solución debe conservar simultáneamente dominio, fuerza lógica de las transformaciones, candidatos, ramas, reconstrucciones y forma correcta del objeto solución.

Solución 73. Consideramos

$$\sqrt{3x+10} = x+2.$$

El radical exige

$$3x+10 \geq 0,$$

por lo que el dominio de la ecuación original es

$$D = \left[-\frac{10}{3}, \infty\right).$$

Partimos ahora de la cadena propuesta. Si una igualdad es verdadera, sus cuadrados también son iguales; sin embargo, elevar al cuadrado puede borrar información de signo. Por eso el primer paso seguro es sólo

$$\sqrt{3x+10} = x+2 \Longrightarrow 3x+10 = (x+2)^2.$$

A partir de allí las transformaciones son reversibles:

$$3x+10 = (x+2)^2 \Longleftrightarrow 3x+10 = x^2+4x+4$$

$$\Longleftrightarrow x^2+x-6 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -3.$$

La **primera ruptura de equivalencia** es, por tanto, el cuadrado inicial. El conjunto producido por la cadena algebraica es el conjunto de candidatos

$$C = \{-3, 2\}.$$

Ambos valores pertenecen al dominio original, pues

$$-3 \geq -\frac{10}{3}.$$

Debemos volver a la ecuación original. Para $x = 2$,

$$\sqrt{3(2)+10} = \sqrt{16} = 4 = 2+2,$$

por lo que 2 sí es solución. Para $x = -3$,

$$\sqrt{3(-3)+10} = \sqrt{1} = 1,$$

mientras que

$$-3+2 = -1.$$

Así, -3 es un candidato extraño creado por la pérdida de información de signo. En consecuencia,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{2\}.}$$

La información adicional que convierte el primer cuadrado en una equivalencia completa es el signo del miembro derecho. Para una raíz principal aislada,

$$\sqrt{3x+10} = x+2 \iff \begin{cases} 3x+10 = (x+2)^2, \\ x+2 \geq 0. \end{cases}$$

La condición

$$x+2 \geq 0$$

elimina inmediatamente $x = -3$ y conserva $x = 2$.

Solución 74. La ecuación es

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Antes de operar fijamos el dominio efectivo:

$$x - 1 \neq 0,$$

de modo que

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

En todo D, el factor $x-1$ es no nulo. Por eso multiplicar ambos miembros por él es una transformación reversible **sobre ese dominio**:

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1} \iff x^2 = 1, \qquad x \in D.$$

Sobre los reales,

$$x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ o } x = -1.$$

Pero la ecuación transformada sigue interpretándose sobre D. El valor 1 no pertenece al dominio original, mientras que -1 sí. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \{-1\}.}$$

El valor $x = 1$ no es un candidato extraño creado por una transformación no reversible. La multiplicación por $x-1$ fue reversible en todo el dominio vigente. Lo que ocurre es distinto: 1 es una raíz algebraica de $x^2 = 1$ **si esa ecuación se mira sobre todo** $\mathbb{R}$, pero nunca perteneció al universo de valores admisibles del problema original.

Así se separan dos fenómenos:

- candidato extraño: aparece tras ampliar el conjunto mediante una implicación no reversible;
- valor inadmisible: queda fuera porque nunca perteneció al dominio del problema.

Aquí sólo ocurre el segundo.

Solución 75. Consideramos

$$\sqrt{x+8} + \sqrt{x} = 2.$$

El dominio exige simultáneamente

$$x + 8 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x \geq 0,$$

por lo que

$$D = [0, \infty).$$

Ruta A — control lógico. En D, el miembro izquierdo es no negativo y el miembro derecho vale $2 > 0$. Por tanto, cuadrar la igualdad completa conserva equivalencia:

$$\sqrt{x+8} + \sqrt{x} = 2$$

$$\iff x + 8 + x + 2\sqrt{x(x+8)} = 4.$$

Simplificando,

$$2\sqrt{x(x+8)} = -2x - 4,$$

y entonces

$$\sqrt{x(x+8)} = -x - 2.$$

Pero para todo $x \in D$ se cumple

$$\sqrt{x(x+8)} \geq 0,$$

mientras que

$$-x - 2 \leq -2 < 0.$$

Los dos miembros no pueden ser iguales. Por tanto, la ecuación no tiene soluciones reales:

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

La Ruta A cierra el problema aquí, sin necesidad de un segundo cuadrado.

Ruta B — continuación algebraica. Supongamos que ignoramos provisionalmente la incompatibilidad de signos y elevamos al cuadrado

$$\sqrt{x(x+8)} = -x - 2.$$

Sólo podemos afirmar la implicación

$$\sqrt{x(x+8)} = -x - 2 \Longrightarrow x(x+8) = (x+2)^2.$$

Entonces

$$x^2 + 8x = x^2 + 4x + 4,$$

de donde

$$4x = 4 \iff x = 1.$$

El valor 1 es un candidato producido después del segundo cuadrado. Lo verificamos en la ecuación original:

$$\sqrt{1+8} + \sqrt{1} = 3 + 1 = 4 \neq 2.$$

Por tanto, 1 es extraño.

La primera operación que permitió ampliar el conjunto fue **el segundo cuadrado**, aplicado a una igualdad en la que el lado izquierdo era no negativo y el derecho era negativo en

todo el dominio. La Ruta A conserva esa información de signo y detecta de inmediato la imposibilidad; la Ruta B la borra y por eso necesita filtrar el candidato falso al final.

Solución 76. Para cada $a \in \mathbb{R}$ estudiamos

$$(a-1)(x^2-a)=0.$$

El primer valor excepcional es

$$a=1,$$

porque entonces el primer factor se anula para todo x:

$$(1-1)(x^2-1)=0.$$

La ecuación se reduce a $0=0$, de modo que

$$S(1)=\mathbb{R}.$$

Supongamos ahora

$$a \neq 1.$$

Entonces $a-1 \neq 0$, y dividir por ese factor constante es reversible:

$$(a-1)(x^2-a)=0 \iff x^2=a.$$

La clasificación depende ahora del signo de a.
Si

$$a<0,$$

ningún cuadrado real puede valer a, por lo que

$$S(a)=\varnothing.$$

Si

$$a=0,$$

entonces

$$x^2=0 \iff x=0,$$

y

$$S(0)=\{0\}.$$

Si

$$a>0 \quad \text{y} \quad a \neq 1,$$

entonces

$$x^2=a \iff x=\sqrt{a} \text{ o } x=-\sqrt{a},$$

de modo que

$$S(a)=\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\}.$$

La familia completa es

$$\boxed{S(a) = \begin{cases} \varnothing, & a < 0, \\ \{0\}, & a = 0, \\ \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}, & a > 0,\ a \neq 1, \\ \mathbb{R}, & a = 1. \end{cases}}$$

Los cuatro casos son mutuamente excluyentes y cubren todos los números reales. Aparecen exactamente los cuatro tipos pedidos: vacío, singleton, conjunto finito de dos elementos y todo $\mathbb{R}$.

Solución 77. La ecuación es

$$(x-1)^4 + 3(x-1)^2 - 4 = 0.$$

La estructura sugiere sustituir

$$u = (x-1)^2.$$

Esta elección convierte la cuarta potencia en u^2 y, además, tiene una restricción de imagen que debemos conservar:

$$u \in [0, \infty).$$

La ecuación auxiliar es

$$u^2 + 3u - 4 = 0.$$

Factorizamos:

$$(u+4)(u-1) = 0,$$

de donde

$$u = -4 \quad \text{o} \quad u = 1.$$

El valor $u = -4$ no pertenece a la imagen real de la sustitución $u = (x-1)^2$, así que no tiene preimágenes reales. El valor $u = 1$ sí es admisible.

Reconstruimos:

$$(x-1)^2 = 1 \iff x - 1 = 1 \text{ o } x - 1 = -1.$$

Por tanto,

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 0.$$

Así,

$$\boxed{\text{Sol}_{\mathbb{R}} = \{0, 2\}.}$$

La variable auxiliar sólo organiza la estructura. El conjunto solución del problema original debe expresarse en x. Además, este ejemplo muestra que resolver la ecuación en u no basta: hay que filtrar por la imagen de la sustitución y reconstruir todas las preimágenes reales de cada valor admisible.

Solución 78. Consideramos

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right| = \frac{1}{2}.$$

El denominador impone

$$x+1 \neq 0,$$

por lo que el dominio efectivo es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Como $1/2 > 0$, la ecuación con valor absoluto se abre mediante una equivalencia exacta:

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \frac{x-3}{x+1} = -\frac{1}{2}, \qquad x \in D.$$

Primera rama. Como $x+1 \neq 0$ en D,

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{2} \iff 2(x-3) = x+1.$$

Entonces

$$2x-6 = x+1 \iff x = 7.$$

Y $7 \in D$.

Segunda rama. De nuevo sobre D,

$$\frac{x-3}{x+1} = -\frac{1}{2} \iff 2(x-3) = -(x+1).$$

Así,

$$2x-6 = -x-1 \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}.$$

También $5/3 \in D$.

Uniendo las ramas,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \left\{\frac{5}{3}, 7\right\}.}$$

No fue necesaria una tabla de signos: la caracterización $|A| = c \iff (A = c \text{ o } A = -c)$ para $c > 0$ ya es exacta. Tampoco es necesario verificar los valores como si fueran candidatos obtenidos por una implicación no reversible; todas las transformaciones usadas fueron equivalencias sobre el dominio heredado. Una sustitución final puede hacerse como control independiente.

Solución 79. Resolvemos sobre $\mathbb{R}^2$ el sistema

$$\begin{cases} x+y = 6, \\ x^2+y^2 = 20. \end{cases}$$

Ruta A — sustitución directa. De la primera ecuación,

$$y = 6 - x.$$

Sustituimos en la segunda:

$$x^2 + (6 - x)^2 = 20.$$

Desarrollando,

$$x^2 + 36 - 12x + x^2 = 20,$$

de donde

$$2x^2 - 12x + 16 = 0.$$

Dividimos por 2:

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Factorizamos:

$$(x - 2)(x - 4) = 0,$$

de modo que

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 4.$$

Reconstruimos y:

$$x = 2 \Longrightarrow y = 4,$$

$$x = 4 \Longrightarrow y = 2.$$

La Ruta A produce

$$\{(2, 4), (4, 2)\}.$$

Ruta B — suma y producto. Usamos

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Como

$$x + y = 6,$$

tenemos

$$36 = 20 + 2xy,$$

y por tanto

$$xy = 8.$$

Ahora x e y son dos números cuya suma es 6 y cuyo producto es 8. Son, por tanto, las raíces de

$$t^2 - 6t + 8 = 0.$$

Factorizamos:

$$(t-2)(t-4)=0,$$

de modo que los dos valores son 2 y 4. Como el sistema es simétrico bajo el intercambio $x \leftrightarrow y$, aparecen los dos órdenes:

$$(2,4) \quad \text{y} \quad (4,2).$$

Así, ambas rutas producen exactamente

$$\boxed{\text{Sol} = \{(2,4),(4,2)\} \subseteq \mathbb{R}^2.}$$

La simetría explica por qué una solución no diagonal viene acompañada de su par intercambiado: las dos ecuaciones permanecen invariantes al permutar las coordenadas.

Solución 80. Consideramos

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \sqrt{x+7}.$$

1. Dominio original. La expresión racional exige

$$x \neq 2,$$

y el radical exige

$$x+7 \geq 0,$$

es decir,

$$x \geq -7.$$

Por tanto,

$$D = [-7,\infty) \setminus \{2\}.$$

2. Simplificación racional sobre el dominio. Factorizamos

$$x^2-4 = (x-2)(x+2).$$

Como $x \neq 2$ en todo D, podemos cancelar el factor $x-2$ sin cambiar el conjunto solución:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \sqrt{x+7} \iff x+2 = \sqrt{x+7}, \qquad x \in D.$$

La simplificación es una equivalencia **sobre** D; no reincorpora $x=2$.

3. Ruta menos informativa: cuadrar sin registrar el signo. De

$$x+2 = \sqrt{x+7}$$

podemos deducir

$$(x+2)^2 = x+7,$$

pero, si no conservamos ninguna condición de signo, la flecha segura es sólo

$$x+2 = \sqrt{x+7} \Longrightarrow (x+2)^2 = x+7.$$

Desarrollamos:

$$x^2 + 4x + 4 = x + 7,$$

de donde

$$x^2 + 3x - 3 = 0.$$

La fórmula cuadrática produce

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Así, el conjunto de candidatos algebraicos es

$$C = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

Los dos candidatos pertenecen al dominio D: ambos son mayores que -7 y ninguno vale 2. Sin embargo, para

$$x_- = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2},$$

se tiene

$$x_- + 2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < 0,$$

mientras que una raíz principal es siempre no negativa. Por tanto, x_- no puede satisfacer la ecuación radical. Es un **candidato extraño creado por la pérdida de información de signo** al cuadrar.

Para

$$x_+ = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2},$$

tenemos

$$x_+ + 2 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} > 0.$$

Además, como x_+ satisface

$$(x + 2)^2 = x + 7,$$

y el lado $x_+ + 2$ es no negativo, se sigue que

$$x_+ + 2 = \sqrt{x_+ + 7}.$$

Por tanto, x_+ sí es solución.

Las restricciones de dominio original deben mantenerse conceptualmente separadas de este filtrado. Desde el comienzo quedan excluidos

$$x < -7 \qquad \text{y} \qquad x = 2.$$

Ninguno de los dos candidatos cuadráticos cae en esas exclusiones. El candidato x_- se descarta por una razón distinta: perdió la condición de signo durante el cuadrado.

4. Verificación independiente. Para

$$x_+ = \frac{-3+\sqrt{21}}{2},$$

la parte racional se simplifica legítimamente a $x_+ + 2$, porque $x_+ \neq 2$. Además,

$$(x_+ + 2)^2 = x_+ + 7$$

y $x_+ + 2 > 0$, de modo que

$$\frac{x_+^2 - 4}{x_+ - 2} = x_+ + 2 = \sqrt{x_+ + 7}.$$

La comprobación confirma la pertenencia al conjunto solución.

5. Ruta con equivalencia completa. La etapa radical puede escribirse sin perder información:

$$x + 2 = \sqrt{x+7}$$

$$\iff \begin{cases} (x+2)^2 = x+7, \\ x+2 \geq 0, \end{cases} \qquad x \in D.$$

Equivalentemente,

$$\iff \begin{cases} x^2 + 3x - 3 = 0, \\ x \geq -2, \end{cases} \qquad x \in D.$$

De las dos raíces de la cuadrática,

$$\frac{-3-\sqrt{21}}{2} < -2,$$

mientras que

$$\frac{-3+\sqrt{21}}{2} > -2.$$

Por tanto, la condición de signo selecciona directamente la única solución:

$$\boxed{\mathrm{Sol}_D = \left\{ \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \right\}.}$$

En la ruta menos informativa, la **primera transición sólo implicativa** fue elevar al cuadrado la ecuación radical sin registrar que el miembro $x + 2$ debía ser no negativo. La segunda ruta conserva esa condición y mantiene equivalencia hasta el final.

H. Soluciones de profundización y reconstrucción

Solución 081. La ecuación $(x - r)(x - s)/(x - h) = 0$ tiene dominio $x \neq h$. En él, una fracción es cero exactamente cuando su numerador es cero: $x = r$ o $x = s$. Ambos están admitidos por la condición sobre h y verifican la original. Todo otro valor permitido tiene numerador no nulo. Así se certifican simultáneamente existencia y exhaustividad; elegir $h = r$ habría eliminado una de las soluciones prescritas.

Solución 082. Tomemos $\sqrt{(x-r)^2}+\sqrt{(x-s)^2}=s-r$, definida en todos los reales. Es $|x-r|+|x-s|=s-r$. En $r\le x\le s$, la suma es $(x-r)+(s-x)=s-r$. Si $x<r$, vale $r+s-2x>s-r$; si $x>s$, vale $2x-r-s>s-r$. Estas tres regiones cubren la recta, de modo que no faltan soluciones ni se añaden otras. El resultado utiliza las raíces principales, no una elección libre de signos.

Solución 083. La ecuación $\dfrac{(x-r)(x-s)}{(x-r)(x-s)}=1$ está definida exactamente fuera de r,s. Allí el cociente vale uno, así que todos esos valores son soluciones. En r,s no hay proposición definida que comprobar: no son soluciones y tampoco igualdades falsas de la expresión original. Multiplicar por el denominador da una identidad válida solo en el dominio fijado. Resolver esa identidad en toda la recta cambiaría el problema.

Solución 084. El dominio es $x\neq t$. Si $t=1$, el numerador es cero y el conjunto solución es $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Si $t\neq 1$, el producto nulo da candidatos $0,2$. Para $t=0$ solo queda $\{2\}$; para $t=2$ solo $\{0\}$; para $t\notin\{0,1,2\}$ quedan $\{0,2\}$. Cada candidato conservado anula el numerador y deja denominador no nulo. Las cuatro ramas cubren todos los parámetros y evitan dividir por $t-1$ en su cero.

Solución 085. Factorizamos $(x-1)(tx+1)$, cuya expansión es la original. Si $t=0$, la ecuación es $x-1=0$ y la solución es $\{1\}$. Si $t\neq 0$, las soluciones son $1,-1/t$; coinciden exactamente en $t=-1$. Así $S(-1)=\{1\}$ y $S(t)=\{1,-1/t\}$ para $t\notin\{0,-1\}$. El producto nulo demuestra que la lista es completa y sustituir cada factor cero verifica las soluciones. Una fórmula que divide por t no puede cubrir el caso lineal.

Solución 086. El dominio exige $x\neq t$. Si $t=1$, queda $0=0$ en ese dominio, y $S(1)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Si $t\neq 1$, dividimos por $t-1$ y multiplicamos por $x-t\neq 0$: $x=x-t$, equivalente a $t=0$. Para $t=0$, todos los $x\neq 0$ verifican $x/x=1$, y $S(0)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Para cualquier otro t, no hay soluciones. El factor paramétrico nulo y la cancelación de la incógnita generan ramas diferentes.

Solución 087. La original tiene $\{r\}$. El producto tiene $\{r,h\}$ por el producto nulo, con un único elemento si $h=r$. Toda solución original satisface el producto; el recíproco solo vale en toda la recta cuando $h=r$. Si $h\neq r$, comprobar h en la original lo elimina, mientras comprobar r lo conserva. Sobre el dominio restringido $x\neq h$, la multiplicación sí es reversible; si $h=r$, ambas ecuaciones restringidas carecen de soluciones. La equivalencia depende del dominio declarado.

Solución 088. La cuadrática es $(x-2)(x+1)=0$ y da $2,-1$, ambos en el dominio del radical. La original además exige $x\ge 0$ porque el miembro izquierdo es no negativo. Con esa condición solo queda 2, que verifica $\sqrt{4}=2$. El valor -1 da $1=-1$ y se rechaza. Cuadrar sin conservar el signo creó un candidato. La equivalencia correcta es $\sqrt{x+2}=x\iff[x\ge 0\text{ y }x+2=x^2]$; esa formulación justifica la completitud.

Solución 089. Restar y factorizar da $(x-r)[(x-r)-(x-s)]=(s-r)(x-r)=0$. Si $s=r$, la original es una identidad y todos los reales son soluciones. Si $s\neq r$, solo $x=r$ la satisface. Dividir de entrada por $x-r$ dejaría $x-r=x-s$, que no tiene soluciones cuando $s\neq r$, perdiendo la única solución. Separar $x=r$ verifica siempre ese valor; en $x\neq r$, la ecuación equivale a $r=s$, y cubre el resto de la recta únicamente en el caso idéntico.

Solución 090. Sustituir $y=s-x$ da $x^2-sx+p=0$, equivalente a $(x-s/2)^2=s^2/4-p$. Si $s^2-4p<0$, no hay soluciones. Si es cero, el único par es $(s/2,s/2)$. Si es positivo, con $d=\sqrt{s^2-4p}/2$ hay los dos pares $(s/2+d,s/2-d)$ y su intercambio. Su suma es s y su producto $s^2/4-d^2=p$. La sustitución era reversible, de modo que todos los pares están incluidos.

Solución 091. Sustituimos $y=x-a$. Entonces $x^2-ax-b=0$, o $(x-a/2)^2=a^2/4+b$. Si $a^2+4b<0$, el conjunto es vacío. Si es cero, tenemos $(x,y)=(a/2,-a/2)$. Si es positivo, sea $d=\sqrt{a^2+4b}/2$: los pares son $(a/2+d,-a/2+d)$ y $(a/2-d,-a/2-d)$. En ambos la diferencia es a y el producto $d^2-a^2/4=b$. La reconstrucción conserva las coordenadas ordenadas y demuestra exhaustividad.

Solución 092. El producto nulo exige $x = 0$ o $y = r$. La primera opción da $(0, s)$; la segunda da $(s - r, r)$. Ambos pares verifican suma y producto originales. Todo par solución pertenece a una de las dos opciones, por lo que la lista es completa. Coinciden exactamente cuando $s = r$, y entonces hay un solo par $(0, r)$. Dividir por x dejaría solo la segunda rama y, cuando $s \neq r$, perdería $(0, s)$.

Capítulo 22

Orden e inequaciones

En C21 el objeto de una resolución era el conjunto de valores que hacían verdadera una igualdad. Una inequación conserva esa misma exigencia de precisión, pero la relación que debemos estudiar ya no es sólo $=$.

Compare $x = 3$ con $x < 3$. La primera afirmación selecciona, sobre $\mathbb{R}$, un único valor. La segunda selecciona todos los números reales situados a la izquierda de 3 en la recta real. Para $x = 2$ la relación $x < 3$ es verdadera; para $x = 4$ es falsa; para $x = 3$ tampoco es verdadera, porque la desigualdad es estricta.

Antes de aprender técnicas para transformar inequaciones necesitamos fijar qué expresa el orden de los números reales y qué significa resolver una condición de este tipo.

22.1. Orden en los reales y conjunto solución

Comparar dos números reales. Los números reales están ordenados. Para $a, b \in \mathbb{R}$, la escritura $a < b$ afirma que a es menor que b. Geométricamente, a se encuentra a la izquierda de b en la recta real. La misma comparación puede escribirse en el sentido opuesto como $b > a$.

Las relaciones no estrictas incorporan también la igualdad:

$$a \leq b \iff (a < b \text{ o } a = b),$$

y, de manera análoga,

$$a \geq b \iff (a > b \text{ o } a = b).$$

La palabra «o» tiene aquí su significado lógico inclusivo: si $a = b$, la relación $a \leq b$ es verdadera aunque $a < b$ sea falsa.

Por ejemplo, $-2 < 1$, $4 \leq 4$, $7 > 3$. En cambio, $5 < 2$ y $6 \leq 1$ son proposiciones falsas.

Tricotomía. El orden de $\mathbb{R}$ permite comparar cualquier par de números reales. Dados a, $b \in \mathbb{R}$, exactamente una de las tres relaciones $a < b$, $a = b$, $a > b$ es verdadera.

Esta propiedad se llama **tricotomía**. Las tres posibilidades se excluyen entre sí y cubren todos los casos. Si sabemos, por ejemplo, que $a < b$, quedan descartadas simultáneamente $a = b$ y $a > b$.

La tricotomía evita una ambigüedad que sería incompatible con el orden usual de la recta: dos números reales no pueden quedar «sin comparar», ni pueden satisfacer a la vez dos de las tres relaciones estrictas anteriores.

De una desigualdad numérica a una inequación. Una desigualdad como $2 < 5$ es una proposición: una vez fijados los dos números, tiene un valor de verdad determinado.

La expresión $2x + 1 < 7$ se comporta de otro modo. Su verdad depende del valor asignado a x. Si $x = 2$, $2(2) + 1 < 7$ es verdadera. Si $x = 4$, $2(4) + 1 < 7$ es falsa.

En este libro llamaremos **inequación en la variable x sobre un dominio D** a una condición de la forma

$$E(x) < F(x), \qquad E(x) \leq F(x), \qquad E(x) > F(x) \quad \text{o} \quad E(x) \geq F(x),$$

interpretada para los valores $x \in D$ en los que las expresiones involucradas están definidas.

El signo de orden forma parte de la proposición. Cambiar $<$ por $>$ no es una modificación tipográfica: produce una condición distinta y, en general, un conjunto solución distinto.

Qué significa ser solución. Sea, por ejemplo, $E(x) < F(x)$ una inequación definida sobre un dominio D. Un valor $a \in D$ es una **solución** si la sustitución $x = a$ convierte la inequación en una proposición verdadera.

Así, $x = 2$ es solución de $x < 3, \qquad x \in \mathbb{R}$, porque $2 < 3$. En cambio, $x = 3$ no es solución de esa inequación: la proposición $3 < 3$ es falsa.

Para una relación no estricta la situación cambia. El mismo valor $x = 3$ sí es solución de $x \leq 3$, pues la igualdad está incluida en el significado de $\leq$.

La diferencia entre $<$ y $\leq$ afectará más adelante la inclusión o exclusión de puntos frontera. Por ahora basta con mantener separados sus significados.

El conjunto solución. Resolver una inequación exige determinar todos sus valores válidos, no verificar algunos ejemplos.

Para una inequación $E(x) < F(x)$ sobre un dominio D, definimos

$$\mathrm{Sol}_D(E < F) = \{x \in D : E(x) < F(x)\}.$$

Las otras relaciones de orden se tratan de la misma forma. Por ejemplo,

$$\mathrm{Sol}_D(E \leq F) = \{x \in D : E(x) \leq F(x)\}.$$

El conjunto solución es siempre un subconjunto del dominio: $\mathrm{Sol}_D(E < F) \subseteq D$. Esta inclusión registra algo que acompañará todo el capítulo: ninguna transformación posterior puede convertir en solución un valor que no pertenecía al dominio del problema.

La misma fórmula sobre dominios distintos. Considere la inequación $x < 3$. Sobre $\mathbb{R}$, su conjunto solución puede dejarse por ahora en notación constructiva:

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(x < 3) = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}.$$

Geométricamente, este conjunto contiene todos los puntos de la recta real situados a la izquierda de 3 y no contiene el punto 3.

Suponga, en cambio, que el dominio declarado es $D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Entonces sólo debemos examinar esos seis valores. Los cuatro primeros satisfacen $x < 3$, mientras que 3 y 4 no lo hacen. Por tanto, $\mathrm{Sol}_D(x < 3) = \{-1, 0, 1, 2\}$. La inequación escrita no cambió. Cambió el conjunto dentro del cual se pregunta por su verdad, y con él cambió el conjunto solución.

El dominio efectivo sigue siendo obligatorio. La disciplina de dominio de C20 y C21 no desaparece al pasar de ecuaciones a inequaciones.

Considere $\frac{x-1}{x-1} > 0, \qquad x \in \mathbb{R}$. La fracción sólo está definida cuando $x \neq 1$. El dominio efectivo es $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Para cada $x \in D$ podemos cancelar el factor no nulo $x - 1$ y la condición se reduce a $1 > 0$, que es verdadera. En consecuencia,

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}\left(\frac{x-1}{x-1} > 0\right) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

El valor $x = 1$ no es una solución que deba descartarse después de probarla. No pertenece al dominio de la expresión original. La simplificación hace desaparecer de la fórmula el denominador, pero no elimina la restricción que éste impuso.

Este ejemplo anticipa una distinción que será central en las inequaciones racionales: un punto puede quedar fuera del conjunto solución porque la relación es falsa o porque la expresión ni siquiera está definida allí. Son razones matemáticamente distintas.

Probar valores no equivale a resolver. Considere $x^2 < 5, \qquad x \in \mathbb{R}$. Sustituir $x = 0$ muestra que 0 es solución: $0^2 < 5$. Sustituir $x = 3$ muestra que 3 no lo es: $3^2 < 5$ es falsa.

Ninguna de las dos comprobaciones describe el conjunto solución completo. Una prueba puntual responde a la pregunta «¿pertenece este valor al conjunto solución?». Resolver exige caracterizar todos los valores para los que la relación es verdadera.

En dominios finitos puede bastar una comprobación exhaustiva. Sobre $\mathbb{R}$, donde hay infinitos candidatos, necesitaremos propiedades del orden y transformaciones que preserven la relación de manera controlada.

Un no-ejemplo de razonamiento. Alguien considera $\frac{x+2}{x-1} > 0$ y afirma: «$x = 1$ no sirve porque al sustituirlo la desigualdad resulta falsa».

La conclusión de que 1 no pertenece al conjunto solución es correcta, pero la razón no lo es. Al sustituir $x = 1$ obtenemos un denominador nulo; no aparece una proposición falsa, sino una expresión indefinida. El valor 1 queda excluido antes de estudiar el signo.

Separar **dominio** de **verdad de la inequación** será necesario cuando aparezcan ceros, puntos excluidos y extremos.

Prueba de estrés: igualdad frente a orden estricto. Considere un número real a. Por tricotomía, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera: $a < 3, \qquad a = 3, \qquad a > 3$. De aquí no se sigue que exactamente una de $a \leq 3$ y $a \geq 3$ sea verdadera. Si $a = 3$, ambas lo son: $3 \leq 3 \qquad$ y $\qquad 3 \geq 3$. La tricotomía corresponde a las relaciones **estrictas** junto con la igualdad. Las relaciones $\leq$ y $\geq$ se superponen precisamente en el caso de igualdad.

Recuperación breve. Sea $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y considere la inequación $x^2 < 5$. Determine su conjunto solución sin aplicar transformaciones algebraicas: compruebe directamente los valores del dominio.

Respuesta razonada. Evaluamos la condición en los seis elementos de D:

$$(-2)^2 = 4 < 5, \qquad (-1)^2 = 1 < 5, \qquad 0^2 = 0 < 5,$$

$$1^2 = 1 < 5, \qquad 2^2 = 4 < 5, \qquad 3^2 = 9 > 5.$$

Los cinco primeros valores satisfacen la inequación y 3 no la satisface. Por tanto, $\mathrm{Sol}_D(x^2 < 5) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. La resolución fue posible por inspección exhaustiva porque D era finito. El mismo procedimiento no constituye un método adecuado para describir el conjunto solución sobre todo $\mathbb{R}$.

Qué debemos conservar de esta sección. Una inequación se interpreta sobre un dominio y pregunta dónde una relación de orden es verdadera. Su solución completa es un conjunto:

$$\mathrm{Sol}_D(E \triangleleft F) = \{x \in D : E(x) \triangleleft F(x)\},$$

donde $\triangleleft$ representa una de las relaciones $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$.

La tricotomía organiza la comparación estricta de dos reales; el dominio decide qué valores son admisibles; la inequación decide cuáles de esos valores satisfacen la relación. Resolver significa describir todo ese subconjunto, no acumular verificaciones aisladas.

22.2. Intervalos, semirrectas y extremos

En §22.1 dejamos el conjunto solución de $x < 3$ escrito como $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$.

La descripción es exacta, pero no aprovecha una propiedad especial del orden real: todos esos valores forman una región continua de la recta. Para trabajar con inequaciones necesitaremos una notación que permita ver de inmediato dónde comienza y termina una región, qué puntos frontera pertenecen a ella y qué ocurre cuando el conjunto se extiende indefinidamente.

Intervalos entre dos números. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. El **intervalo abierto** entre a y b es

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Los extremos a y b no pertenecen al conjunto. En la recta real, el intervalo contiene todos los puntos situados estrictamente entre ambos.

El **intervalo cerrado** correspondiente es $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Aquí los dos extremos sí pertenecen al conjunto. Las otras dos posibilidades incluyen sólo uno de ellos:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Los corchetes y paréntesis no son adornos tipográficos. Registran pertenencia. Un corchete junto a un extremo real indica que ese punto está incluido; un paréntesis indica que está excluido.

Por ejemplo, $[-2, 4) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 4\}$. El número -2 pertenece al conjunto y 4 no pertenece.

Una misma región, varias representaciones. El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 3\}$ puede escribirse como $S = (-1, 3]$.

Ambas expresiones describen el mismo objeto. La notación constructiva hace visibles las condiciones lógicas; la notación de intervalo hace visible la geometría del conjunto sobre la recta.

La traducción entre ambas formas debe preservar exactamente la inclusión de los extremos:

Condición	Notación de intervalo
$a < x < b$	(a, b)
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$a \leq x < b$	$[a, b)$
$a < x \leq b$	$(a, b]$

Una desigualdad estricta excluye el punto frontera que produce; una desigualdad no estricta puede incluirlo, siempre que ese punto pertenezca al dominio efectivo.

Semirrectas. Muchas inequaciones no acotan al conjunto solución por ambos lados. Si la condición es $x < 3$, el conjunto se extiende indefinidamente hacia la izquierda. Las cuatro formas básicas son:

Condición	Semirrecta
$x < 3$	$(-\infty, 3)$
$x \leq 3$	$(-\infty, 3]$
$x > 2$	$(2, \infty)$
$x \geq 2$	$[2, \infty)$

Estos conjuntos se llaman **semirrectas**. El símbolo ∞ no representa un número real ni un punto que pueda pertenecer al conjunto. Por eso siempre escribimos paréntesis junto a ∞ y $-\infty$.

La escritura $[-\infty, 3]$ no es una notación válida de intervalo real: $-\infty$ no es un extremo perteneciente a $\mathbb{R}$ que pueda incluirse con un corchete.

Todo $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío. La recta real completa puede escribirse como $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

En el extremo opuesto, algunas condiciones no dejan ningún valor admisible. Su conjunto solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

También hay casos degenerados útiles para controlar la notación. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene $[a, a] = \{a\}$, mientras que $(a, a) = \varnothing$.

El primer conjunto contiene el único punto que satisface $a \leq x \leq a$; el segundo exigiría simultáneamente $a < x$ y $x < a$, lo que es imposible.

Unión: varias regiones separadas. No todos los conjuntos solución forman un único intervalo. Considere $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } 2 \leq x \leq 5\}$. La palabra «o» indica que basta satisfacer una de las dos condiciones. En lenguaje de conjuntos, $S = (-\infty, -1) \cup [2, 5]$.

La unión conserva ambas regiones. El espacio entre -1 y 2 no pertenece al conjunto.

Este tipo de respuesta aparecerá con frecuencia cuando un producto o un cociente cambie de signo en varios puntos críticos. La notación de unión permite conservar una solución desconectada sin forzarla artificialmente a convertirse en un solo intervalo.

Intersección: condiciones simultáneas. Si un valor debe satisfacer dos condiciones a la vez, buscamos la intersección de los conjuntos correspondientes.

Por ejemplo, $x > -2$ y $x \leq 4$ exigen simultáneamente $x \in (-2, \infty)$ y $x \in (-\infty, 4]$. Por tanto, $(-2, \infty) \cap (-\infty, 4] = (-2, 4]$. La primera condición elimina todo lo que está en $(-\infty, -2]$; la segunda elimina todo lo que está en $(4, \infty)$. Sobrevive la región común.

Unión e intersección ya aparecieron en C7. Aquí adquieren una función operativa: permiten describir con precisión conjuntos solución que tienen varias ramas o que deben satisfacer varias restricciones al mismo tiempo.

Extremo abierto no significa siempre «desigualdad estricta». Considere un dominio efectivo que ya excluye un punto, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Dentro de ese dominio queremos describir los valores que satisfacen $x \leq 3$.

Si sólo miráramos el signo $\leq$, podríamos pensar en $(-\infty, 3]$. Pero el punto 2 no pertenece a D. El conjunto solución correcto es $(-\infty, 2) \cup (2, 3]$. Aquí aparecen dos tipos de frontera diferentes:

- 3 pertenece al conjunto porque la relación es no estricta y $3 \in D$;
- 2 queda fuera porque no pertenece al dominio, aunque $2 \leq 3$ sea una proposición verdadera.

La forma gráfica de ambos hechos puede parecer similar —en los dos casos un punto podría quedar «abierto»—, pero la razón matemática no es la misma. Esta diferencia será indispensable cuando trabajemos con inequaciones racionales.

Un punto frontera debe pasar dos pruebas. Cuando una resolución produce un candidato a extremo real c, su inclusión requiere comprobar dos cosas:

1. c debe pertenecer al dominio efectivo;
2. la relación de la inequación debe admitir la igualdad en ese punto.

Si falla la primera condición, el punto queda excluido por dominio. Si el punto pertenece al dominio pero la inequación es estricta, queda excluido por la relación de orden.

Considere $S = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \geq -2\}$.

El extremo -2 pertenece al dominio y la relación es no estricta, por lo que se incluye. El punto 1 satisface numéricamente $1 \geq -2$, pero está excluido del dominio. Así, $S = [-2, 1) \cup (1, \infty)$.

Prueba de estrés: leer los símbolos antes de calcular. Compare $A = (-1, 2]$, $B = [-1, 2)$ y $C = (-1, 2)$. Comparten todos los puntos interiores entre -1 y 2, pero difieren en sus extremos: $-1 \notin A$ y $2 \in A$; $-1 \in B$ y $2 \notin B$; en C quedan excluidos ambos extremos.

Por tanto, los tres conjuntos son distintos. Una sola marca de inclusión o exclusión puede cambiar el conjunto solución.

La notación de intervalo debe leerse como una afirmación de pertenencia, no como una convención visual aproximada.

Recuperación breve. Escriba en notación de intervalos los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 4\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \text{ o } x > 3\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \geq -1\}$.

Respuesta razonada. En **a)** el extremo -2 está excluido y 4 incluido, de modo que $A = (-2, 4]$.

En **b)** la condición describe dos semirrectas separadas. El punto 1 se incluye y 3 se excluye, de modo que $B = (-\infty, 1] \cup (3, \infty)$.

En **c)** la condición $x \geq -1$ incluiría inicialmente $[-1, \infty)$, pero el dominio elimina 0. Por tanto, $C = [-1, 0) \cup (0, \infty)$.

El punto 0 no se excluye por una desigualdad estricta; se excluye porque no pertenece al dominio.

Qué debemos conservar de esta sección. La notación de intervalos es una forma compacta de describir subconjuntos ordenados de $\mathbb{R}$. Los corchetes y paréntesis registran pertenencia de extremos reales; $\pm\infty$ nunca se incluyen; la unión permite reunir regiones separadas y la intersección expresa condiciones simultáneas.

Un extremo real se incluye sólo si pertenece al dominio y la relación admite la igualdad. Esta doble verificación impide confundir un punto excluido por dominio con un punto excluido por una desigualdad estricta.

22.3. Sumar, restar y comparar

En §22.2 aprendimos a leer un conjunto solución sobre la recta real. Para empezar a transformar inequaciones necesitamos saber qué operaciones conservan el orden. La primera es la más estable de todas: **trasladar ambos miembros por la misma cantidad**.

Si $4 < 9$, entonces también $4 + 7 < 9 + 7$ y $4 - 20 < 9 - 20$. El orden no cambia aunque el número añadido sea positivo, negativo o cero. Ambos puntos se desplazan la misma distancia y en la misma dirección sobre la recta.

Compatibilidad del orden con la suma. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, entonces $b - a > 0$. Después de sumar c a ambos números, la diferencia entre el segundo y el primero sigue siendo la misma: $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$. Por tanto, $a + c < b + c$. El paso es reversible: restar c recupera la comparación original. Tenemos así

$$a < b \iff a + c < b + c, \qquad a \leq b \iff a + c \leq b + c.$$

Las versiones con $>$ y $\geq$ son la misma propiedad leída en el sentido opuesto.

Sumar la misma cantidad a ambos miembros produce una equivalencia: conserva exactamente la relación de orden. En una inequación, esto significa que el conjunto solución no cambia, siempre que la expresión añadida esté definida en todo el dominio vigente.

Restar es sumar el opuesto. No necesitamos una regla nueva para la resta. Restar c equivale a sumar $-c$, de modo que

$$a < b \iff a - c < b - c, \qquad a \leq b \iff a - c \leq b - c.$$

El signo de c no interviene en la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, de $2 < 5$ se obtiene $-8 < -5$ al sumar -10 a ambos miembros. El orden sigue apuntando en la misma dirección.

El signo de la cantidad sumada no altera la orientación. **Sumar o restar la misma cantidad conserva la relación cualquiera sea ese signo.** Multiplicar y dividir plantean un problema diferente, porque allí sí interviene el signo del factor.

La regla sobre expresiones. La misma propiedad funciona cuando los miembros dependen de una variable. Suponga que $A(x)$, $B(x)$ y $G(x)$ están definidos para todo x de un dominio D. Para cada $x \in D$,

$$A(x) < B(x) \iff A(x) + G(x) < B(x) + G(x).$$

En términos de conjuntos solución,

$$\mathrm{Sol}_D(A < B) = \mathrm{Sol}_D(A + G < B + G).$$

La igualdad de conjuntos expresa lo que realmente nos interesa: la transformación es reversible sobre D.

Por ejemplo, sobre $\mathbb{R}$, $x - 5 < 2 \iff x < 7$. Se sumó 5 a ambos miembros. El conjunto solución es el mismo antes y después de la transformación: $(-\infty, 7)$.

También podemos eliminar una expresión común más complicada. Considere $x^2 + x < x^2 + 7$. Restar x^2, que está definido para todo real, produce $x < 7$. No estamos «cancelando» símbolos por semejanza visual: aplicamos a ambos miembros la misma transformación reversible sobre el dominio completo.

El dominio sigue formando parte de la equivalencia. La condición «$G(x)$ está definida en todo D» no puede omitirse.

Considere la inequación $x < 2$ sobre $D = \mathbb{R}$. Si añadimos $1/(x-1)$ a ambos miembros, obtenemos $x + 1/(x-1) < 2 + 1/(x-1)$. La nueva escritura no está definida en $x = 1$. Sobre $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, la transformación es reversible; sobre el dominio original $\mathbb{R}$, no podemos afirmar que ambas inequaciones representen el mismo problema, porque hemos eliminado un valor que sí pertenecía al dominio inicial y que además satisfacía $x < 2$.

El error no está en sumar «lo mismo» a ambos lados. Está en introducir una expresión cuyo dominio es más pequeño y olvidar que la equivalencia debe conservar también el conjunto de valores admisibles.

Transitividad: comparar a través de un término intermedio. El orden de los reales es transitivo. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. La misma idea vale para la relación no estricta: de $a \leq b$ y $b \leq c$ se sigue $a \leq c$.

También aparecen formas mixtas. Si $a < b$ y $b \leq c$, entonces $a < c$; si $a \leq b$ y $b < c$, también $a < c$. En ambos casos hay al menos una separación estricta entre los extremos.

Esta propiedad permite encadenar comparaciones. La escritura $a < b < c$ abrevia simultáneamente $a < b$ y $b < c$; no introduce una relación nueva. Por transitividad, la cadena contiene además la información $a < c$.

Por ejemplo, de $-4 < 1$ y $1 < 6$ se obtiene $-4 < 6$. Si añadimos 3 a las dos comparaciones, aparecen $-1 < 4$ y $4 < 9$, y por transitividad concluimos $-1 < 9$.

Una consecuencia: sumar comparaciones compatibles. Suponga que $a < b$ y $c < d$. La primera desigualdad permite sumar c en ambos miembros: $a + c < b + c$. La segunda permite sumar b en ambos miembros: $b + c < b + d$. Por transitividad, $a + c < b + d$. Esta conclusión no es una regla aislada; combina dos propiedades ya justificadas: compatibilidad aditiva y transitividad.

La misma lógica funciona con relaciones no estrictas. Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$.

Prueba de estrés: «sumar» no significa modificar un solo miembro. Partimos de una afirmación verdadera, $2 < 3$. Si sumamos 5 sólo al miembro izquierdo obtenemos $7 < 3$, que es falsa. La propiedad de compatibilidad aditiva exige aplicar **la misma** suma a ambos miembros.

Tampoco exige que la cantidad añadida sea positiva. De $2 < 3$ podemos pasar a $2 - 100 < 3 - 100$, es decir, $-98 < -97$. La dirección se conserva.

Lo que debe controlarse es que ambos miembros reciban la misma traslación y que esa traslación esté definida. El signo de la cantidad añadida no cambia la orientación.

Recuperación breve. Trabaje sobre los dominios indicados.

a) Transforme $x + 7 \leq 12$ usando sólo una suma o resta aplicada a ambos miembros y escriba el conjunto solución.

b) Determine el conjunto solución de $x^2 + 1 < x^2 + 5$ sobre $\mathbb{R}$ sin probar valores uno por uno.

c) Explique por qué añadir $1/(x - 2)$ a ambos miembros de $x < 4$ no produce, sobre todo $\mathbb{R}$, una inequación equivalente al problema original.

Respuesta razonada. En **a)** restamos 7 en ambos miembros: $x + 7 \leq 12 \iff x \leq 5$. Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, 5]$.

En **b)** restamos x^2 en ambos miembros. Como x^2 está definido para todo $x \in \mathbb{R}$, obtenemos $1 < 5$, una proposición verdadera para cualquier real. El conjunto solución es $\mathbb{R}$.

En **c)** la expresión $1/(x - 2)$ no está definida en $x = 2$. La inequación original sí estaba definida allí y $2 < 4$ es verdadera. La transformación sería reversible sobre $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, pero no conserva el problema sobre el dominio original $\mathbb{R}$.

Qué debemos conservar de esta sección. La suma es compatible con el orden: aplicar la misma traslación a ambos miembros conserva la dirección y, cuando todas las expresiones están definidas en el dominio vigente, conserva exactamente el conjunto solución. Restar es el mismo principio aplicado al opuesto.

La transitividad permite encadenar comparaciones y combinar pasos ya justificados. En cada transformación deben mantenerse visibles dos datos: **qué operación se aplicó a ambos miembros y sobre qué dominio esa operación está definida**.

22.4. Multiplicar y dividir: el signo gobierna la dirección

En §22.3 sumar la misma cantidad a ambos miembros conservaba el orden sin importar el signo de esa cantidad. La multiplicación no tiene esa estabilidad. El signo del factor decide qué ocurre con la dirección de la desigualdad.

Compare $2 < 5$. Al multiplicar ambos miembros por 3 obtenemos $6 < 15$: el orden se conserva. Si multiplicamos por -3, aparecen -6 y -15, pero en la recta real -6 está a la derecha de -15. La comparación correcta es $-6 > -15$.

La diferencia entre ambos casos no es una convención de escritura. Proviene de las propiedades del orden real.

Multiplicar por un número positivo conserva la dirección. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c > 0$. Como $b - a > 0$, el producto de dos números positivos también es positivo: $c(b - a) > 0$. Al distribuir, $cb - ca > 0$, y por la definición del orden se obtiene $ca < cb$.

El argumento es reversible porque $c \neq 0$ y $1/c > 0$. Por tanto,

$$a < b \iff ca < cb, \qquad a \leq b \iff ca \leq cb \quad (c > 0).$$

Las relaciones $>$ y $\geq$ obedecen la misma regla. Multiplicar o dividir por una constante positiva preserva la orientación.

Por ejemplo, $4x < 20 \iff x < 5$: dividimos por $4 > 0$ y la dirección no cambia.

Multiplicar por un número negativo invierte la dirección. Suponga ahora $a < b$ y $c < 0$. Entonces $-c > 0$. Como $b - a > 0$, tenemos $(b - a)(-c) > 0$. Al desarrollar, $ac - bc > 0$, por lo que $ac > bc$. El número que antes estaba a la izquierda termina a la derecha después de multiplicar por un factor negativo.

Así,

$$a < b \iff ca > cb, \qquad a \leq b \iff ca \geq cb \quad (c < 0).$$

La inversión de la desigualdad no es una regla mnemotécnica añadida al álgebra. Es la forma simbólica de una inversión real del orden.

Por ejemplo, de $-3x \leq 12$ obtenemos $x \geq -4$ al dividir por -3. Mantener $\leq$ produciría un conjunto distinto y sería incorrecto.

Dividir es multiplicar por el recíproco. Dividir por $c \neq 0$ equivale a multiplicar por $1/c$. El recíproco tiene el mismo signo que c: si $c > 0$, entonces $1/c > 0$; si $c < 0$, entonces $1/c < 0$.

Por eso la regla de división no necesita una teoría separada:

- dividir por un número positivo conserva la dirección;
- dividir por un número negativo la invierte.

La condición $c \neq 0$ es indispensable. La división por cero no está definida.

El caso cero no es una tercera versión reversible. Multiplicar por cero destruye la información de orden. A partir de $2 < 5$, por ejemplo, multiplicar ambos miembros por 0 produce $0 < 0$, que es falso. Para una relación no estricta, $2 \leq 5$ daría $0 \leq 0$, que es verdadero, pero ya no permite recuperar la comparación original.

En ambos casos se perdió la diferencia entre los dos miembros. El paso no es reversible.

Esto distingue tres situaciones que deben mantenerse separadas:

Factor c	Efecto sobre $a < b$	¿Se puede dividir después?
$c > 0$	$ca < cb$	Sí
$c < 0$	$ca > cb$	Sí
$c = 0$	ambos miembros colapsan a 0	No

Una lectura geométrica. Multiplicar todos los puntos de la recta por un número positivo realiza un cambio de escala que conserva izquierda y derecha. Multiplicar por un número negativo combina una escala con una reflexión respecto de 0; esa reflexión intercambia izquierda y derecha.

Esta imagen explica por qué el valor absoluto del factor controla el tamaño del cambio y su signo controla la orientación.

Cuando el multiplicador depende de x. El problema se vuelve más delicado si el factor es una expresión $M(x)$. No podemos decidir de antemano si la dirección se conserva o se invierte sin conocer su signo.

Sobre un dominio D, conviene separar

$$D_+ = \{x \in D : M(x) > 0\}, \qquad D_- = \{x \in D : M(x) < 0\}, \qquad D_0 = \{x \in D : M(x) = 0\}.$$

Si $A(x) < B(x)$, entonces sobre D_+ podemos multiplicar por $M(x)$ conservando la dirección; sobre D_- debemos invertirla. En D_0 no podemos dividir por $M(x)$ y la multiplicación por cero no conserva de manera reversible la desigualdad original.

En símbolos,

$$\begin{aligned} x \in D_+ : &\quad A(x) < B(x) \iff M(x)A(x) < M(x)B(x), \\ x \in D_- : &\quad A(x) < B(x) \iff M(x)A(x) > M(x)B(x). \end{aligned}$$

No existe una sola transformación equivalente que ignore esta partición cuando M cambia de signo.

Un no-ejemplo: multiplicar por la variable sin mirar su signo. Considere $x < 2$. Alguien multiplica ambos miembros por x y escribe $x^2 < 2x$.

El paso no es equivalente sobre $\mathbb{R}$. Si $x = 1$, ambas desigualdades son verdaderas. Si $x = -1$, la original $-1 < 2$ es verdadera, pero la transformada $1 < -2$ es falsa. Si $x = 0$, la original es verdadera y la transformada se convierte en $0 < 0$, también falsa.

El mismo factor x es positivo en una parte del dominio, negativo en otra y cero en un tercer caso. La operación correcta exige separar esos regímenes antes de decidir la dirección.

Dividir por una expresión variable exige dos controles. Para dividir una inequación por $M(x)$ necesitamos saber, en el dominio considerado, dos cosas:

1. que $M(x) \neq 0$;
2. si $M(x)$ es positivo o negativo.

La primera condición autoriza la división. La segunda determina la orientación de la desigualdad. Saber sólo que $M(x) \neq 0$ no basta si su signo puede variar.

Por esta razón, «pasar un factor dividiendo» no es una operación puramente sintáctica en una inequación. La validez depende de información matemática que debe estar disponible antes del paso.

Prueba de estrés: el mismo cálculo con signos distintos. Parta de $a < b$. Si multiplicamos por 5, obtenemos $5a < 5b$. Si multiplicamos por -5, obtenemos $-5a > -5b$. Si intentamos multiplicar por una cantidad cuyo signo no conocemos, no podemos elegir responsablemente entre esas dos orientaciones.

El cálculo algebraico puede ser idéntico en apariencia; la hipótesis de signo cambia la conclusión lógica.

Recuperación breve. a) Resuelva $-4x > 12$ usando una sola división justificada y escriba el conjunto solución.

b) Si $3a \leq 3b$, explique por qué puede concluirse $a \leq b$.

c) Un estudiante parte de $x < 4$ y multiplica ambos miembros por $x - 1$, escribiendo $x(x-1) < 4(x-1)$. Explique por qué la transformación no es equivalente sobre todo $\mathbb{R}$.

Respuesta razonada. En **a)** dividimos por $-4 < 0$, de modo que la desigualdad se invierte: $x < -3$. El conjunto solución es $(-\infty, -3)$.

En **b)** dividimos por $3 > 0$. La división está definida y conserva la orientación, por lo que $a \leq b$.

En **c)** el factor $x-1$ es negativo para $x<1$, cero en $x=1$ y positivo para $x>1$. No existe una única dirección válida sobre todo $\mathbb{R}$; además, en $x=1$ la multiplicación por cero pierde información. La transformación sólo puede justificarse después de separar los casos de signo correspondientes.

Qué debemos conservar de esta sección. Multiplicar o dividir una desigualdad exige conocer el signo del factor. Un factor positivo conserva la orientación; uno negativo la invierte; el cero destruye la reversibilidad y nunca puede usarse como divisor.

Cuando el factor depende de la variable, el dominio debe separarse según $M(x)>0$, $M(x)<0$ y $M(x)=0$. **El signo no acompaña al cálculo como una anotación secundaria: decide qué transformación es válida.**

El signo de una expresión requiere regiones. El signo de una constante no nula se fija una vez; el de $x-a$ cambia con x. Por eso multiplicar una inequación por $x-a$ exige separar $x<a$, $x>a$ y, si pertenece al dominio, $x=a$. **Control resuelto:** $1/(x-a)>0$ tiene dominio $x\neq a$ y equivale a $x>a$. Multiplicar sin revisar el signo y concluir $1>0$ para todo el dominio sería falso. Una alternativa segura es multiplicar por $(x-a)^2>0$ en el dominio: se obtiene $x-a>0$. Se justifica así la misma solución con un multiplicador de signo fijo. Elegir una ruta breve requiere demostrar por qué conserva el orden en toda la región donde se usa.

22.5. Inequaciones lineales

Las secciones anteriores separaron las operaciones que siempre conservan el orden de aquellas cuya validez depende del signo. Ya podemos resolver de manera sistemática una inequación lineal sin recurrir a reglas memorizadas.

Considere $3x-5\leq 7$. Sumar 5 en ambos miembros conserva la relación y produce $3x\leq 12$. Como $3>0$, dividir por 3 también conserva la dirección. Así, $x\leq 4$ y el conjunto solución es $(-\infty,4]$.

La resolución fue breve porque el coeficiente de x era positivo. Si ese coeficiente fuera negativo, el último paso invertiría la desigualdad. Si fuera cero, ni siquiera habría una variable por aislar. La estructura completa de una inequación lineal exige distinguir los tres casos.

Qué llamaremos inequación lineal. En una variable, una inequación lineal propiamente dicha puede reducirse a la forma $ax\triangleleft d$, con $a\neq 0$, $a,d\in\mathbb{R}$ y $\triangleleft$ igual a $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$.

Una expresión más simétrica, como $ax+b\triangleleft cx+d$, se reduce mediante sumas y restas a $(a-c)x\triangleleft d-b$. Esa reducción conserva el conjunto solución porque sólo usa transformaciones aditivas justificadas en §22.3.

Al reunir los términos puede ocurrir que el coeficiente efectivo $a-c$ sea positivo, negativo o cero. Este último es el caso degenerado que debe formar parte del algoritmo, aunque la variable apareciera en la escritura original.

Coeficiente positivo. Suponga primero $ax\leq d$ con $a>0$. Dividir por a está permitido y conserva la orientación: $x\leq d/a$.

La solución es la semirrecta $(-\infty,d/a]$. Para las otras relaciones de orden ocurre lo mismo: un coeficiente positivo no cambia la dirección.

Por ejemplo, $5x-8>12\iff 5x>20\iff x>4$. Cada transición conserva exactamente el conjunto solución: primero sumamos 8 y después dividimos por $5>0$. La respuesta es $(4,\infty)$.

Coeficiente negativo. Si el coeficiente es negativo, el aislamiento de x termina con una inversión de la relación.

Considere $-4x + 3 < 11$. Restamos 3 y obtenemos $-4x < 8$. Como $-4 < 0$, al dividir por -4 la desigualdad cambia de orientación: $x > -2$.

El conjunto solución es $(-2, \infty)$.

La inversión no aparece porque «la x pasó al otro lado» ni porque exista una regla especial para despejar. Aparece únicamente en el paso en que dividimos por un número negativo.

La forma general con la variable en ambos miembros. Considere $7x - 4 \geq 3x + 8$. Restar $3x$ y sumar 4 conserva la relación: $4x \geq 12$. Como $4 > 0$, dividir por 4 da $x \geq 3$. Por tanto, la solución es $[3, \infty)$.

En cambio, para $2x + 5 > 6x - 3$, reunir los términos produce $-4x > -8$. El coeficiente efectivo es negativo, así que dividir por -4 invierte la relación y obtenemos $x < 2$.

El signo que importa no es el de los coeficientes tal como aparecen al principio, sino el del coeficiente que multiplica a x después de reunir la variable en un solo miembro.

Cuando el coeficiente se anula. El caso $a = 0$ no puede tratarse dividiendo. La inequación $ax \triangleleft d$ se reduce entonces a una comparación entre números, $0 \triangleleft d$.

La variable desaparece. Sólo quedan dos posibilidades:

- si la comparación numérica es verdadera, **todos los valores del dominio** son soluciones;
- si es falsa, el conjunto solución es $\varnothing$.

Por ejemplo, $3x + 2 < 3x + 5$ se reduce a $2 < 5$, que es verdadera. Sobre $\mathbb{R}$, su conjunto solución es $\mathbb{R}$.

En cambio, $2x + 7 \geq 2x + 9$ se reduce a $7 \geq 9$, que es falsa. Su conjunto solución es $\varnothing$.

Ambas situaciones pertenecen a la clasificación completa y deben reconocerse antes de intentar cualquier división.

Clasificación de $ax + b \leq c$. La estructura puede reunirse en un solo esquema. Sobre $\mathbb{R}$, $ax + b \leq c \iff ax \leq c - b$.

A partir de allí:

Condición sobre a	Inequación equivalente	Conjunto solución
$a > 0$	$x \leq \dfrac{c-b}{a}$	$\left(-\infty, \dfrac{c-b}{a}\right]$
$a < 0$	$x \geq \dfrac{c-b}{a}$	$\left[\dfrac{c-b}{a}, \infty\right)$
$a = 0$ y $b \leq c$	comparación verdadera	$\mathbb{R}$
$a = 0$ y $b > c$	comparación falsa	$\varnothing$

Para $<$, $>$ o $\geq$ cambia la condición en el extremo, pero no la lógica de los tres regímenes del coeficiente.

Parámetro fijo y control de signo. Considere la familia $ax + 2 \leq 5$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.

Antes de dividir por a debemos conocer su signo. La clasificación es:

- si $a > 0$, entonces $x \leq 3/a$;
- si $a < 0$, entonces $x \geq 3/a$;
- si $a = 0$, queda $2 \leq 5$, verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$.

No existe una sola fórmula obtenida «dividiendo por a» que sea válida sin separar $a > 0$, $a < 0$ y $a = 0$. En §22.13 estudiaremos familias paramétricas más ricas; aquí sólo necesitamos que el parámetro no oculte una condición de signo.

El dominio declarado todavía manda. Las expresiones lineales están definidas para todo real, pero el problema puede imponer un dominio más pequeño.

Si resolvemos $2x - 1 < 7$ con $x \in [0, 10]$, la inequación da $x < 4$. El conjunto solución no es entonces $(-\infty, 4)$, porque buscamos sólo dentro del dominio declarado: $\mathrm{Sol}_{[0,10]}(2x - 1 < 7) = [0, 4)$. Resolver la inequación produce una condición de orden; el conjunto solución final se obtiene al conservar simultáneamente esa condición y el dominio vigente.

Prueba de estrés: una cadena correcta con una justificación incorrecta. Un estudiante escribe

$$-6x + 1 \leq 13 \iff -6x \leq 12 \iff x \geq -2$$

y explica el último paso diciendo: «pasé el -6 dividiendo y cambié el signo».

La respuesta es correcta, pero la explicación es insuficiente. El paso válido es: dividir ambos miembros por -6, operación reversible porque $-6 \neq 0$, e invertir la relación porque $-6 < 0$.

La notación final puede ser breve; la razón matemática que la autoriza no debe desaparecer.

Recuperación breve. Resuelva sobre $\mathbb{R}$.

a) $5x + 4 \leq 19$.

b) $7 - 3x > 16$.

c) $4x - 1 \leq 4x + 2$.

d) $6x + 5 > 6x + 9$.

e) $mx < 6$, donde $m \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.

Respuesta razonada. En **a)**, $5x \leq 15$ y, como $5 > 0$, $x \leq 3$. La solución es $(-\infty, 3]$.

En **b)**, $-3x > 9$ y, como $-3 < 0$, al dividir se obtiene $x < -3$. La solución es $(-\infty, -3)$.

En **c)**, al restar $4x$ queda $-1 \leq 2$, verdadera para todo real. La solución es $\mathbb{R}$.

En **d)** queda $5 > 9$, que es falsa. La solución es $\varnothing$.

En **e)** hay tres casos. Si $m > 0$, $x < 6/m$; si $m < 0$, $x > 6/m$; si $m = 0$, queda $0 < 6$, verdadera para todo real. La división por m sólo aparece en los casos en que $m \neq 0$ y después de conocer su signo.

Qué debemos conservar de esta sección. Una inequación lineal se reduce mediante transformaciones equivalentes hasta una comparación de la forma $ax \triangleleft d$. El signo de a decide la orientación del último paso; el caso $a = 0$ decide si la solución es todo el dominio o el conjunto vacío.

El procedimiento completo exige **reunir la variable, identificar el coeficiente efectivo, clasificar su signo y declarar el conjunto solución dentro del dominio vigente**.

22.6. Inequaciones compuestas y sistemas

Un valor puede tener que satisfacer más de una comparación. Si una temperatura debe superar -2 y no exceder 5, las condiciones son $x > -2$ y $x \leq 5$. Su conjunto solución es $(-2, 5]$: conservamos únicamente los valores admitidos por ambas condiciones. Si, en cambio, basta que la temperatura sea menor que -2 o mayor que 5, obtenemos dos regiones separadas, $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

La diferencia procede del enlace lógico. Antes de operar con las expresiones, debemos identificar si se exige simultaneidad o si se ofrecen alternativas.

Conjunción e intersección. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos condiciones definidas sobre un mismo dominio efectivo D, y sean $S_P = \{x \in D : P(x)\}$ y $S_Q = \{x \in D : Q(x)\}$. Por definición de intersección, un elemento pertenece a $S_P \cap S_Q$ si pertenece a ambos conjuntos. Por tanto, el conjunto solución de «$P(x)$ y $Q(x)$» es $S_P \cap S_Q$.

Un **sistema de inequaciones en una variable** exige que todas sus condiciones se satisfagan simultáneamente. Si hay más de dos condiciones, se intersectan todos sus conjuntos solución. Los elementos siguen siendo números reales; la cantidad de condiciones no cambia el tipo de objeto que buscamos.

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 4, \\ 5 - x > 1. \end{cases}$$

La primera condición equivale a $3x \geq 6$ y después a $x \geq 2$, porque dividimos por $3 > 0$. La segunda equivale a $-x > -4$ y después a $x < 4$, porque dividimos por $-1 < 0$. Sus soluciones individuales son $[2, \infty)$ y $(-\infty, 4)$. La región común es $S = [2, 4)$.

El punto 2 satisface ambas condiciones: en la primera produce igualdad y en la segunda produce $3 > 1$. El punto 4 queda fuera porque la segunda condición produciría $1 > 1$. La inclusión de cada extremo depende de todas las condiciones que actúan allí.

Dobles desigualdades. La escritura $a < E(x) \leq b$ abrevia la conjunción $a < E(x)$ y $E(x) \leq b$. Una transformación aplicada a los tres miembros sólo es válida si conserva esas dos comparaciones.

Considere $-1 < 2x + 3 \leq 9$. Restar 3 en los tres miembros equivale a restarlo en cada una de las comparaciones y produce $-4 < 2x \leq 6$. Dividir por $2 > 0$ conserva ambas direcciones, de modo que $-2 < x \leq 3$. La solución es $(-2, 3]$.

Cuando el divisor es negativo, las dos relaciones se invierten. Para $-1 < -2x + 3 \leq 9$, restamos 3 y obtenemos $-4 < -2x \leq 6$. Al dividir por -2 queda $2 > x \geq -3$. Para leerla de izquierda a derecha en orden creciente, reescribimos la cadena como $-3 \leq x < 2$. Así, $S = [-3, 2)$.

La primera escritura tras dividir es válida: afirma simultáneamente $x < 2$ y $x \geq -3$. Reordenarla mejora la lectura, pero no autoriza cambiar la inclusión de los extremos.

Una comparación compuesta puede resultar imposible. Estudie $2x + 1 > 7$ y $x \leq 2$. La primera condición equivale a $x > 3$, de modo que el sistema exige $x \in (3, \infty) \cap (-\infty, 2]$. Los conjuntos no tienen elementos comunes y $S = \varnothing$.

También puede sobrevivir un único punto. Las condiciones $x \geq 2$ y $x \leq 2$ tienen solución $\{2\} = [2, 2]$. Si una de ellas se hace estricta, por ejemplo $x > 2$ y $x \leq 2$, la intersección es vacía. Esta variación muestra por qué una frontera coincidente debe examinarse antes de escribir un intervalo.

Disyunción y unión. Para condiciones P, Q definidas en D, un valor satisface «$P(x)$ o $Q(x)$» si satisface al menos una de ellas. Por definición de unión, su conjunto solución es $S_P \cup S_Q$. La palabra «o» es inclusiva: también se admiten los valores que satisfacen las dos condiciones.

Resolvamos $2x + 1 < 5$ o $3x - 6 \geq 6$. La primera rama da $x < 2$ y la segunda da $x \geq 4$. Por tanto, $S = (-\infty, 2) \cup [4, \infty)$.

Si las alternativas fueran $x < 3$ o $x \geq 1$, su unión sería $\mathbb{R}$. Todo real menor que 3 cumple la primera; los restantes son mayores o iguales que 3 y también mayores o iguales que 1, por lo que cumplen la segunda. El solapamiento de las ramas no crea una restricción adicional.

Alcance de los enlaces. Cuando un problema combina «y» con «o», los paréntesis determinan qué condiciones se agrupan. Compare «$(x < 0$ o $x > 3)$ y $x \leq 5$» con «$x < 0$ o $(x > 3$ y $x \leq 5)$».

En este ejemplo ambos conjuntos coinciden, porque todos los valores con $x < 0$ ya cumplen $x \leq 5$. Esa coincidencia depende del caso. Para las condiciones «$(x < 4$ o $x > 6)$ y $x \geq 2$», la solución es $[2, 4) \cup (6, \infty)$. Para «$x < 4$ o $(x > 6$ y $x \geq 2)$», la solución es $(-\infty, 4) \cup (6, \infty)$. El valor 0 pertenece sólo al segundo conjunto.

La expresión de conjuntos permite conservar el alcance: en el primer caso calculamos $(S_P \cup S_Q) \cap S_R$; en el segundo, $S_P \cup (S_Q \cap S_R)$.

Dominio común y restricciones heredadas. En un sistema algebraico ordinario, todas las expresiones deben estar definidas simultáneamente. Primero fijamos el dominio común y después resolvemos cada condición dentro de él.

Suponga que el dominio común ya conocido es $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y que las condiciones son $x \geq 0$ y $x \leq 2$. Su intersección dentro de D es $[0, 1) \cup (1, 2]$. La condición no estricta en 2 permite incluirlo; ninguna de las dos condiciones reinserta el punto 1.

Para una disyunción también debe declararse la convención de dominio. Aquí interpretamos sus ramas sobre un dominio efectivo común, donde todas las expresiones escritas tienen significado. Si se desea unir problemas definidos sobre dominios distintos, se describen primero sus conjuntos solución respectivos y luego se toma su unión; no se evalúa una expresión indefinida como si fuera falsa.

Prueba de estrés: resolver cada condición no termina el sistema. Una resolución defectuosa obtiene $x \geq 2$ de una condición y $x < 4$ de otra, y declara $[2, \infty) \cup (-\infty, 4) = \mathbb{R}$ como solución del sistema. Las resoluciones individuales son correctas; la ruptura ocurre al usar unión donde se exige intersección.

El valor 10 pertenece a la unión, pero incumple $x < 4$. La reparación consiste en conservar la simultaneidad: $[2, \infty) \cap (-\infty, 4) = [2, 4)$. Una prueba puntual refuta la respuesta equivocada; la intersección justificada demuestra la respuesta completa.

Recuperación breve. a) Resuelva $1 < 3x - 2 \leq 10$.

b) Resuelva el sistema $2 - x \geq 0$ y $2x + 1 > 3$.

c) Resuelva $x \leq -1$ o $x > 2$, y explique qué cambiaría si se reemplazara «o» por «y».

Respuesta razonada. En **a)** sumamos 2 en los tres miembros y dividimos por $3 > 0$: $3 < 3x \leq 12$, luego $1 < x \leq 4$. La solución es $(1, 4]$.

En **b)** la primera condición da $-x \geq -2$, es decir $x \leq 2$; la segunda da $2x > 2$, es decir $x > 1$. La intersección es $(1, 2]$. En 2 ambas comparaciones son verdaderas; en 1 la segunda es falsa.

En **c)** la disyunción da $(-\infty, -1] \cup (2, \infty)$. Con «y» se requerirían las dos condiciones simultáneamente, pero ningún real puede ser a la vez menor o igual que -1 y mayor que 2. La solución sería $\varnothing$.

Qué debemos conservar de esta sección. Las condiciones simultáneas se resuelven mediante intersección; las alternativas, mediante unión. Una doble desigualdad abrevia dos comparaciones que deben conservarse en cada operación. La resolución completa mantiene el alcance de los enlaces, el dominio común y la pertenencia de cada frontera a todas las condiciones exigidas.

22.7. Valor absoluto y distancia

La condición $|x - 2| < 3$ describe los puntos cuya distancia a 2 es menor que 3. Sobre la recta, desplazarse tres unidades desde 2 lleva a -1 y 5. Los puntos buscados quedan entre

esas fronteras y ninguna pertenece a la solución. La interpretación geométrica sugiere $(-1, 5)$; vamos a justificarla algebraicamente y a controlar qué ocurre cuando cambia la comparación.

Recuperar la definición. Para un real u, $|u| = u$ si $u \geq 0$ y $|u| = -u$ si $u < 0$. En ambos casos $|u| \geq 0$. Por eso comparar un valor absoluto con un número negativo produce respuestas distintas de las habituales y debe examinarse antes de abrir ramas.

Además, $|x - a|$ es la distancia entre x y a. Una cota superior sobre esa distancia selecciona la zona próxima a a; una cota inferior selecciona puntos exteriores.

Cotas superiores positivas. Sea $c > 0$. La equivalencia $|u| \leq c \iff -c \leq u \leq c$ puede demostrarse por el signo de u.

Si $u \geq 0$, la condición $|u| \leq c$ significa $u \leq c$. La desigualdad inferior $-c \leq u$ ya se cumple porque $-c < 0 \leq u$. Si $u < 0$, la condición significa $-u \leq c$, equivalente a $u \geq -c$ al multiplicar por -1. La desigualdad superior $u \leq c$ ya se cumple. Así, en ambos casos aparecen las dos cotas. Para la vuelta, las mismas divisiones por casos muestran que esas cotas implican $|u| \leq c$.

Con desigualdades estrictas se obtiene $|u| < c \iff -c < u < c$. Sustituir u por una expresión $A(x)$ conserva estas equivalencias en el dominio donde A esté definida.

Por ejemplo, $|2x - 1| \leq 5$ equivale a $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$. Sumando 1 y dividiendo por $2 > 0$, resulta $-2 \leq x \leq 3$. La solución es $[-2, 3]$. En ambos extremos el valor absoluto vale 5, por lo que la comparación no estricta los admite.

Cotas inferiores positivas. Para $c > 0$, la condición $|u| > c$ exige que u quede a más de c unidades del origen. Su solución se distribuye en dos ramas: $u < -c$ o $u > c$.

Algebraicamente, si $u \geq 0$, queda $u > c$; si $u < 0$, queda $-u > c$, equivalente a $u < -c$. Cada rama tiene el signo requerido, de modo que también prueba la vuelta. Con inclusión de la igualdad, $|u| \geq c \iff (u \leq -c \text{ o } u \geq c)$.

Considere $|3x + 2| > 4$. Las ramas son $3x + 2 < -4$ o $3x + 2 > 4$. Dividir los despejes correspondientes por $3 > 0$ da $x < -2$ o $x > 2/3$. Por tanto, $S = (-\infty, -2) \cup (2/3, \infty)$.

Usar intersección en este ejemplo exigiría que una misma cantidad fuera menor que -4 y mayor que 4. El error produciría un conjunto vacío donde existen dos semirrectas.

Qué ocurre cuando la cota es cero o negativa. La no negatividad decide estos regímenes sin aplicar una receta de dos ramas.

Comparación	Si $c = 0$	Si $c < 0$
$\lvert A(x)\rvert < c$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\lvert A(x)\rvert \leq c$	ceros de A en el dominio	$\varnothing$
$\lvert A(x)\rvert > c$	valores del dominio con $A(x) \neq 0$	todo el dominio
$\lvert A(x)\rvert \geq c$	todo el dominio	todo el dominio

En la fila $|A(x)| \leq 0$, sólo puede ocurrir $|A(x)| = 0$, equivalente a $A(x) = 0$. En la fila estricta $|A(x)| > 0$, se excluyen esos ceros. Las respuestas «todo el dominio» conservan cualquier restricción previa de la expresión A.

Así, $|x - 4| \leq 0$ tiene solución $\{4\}$, mientras que $|x - 4| < 0$ no tiene soluciones. Para $|1/(x - 1)| > -2$, toda comparación definida es verdadera, pero $x = 1$ continúa excluido: $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Dos valores absolutos. La comparación $|A(x)| \leq |B(x)|$ tiene ambos miembros no negativos. Para $r, s \geq 0$, $r \leq s$ equivale a $r^2 \leq s^2$: si $r \leq s$, entonces $(s - r)(s + r) \geq 0$; si $r > s$, ambos factores de $(r - s)(r + s)$ son positivos y $r^2 > s^2$. Por tanto, la comparación equivale a $A(x)^2 \leq B(x)^2$.

Por ejemplo, $|x-1| \le |x+2|$ equivale a $(x-1)^2 \le (x+2)^2$. Expandir y cancelar x^2 da $-2x+1 \le 4x+4$, de donde $x \ge -1/2$. Geométricamente, $-1/2$ es el punto medio entre 1 y -2; hacia su derecha los puntos están al menos tan cerca de 1 como de -2.

El argumento de cuadrados necesita la no negatividad de ambos miembros. Para expresiones de signo libre, elevar al cuadrado puede cambiar la comparación.

Prueba de estrés. La afirmación $|x-2| \ge 3 \iff -3 \le x-2 \le 3$ es falsa. El segundo miembro describe distancia menor o igual que 3; $x=2$ lo satisface y no satisface el primero. La reparación es $x-2 \le -3$ o $x-2 \ge 3$, es decir $x \le -1$ o $x \ge 5$.

Recuperación breve. a) Resuelva $|x+1| < 2$.

b) Resuelva $|2x-3| \ge 1$.

c) Resuelva $|x+2| > 0$.

Respuesta razonada. En **a)**, $-2 < x+1 < 2$ equivale a $-3 < x < 1$, de modo que $S = (-3,1)$. En **b)**, $2x-3 \le -1$ o $2x-3 \ge 1$ da $x \le 1$ o $x \ge 2$; $S = (-\infty,1] \cup [2,\infty)$. En **c)** se admiten todos los reales excepto el cero de $x+2$, por lo que $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Qué debemos conservar de esta sección. Una cota superior positiva de distancia produce dos condiciones simultáneas; una cota inferior positiva produce alternativas exteriores. Las cotas cero y negativas se deciden mediante $|A| \ge 0$. El dominio se conserva al abrir las ramas y el signo de la comparación decide si las fronteras se incluyen.

22.8. Cuadráticas: de ecuación a análisis de signos

La ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ localiza dos puntos, -2 y 3. La inequación $x^2 - x - 6 \le 0$ pregunta también por todos los puntos entre las raíces y fuera de ellas. Necesitamos determinar en qué regiones el polinomio es negativo, positivo o cero.

Llevar la comparación a cero. Una comparación $P(x) \le Q(x)$ equivale a $P(x) - Q(x) \le 0$ porque restamos la misma expresión definida en ambos miembros. Para una cuadrática, obtenemos $ax^2 + bx + c \lhd 0$, con $a \neq 0$.

Esta forma concentra la pregunta en el signo de una expresión. La ecuación frontera $ax^2 + bx + c = 0$ localiza sus ceros, pero todavía no decide dónde se cumple la inequación.

Dos factores lineales. Por C19, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Si $x < -2$, ambos factores son negativos y el producto es positivo. Si $-2 < x < 3$, el primer factor es positivo y el segundo negativo, de modo que el producto es negativo. Si $x > 3$, ambos son positivos.

Región	$x+2$	$x-3$	Producto
$(-\infty,-2)$	$-$	$-$	$+$
$(-2,3)$	$+$	$-$	$-$
$(3,\infty)$	$+$	$+$	$+$

Cada fila representa todos los puntos del intervalo. El signo de un factor lineal $x-r$ queda determinado por estar a la izquierda o a la derecha de r, así que no necesitamos comprobar infinitos valores por separado.

La condición ≤ 0 admite la región negativa y los ceros. Por tanto, $S = [-2,3]$. Para < 0, la solución sería $(-2,3)$; para > 0, las regiones exteriores abiertas; para ≥ 0, las exteriores con las raíces incluidas.

Forma general con dos raíces distintas. Si $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, con $r_1 < r_2$, el producto de los factores lineales es positivo fuera de $[r_1, r_2]$ y negativo dentro. Si $a > 0$, ese signo se conserva; si $a < 0$, se invierte. La orientación depende de ese coeficiente, no sólo de las raíces.

Por ejemplo, $-2(x+1)(x-4) > 0$ equivale a $(x+1)(x-4) < 0$ al dividir por -2. La solución es $(-1, 4)$. La prueba de signo revela por qué escoger automáticamente «los exteriores» sería incorrecto.

Una raíz doble. La cuadrática $(x - 2)^2$ es positiva para $x \neq 2$ y cero en 2. Como un cuadrado nunca es negativo, $(x - 2)^2 < 0$ no tiene soluciones, mientras que $(x - 2)^2 \leq 0$ tiene solución $\{2\}$.

El factor cuadrado mantiene el signo positivo a ambos lados de su cero. Con coeficiente negativo, $-3(x-2)^2$ es no positivo en toda la recta y sólo se anula en 2. Por tanto, $-3(x-2)^2 \geq 0$ tiene solución $\{2\}$ y $-3(x - 2)^2 < 0$ tiene solución $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ausencia de raíces reales. Para una cuadrática general, completar cuadrados permite estudiar el signo sin usar gráficas ni cálculo:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta < 0$, la cantidad $-\Delta/(4a^2)$ es positiva. El corchete es entonces estrictamente positivo para todo real, porque suma un cuadrado no negativo y una constante positiva. El signo de la cuadrática coincide siempre con el de a.

Por ejemplo, $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ para todo real. Así, $x^2 + 2x + 2 \leq 0$ tiene solución vacía y $x^2 + 2x + 2 > 0$ tiene solución $\mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$, la forma completada es un múltiplo de un cuadrado y se aplica el caso anterior. Si $\Delta > 0$, la fórmula cuadrática de C21 da dos raíces distintas y permite regresar al análisis de factores. La clasificación por discriminante organiza tres mecanismos de signo diferentes.

Prueba de estrés: una raíz no siempre cambia el signo. La regla «el signo se invierte cada vez que atravesamos una raíz» falla para $(x-1)^2$. En $x = 0$ y $x = 2$ la expresión vale 1. La raíz es una frontera donde la expresión se anula, pero los dos intervalos vecinos tienen el mismo signo. La justificación por factores distingue este caso sin necesidad de imponer una regla adicional.

Recuperación breve. **a)** Resuelva $(x - 1)(x - 5) \geq 0$.

b) Resuelva $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

c) Resuelva $2x^2 + 2 < 0$.

Respuesta razonada. En **a)** el producto es positivo fuera de las raíces y negativo entre ellas; al admitir igualdad, $S = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$. En **b)** la expresión es $-(x - 2)^2$, no positiva, así que sólo puede ser no negativa donde se anula: $S = \{2\}$. En **c)**, $2x^2 + 2 \geq 2 > 0$ para todo real; $S = \varnothing$.

Qué debemos conservar de esta sección. Los ceros dividen el problema en regiones, y los signos de los factores deciden cuáles seleccionar. Dos raíces distintas, una raíz doble y ausencia de raíces producen comportamientos diferentes. Completar cuadrados y el discriminante permiten justificar esa clasificación; al finalizar, se comprueban la relación de orden y cada extremo.

22.9. Productos polinómicos y tablas de signos

La técnica de §22.8 se extiende a productos con varios factores. Considere $P(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$. Sus ceros son -2, 1 y 3, pero el factor cuadrado tiene un papel distinto de los dos factores lineales.

Por qué funciona una tabla. Para $x \neq r$, el factor $x - r$ es negativo si $x < r$ y positivo si $x > r$. Una potencia par $(x - r)^{2k}$, con k entero positivo, es positiva a ambos lados de r; una potencia impar conserva el signo de $x - r$. En $x = r$, ambas se anulan.

Ordenar los ceros reales de los factores permite dividir la recta en intervalos donde cada signo es fijo. El producto tiene entonces un signo fijo, obtenido por las reglas de multiplicación de positivos y negativos. Éste es el fundamento de la tabla; elegir un punto de prueba por intervalo sólo abrevia una constancia que debe estar justificada.

Un factor como $x^2 + 1$ es positivo en todo $\mathbb{R}$ y no introduce puntos críticos. Un factor $-(x^2 + 1)$ invierte el signo global. Si aparecen factores cuya constancia no está justificada por herramientas conocidas, una colección de puntos de prueba aislados no sustituye la demostración.

Un producto con un factor repetido. Para el producto inicial:

Región	$x + 2$	$(x - 1)^2$	$x - 3$	$P(x)$
$(-\infty, -2)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$(-2, 1)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(1, 3)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(3, \infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

El signo cambia al atravesar -2 y 3, pero permanece negativo a ambos lados de 1. Allí el producto se anula. Para $P(x) < 0$, la solución es $(-2, 1) \cup (1, 3)$; para $P(x) \leq 0$, los tres ceros se admiten y las regiones se reúnen en $[-2, 3]$.

El cero interior 1 no puede omitirse en la inequación estricta. Aunque no cambie el signo, sí puede cambiar la pertenencia al conjunto solución.

Coeficientes y factores siempre positivos. Resolvamos $-2(x + 1)^3(x - 2)^2(x^2 + 1) \geq 0$. Los factores $(x - 2)^2$ y $x^2 + 1$ son positivos fuera de 2, y el segundo también lo es en 2. Para $x \neq 2$, el signo total es el opuesto del signo de $x + 1$: positivo si $x < -1$ y negativo si $x > -1$. Los ceros son -1 y 2.

Se admiten todos los valores $x \leq -1$ y también el cero aislado 2. Por tanto, $S = (-\infty, -1] \cup \{2\}$. Un conjunto solución puede contener una región y un punto aislado; la notación de intervalos debe conservar ambas partes.

Una tabla es una representación del argumento. Podemos marcar signos con $+$ y $-$, pero cada marca debe poder traducirse a una afirmación. En la fila $x < -2$ del primer ejemplo, $x + 2 < 0$ y $x - 3 < 0$; su producto es positivo y el cuadrado es positivo porque $x \neq 1$. El razonamiento demuestra el signo para todo el intervalo, sin usar continuidad.

Para un producto factorizado con exponentes enteros positivos, el número de factores negativos contados con sus exponentes determina el signo: un número par da positivo y uno impar da negativo. Este conteo deriva de $(-1)^{2k} = 1$ y $(-1)^{2k+1} = -1$, ya estudiados en C18.

Prueba de estrés: conservar un cero aislado. Si alguien resuelve $(x - 2)^2(x + 1) \leq 0$ y responde $(-\infty, -1]$, pierde $x = 2$, donde el producto vale cero. Para $x \neq 2$, el cuadrado es positivo y exige $x + 1 \leq 0$; en 2 hay que evaluar por separado. La solución completa es $(-\infty, -1] \cup \{2\}$.

Dividir por el cuadrado sin registrar su cero elimina esa solución. La reparación usa dos casos, no una verificación tardía de los valores que quedaron.

Recuperación breve. a) Resuelva $(x+3)(x-2)^2 > 0$.

b) Resuelva $(x+3)(x-2)^2 \geq 0$.

Respuesta razonada. Fuera de 2, el cuadrado es positivo y el producto tiene el signo de $x+3$. En **a)** se requiere $x > -3$ y se excluye 2 porque allí el producto es cero: $S = (-3, 2) \cup (2, \infty)$. En **b)** se incluye -3 y también 2; $S = [-3, \infty)$.

Qué debemos conservar de esta sección. Una tabla registra signos constantes justificados por los factores. La paridad de un exponente decide si el signo cambia al atravesar su cero, mientras que la comparación estricta o no estricta decide si ese cero pertenece a la solución. Un cero que no cambia el signo todavía puede separar regiones o aportar un punto aislado.

Ceros y puntos excluidos no tienen la misma función. En $(x-a)^2/(x-b)$, con $a \neq b$, el cuadrado no cambia signo al atravesar a, pero allí el cociente vale cero. El punto b nunca está definido. Para ≥ 0 se incluyen los $x > b$ y además a si $a < b$; para > 0 se exige $x > b$ y se retira a si cae en esa región. **Control resuelto:** si $a = b$, la expresión se simplifica a $x - a$ solamente en $x \neq a$. La inequación ≥ 0 da (a, ∞), no $[a, \infty)$. Cuando coinciden factores, la escritura reducida puede cambiar su lectura local; las exclusiones originales permanecen. Paridad, signo y pertenencia al dominio son tres controles distintos.

22.10. Inequaciones racionales

Para resolver $(x-2)/(x+1) \geq 0$ debemos saber dónde numerador y denominador tienen signos iguales, o dónde el numerador se anula con denominador no nulo. El punto -1 y el punto 2 organizan la recta, pero sólo el segundo puede producir una igualdad admisible.

Dominio antes de transformar. Una inequación $P(x)/Q(x) \triangleleft 0$ se interpreta donde $Q(x) \neq 0$. Para el ejemplo, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. El numerador se anula en 2.

Región	$x-2$	$x+1$	Cociente
$(-\infty, -1)$	$-$	$-$	$+$
$(-1, 2)$	$-$	$+$	$-$
$(2, \infty)$	$+$	$+$	$+$

La tabla tiene el mismo fundamento que para productos: el signo de cada factor es fijo en cada intervalo. Dividir por un positivo conserva el signo del numerador y dividir por un negativo lo invierte. El cociente es no negativo en las regiones exteriores; se incluye 2 y se excluye -1. Así, $S = (-\infty, -1) \cup [2, \infty)$.

Un **polo**, en los ejemplos racionales sin cancelación, es un punto donde el denominador se anula y el cociente no está definido. Para resolver basta distinguir «cero admisible» y «punto excluido»; no necesitamos estudiar límites ni comportamientos analíticos.

Una comparación con otro miembro. Resolvamos $(x+1)/(x-2) \leq 2$. El dominio es $x \neq 2$. Restar 2 conserva la comparación y reunir los términos da $\frac{x+1}{x-2} - 2 = \frac{5-x}{x-2}$. Los puntos críticos son 2 y 5. Si $x < 2$, el numerador es positivo y el denominador negativo: el cociente es negativo. Si $2 < x < 5$, ambos son positivos. Si $x > 5$, el numerador es negativo y el denominador positivo. Para ≤ 0, se selecciona $(-\infty, 2) \cup [5, \infty)$.

Multiplicar directamente por $x-2$ sin separar su signo perdería la región $x < 2$, donde la comparación debe invertirse. Llevar todo a un miembro evita esa bifurcación operativa.

Cancelaciones y agujeros del dominio. Considere $(x^2-1)/(x-1)>0$. El dominio original excluye 1. Dentro de él, factorizar y cancelar $x-1$ transforma el cociente en $x+1$. La condición equivalente es $x+1>0$ con $x\neq 1$, de modo que $S=(-1,1)\cup(1,\infty)$.

La forma simplificada está definida en 1, pero la expresión original no. Ese punto cancelado es un agujero de dominio y no debe confundirse con un cero del cociente ni con un polo sin cancelación.

Para una comparación no estricta, la exclusión permanece. La inequación $(x^2-1)/(x-1)\geq 0$ tiene solución $[-1,1)\cup(1,\infty)$. El punto -1 sí pertenece porque anula el numerador con denominador no nulo.

Numerador y denominador con factores repetidos. En $(x-1)^2/[(x+2)(x-3)]\leq 0$, el dominio excluye -2 y 3. Fuera de 1, el numerador es positivo. El denominador es negativo en $(-2,3)$ y positivo en las regiones exteriores. Por tanto, el cociente es negativo en $(-2,1)\cup(1,3)$ y cero en 1. Al incluir ese cero, $S=(-2,3)$.

Si el denominador contuviera $(x-1)^2$, ese punto se excluiría aunque el signo no cambiara al atravesarlo. La paridad controla el signo; la ubicación en numerador o denominador controla el dominio y la posible igualdad.

Multiplicar por un cuadrado positivo. Existe una segunda ruta útil. En el dominio $Q(x)\neq 0$, se cumple $Q(x)^2>0$. Multiplicar por ese cuadrado conserva la dirección:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0 \iff P(x)Q(x)\leq 0, \qquad Q(x)\neq 0.$$

La identidad $Q^2(P/Q)=PQ$ justifica la transformación. La restricción escrita al lado es indispensable: si se olvidara, los ceros de Q parecerían soluciones de la inequación polinómica.

Para $(x-2)/(x+1)\geq 0$, la ruta produce $(x-2)(x+1)\geq 0$ con $x\neq -1$. El producto selecciona $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$ y el dominio retira -1, recuperando la respuesta de la tabla.

Prueba de estrés. Una resolución defectuosa de $1/(x-1)\leq 0$ multiplica por $x-1$ y obtiene $1\leq 0$, declarando solución vacía. La transformación conserva la dirección sólo en $x>1$; en $x<1$ debe invertirla. El numerador es positivo, así que el cociente es negativo para $x<1$ y positivo para $x>1$. La solución correcta es $(-\infty,1)$.

Recuperación breve. a) Resuelva $(x+2)/(x-4)>0$.

b) Resuelva $(x^2-4)/(x-2)\leq 0$.

Respuesta razonada. En **a)** se excluye 4 por dominio y -2 por la comparación estricta. El cociente es positivo cuando sus dos factores tienen el mismo signo: $S=(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$. En **b)** el dominio excluye 2; cancelar sobre ese dominio deja $x+2\leq 0$, es decir $x\leq -2$. Ningún valor de esa semirrecta es el excluido 2, de modo que $S=(-\infty,-2]$.

Qué debemos conservar de esta sección. Las inequaciones racionales conservan el dominio original durante toda simplificación. Los ceros de numerador pueden satisfacer una comparación no estricta; los ceros de denominador nunca se incluyen. Llevar la comparación a cero y estudiar los signos evita multiplicar por un factor desconocido. Si se usa un cuadrado positivo, su positividad se justifica dentro del dominio y las exclusiones se mantienen.

22.11. Transformaciones y formas estratégicas

Una expresión puede admitir varias escrituras correctas, pero no todas dejan ver con igual claridad su signo. Para resolver $(x-1)^2-9\geq 0$, expandir produce $x^2-2x-8\geq 0$; factorizar como diferencia de cuadrados produce $(x-4)(x+2)\geq 0$. La segunda forma muestra directamente las fronteras -2 y 4 y permite aplicar §22.8.

Elegir una forma útil es parte del razonamiento. Las transformaciones deben conservar el conjunto solución y reducir la dificultad que todavía queda.

Llevar todo a un miembro. Comparar $E(x)$ con $F(x)$ equivale a comparar $E(x)-F(x)$ con cero, dentro del dominio común. Esa resta permite reunir los signos en una sola expresión. Para $x^2+1 \leq 3x-1$, obtenemos $x^2-3x+2 \leq 0$, después $(x-1)(x-2) \leq 0$, y finalmente $S=[1,2]$.

La expansión fue útil para reunir términos, y la factorización posterior fue útil para decidir signos. Ninguna forma es obligatoria por sí misma: su función cambia durante la resolución.

Conservar factores visibles. Para $(x+1)(x-2)^2(x-5) \leq 0$, expandir un polinomio de grado cuatro ocultaría información que ya tenemos. Fuera de 2, el cuadrado es positivo y los dos factores lineales restantes dan signo no positivo en $[-1,5]$. El cero 2 está dentro de esa región y se admite, de modo que $S=[-1,5]$.

Si la comparación fuera estricta, habría que retirar -1, 2 y 5: $S=(-1,2)\cup(2,5)$. La forma factorizada evita volver a buscar esos ceros después de expandir.

Normalizar un signo global. Para $-(x-3)(x+4) \leq 0$, multiplicar por -1 invierte la comparación y deja $(x-3)(x+4) \geq 0$. Su solución es $(-\infty,-4]\cup[3,\infty)$.

También podríamos mantener el signo negativo en una tabla. Ambas rutas son válidas. Normalizarlo al comienzo reduce una operación en cada fila, siempre que se registre la inversión de la desigualdad.

Un denominador común permite comparar. Resolvamos $1/(x-1) \geq 1/(x+1)$. El dominio excluye -1 y 1. Restar el segundo miembro y reunir las fracciones da $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$. El numerador es positivo y nunca se anula. Se requiere entonces denominador positivo, que ocurre para $x<-1$ o $x>1$. La solución es $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. La igualdad nunca se alcanza, aunque la comparación escrita sea no estricta.

Multiplicar por $(x-1)(x+1)$ sin controlar su signo sería inseguro. Reunir las fracciones permite localizar esa misma información de manera explícita.

Comparar rutas completas. Para $(x-2)/(x+1) \leq 1$, la resta produce $-3/(x+1) \leq 0$ con $x \neq -1$. Como el numerador es negativo, el denominador debe ser positivo: $x>-1$. No hay igualdad porque el numerador nunca es cero. Así, $S=(-1,\infty)$.

Una segunda ruta separa casos. Si $x>-1$, el denominador es positivo y multiplicar conserva la dirección: $x-2 \leq x+1$, verdadera. Si $x<-1$, el denominador es negativo y la dirección se invierte: $x-2 \geq x+1$, falsa. Se obtiene la misma semirrecta.

La primera ruta concentra el signo en una fracción; la segunda hace visible por qué falla la multiplicación indiscriminada. Elegir una depende de la dificultad que queremos controlar.

Una cota puede ahorrar cálculos. La inequación $(x-1)^2+2 \leq 0$ se decide sin buscar raíces: el cuadrado es no negativo y la expresión es al menos 2. La solución es vacía.

Para $(x-1)^2+2 \geq 0$, esa misma cota demuestra que todo real es solución. Una técnica más extensa no añade información cuando una propiedad global ya responde a la comparación.

Prueba de estrés: sumar inequaciones no conserva toda la información. De $x \geq 0$ y $-x \geq 0$ podemos sumar y obtener $0 \geq 0$. La suma es una consecuencia válida, pero no una condición equivalente al sistema: el sistema sólo admite $x=0$, mientras que la comparación numérica es verdadera para todo real.

La fuerza lógica importa también en la elección de método. Una consecuencia necesaria puede servir como filtro, pero la reconstrucción debe conservar las condiciones que se perdieron.

Recuperación breve. a) Elija una forma útil para resolver $(x+2)^2 - 16 > 0$.

b) Resuelva $x^2 + 3 \leq 0$ sin fórmula cuadrática.

c) Resuelva $1/(x-2) - 1/(x+2) > 0$.

Respuesta razonada. En **a)** la diferencia de cuadrados es $(x-2)(x+6) > 0$, cuya solución es $(-\infty, -6) \cup (2, \infty)$. En **b)** la expresión es al menos $3 > 0$, así que $S = \varnothing$. En **c)** el dominio excluye ± 2 y la diferencia es $4/[(x-2)(x+2)]$. Para que sea positiva, el denominador debe ser positivo: $S = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Qué debemos conservar de esta sección. La forma útil revela el dato que falta: una factorización muestra ceros y signos, un denominador común reúne comparaciones y una forma cuadrática puede mostrar una cota global. La economía de cálculo es válida cuando conserva dominio, orientación y fuerza lógica de las transformaciones.

22.12. Sustituciones y reconstrucción de preimágenes

La inequación $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$ contiene una cuadrática en x^2. La sustitución $u = x^2$ permite resolver esa estructura conocida, pero también introduce una condición: $u \geq 0$. Al terminar debemos regresar a todos los valores reales de x que producen los valores admitidos de u.

La variable auxiliar tiene una imagen. Sea $\phi : D \to \mathbb{R}$ una función conocida y sea $u = \phi(x)$. Si la inequación depende de x mediante $\phi(x)$, se puede estudiar primero en u, restringido a $\phi(D)$. Si S_u es el conjunto auxiliar válido, el conjunto original es

$$S_x = \{x \in D : \phi(x) \in S_u\} = \phi^{-1}(S_u).$$

La escritura $\phi^{-1}(S_u)$ denota preimagen, como en C9; no exige que ϕ tenga función inversa. Esta distinción permite manejar sustituciones como $u = x^2$, que identifican dos valores opuestos de x.

Una bicuadrada. Para el ejemplo inicial, $u^2 - 5u + 4 = (u-1)(u-4)$. La inequación auxiliar da $1 \leq u \leq 4$, compatible con $u \geq 0$.

La vuelta exige $1 \leq x^2 \leq 4$. Por la no negatividad de $|x|$ y la comparación de cuadrados, equivale a $1 \leq |x| \leq 2$. La cota inferior produce $x \leq -1$ o $x \geq 1$; la superior produce $-2 \leq x \leq 2$. Al intersectarlas, $S_x = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

Los cuatro extremos hacen cero el polinomio original. Un valor entre -1 y 1 tiene $x^2 < 1$ y no satisface la condición auxiliar; un valor con $|x| > 2$ tiene $x^2 > 4$ y tampoco la satisface. La reconstrucción cubre las dos ramas y demuestra las exclusiones.

Restricciones del problema auxiliar. En $x^4 + 3x^2 + 2 \leq 0$, la sustitución produce $(u+1)(u+2) \leq 0$, cuya solución formal es $[-2, -1]$. Ninguno de esos valores pertenece a la imagen $u = x^2 \geq 0$. Por tanto, el conjunto auxiliar admisible es vacío y la inequación original no tiene soluciones.

Declarar $x \in [-2, -1]$ sería confundir variables; buscar raíces cuadradas de valores negativos también ignoraría la imagen real de la sustitución.

Una sustitución trasladada. Para $[(x-3)^2 - 1][(x-3)^2 - 9] > 0$, tomamos $u = (x-3)^2 \geq 0$. La condición $(u-1)(u-9) > 0$ da $u < 1$ o $u > 9$. Tras intersectar con $[0, \infty)$, queda $0 \leq u < 1$ o $u > 9$.

La primera rama equivale a $|x-3| < 1$, es decir $2 < x < 4$. La segunda equivale a $|x-3| > 3$, es decir $x < 0$ o $x > 6$. La solución completa es $(-\infty, 0) \cup (2, 4) \cup (6, \infty)$.

La reconstrucción es una unión porque basta pertenecer a una rama auxiliar. Dentro de cada rama pueden aparecer intersecciones al imponer dos cotas.

Sustitución con exclusiones heredadas. Resolvamos $(x^4-1)/(x^2-1) \le 0$. El dominio original excluye $x = \pm 1$. Con $u = x^2$ necesitamos $u \ge 0$ y $u \ne 1$. La fracción auxiliar $(u^2-1)/(u-1)$ se simplifica a $u+1$ sobre ese dominio.

Como $u + 1 \ge 1$, nunca es no positiva. La solución es vacía. La ausencia de soluciones no autoriza borrar las exclusiones de la explicación: ellas son las que hacen válida la cancelación.

Prueba de estrés: perder una rama. Una resolución de $x^4 - 5x^2 + 4 \le 0$ obtiene $u \in [1, 4]$ y responde $x \in [1, 2]$. La primera ruptura aparece en la vuelta: tomar sólo la raíz principal omite los valores negativos cuyo cuadrado también está en $[1, 4]$.

El valor $-3/2$ es un contraejemplo a esa respuesta incompleta. La reparación consiste en reconstruir la preimagen completa, $[-2, -1] \cup [1, 2]$.

Recuperación breve. Resuelva $x^4 - 10x^2 + 9 < 0$ y después resuélvala con la restricción adicional $x \ge 0$.

Respuesta razonada. Con $u = x^2 \ge 0$, queda $(u-1)(u-9) < 0$, de modo que $1 < u < 9$. La vuelta da $1 < |x| < 3$, cuya solución es $(-3, -1) \cup (1, 3)$. Con $x \ge 0$, se intersecta ese conjunto con $[0, \infty)$ y queda $(1, 3)$.

Qué debemos conservar de esta sección. Una sustitución conserva la relación entre dos variables y debe registrar la imagen de la auxiliar. Resolver en u termina sólo al reconstruir su preimagen en el dominio original. La no inyectividad puede producir varias ramas, y una restricción sobre x se conserva hasta la respuesta final.

Reconstruir una preimagen no exige una función inversa. Si $u = (x-h)^2$, su imagen real es $[0, \infty)$. Una solución auxiliar $u \in [\alpha, \beta]$, con $0 < \alpha \le \beta$, se reconstruye como $\sqrt{\alpha} \le |x-h| \le \sqrt{\beta}$: hay dos intervalos, no uno. **Control resuelto:** $u \in [-2, 4]$ se intersecta primero con la imagen y queda $[0, 4]$; su preimagen es $[h-2, h+2]$. No se toman raíces reales de los extremos negativos. Si el dominio original además exige $x > h$, se intersecta al final y queda $(h, h+2]$. Cada restricción participa en la misma reconstrucción. Escribir $\phi^{-1}(S)$ nombra un conjunto de preimágenes y no presupone que ϕ sea inyectiva.

22.13. Parámetros y familias de conjuntos solución

En la familia $(x-a)(x-1) \le 0$, el parámetro a permanece fijo mientras varía x. Las dos fronteras son a y 1; su orden cambia al pasar de $a < 1$ a $a > 1$, y coinciden cuando $a = 1$. La resolución debe describir una familia de conjuntos, no un intervalo escrito con extremos posiblemente invertidos.

Identificar qué puede cambiar. Un valor del parámetro requiere un caso separado cuando cambia una condición relevante: el signo de un coeficiente, la coincidencia de fronteras, el dominio o la forma de la solución. Separar casos por costumbre puede aumentar cálculos sin mejorar la clasificación.

Para la familia inicial, el producto tiene coeficiente positivo y es no positivo entre las dos raíces. Así:

$$S(a) = \begin{cases} [a, 1], & a < 1, \\ \{1\}, & a = 1, \\ [1, a], & a > 1. \end{cases}$$

En el caso coincidente, la expresión es $(x-1)^2$ y sólo se admite su cero. La fórmula equivalente $[\min(a, 1), \max(a, 1)]$ resume la familia, pero la clasificación explica el mecanismo.

Cambiar el signo de un coeficiente. Para $a(x-2) \geq 0$, si $a > 0$ dividimos conservando la dirección y obtenemos $[2, \infty)$. Si $a < 0$, dividimos invirtiendo y obtenemos $(-\infty, 2]$. Si $a = 0$, la comparación $0 \geq 0$ es verdadera para todo real y $S(0) = \mathbb{R}$.

El caso $a = 0$ no se obtiene tomando un valor en una fórmula con división por a. Se estudia en la expresión original.

Una frontera que pasa a ser inadmisible. Estudie $(x - a)/(x - 1) \geq 0$. El dominio excluye siempre 1, mientras que el cero de numerador es a cuando $a \neq 1$.

Si $a < 1$, ambos signos coinciden para $x \leq a$ y para $x > 1$, con el cero a incluido. Así, $S(a) = (-\infty, a] \cup (1, \infty)$. Si $a > 1$, coinciden para $x < 1$ y para $x \geq a$, y $S(a) = (-\infty, 1) \cup [a, \infty)$.

Si $a = 1$, el cociente vale 1 en todo su dominio y $S(1) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La coincidencia de fronteras elimina la región negativa, pero conserva el punto excluido.

Parámetro como cota. La familia $(x - 2)^2 \leq a$ tiene tres regímenes. Si $a < 0$, la no negatividad del cuadrado da solución vacía. Si $a = 0$, queda $\{2\}$. Si $a > 0$, la raíz principal $\sqrt{a}$ existe y es positiva; comparar cuadrados de no negativos da $|x - 2| \leq \sqrt{a}$. Por tanto, $S(a) = [2 - \sqrt{a}, 2 + \sqrt{a}]$.

Esta clasificación muestra vacío, punto e intervalo sin introducir análisis. Para cada parámetro, sólo usamos orden, cuadrado y raíz principal.

El dominio también puede depender del parámetro. En $1/(x - a) > 0$, el dominio es $D(a) = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. El numerador es positivo, así que se requiere $x - a > 0$ y $S(a) = (a, \infty)$.

No hace falta separar el signo de a: la diferencia $x - a$ tiene el mismo patrón a ambos lados de la frontera, sea ésta negativa, cero o positiva. Todos los valores del parámetro quedan cubiertos por la misma forma de respuesta.

Prueba de estrés: un intervalo con extremos invertidos. Responder $[a, 1]$ a $(x - a)(x - 1) \leq 0$ para todo a falla cuando $a = 3$. La condición $(x - 3)(x - 1) \leq 0$ tiene solución $[1, 3]$; el valor 2 satisface el producto y no cabe en una escritura $[3, 1]$ entendida mediante $3 \leq x \leq 1$.

Ordenar fronteras es una obligación de la resolución, incluso cuando son expresiones paramétricas.

Recuperación breve. Clasifique $(x + 1)^2 < a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Respuesta razonada. Si $a \leq 0$, el cuadrado no puede ser estrictamente menor que a, y la solución es vacía. Si $a > 0$, la condición equivale a $|x + 1| < \sqrt{a}$, de donde $S(a) = (-1 - \sqrt{a}, -1 + \sqrt{a})$. El caso $a = 0$ también es vacío porque la comparación es estricta.

Qué debemos conservar de esta sección. El parámetro se fija antes de resolver. Los casos se organizan por cambios de signo, coincidencia de fronteras, dominio y degeneración. La respuesta debe ordenar sus extremos y tratar las excepciones en la expresión original, especialmente si un divisor se anula.

22.14. Transferencia: racionales, radicales y varias capas

Resolver una inequación con varias capas exige coordinar los controles anteriores. En $\sqrt{x + 1} \leq x - 1$, la raíz necesita $x \geq -1$, pero la comparación exige además que el miembro derecho sea no negativo. Ese segundo filtro cambia la región donde podemos elevar al cuadrado.

Cuadrar con una raíz principal. Para reales $R \geq 0$ y B, se tiene

$$\sqrt{R} \leq B \iff (B \geq 0 \text{ y } R \leq B^2).$$

Si la comparación original es verdadera, B es al menos la raíz no negativa y por tanto $B \geq 0$; cuadrar conserva el orden entre no negativos. Para la vuelta, $B \geq 0$ y $R \leq B^2$ permiten comparar las raíces principales y obtener $\sqrt{R} \leq \sqrt{B^2} = B$.

Para la comparación estricta, $\sqrt{R} < B$ equivale a $B > 0$ y $R < B^2$. La positividad estricta de B es necesaria porque una raíz no negativa no puede ser menor que cero.

Ejemplo con cota superior. En $\sqrt{x+1} \leq x-1$, el dominio es $x \geq -1$ y la admisibilidad del miembro derecho exige $x \geq 1$. Dentro de esa región, cuadrar es equivalente:

$$x + 1 \leq (x-1)^2 \iff x(x-3) \geq 0.$$

El producto da $x \leq 0$ o $x \geq 3$. Al intersectar con $x \geq 1$, sólo queda $S = [3, \infty)$. En 3 ambos miembros valen 2 y la igualdad es admisible.

La región $x \leq 0$ de la condición cuadrada no satisface el requisito $x - 1 \geq 0$. Verificarla después no sustituye escribir esa condición como parte de la equivalencia.

Cota inferior de una raíz. Para $\sqrt{R} \geq B$ con $R \geq 0$, hay una diferencia: si $B \leq 0$, la condición es automáticamente verdadera. Si $B > 0$, cuadrar es equivalente y exige $R \geq B^2$.

Resolvamos $\sqrt{x+1} > x - 1$. El dominio es $x \geq -1$. Si $x < 1$, el miembro derecho es negativo y la comparación es verdadera. Si $x = 1$, también es verdadera porque $\sqrt{2} > 0$. Si $x > 1$, ambos miembros son positivos y cuadrar da $x+1 > (x-1)^2$, equivalente a $x(x-3) < 0$, de donde $1 < x < 3$ en ese caso. Reuniendo las ramas, $S = [-1, 3)$.

Las soluciones de $\leq$ y $>$ son complementarias dentro de $[-1, \infty)$, como exige la lógica de esas comparaciones. Este control independiente confirma los extremos.

Una raíz en un cociente. Resolvamos $\sqrt{x+2}/(x-1) \leq 0$. El dominio es $x \geq -2$ y $x \neq 1$. La raíz es no negativa, cero sólo en -2 y positiva para $x > -2$.

En -2 el cociente vale cero y se admite. Para $-2 < x < 1$, el numerador es positivo y el denominador negativo, de modo que el cociente es negativo. Para $x > 1$ es positivo. Así, $S = [-2, 1)$.

No necesitamos eliminar la raíz para resolver: su signo es suficiente. Cuadrar el cociente ocultaría el signo negativo que decide la comparación.

Valor absoluto y racionalidad. Considere $|(x+1)/(x-2)| \leq 2$. El dominio excluye 2 y la cota positiva permite escribir $-2 \leq (x+1)/(x-2) \leq 2$. La solución es la intersección de dos inequaciones racionales.

La cota superior equivale a $(5-x)/(x-2) \leq 0$, con solución $(-\infty, 2) \cup [5, \infty)$. La inferior equivale a $3(x-1)/(x-2) \geq 0$, con solución $(-\infty, 1] \cup (2, \infty)$. La intersección es $S = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$.

En 1 el cociente vale -2 y en 5 vale 2, de modo que el valor absoluto vale 2 en ambos extremos. El punto 2 está excluido desde el dominio y tampoco aparece en la intersección.

Prueba de estrés: cuadrar cantidades de signo libre. La comparación $-3 < -2$ es verdadera; al cuadrar, $9 < 4$ es falsa. El cuadrado conserva el orden sobre los no negativos, lo invierte sobre los no positivos y no proporciona una regla única para cantidades de signo desconocido.

En una inequación radical, el signo de la raíz está controlado, pero el signo del otro miembro todavía debe examinarse.

Recuperación breve. a) Resuelva $\sqrt{x+4} \le 2$.

b) Resuelva $\sqrt{x+4} > -1$.

c) Resuelva $\sqrt{x+4}/(x-2) \ge 0$.

Respuesta razonada. En **a)** el dominio es $x \ge -4$ y la cota 2 es positiva. Cuadrar equivale a $x+4 \le 4$, de donde $S = [-4, 0]$. En **b)** una raíz no negativa siempre supera -1; todo el dominio es solución, $S = [-4, \infty)$. En **c)** el dominio es $[-4, \infty) \setminus \{2\}$. El numerador se anula en -4, que se admite; es positivo en los demás valores. Se requiere denominador positivo para esos valores, y resulta $S = \{-4\} \cup (2, \infty)$.

Qué debemos conservar de esta sección. Cada capa aporta una obligación distinta. La raíz fija dominio y no negatividad, el denominador fija exclusiones y signo, y el valor absoluto introduce ramas. Cuadrar sólo produce equivalencias tras controlar el signo de ambos miembros; en algunos problemas basta estudiar el signo de la expresión sin eliminar sus capas.

22.15. Laboratorio de errores y primera ruptura

Una respuesta equivocada puede proceder de una sola transición inválida dentro de cálculos correctos. La auditoría de C21 se amplía: debemos examinar si una operación conserva el dominio, la orientación, las ramas y los extremos.

Invertir sin un factor negativo. Resolución defectuosa. De $3x - 2 \le 7$ se obtiene $3x \le 9$ y después $x \ge 3$.

La resta o suma inicial es válida. La primera ruptura es dividir por $3 > 0$ e invertir la relación. La reparación da $x \le 3$ y $S = (-\infty, 3]$. El valor 0 pertenece a la solución original y refuta la semirrecta equivocada.

Conservar la dirección con divisor negativo. Resolución defectuosa. De $-2x > 6$ se concluye $x > -3$.

Dividir por -2 exige invertir y da $x < -3$. En la cadena defectuosa se cambia el conjunto solución en el único paso. Sustituir $x = -4$ confirma una solución que la respuesta perdió: $8 > 6$.

Multiplicar por signo desconocido. Resolución defectuosa. De $1/(x-2) > 0$ se obtiene $1 > 0$ multiplicando por $x - 2$, y se declara $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

La multiplicación sin casos es la ruptura. En $x < 2$, el factor es negativo y debe invertirse la relación. El cociente es positivo sólo para $x > 2$, así que $S = (2, \infty)$. El punto 0 está en el dominio, pero da $-1/2 > 0$, falso: es una falsa solución, no un valor indefinido.

Cancelar y borrar el dominio. Resolución defectuosa. Se simplifica $(x^2 - 1)/(x - 1) \ge 0$ a $x + 1 \ge 0$ y se declara $[-1, \infty)$.

La cancelación es válida para $x \ne 1$. La ruptura aparece al formular la respuesta sin esa restricción. La reparación es $[-1, 1) \cup (1, \infty)$. El punto 1 no es una comparación falsa; la expresión original es indefinida.

Dividir y perder un cero. Resolución defectuosa. Para $(x-2)^2(x+1) \le 0$, se divide por $(x-2)^2$ y se responde $x \le -1$.

La división sólo es posible para $x \ne 2$. Allí el divisor es positivo y la comparación equivalente da $x \le -1$. Falta examinar el caso $x = 2$, donde el producto vale cero y satisface la inequación. El conjunto completo es $(-\infty, -1] \cup \{2\}$.

Verificar los puntos que permanecieron en la respuesta no descubre por sí solo la solución perdida. Se necesita recuperar el caso eliminado.

Unir un sistema. Resolución defectuosa. Para $x \geq -1$ y $x < 2$, se declara $[-1, \infty) \cup (-\infty, 2) = \mathbb{R}$.

El cálculo de cada conjunto individual es correcto. La ruptura es sustituir la conjunción por unión. La intersección correcta es $[-1, 2)$.

Abrir mal el valor absoluto. Resolución defectuosa. Se escribe $|x| > 2$ como $-2 < x < 2$.

La equivalencia inicial es falsa. La cota inferior de distancia exige $x < -2$ o $x > 2$, con solución $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. El punto 0 cumple la doble desigualdad propuesta y falla la original.

Cuadrar y borrar una condición de signo. Resolución defectuosa. De $\sqrt{x+1} \leq x - 1$ se pasa a $x + 1 \leq (x-1)^2$ y se declara $(-\infty, 0] \cup [3, \infty)$.

Además del dominio $x \geq -1$, la comparación original exige $x \geq 1$. El paso cuadrado necesita esa condición para ser equivalente. La reparación conserva ambas restricciones y da $[3, \infty)$, como en §22.14. El valor 0 está en el dominio pero no satisface $1 \leq -1$.

Incluir un extremo prohibido. Resolución defectuosa. Se responde $[-1, 2]$ a $(x-2)/(x+1) \leq 0$.

La región interior tiene signo negativo y el cero 2 se admite, pero -1 anula el denominador. La reparación es $(-1, 2]$. Una relación no estricta permite ciertos ceros; no convierte un punto indefinido en una igualdad.

Protocolo de reparación. Para auditar una resolución, primero recuperamos el dominio original y el conjunto que cada transición pretende conservar. Localizamos la primera operación que usa una hipótesis ausente o cambia un enlace lógico. Después clasificamos el efecto: valores inadmisibles reintegrados, falsas soluciones creadas, soluciones perdidas, extremos alterados o ramas omitidas.

La reparación regresa al último paso válido y añade el caso, restricción o inversión que faltaba. Una verificación puntual puede refutar una respuesta, pero una resolución completa debe demostrar que las regiones seleccionadas son todas y sólo las válidas.

Recuperación breve. Una resolución de $(x+1)^2/(x-3) \geq 0$ cancela el signo positivo del numerador y responde $(3, \infty)$. Determine la solución perdida y repare el argumento.

Respuesta razonada. El dominio excluye 3. El numerador es positivo para $x \neq -1$ y cero en -1. Para los valores distintos de -1 se necesita $x > 3$; en -1 el cociente vale cero y se admite. Por tanto, $S = \{-1\} \cup (3, \infty)$. Tratar el numerador como estrictamente positivo en todo el dominio omitió su cero.

Qué debemos conservar de esta sección. El diagnóstico identifica la primera transición que altera el conjunto solución y la hipótesis que faltaba. El control final debe distinguir falsedad de falta de dominio y debe recuperar soluciones o ramas eliminadas durante la cadena. Cada reparación conserva la causa del error para que pueda reconocerse en otra expresión.

22.16. Síntesis: dominio → puntos críticos → signos → solución

El objeto común de todos los métodos estudiados es un subconjunto del dominio. La resolución puede usar despeje, distancia, tablas, sustituciones o casos paramétricos, pero debe explicar por qué cada valor admitido satisface la condición y por qué no quedan otros.

Elegir el método a partir de la estructura. Una condición lineal pide reunir la variable y clasificar el coeficiente. Un valor absoluto sugiere distancia y ramas. Un producto o cociente factorizado permite ordenar ceros y exclusiones y estudiar signos. Una expresión en x^2 puede admitir variable auxiliar y reconstrucción. Una raíz exige recuperar dominio y examinar el signo del otro miembro antes de cuadrar.

Estos reconocimientos son decisiones justificadas por la forma. Cuando aparecen varias estructuras, se decide cuál simplifica primero el problema conservando los controles restantes.

Síntesis con dominio, signo y distancia. Resolvamos simultáneamente

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-3} \le 0, \\ |x| \le 2. \end{cases}$$

El dominio común excluye 3. La segunda condición equivale a $x \in [-2, 2]$. Dentro de ese intervalo, $x - 3 < 0$ y $x + 2 \ge 0$. El factor $(x-1)^2$ es no negativo. El numerador es entonces no negativo y dividir por el denominador negativo da un cociente no positivo. Todos los valores de $[-2, 2]$ satisfacen la primera condición.

Por tanto, la intersección es $S = [-2, 2]$. En -2 y 1 el numerador se anula; ambos valores pertenecen al dominio y la comparación admite igualdad. En 2 el cociente es negativo y la condición de distancia admite ese extremo.

Una segunda ruta resuelve primero la racional en toda la recta. Los puntos críticos son -2, 1 y 3. Fuera de 1, el cuadrado es positivo, de modo que el signo es el de $(x+2)/(x-3)$. Es negativo entre -2 y 3 y positivo fuera; los ceros -2 y 1 se admiten y 3 se excluye. La solución racional es $[-2, 3)$. Su intersección con $[-2, 2]$ confirma $[-2, 2]$.

La primera ruta usa una restricción del sistema para conocer signos y ahorrar una tabla; la segunda verifica el resultado mediante una resolución independiente de cada condición.

Síntesis con reconstrucción. Considere $(x^4 - 5x^2 + 4)/(x^2 - 1) \ge 0$. El dominio excluye ± 1. Con $u = x^2$ debemos conservar $u \ge 0$ y $u \ne 1$. La factorización $(u-1)(u-4)$ permite cancelar sobre ese dominio y obtener $u - 4 \ge 0$, es decir $u \ge 4$.

La vuelta exige $x^2 \ge 4$, equivalente a $|x| \ge 2$. Se obtiene $S = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Las exclusiones ± 1 no pertenecen a esas regiones, pero permanecieron explícitas para justificar la cancelación. En ± 2 el numerador es cero con denominador 3, así que se incluyen.

Cómo saber que terminamos. En una resolución por intervalos, cada región seleccionada necesita una razón global de signo, no sólo un ejemplo favorable. Cada punto crítico se examina según su naturaleza: cero de la expresión, exclusión de dominio o frontera de otra condición. Una sustitución termina con sus preimágenes, y un sistema termina con la intersección.

La respuesta debe ser un conjunto legible y exacto. Se pueden reunir intervalos contiguos si el punto común pertenece a la solución; si está excluido, la separación se conserva. Una solución aislada puede escribirse como singleton y una ausencia de valores como $\varnothing$.

Prueba de estrés de la estrategia. Para $\sqrt{(x-1)^2}/(x+2) > 0$, el dominio excluye -2. Por C18, el numerador es $|x-1|$, no $x-1$. Es positivo salvo en 1, donde se anula. Por eso el cociente es positivo exactamente cuando $x > -2$ y $x \ne 1$: $S = (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

Reemplazar la raíz por $x - 1$ cambiaría el signo del numerador para $x < 1$ y daría una solución distinta. La selección de método comienza por leer correctamente la expresión.

Recuperación breve. Resuelva el sistema $(x-1)(x+3) \geq 0$ y $|x| \leq 4$, e indique por qué se incluyen los cuatro extremos de los intervalos resultantes.

Respuesta razonada. El producto es no negativo en $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$. La distancia exige $[-4, 4]$. Su intersección es $[-4, -3] \cup [1, 4]$. Los puntos -3 y 1 anulan el producto y están en el dominio; -4 y 4 satisfacen la cota de distancia con igualdad y el producto es positivo allí. Ambas condiciones son no estrictas.

Qué debemos conservar del capítulo. Resolver una inequación exige conservar la información que decide la verdad de una relación de orden. El dominio identifica valores admisibles; los signos autorizan transformaciones; las fronteras organizan regiones; los enlaces lógicos indican cómo reunirlas. La verificación controla extremos, exclusiones y reconstrucciones, y el conjunto solución reúne el resultado de ese argumento.

En C23 volveremos a usar el orden para comparar valores de funciones exponenciales y logaritmos. Las transformaciones estarán gobernadas por su monotonía creciente o decreciente; las obligaciones de dominio y conjunto solución seguirán siendo las mismas.

Ejercicios

Resuelva antes de consultar las soluciones. En los problemas sobre conjuntos solución, conserve el dominio, justifique las transformaciones y controle extremos y puntos excluidos.

A. Lectura.

Ejercicio 1. Escriba $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 2\}$ como intervalo y decida si $-3, 0, 2$ pertenecen.

Ejercicio 2. Traduzca $(-\infty, -2] \cup (5, \infty)$ a una condición con «o».

Ejercicio 3. En $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, determine dónde $x^2 \leq 4$.

Ejercicio 4. Para $(x-4)/(x-4) \geq 0$, distinga dominio y conjunto solución.

Ejercicio 5. Calcule $[-2, 4) \cap (1, 6]$ y $[-2, 4) \cup (1, 6]$.

Ejercicio 6. Si $a < b$, compare $a - 7$ con $b - 7$ y $-3a$ con $-3b$. Justifique.

Ejercicio 7. Explique qué regiones describe $|x - 4| \leq 2$ y si $x = 2, 6$ se incluyen.

Ejercicio 8. En $(x+3)/(x-2) \leq 0$, identifique el cero admisible y el punto excluido sin resolver todavía.

Ejercicio 9. ¿Es válida como intervalo real la escritura $[2, \infty]$? Corríjala.

Ejercicio 10. ¿Qué cambia en las soluciones de $(x-3)^2 < 0$, ≤ 0, > 0 y ≥ 0?

B. Fluidez.

Ejercicio 11. Resuelva $7x - 5 < 16$.

Ejercicio 12. Resuelva $4 - 5x \leq 19$.

Ejercicio 13. Resuelva $6x + 1 \geq 2x - 7$.

Ejercicio 14. Resuelva $5x + 8 < 5x + 3$.

Ejercicio 15. Resuelva $2x - 9 \leq 2x - 4$.

Ejercicio 16. Resuelva $-5 < 3x + 1 \leq 10$.

Ejercicio 17. Resuelva $-4 \leq 1 - 2x < 7$.

Ejercicio 18. Resuelva simultáneamente $x + 3 > 1$ y $4x \leq 12$.

Ejercicio 19. Resuelva $2x - 1 < -5$ o $x + 2 \geq 6$.

Ejercicio 20. Resuelva $|2x + 3| < 7$.

Ejercicio 21. Resuelva $|x - 5| \geq 3$.

Ejercicio 22. Resuelva $x^2 + 2x - 15 \leq 0$.

Ejercicio 23. Resuelva $-x^2+6x-8>0$.

Ejercicio 24. Resuelva $(x+2)^2(x-4)<0$.

Ejercicio 25. Resuelva $(x-5)/(x+2)\geq 0$.

Ejercicio 26. Resuelva $(x^2-9)/(x-3)<0$.

C. Justificación.

Ejercicio 27. Demuestre que sumar c a ambos miembros conserva $a<b$ y explique la reversibilidad.

Ejercicio 28. Demuestre que $a<b$ y $c<0$ implican $ac>bc$ usando un multiplicador positivo.

Ejercicio 29. Justifique por qué $x(x-2)\geq 0$ no puede dividirse por x sin separar casos; resuelva.

Ejercicio 30. Pruebe $|u|\leq c \iff -c\leq u\leq c$ para $c>0$.

Ejercicio 31. Justifique que el signo de $(x-1)(x-4)$ es constante en cada intervalo determinado por $1,4$.

Ejercicio 32. Explique por qué atravesar el cero de $(x-2)^4$ no cambia su signo.

Ejercicio 33. Demuestre en el dominio $Q(x)\neq 0$ que $P(x)/Q(x)\leq 0$ equivale a $P(x)Q(x)\leq 0$.

Ejercicio 34. Explique por qué un cero del numerador puede admitirse en una racional no estricta y uno del denominador no.

Ejercicio 35. Demuestre que para $r,s\geq 0$, $r\leq s$ equivale a $r^2\leq s^2$.

Ejercicio 36. Formule y pruebe la condición completa equivalente a $\sqrt{R(x)}\leq B(x)$.

Ejercicio 37. Justifique por qué sumar dos inequaciones de un sistema puede dar sólo una condición necesaria. Construya un caso.

Ejercicio 38. Pruebe que la solución tras $u=\phi(x)$ es la preimagen del conjunto auxiliar, aun si ϕ no es inyectiva.

D. Diagnóstico.

Ejercicio 39. Diagnostique y repare: $-4x\leq 8 \iff x\leq -2$.

Ejercicio 40. Diagnostique y repare: $2x+1<7 \iff x>3$.

Ejercicio 41. Diagnostique y repare: $1/(x+3)>0 \iff 1>0$, por lo que todos los reales salvo -3 son solución.

Ejercicio 42. Diagnostique y repare: $(x^2-4)/(x-2)\geq 0 \iff x+2\geq 0$, con solución $[-2,\infty)$.

Ejercicio 43. Diagnostique y repare: $(x-4)^2(x+2)\leq 0$ se divide por el cuadrado y da $x\leq -2$.

Ejercicio 44. Diagnostique y repare: $|x-1|>2 \iff -2<x-1<2$.

Ejercicio 45. Diagnostique y repare un sistema $x\geq 0$, $x<3$ cuya respuesta es $[0,\infty)\cup(-\infty,3)$.

Ejercicio 46. Diagnostique y repare: $(x-2)/(x+1)\leq 0$ tiene solución $[-1,2]$.

Ejercicio 47. Diagnostique y repare: $\sqrt{x+2}\leq x$ se cuadra y da $x^2-x-2\geq 0$, con respuesta $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$.

Ejercicio 48. Diagnostique y repare: $x^4-13x^2+36\leq 0$, con $u=x^2$, da $u\in[4,9]$ y se responde $x\in[2,3]$.

Ejercicio 49. Diagnostique y repare la afirmación «$(x+1)^2>0$ para todo real».

Ejercicio 50. Diagnostique y repare: $ax<1$ siempre tiene solución $x<1/a$.

E. Estrategia.

Ejercicio 51. Resuelva $(x-2)^2-25\ge 0$ y compare expandir con factorizar directamente.

Ejercicio 52. Resuelva $x^2-6x+11<0$ eligiendo una forma que permita decidir sin raíces.

Ejercicio 53. Resuelva $-(x+2)(x-5)>0$ por dos rutas y compare.

Ejercicio 54. Resuelva $1/(x-3)\le 1/(x+3)$ mediante una diferencia.

Ejercicio 55. Resuelva $(x-4)/(x+2)\le 1$ por signo y por casos del denominador.

Ejercicio 56. Resuelva $(x^2+4)(x-1)\ge 0$ y explique qué factor puede estudiarse globalmente.

Ejercicio 57. Resuelva $(x-3)^2(x+2)\ge 0$ y explique si conviene dividir por el cuadrado.

Ejercicio 58. Resuelva $x^4-8x^2+7>0$ indicando el método elegido y reconstrucción.

Ejercicio 59. Resuelva $\sqrt{x+5}/(x-2)<0$ evitando un cuadrado innecesario.

Ejercicio 60. Resuelva $(x-1)(x-4)\le 0$ con $x\ge 3$, comparando resolver primero todo el producto con usar el dominio.

F. Transferencia.

Ejercicio 61. Clasifique $(x-a)(x-2)<0$ para todo parámetro real a.

Ejercicio 62. Clasifique $(a-1)x\le 2$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 63. Clasifique $(x+2)^2\ge a$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 64. Resuelva $x^4-20x^2+64\le 0$.

Ejercicio 65. Resuelva $[(x+1)^2-4][(x+1)^2-9]<0$.

Ejercicio 66. Resuelva $(x^4-16)/(x^2-4)>0$.

Ejercicio 67. Resuelva $\sqrt{x+6}\le x$.

Ejercicio 68. Resuelva $\sqrt{x+6}>x$.

Ejercicio 69. Resuelva $|\sqrt{x+1}-2|\le 1$.

Ejercicio 70. Resuelva el sistema $(x+4)(x-1)\ge 0$, $|x|\le 5$.

Ejercicio 71. Resuelva simultáneamente $(x-2)/(x+3)\le 0$ y $x>-1$.

Ejercicio 72. Resuelva $|(x-1)/(x+1)|\ge 2$.

G. Síntesis.

Ejercicio 73. Resuelva $(x+4)(x+1)^2(x-2)^3(x-5)^2\le 0$. Justifique los ceros que cambian el signo.

Ejercicio 74. Resuelva $(x^2-9)(x-1)/[(x-3)(x+2)]\ge 0$, distinguiendo ceros y punto cancelado.

Ejercicio 75. Una resolución de $(x+1)/(x-2)>1$ multiplica por $x-2$ y concluye $x+1>x-2$, de modo que todos los valores del dominio servirían. Localice la ruptura y resuelva por dos rutas.

Ejercicio 76. Clasifique $a(x-1)^2\le a-1$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 77. Resuelva $|(x-2)/(x+2)|<1$ y después intersecte la solución con $(x-1)(x-4)\ge 0$.

Ejercicio 78. Resuelva el sistema $(x-1)/(x+2)\ge 0$, $(x-3)(x+4)\le 0$, $|x-1|\le 4$.

Ejercicio 79. Resuelva $(x^4-10x^2+9)/(x^2-4)\le 0$ reconstruyendo todas las preimágenes.

Ejercicio 80. Resuelva simultáneamente $\sqrt{x+2}/(x-1)\le 0$ y $|(x-2)/(x+2)|\ge 1$. Dé una verificación independiente de regiones y extremos.

H. Profundización y reconstrucción. Intente cada tarea antes de consultar su solución. Los parámetros son reales salvo indicación distinta.

Ejercicio 081. Diseñar un intervalo cerrado. Dados $a < b$, construya una inequación polinómica cuyo conjunto solución real sea exactamente $[a, b]$ y justifique las regiones.

Ejercicio 082. Diseñar un intervalo abierto con un hueco. Dados $a < c < b$, construya una inequación racional con conjunto solución $(a, c) \cup (c, b)$.

Ejercicio 083. Diseñar un rayo y un punto aislado. Dados $a < b$, construya una inequación polinómica cuya solución sea $(-\infty, a] \cup \{b\}$.

Ejercicio 084. Diseñar dos intervalos de signos. Dados $a < b < c$, construya una inequación de producto que tenga solución $(a, b) \cup (c, \infty)$.

Ejercicio 085. Comparar dos dominios después de cancelar. Compare los conjuntos solución de $(x-a)^2/(x-a)^2 \geq 1$ y $(x-b)^2/(x-b)^2 \geq 1$. Determine cuándo las ecuaciones reducidas tienen el mismo conjunto y cuándo las originales son equivalentes.

Ejercicio 086. Un punto que la forma reducida admitiría. Para reales a, b, resuelva $(x-a)(x-b)/(x-a) \leq 0$ y clasifique la solución según la posición relativa de a, b.

Ejercicio 087. Un signo global antes y después de cancelar. Para $a < b$, resuelva $(x-a)/(a-x)\,(x-b) \geq 0$.

Ejercicio 088. Un cuadrado cancelado dentro de una racional. Resuelva $(x-a)^2(x-b)/[(x-a)^2(x-c)] > 0$ para $b < c$, conservando cualquier real a.

Ejercicio 089. Dos ceros que se fusionan. Clasifique la solución de $(x-t)(x+t) \leq 0$ para todo real t.

Ejercicio 090. Un cero que se convierte en hueco. Clasifique $(x-t)/(x-1) \geq 0$ según $t < 1$, $t = 1$ y $t > 1$.

Ejercicio 091. Un cuadrado y un polo paramétricos. Para todo real t, resuelva $(x-t)^2/(x-1) \leq 0$.

Ejercicio 092. Una región que colapsa al coincidir dos parámetros. Resuelva $(x-t)(x-1) \geq 0$ para cada t, con atención al caso $t = 1$.

Ejercicio 093. Dos ramas con una traslación. Resuelva $[(x-h)^2 - A][(x-h)^2 - B] \leq 0$ para $0 < A < B$.

Ejercicio 094. Intersectar con una imagen que excluye ceros. Resuelva $(|x-h| + 1 - 2)(|x-h| + 1 - 4) < 0$.

Ejercicio 095. Una sustitución recíproca y un hueco permanente. Resuelva $0 < 1/(x-h)^2 \leq 4$ sobre los reales.

Ejercicio 096. Reconstruir después de una imagen acotada. Resuelva $\dfrac{(x-h)^2}{1+(x-h)^2} \leq c$ para todo real c.

Soluciones desarrolladas

A. Lectura.

Solución 1. La cota izquierda es estricta y la derecha admite igualdad: $S = (-3, 2]$. El valor -3 queda excluido, 0 está entre las fronteras y 2 se incluye.

Solución 2. La primera semirrecta exige $x \leq -2$; la segunda exige $x > 5$. La unión permite satisfacer al menos una: $x \leq -2$ o $x > 5$.

Solución 3. Los cuadrados son $9, 4, 1, 0, 1, 4, 9$. La comparación admite los cinco valores centrales, así que $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. El dominio finito permite esta comprobación exhaustiva.

Solución 4. El dominio es $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Allí la fracción vale 1 y $1 \geq 0$ es verdadera, de modo que $S = D$. En 4 la expresión es indefinida, no falsa.

Solución 5. La región común exige $x > 1$ y $x < 4$: la intersección es $(1, 4)$. Los intervalos se superponen y reúnen todos los valores desde -2 hasta 6, incluidos ambos: la unión es $[-2, 6]$.

Solución 6. Sumar -7 conserva el orden, por lo que $a - 7 < b - 7$. Multiplicar por $-3 < 0$ lo invierte y da $-3a > -3b$. Ambas operaciones son reversibles porque el multiplicador es no nulo.

Solución 7. La distancia a 4 no excede 2, equivalente a $2 \leq x \leq 6$. La solución es $[2, 6]$; los extremos tienen distancia exactamente 2 y se incluyen por la comparación no estricta.

Solución 8. El numerador se anula en -3 y el denominador allí vale -5, de modo que el cociente vale cero y se admite. El punto 2 anula el denominador y queda excluido desde el dominio, independientemente del signo $\leq$.

Solución 9. El símbolo ∞ no es un real que pueda incluirse. La semirrecta de reales mayores o iguales que 2 se escribe $[2, \infty)$. El corchete izquierdo incluye 2 y el paréntesis derecho expresa extensión sin extremo real.

Solución 10. El cuadrado es no negativo y se anula sólo en 3. Por tanto, los cuatro conjuntos son, en ese orden, $\varnothing$, $\{3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ y $\mathbb{R}$.

B. Fluidez.

Solución 11. Sumar 5 da $7x < 21$. Dividir por $7 > 0$ conserva la dirección y da $x < 3$. Así, $S = (-\infty, 3)$; en 3 hay igualdad y la condición estricta lo excluye.

Solución 12. Restar 4 da $-5x \leq 15$. Al dividir por $-5 < 0$ se invierte la relación: $x \geq -3$. Por tanto, $S = [-3, \infty)$; en -3 ambos miembros valen 19.

Solución 13. Restar $2x$ y 1 conserva la relación y deja $4x \geq -8$. Dividir por $4 > 0$ da $x \geq -2$, de modo que $S = [-2, \infty)$.

Solución 14. Restar $5x$ deja $8 < 3$, falsa para todos los valores de x. No existe un coeficiente no nulo por el que dividir. El conjunto solución es $\varnothing$.

Solución 15. Restar $2x$ deja $-9 \leq -4$, verdadera para todo real. Por tanto, $S = \mathbb{R}$. La variable desaparece y el problema se decide por una comparación numérica.

Solución 16. Restar 1 en los tres miembros da $-6 < 3x \leq 9$. Dividir por $3 > 0$ conserva ambas direcciones: $-2 < x \leq 3$. Así, $S = (-2, 3]$.

Solución 17. Restar 1 da $-5 \leq -2x < 6$. Dividir por -2 invierte ambas comparaciones: $5/2 \geq x > -3$. Reordenando, $S = (-3, 5/2]$.

Solución 18. La primera condición equivale a $x > -2$ y la segunda a $x \leq 3$, porque se divide por $4 > 0$. El sistema exige la intersección: $S = (-2, 3]$.

Solución 19. Las ramas son $x < -2$ y $x \geq 4$. Al ser alternativas, reunimos sus conjuntos mediante unión: $S = (-\infty, -2) \cup [4, \infty)$.

Solución 20. La cota positiva permite $-7 < 2x + 3 < 7$. Restar 3 y dividir por $2 > 0$ da $-5 < x < 2$, así que $S = (-5, 2)$. Los dos extremos producen valor absoluto 7 y se excluyen.

Solución 21. Una distancia de al menos 3 exige $x - 5 \leq -3$ o $x - 5 \geq 3$. Resulta $x \leq 2$ o $x \geq 8$, con $S = (-\infty, 2] \cup [8, \infty)$.

Solución 22. Factorizamos $(x + 5)(x - 3)$. Los factores tienen signos opuestos entre -5 y 3, y el producto se anula en ambos extremos. Para ≤ 0, $S = [-5, 3]$.

Solución 23. La expresión es $-(x-2)(x-4)$. Dividir por -1 invierte y exige $(x-2)(x-4) < 0$, verdadero entre las raíces. Así, $S = (2, 4)$.

Solución 24. Fuera de -2, el cuadrado es positivo, así que se necesita $x - 4 < 0$. La condición estricta excluye ambos ceros. Por tanto, $S = (-\infty, -2) \cup (-2, 4)$.

Solución 25. El dominio excluye -2. Numerador y denominador tienen signos iguales para $x < -2$ y $x > 5$; el cero 5 se admite. Así, $S = (-\infty, -2) \cup [5, \infty)$.

Solución 26. El dominio excluye 3. Factorizar y cancelar sobre él deja $x + 3 < 0$, es decir $x < -3$. Esa región no contiene el punto excluido, por lo que $S = (-\infty, -3)$.

C. Justificación.

Solución 27. Si $a < b$, entonces $b - a > 0$ y $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$, de donde $a + c < b + c$. Restar c recupera el orden inicial. Así se prueban ambas direcciones de la equivalencia para todo real c.

Solución 28. Como $-c > 0$, la propiedad para multiplicadores positivos da $-ac < -bc$. Sumamos $ac + bc$ a ambos miembros y obtenemos $bc < ac$, esto es $ac > bc$. Sólo se usaron multiplicación por positivo y compatibilidad aditiva; así se evita suponer la regla para negativos que se quiere demostrar.

Solución 29. Si $x > 0$, dividir conserva y exige $x \geq 2$. Si $x < 0$, dividir invierte y exige $x \leq 2$, cumplido por todos los negativos. Si $x = 0$, el producto vale cero y se admite. Reuniendo, $S = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.

Solución 30. Si $u \geq 0$, $|u| = u$ y la comparación equivale a $u \leq c$, mientras $u \geq -c$ ya se cumple. Si $u < 0$, $|u| = -u$ y equivale a $u \geq -c$, mientras $u \leq c$ ya se cumple. En cada caso el razonamiento es reversible, así que las dos cotas son necesarias y suficientes.

Solución 31. En $x < 1$, ambos factores son negativos; en $1 < x < 4$, el primero es positivo y el segundo negativo; en $x > 4$, ambos son positivos. Estas condiciones valen para todos los puntos de cada intervalo, y las reglas del producto fijan signos $+, -, +$. No se infiere constancia a partir de un único valor de prueba.

Solución 32. Para $x \neq 2$, $(x - 2)^4 = [(x - 2)^2]^2 > 0$. La cuarta potencia es positiva a ambos lados y sólo vale cero en 2. El exponente par elimina el signo negativo de la base.

Solución 33. En ese dominio, $Q(x)^2 > 0$. Multiplicar por ese cuadrado conserva la comparación y transforma $Q^2(P/Q)$ en PQ. Dividir por el mismo cuadrado recupera la fracción y prueba la vuelta. La exclusión $Q \neq 0$ permanece en ambos problemas.

Solución 34. Si $P(c) = 0$ y $Q(c) \neq 0$, el cociente vale 0 y satisface tanto ≤ 0 como ≥ 0. Si $Q(c) = 0$, no hay cociente real definido, aun si también $P(c) = 0$. La segunda exclusión procede del dominio y no de la comparación.

Solución 35. Si $r \leq s$, $(s - r)(s + r) \geq 0$ y por tanto $s^2 - r^2 \geq 0$. Si $r > s$, ambos factores de $(r - s)(r + s)$ son positivos, de modo que $r^2 > s^2$, contradiciendo la condición cuadrada. Esto prueba la vuelta y señala dónde se usa la no negatividad.

Solución 36. En el dominio $R(x) \geq 0$, la equivalencia completa exige $B(x) \geq 0$ y $R(x) \leq B(x)^2$. La original fuerza B no negativo; cuadrar entre no negativos da la segunda condición. Para la vuelta, comparar raíces da $\sqrt{R} \leq \sqrt{B^2} = B$, donde se usa $B \geq 0$.

Solución 37. Sumar comparaciones compatibles produce una consecuencia válida, pero puede borrar información independiente. El sistema $x \geq 1$, $-x \geq -1$ sólo admite $x = 1$; al sumar queda $0 \geq 0$, verdadera para todos los reales. Por tanto, esa consecuencia no es suficiente para recuperar el sistema.

Solución 38. Un valor $x \in D$ satisface la condición original exactamente cuando $u = \phi(x)$ pertenece al conjunto auxiliar válido S_u. Por definición de preimagen, esto equivale a $x \in \phi^{-1}(S_u)$. La prueba no requiere valores únicos de x para cada u; todas las preimágenes válidas se conservan.

D. Diagnóstico.

Solución 39. La ruptura está en dividir por -4 sin invertir. El paso correcto da $x \geq -2$ y $S = [-2, \infty)$. La frontera se incluye porque produce igualdad.

Solución 40. Restar 1 y dividir por $2 > 0$ conserva la orientación: $x < 3$. La primera ruptura es la inversión injustificada, y la respuesta correcta es $(-\infty, 3)$.

Solución 41. Se multiplicó por $x+3$ sin controlar su signo. El numerador positivo exige denominador positivo, así que $x > -3$. La solución es $(-3, \infty)$; en $x < -3$ habría que invertir la relación al multiplicar.

Solución 42. La simplificación es válida sólo para $x \neq 2$. La respuesta borró ese dominio, reintegrando un valor indefinido. Se conserva $x \geq -2$ y se retira 2: $S = [-2, 2) \cup (2, \infty)$.

Solución 43. El divisor se anula en 4, que debe estudiarse aparte. Fuera de 4 es positivo y da $x \leq -2$; en 4 el producto vale cero. La solución completa es $(-\infty, -2] \cup \{4\}$.

Solución 44. La doble cota representa $|x-1| < 2$, no > 2. La distancia mayor exige $x - 1 < -2$ o $x - 1 > 2$, dando $S = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

Solución 45. Un sistema exige simultaneidad y por tanto intersección, no unión. El conjunto correcto es $[0, 3)$. La unión defectuosa sería toda la recta e incluiría valores que incumplen una de las condiciones.

Solución 46. El extremo -1 anula el denominador y no pertenece al dominio. La región interior tiene signo negativo y 2 es cero admisible. La solución es $(-1, 2]$.

Solución 47. La raíz exige $x \geq -2$ y la comparación original exige $x \geq 0$. Cuadrar es equivalente sólo con esa condición de signo. El producto $(x-2)(x+1) \geq 0$ se intersecta con $[0, \infty)$, dando $S = [2, \infty)$.

Solución 48. La vuelta perdió las preimágenes negativas. La condición $4 \leq x^2 \leq 9$ equivale a $2 \leq |x| \leq 3$, de modo que $S = [-3, -2] \cup [2, 3]$. Los cuatro extremos se admiten por la relación no estricta.

Solución 49. El cuadrado es positivo salvo donde su base se anula. En $x = -1$ vale cero, así que la inequación tiene solución $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La propiedad general disponible era no negatividad, no positividad estricta.

Solución 50. La división sólo es posible si $a \neq 0$ y su orientación depende del signo. Si $a > 0$, $S = (-\infty, 1/a)$; si $a < 0$, $S = (1/a, \infty)$; si $a = 0$, la comparación $0 < 1$ es verdadera y $S = \mathbb{R}$.

E. Estrategia.

Solución 51. La diferencia de cuadrados da $(x-7)(x+3) \geq 0$. El producto es no negativo fuera de las raíces: $S = (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$. Expandir da $x^2 - 4x - 21$, correcto pero obliga a recuperar los mismos factores; la forma inicial ya ofrece la diferencia de cuadrados.

Solución 52. Completar cuadrados da $(x-3)^2 + 2$. Es al menos $2 > 0$ para todo real, de modo que $S = \varnothing$. Buscar raíces sería innecesario porque la cota global resuelve la comparación.

Solución 53. Multiplicar por -1 invierte y deja $(x+2)(x-5) < 0$, verdadero entre raíces: $S = (-2, 5)$. Una tabla que conserve el signo negativo cambia los signos exteriores a negativos y el interior a positivo, dando el mismo conjunto. Normalizar evita repetir esa inversión por fila.

Solución 54. El dominio excluye ± 3. La diferencia es $6/[(x-3)(x+3)]$. Como el numerador es positivo, ser no positiva exige denominador negativo, que ocurre entre las raíces. No hay ceros del numerador: $S = (-3, 3)$.

Solución 55. Restar 1 da $-6/(x+2) \leq 0$ con $x \neq -2$, por lo que se necesita $x > -2$. Por casos: para $x > -2$, multiplicar conserva y deja $x - 4 \leq x + 2$, verdadera; para $x < -2$, invierte y deja $x - 4 \geq x + 2$, falsa. Ambas rutas dan $(-2, \infty)$.

Solución 56. El factor $x^2 + 4$ es estrictamente positivo para todo real. Dividir por él conserva la relación y exige $x - 1 \geq 0$. Así, $S = [1, \infty)$. No introduce ceros ni fronteras adicionales.

Solución 57. Fuera de 3, el cuadrado es positivo y se necesita $x \geq -2$. En 3 el producto vale cero y se admite; ese punto ya está en la semirrecta. Por tanto, $S = [-2, \infty)$. Dividir sólo es válido tras separar 3, aunque aquí no cambia la unión final.

Solución 58. Con $u = x^2 \geq 0$, $(u-1)(u-7) > 0$ exige $u < 1$ o $u > 7$. La vuelta da $|x| < 1$ o $|x| > \sqrt{7}$. Así, $S = (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{7}, \infty)$.

Solución 59. El dominio es $x \geq -5$, $x \neq 2$. El numerador es cero en -5 y positivo para $x > -5$. La comparación estricta requiere numerador positivo y denominador negativo: $S = (-5, 2)$. Cuadrar borraría el signo que decide el cociente.

Solución 60. La solución del producto en toda la recta es $[1, 4]$, cuya intersección con $[3, \infty)$ es $[3, 4]$. Dentro del dominio, $x - 1 > 0$, así que dividir por él conserva y exige $x - 4 \leq 0$, llegando directamente al mismo conjunto.

F. Transferencia.

Solución 61. Para $a < 2$, el producto es negativo entre las raíces y $S(a) = (a, 2)$. Para $a > 2$, $S(a) = (2, a)$. Para $a = 2$, queda $(x-2)^2 < 0$ y la solución es vacía. Los extremos siempre se excluyen por la comparación estricta.

Solución 62. Si $a > 1$, el coeficiente es positivo y $S(a) = (-\infty, 2/(a-1)]$. Si $a < 1$, es negativo y $S(a) = [2/(a-1), \infty)$. Si $a = 1$, queda $0 \leq 2$ y $S(a) = \mathbb{R}$.

Solución 63. Si $a \leq 0$, todo cuadrado es mayor o igual que a, así que $S(a) = \mathbb{R}$. Si $a > 0$, la condición equivale a $|x + 2| \geq \sqrt{a}$, dando $S(a) = (-\infty, -2 - \sqrt{a}] \cup [-2 + \sqrt{a}, \infty)$.

Solución 64. Con $u = x^2 \geq 0$, $(u-4)(u-16) \leq 0$ da $4 \leq u \leq 16$. Reconstruir exige $2 \leq |x| \leq 4$. Así, $S = [-4, -2] \cup [2, 4]$ y los cuatro extremos anulan la expresión.

Solución 65. Con $u = (x+1)^2 \geq 0$, la condición exige $4 < u < 9$, es decir $2 < |x + 1| < 3$. La rama negativa da $-3 < x + 1 < -2$, y la positiva $2 < x + 1 < 3$. Por tanto, $S = (-4, -3) \cup (1, 2)$.

Solución 66. El dominio excluye ± 2. Con $u = x^2 \geq 0$, $u \neq 4$, factorizar permite cancelar y deja $u + 4 > 0$, siempre verdadera. Al reconstruir se admiten todos los reales salvo las exclusiones originales: $S = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Solución 67. El dominio exige $x \geq -6$ y la comparación exige $x \geq 0$. Allí cuadrar es equivalente: $x + 6 \leq x^2$, es decir $(x-3)(x+2) \geq 0$. Sus exteriores se intersectan con $[0, \infty)$, dando $S = [3, \infty)$. En 3 hay igualdad.

Solución 68. En el dominio $x \geq -6$, todos los valores $x < 0$ satisfacen la comparación porque la raíz es no negativa. En $x = 0$ también se cumple. Para $x > 0$, cuadrar equivale a $(x-3)(x+2) < 0$, dando $0 < x < 3$ en ese caso. La unión es $S = [-6, 3)$.

Solución 69. El dominio es $x \geq -1$. La cota de distancia equivale a $1 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$. Los tres miembros son no negativos, así que cuadrar ambas comparaciones da $1 \leq x + 1 \leq 9$. Por tanto, $S = [0, 8]$.

Solución 70. El producto selecciona $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$. La distancia selecciona $[-5, 5]$. La intersección es $[-5, -4] \cup [1, 5]$, con todos los extremos incluidos porque ambas condiciones admiten igualdad.

Solución 71. El dominio excluye -3. La racional tiene signo negativo entre -3 y 2, e incluye el cero 2: su solución es $(-3, 2]$. Intersectar con $(-1, \infty)$ da $S = (-1, 2]$.

Solución 72. El dominio excluye -1. Las dos ramas son $(x-1)/(x+1) \leq -2$ o ≥ 2. La primera equivale a $(3x+1)/(x+1) \leq 0$, con solución $(-1, -1/3]$. La segunda equivale a $(-x-3)/(x+1) \geq 0$, con solución $[-3, -1)$. La unión es $[-3, -1) \cup (-1, -1/3]$.

G. Síntesis.

Solución 73. El dominio es toda la recta. Fuera de -1 y 5, los factores cuadrados son positivos, y el signo es el de $(x+4)(x-2)$ porque la potencia cúbica conserva el signo de $x - 2$. Es negativo entre -4 y 2 y positivo fuera. Los ceros -4 y 2 cambian signo; -1 y 5 no. La relación admite todos los ceros: -1 ya queda dentro del intervalo, mientras 5 aporta un punto aislado. Así, $S = [-4, 2] \cup \{5\}$.

Solución 74. El dominio excluye 3 y -2. Cancelar $x-3$ deja $(x+3)(x-1)/(x+2)$ sobre ese dominio. Los puntos ordenados son $-3, -2, 1$, más el agujero 3. Los signos del cociente son negativos en $(-\infty, -3)$, positivos en $(-3, -2)$, negativos en $(-2, 1)$ y positivos en $(1, \infty)$. Se admiten los ceros -3 y 1, y se retira 3 de la última región. Por tanto, $S = [-3, -2) \cup [1, 3) \cup (3, \infty)$.

Solución 75. La ruptura es multiplicar por signo desconocido. Restar 1 deja $3/(x-2) > 0$ con $x \neq 2$, así que $S = (2, \infty)$. Por casos, para $x > 2$ se conserva y queda $1 > -2$, verdadera; para $x < 2$ se invierte y queda $1 < -2$, falsa. La comparación estricta excluye el punto indefinido y no tiene ceros del numerador. Ambas rutas prueban que se admiten todos y sólo los valores mayores que 2.

Solución 76. Si $a = 0$, queda $0 \leq -1$ y no hay soluciones. Si $0 < a < 1$, dividir por positivo da un cuadrado menor o igual que $1 - 1/a < 0$, imposible. Si $a = 1$, queda $(x-1)^2 \leq 0$ y $S = \{1\}$. Si $a > 1$, la cota $1 - 1/a$ es positiva y $S = [1 - \sqrt{1 - 1/a}, 1 + \sqrt{1 - 1/a}]$. Si $a < 0$, dividir invierte y exige $(x-1)^2 \geq 1 - 1/a$, con cota positiva: $S = (-\infty, 1 - \sqrt{1 - 1/a}] \cup [1 + \sqrt{1 - 1/a}, \infty)$. El signo del coeficiente y el de la cota explican todos los valores críticos.

Solución 77. El dominio excluye -2. Como ambos valores absolutos son no negativos y $|x+2| > 0$, la primera condición equivale a $|x-2| < |x+2|$. Cuadrar conserva el orden: $(x-2)^2 < (x+2)^2$, que se reduce a $x > 0$. Esa región respeta la exclusión. El producto de la segunda condición da $(-\infty, 1] \cup [4, \infty)$. La intersección es $S = (0, 1] \cup [4, \infty)$. En 0 los valores absolutos son iguales y se excluye; 1 y 4 admiten igualdad en el producto.

Solución 78. El dominio excluye -2. La racional da $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$; la cuadrática da $[-4, 3]$; la distancia da $[-3, 5]$. Las dos últimas condiciones se intersectan en $[-3, 3]$. Intersectar con la racional produce $S = [-3, -2) \cup [1, 3]$. El extremo -3 satisface distancia con igualdad y la racional es positiva allí; 1 anula la racional; 3 anula la cuadrática. El punto -2 se mantiene excluido por dominio.

Solución 79. El dominio excluye ± 2. Con $u = x^2 \geq 0$, $u \neq 4$, la condición es $(u-1)(u-9)/(u-4) \leq 0$. Sus signos son negativos para $u < 1$, positivos para $1 < u < 4$, negativos para $4 < u < 9$ y positivos para $u > 9$. En la imagen válida queda $S_u = [0, 1] \cup (4, 9]$. La primera preimagen es $[-1, 1]$; la segunda exige $2 < |x| \leq 3$ y da $[-3, -2) \cup (2, 3]$. Por tanto, $S = [-3, -2) \cup [-1, 1] \cup (2, 3]$. Los ceros $\pm 1, \pm 3$ se incluyen y los polos ± 2 no.

Solución 80. El dominio común es $x \geq -2$ con $x \neq -2, 1$, es decir $(-2, \infty) \setminus \{1\}$. En ese dominio la raíz es positiva, por lo que la primera condición exige denominador negativo: $-2 < x < 1$. Para la segunda, multiplicar por $|x+2| > 0$ da $|x-2| \geq |x+2|$. Cuadrar entre no negativos equivale a $(x-2)^2 \geq (x+2)^2$, es decir $x \leq 0$. La intersección es $S = (-2, 0]$. Independientemente, para $-2 < x \leq 0$ el primer denominador es negativo y la raíz positiva, mientras $2 - x \geq x + 2 > 0$, confirmando la segunda comparación. El punto 0 da igualdad en los valores absolutos y se incluye; -2 es indefinido en la segunda condición. Los valores con $0 < x < 1$ fallan la segunda; los mayores que 1 fallan la primera, y los restantes están fuera del dominio.

H. Soluciones de profundización y reconstrucción.

Solución 081. La inequación $(x-a)(x-b) \leq 0$ sirve. Para $x < a$, ambos factores son negativos y el producto positivo; para $a < x < b$, tienen signos opuestos y el producto negativo; para $x > b$, ambos son positivos. En a, b el producto es cero y se admite. Estas regiones agotan la recta, así que la solución es exactamente $[a, b]$. La orientación de la comparación fija la elección de la región interior.

Solución 082. Tomemos $(x-a)(x-b)/(x-c)^2 < 0$. El dominio excluye c; allí el denominador es positivo, de modo que el signo lo decide el numerador. Por los signos de sus dos factores, es negativo exactamente entre a y b. Los extremos se excluyen porque la comparación es estricta, y c porque la expresión no existe. Así queda $(a, c) \cup (c, b)$. Multiplicar por el cuadrado es reversible en todo el dominio.

Solución 083. La inequación $(x-a)(x-b)^2 \leq 0$ tiene ese conjunto. Fuera de b, el cuadrado es positivo y la condición equivale a $x - a \leq 0$, es decir $x \leq a$. En b, el producto es cero y también se admite. No hay otros ceros ni puntos donde el cuadrado sea negativo. La multiplicidad par crea el punto aislado sin cambiar el signo de las regiones próximas.

Solución 084. Tomemos $(x - a)(x - b)(x - c) > 0$. En las cuatro regiones determinadas por a, b, c, hay respectivamente tres, dos, una y cero factores negativos, de modo que los signos son $-, +, -, +$. Los tres ceros se excluyen por la comparación estricta. Por tanto, el conjunto es $(a, b) \cup (c, \infty)$. El coeficiente principal positivo importa: cambiarlo por uno negativo intercambiaría las regiones de solución.

Solución 085. Cada expresión vale uno en su dominio: $S_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ y $S_b = \mathbb{R} \setminus \{b\}$. Las dos comparaciones reducidas, tomadas en sus dominios naturales, tienen conjunto $\mathbb{R}$ y coinciden siempre. Las originales tienen el mismo conjunto exactamente si $a = b$. Si $a \neq b$, a pertenece solo a S_b y b solo a S_a; su diferencia simétrica es $\{a, b\}$. Sobre el dominio común $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ ambas son equivalentes. Cancelar puede producir fórmulas iguales sin producir funciones o problemas iguales.

Solución 086. El dominio es $x \neq a$; allí la expresión es $x - b$, luego $S = (-\infty, b] \setminus \{a\}$. Si $a < b$, se escribe $(-\infty, a) \cup (a, b]$; si $a = b$, queda $(-\infty, b)$; si $a > b$, queda $(-\infty, b]$. Cada punto conservado cumple la comparación lineal y el denominador no nulo; ningún otro puede cumplir ambas condiciones. Esta clasificación distingue un hueco interior, un extremo eliminado y una exclusión fuera del conjunto solución.

Solución 087. El dominio exige $x \neq a$ y el cociente es -1 en él. La inequación es $-(x - b) \geq 0$, equivalente a $x \leq b$. Por tanto, $S = (-\infty, a) \cup (a, b]$. En b vale cero y se admite; en a no existe. Normalizar $a - x = -(x - a)$ evita perder el signo negativo. Como verificación, el producto original tiene el signo opuesto al de $x - b$ en cada región permitida.

Solución 088. El dominio exige $x \neq a, c$. Cancelar el cuadrado da $(x - b)/(x - c)$, cuyo signo es positivo para $x < b$ o $x > c$, y negativo entre b, c. El cero b se excluye por ser estricta; el polo c por dominio. Así $S = [(-\infty, b) \cup (c, \infty)] \setminus \{a\}$. Si a está entre b, c, coincide con un extremo o cae fuera de ambas regiones, la notación sigue siendo válida; si está en una región admitida, se crea un hueco. No hace falta inventar una rama diferente para cada fórmula si la diferencia de conjuntos conserva todos los casos.

Solución 089. La expresión es $x^2 - t^2$. La comparación equivale a $|x| \leq |t|$, pues ambos módulos son no negativos y comparar sus cuadrados es reversible. Por tanto $S(t) = [-|t|, |t|]$. Para $t = 0$ se reduce al punto $\{0\}$; para $t \neq 0$ es un intervalo de longitud positiva. Los extremos anulan el producto. Usar $[-t, t]$ sin controlar el signo del parámetro produciría extremos invertidos para $t < 0$.

Solución 090. Siempre $x \neq 1$. Si $t < 1$, el cociente es positivo fuera del tramo entre sus puntos críticos y cero en t, de modo que $S = (-\infty, t] \cup (1, \infty)$. Si $t > 1$, resulta $S = (-\infty, 1) \cup [t, \infty)$. Si $t = 1$, el cociente vale uno en todo el dominio y $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Los extremos de numerador se admiten y los del denominador no; al fusionarse no puede conservarse el antiguo cero como punto definido.

Solución 091. Si $x \neq t, 1$, el numerador es positivo y el signo es el del denominador: la comparación se cumple para $x < 1$. Si $t \neq 1$, también $x = t$ da cero y se admite. Por tanto $S = (-\infty, 1) \cup \{t\}$ para $t \neq 1$, entendiendo que el punto ya pertenece al rayo si $t < 1$. Para $t = 1$, la simplificación a $x - 1$ conserva el hueco y da $S = (-\infty, 1)$. Un cero de multiplicidad par puede aportar un punto aislado cuando $t > 1$.

Solución 092. Si $t < 1$, los factores tienen igual signo para $x \leq t$ o $x \geq 1$, y $S = (-\infty, t] \cup [1, \infty)$. Si $t > 1$, queda $S = (-\infty, 1] \cup [t, \infty)$. Si $t = 1$, el producto es $(x - 1)^2 \geq 0$ para todo real, por lo que $S = \mathbb{R}$. Los ceros se incluyen y las regiones exteriores se fusionan cuando desaparece el intervalo intermedio. No hay restricción de dominio porque la expresión es polinómica.

Solución 093. Con $u = (x-h)^2 \geq 0$, la inequación auxiliar da $A \leq u \leq B$, ya dentro de la imagen. Volver exige $\sqrt{A} \leq |x-h| \leq \sqrt{B}$. Su preimagen es $[h-\sqrt{B}, h-\sqrt{A}] \cup [h+\sqrt{A}, h+\sqrt{B}]$. Los cuatro extremos hacen cero un factor y se admiten; las regiones entre ellos tienen los signos fijados por el intervalo auxiliar. La sustitución identifica dos ramas pero no autoriza descartar la negativa.

Solución 094. Con $u = |x-h|+1$, la imagen es $[1,\infty)$. El producto $(u-2)(u-4) < 0$ da $2 < u < 4$, compatible con esa imagen. Por tanto $1 < |x-h| < 3$, cuya preimagen es $(h-3, h-1) \cup (h+1, h+3)$. Los extremos producen producto cero y se excluyen. En cada intervalo admitido el valor auxiliar está entre sus dos raíces, y fuera no lo está; esta reconstrucción certifica toda la solución.

Solución 095. El dominio exige $x \neq h$ y la positividad es automática allí. La cota superior se multiplica por el cuadrado positivo: $1 \leq 4(x-h)^2$, equivalente a $|x-h| \geq 1/2$. Así $S = (-\infty, h-1/2] \cup [h+1/2, \infty)$. Los extremos cumplen la igualdad y el centro no pertenece a ninguna región ni al dominio. La imagen de $u = 1/(x-h)^2$ es $(0,\infty)$; cero no es un valor que pueda reconstruirse como un x finito.

Solución 096. El denominador es siempre positivo. Con $v = (x-h)^2 \geq 0$, $u = v/(1+v)$ tiene imagen $[0,1)$: es no negativo, menor que uno y cada u de ese intervalo da $v = u/(1-u)$. Si $c < 0$, no hay soluciones; si $c \geq 1$, todos los reales sirven. Para $0 \leq c < 1$, $v \leq c(1+v)$ equivale a $v \leq c/(1-c)$, luego $S = [h-\sqrt{c/(1-c)}, h+\sqrt{c/(1-c)}]$. Incluye $c = 0$, que da solo h. Las cuatro ramas cubren todos los parámetros sin dividir por un número de signo desconocido.

Capítulo 23

Funciones exponenciales y logaritmos

C22 nos enseñó a conservar dominio y orden al transformar una condición. Ahora estudiaremos dos funciones que convierten productos en sumas y permiten recuperar exponentes. La estructura de funciones e inversas será tan importante como la destreza de cálculo.

23.1. De la potencia a la función exponencial

Si una cantidad aumenta tres unidades en cada paso, su evolución puede escribirse $L(n) = L(0) + 3n$. Si se multiplica por tres en cada paso, se escribe $M(n) = M(0)3^n$. En el primer caso se repite una suma; en el segundo se repite un producto. Esa diferencia se conserva aunque ambos modelos coincidan en algunos valores.

¿Dónde está la variable? Compare x^3 con 3^x. En x^3 varía la base y permanece fijo el exponente. En 3^x permanece fija la base y varía el exponente. Son funciones diferentes, con reglas de variación diferentes.

x	x^3	3^x
-1	-1	$1/3$
0	0	1
1	1	3
2	8	9
3	27	27

La coincidencia en $x = 3$ no identifica las funciones. Una igualdad de funciones exige coincidencia para todos los argumentos del dominio, como sabemos desde el estudio de funciones. La tabla proporciona aquí contraejemplos a esa igualdad.

Lo que C18 ya permite. Para una base positiva a, C18 define a^n con exponente entero y $a^{m/n}$ con exponente racional mediante raíces principales. Por ejemplo, $9^{1/2} = 3$, $9^{-1} = 1/9$ y $9^{3/2} = 27$.

También conocemos las leyes $a^{r+s} = a^r a^s$ y $(a^r)^s = a^{rs}$ en el régimen racional disponible. La primera muestra cómo se traduce una suma de exponentes en un producto de valores. En particular, $a^{r+1}/a^r = a$: avanzar una unidad en el exponente multiplica por un factor constante.

Para $a = 3$, los valores en enteros forman la sucesión $1, 3, 9, 27, \ldots$. No hay una diferencia constante entre términos sucesivos; hay un cociente constante. Ésta es la señal algebraica de variación exponencial.

Una tasa y un factor no son el mismo dato. Si se añade el 20 % del valor presente en cada paso, el nuevo valor es $Q + 0.20Q = 1.20Q$. El factor es 1.20, no 0.20. Tras n pasos, $Q(n) = Q(0)(1.20)^n$, para n entero no negativo.

Si se retira el 20 % en cada paso, queda $0.80Q$. La expresión correspondiente es $Q(0)(0.80)^n$. El porcentaje se aplica cada vez al valor presente, no siempre al valor inicial.

Estos son modelos matemáticos hipotéticos. Su fórmula describe la regla estipulada; no demuestra que una población o un objeto real siga esa regla.

Lo que todavía falta. La expresión $3^{\sqrt{2}}$ no se define mediante una raíz de índice entero y una potencia entera como las de C18. La función que buscamos debe admitir todo $x \in \mathbb{R}$, no sólo exponentes racionales.

Una tabla de exponentes decimales puede sugerir valores, pero una sugerencia no demuestra existencia, unicidad ni las leyes para exponentes irracionales. En la siguiente sección explicitaremos el resultado de extensión que admitiremos y separaremos ese resultado de las consecuencias que sí probaremos aquí.

Prueba de estrés. La expresión $(-3)^x$ no define una función real para todos los reales: en $x = 1/2$ exigiría una raíz real de un número negativo. Que algunos exponentes enteros produzcan números reales no resuelve ese problema.

Por otro lado, 1^x sí puede extenderse como la constante 1. Su comportamiento no permite recuperar el exponente: todos los argumentos tienen el mismo valor. Esta degeneración será decisiva cuando definamos el logaritmo.

Recuperación breve. Una cantidad hipotética comienza en 50 y se duplica en cada paso. Escriba sus valores después de cero, uno y dos pasos. Compare con sumar 50 en cada paso.

Respuesta razonada. El modelo multiplicativo es $Q(n) = 50\,2^n$, con valores $50, 100, 200$. El aditivo es $L(n) = 50 + 50n$, con valores $50, 100, 150$. Coinciden en dos argumentos y difieren en el tercero; la regla multiplicativa no puede sustituirse por la aditiva.

Qué debemos conservar. La posición de la variable decide el tipo de función. Una exponencial mantiene fija la base y hace variar el exponente; en pasos iguales produce factores iguales. Las potencias racionales preparan esa idea, pero no construyen por sí solas la función sobre todo $\mathbb{R}$.

23.2. Exponente real: alcance y propiedades admitidas

Queremos utilizar a^x incluso cuando x es irracional. Para hacerlo con honestidad matemática debemos declarar qué resultado aceptamos y qué parte de su prueba dejamos para el análisis.

Resultado de extensión que admitimos. Para cada $a > 0$ existe una función de exponente real $x \mapsto a^x$, compatible con las potencias racionales de C18. Admitimos su existencia y las siguientes propiedades:

- $a^x > 0$ para todo real x; $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.
- $a^{x+y} = a^x a^y$ y $(a^x)^y = a^{xy}$ para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Para $a, b > 0$, $(ab)^x = a^x b^x$.
- Si $a > 1$, la función es estrictamente creciente; si $0 < a < 1$, estrictamente decreciente.
- Si $a \neq 1$, su imagen es exactamente $(0, \infty)$: todo número positivo aparece como valor.

La extensión estándar es única entre las extensiones que conservan las leyes y la monotonía indicadas; también admitimos ese resultado. Para $a = 1$ obtenemos la constante 1, cuya imagen es $\{1\}$.

La existencia de esta extensión y sus propiedades fundamentales se admiten en este capítulo. Su construcción rigurosa, incluida la justificación de que se alcanzan todos los positivos, corresponde al tratamiento de los reales y las funciones en cálculo/análisis. No la deduciremos de una gráfica o de una lista de aproximaciones.

Esto no significa que todas las reglas posteriores sean admisiones. Desde estas propiedades podremos demostrar identidades, definir la inversa y justificar transformaciones de ecuaciones e inequaciones.

Definición de función exponencial. Para una base $a > 0$ con $a \neq 1$, llamamos **función exponencial de base** a a $E_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $E_a(x) = a^x$.

El codominio positivo coincide aquí con la imagen. La exclusión $a \neq 1$ garantiza que la función no sea constante y permitirá invertirla. La condición $a > 0$ garantiza que se trata de la exponencial real definida para todos los exponentes reales.

Consecuencias que ya podemos probar. Como $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, se obtiene $a^{-x} = 1/a^x$. El denominador nunca es cero por positividad.

De ahí,

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y} = a^{x-y}.$$

La ley del producto para bases positivas da $(a/b)^x = a^x/b^x$ cuando $a, b > 0$. Se aplica a a y $1/b$ y se usa $(1/b)^x = b^{-x}$.

Por ejemplo, $5^{\sqrt{2}}/5^{\sqrt{2}-1} = 5$. El resultado no exige aproximar $\sqrt{2}$: depende de una identidad válida para exponentes reales.

Argumentos diferentes, misma regla. La ley $a^{u+v} = a^u a^v$ puede utilizarse con $u = 2x$ y $v = -3$, de modo que $a^{2x-3} = a^{2x}/a^3$. También $(a^2)^x = a^{2x}$.

No puede utilizarse para distribuir la exponencial sobre una suma de valores: $a^x + a^y$ no es, en general, a^{x+y}. Para $a = 2$ y $x = y = 1$, la coincidencia $2 + 2 = 4$ resulta accidental; con $x = y = 2$, tenemos $4 + 4 = 8$ mientras $2^4 = 16$. Un contraejemplo basta para refutar la supuesta identidad.

Aproximar y demostrar. Una calculadora puede dar una aproximación a $2^{\sqrt{2}}$. Si se escribe un decimal truncado, se debe usar $\approx$, no sustituirlo silenciosamente por una igualdad exacta.

Los decimales son útiles para leer escala o ubicar valores. La solución exacta puede seguir siendo $2^{\sqrt{2}}$, y las leyes permiten operar con ella sin convertirla a decimal. Tampoco muchos valores numéricos favorables demuestran una identidad para todos los reales.

Prueba de estrés de las hipótesis. La positividad de la base es parte de las leyes aquí admitidas. No trasladamos automáticamente $(a^x)^y = a^{xy}$ a bases negativas. Por ejemplo, $((-1)^2)^{1/2} = 1$ y $(-1)^{2(1/2)} = -1$. Ambas expresiones concretas existen, pero no coinciden.

El capítulo estudia la familia de bases positivas. Las raíces reales con bases negativas de C18 conservan sus propias condiciones; una fórmula escrita sin ellas puede ser falsa.

Recuperación breve. Simplifique $7^{t+2}/7^t$ y $7^t 7^{-t}$ para cualquier real t. Identifique qué parte de su argumento usa el resultado admitido.

Respuesta razonada. La ley del cociente da $7^2 = 49$ y la del producto da $7^0 = 1$. El argumento usa las leyes exponenciales para exponentes reales y la positividad que autoriza dividir. No requiere construir cada valor 7^t ni suponer que t sea racional.

Qué debemos conservar. Trabajaremos sobre una extensión real declarada, con hipótesis y propiedades precisas. Su construcción se difiere; sus consecuencias algebraicas se demuestran. Esta distinción permite avanzar con rigor sin presentar aproximaciones como pruebas.

Registrar la dependencia de una prueba. Las leyes de las potencias reales se admiten en §23.2; usarlas para deducir una consecuencia no convierte esa consecuencia en una nueva admisión. Por ejemplo, la inyectividad de a^x para $a \neq 1$ se demuestra desde la monotonía estricta admitida: si $x < y$ o $y < x$, los valores son distintos. **Control resuelto:** de $a^{2x+1} = a^5$, con $a > 0$, $a \neq 1$, concluimos $2x + 1 = 5$ y $x = 2$. La comprobación es $a^5 = a^5$. Si $a = 1$, todos los reales verifican la ecuación y la inferencia por inyectividad deja de estar disponible. Una prueba debe declarar su punto de apoyo y conservar las hipótesis, sin presentar la construcción de la exponencial real como si ya hubiese sido demostrada.

23.3. Monotonía, inyectividad e imagen

El orden de C22 permite comparar valores exponenciales sin calcularlos. La comparación cambia según la base esté por encima o por debajo de 1.

Dos orientaciones. Para $a > 1$, la monotonía admitida dice que $u < v$ implica $a^u < a^v$. Para $0 < a < 1$, implica $a^u > a^v$. Al aumentar el exponente, la primera función aumenta y la segunda disminuye.

Base	Valores en $-1, 0, 1, 2$	Orientación
2	$1/2, 1, 2, 4$	creciente
$1/2$	$2, 1, 1/2, 1/4$	decreciente

La tabla ilustra propiedades válidas para todos los reales; no las prueba. Esas propiedades provienen del resultado admitido en §23.2.

Por qué la monotonía estricta da inyectividad. Suponga $a^u = a^v$ con base válida. Si $u < v$, la monotonía estricta produciría valores distintos; si $u > v$, también. La tricotomía deja únicamente $u = v$.

La vuelta es inmediata: exponentes iguales dan valores iguales. Por tanto, $a^u = a^v \iff u = v$. Éste es el fundamento de «igualar exponentes» cuando las bases coinciden.

Por ejemplo, $3^{2x-1} = 3^{x+4}$ equivale a $2x - 1 = x + 4$, así que $x = 5$. No se canceló una letra: se aplicó la inyectividad de una función conocida.

La base debe ser la misma y válida. De $2^u = 4^v$ no se sigue $u = v$; primero se escribe $4^v = 2^{2v}$ y entonces se obtiene $u = 2v$.

Equivalencias de orden. Para $a > 1$, también es cierta la vuelta de $u < v \Rightarrow a^u < a^v$. Si los valores satisfacen esa comparación, las alternativas $u = v$ y $u > v$ la contradicen. Así,

$$a^u < a^v \iff u < v \quad (a > 1), \qquad a^u < a^v \iff u > v \quad (0 < a < 1).$$

Las relaciones no estrictas incluyen además la igualdad. Estas equivalencias permiten transportar un problema de valores a uno de exponentes.

Por ejemplo, $(1/3)^{2x} > (1/3)^4$ equivale a $2x < 4$, de modo que $x < 2$. Hay una inversión por monotonía decreciente; dividir después por $2 > 0$ conserva la orientación.

Positividad e imagen. Ninguna exponencial de base positiva vale cero ni toma valores negativos. La ecuación $2^x = -5$ no tiene solución real y $2^x = 0$ tampoco.

En cambio, $2^x = 5$ tiene exactamente una solución: existencia porque 5 pertenece a la imagen positiva; unicidad por inyectividad. Todavía no hemos nombrado esa solución, pero sabemos que está entre 2 y 3 porque $2^2 = 4 < 5 < 8 = 2^3$.

La sobreyectividad no se deduce sólo de la monotonía. Una función puede ser estrictamente creciente sin cubrir todo su codominio. Aquí la cobertura de $(0, \infty)$ es una propiedad adicional admitida en §23.2.

Comparar con uno. Como $a^0 = 1$, para $a > 1$ tenemos $a^x > 1$ exactamente cuando $x > 0$, y $0 < a^x < 1$ exactamente cuando $x < 0$. Para $0 < a < 1$, esas conclusiones se invierten: exponentes positivos producen valores entre 0 y 1.

Así, sin calcular un decimal, $5^{-2/3} < 1$ y $(1/5)^{-2/3} > 1$. En ambos casos los valores siguen siendo positivos.

Prueba de estrés: la base constante. Con $a = 1$, la igualdad $1^u = 1^v$ siempre es verdadera, aunque $u \neq v$. La ecuación $1^x = 1$ tiene todo $\mathbb{R}$ como solución y $1^x = 2$ tiene solución vacía. No se puede igualar exponentes en este régimen.

Si la base es un parámetro, su restricción debe fijarse antes de usar inyectividad. La notación exponencial no reemplaza esa comprobación.

Recuperación breve. Resuelva $4^{x-2} = 1$ y $(1/4)^{x-2} \geq 1$. Explique la diferencia.

Respuesta razonada. En la primera, $1 = 4^0$ e inyectividad da $x = 2$. En la segunda, $1 = (1/4)^0$ y la monotonía decreciente da $x - 2 \leq 0$, de modo que $S = (-\infty, 2]$. La igualdad selecciona un exponente; la comparación de orden selecciona una región.

Qué debemos conservar. La monotonía estricta prueba inyectividad y gobierna las comparaciones. La imagen positiva decide existencia y descarta valores imposibles. Igualdad, orden y cobertura son propiedades relacionadas, pero cumplen obligaciones diferentes en una resolución.

23.4. Transformaciones y lectura funcional

Una función exponencial puede aparecer trasladada, multiplicada por una constante o compuesta con otra expresión. Reconocer esas operaciones permite determinar su dominio e imagen antes de resolver una ecuación.

Trasladar el argumento o el valor. Compare $f(x) = 2^{x-3}$ y $g(x) = 2^x - 3$. En la primera se resta dentro del argumento exponencial; en la segunda se resta al valor.

Como $f(3) = 1$ y $g(3) = 5$, son funciones diferentes. La identidad $2^{x-3} = 2^x/8$ muestra que trasladar el argumento puede interpretarse también como escalar los valores. Restar 3 a los valores produce otra operación.

x	2^x	2^{x-3}	$2^x - 3$
0	1	1/8	−2
3	8	1	5
4	16	2	13

La lectura mediante pares conserva la distinción entre coordenada de entrada y valor de salida. No hace falta una gráfica para decidir que las transformaciones son distintas.

Imagen de una familia trasladada. Considere $F(x) = A\,a^{kx+h} + B$, con $a > 0$, $a \neq 1$, $A \neq 0$ y $k \neq 0$. El argumento afín $kx + h$ recorre todo $\mathbb{R}$: para un real u, basta tomar $x = (u - h)/k$.

Por ello a^{kx+h} recorre todos los positivos. Si $A > 0$, F tiene imagen (B, ∞); si $A < 0$, tiene imagen $(-\infty, B)$. El valor B nunca se alcanza porque el término exponencial no se anula.

Ésta es una prueba de imagen: indica qué valores aparecen y construye una preimagen a partir de la cobertura de la exponencial. No se infiere sólo de la apariencia de una curva.

Para $F(x) = 3\,2^{x-1} - 4$, el dominio es $\mathbb{R}$ y la imagen $(-4, \infty)$. Una ecuación $F(x) = -4$ no tiene solución; una ecuación $F(x) = 8$ sí tiene una, porque $8 > -4$.

Orientación bajo composición y escala. Si $a > 1$ y $k > 0$, aumentar x aumenta $kx + h$ y luego aumenta la exponencial. Si $k < 0$, la primera operación invierte el orden. Para $0 < a < 1$, la exponencial agrega otra inversión.

Multiplicar por $A < 0$ invierte otra vez, mientras sumar B no cambia la orientación. Podemos contar esas inversiones porque cada una está justificada por C22 o §23.3.

En $F(x) = -2(1/3)^{2x+1} + 5$, el argumento es creciente, la exponencial decreciente y el multiplicador negativo invierte: F es creciente. Su imagen es $(-\infty, 5)$. Ser creciente no obliga a que sus valores sean positivos.

Argumentos con dominio propio. La función $H(x) = 2^{1/(x-2)}$ sólo existe si $x \neq 2$. La exponencial exterior admite todo real, pero la expresión interior no. Así, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

El argumento $1/(x-2)$ recorre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: no vale cero y cualquier $u \neq 0$ tiene preimagen $x = 2 + 1/u$. Por inyectividad, el valor exponencial omitido es $2^0 = 1$. La imagen es $(0, \infty) \setminus \{1\}$.

La regla de dominio de composición conserva todas las condiciones interiores. No debemos responder automáticamente «dominio $\mathbb{R}$» sólo porque aparezca una exponencial.

Casos degenerados. En la familia $A\,a^{kx+h} + B$, si $A = 0$, la función vale B allí donde la expresión original esté definida. Si $k = 0$ y el resto de parámetros es válido, es constante $Aa^h + B$. Las fórmulas de imagen anteriores se justificaron con $A \neq 0$ y $k \neq 0$, de modo que no se aplican sin cambios a esos casos.

Si una escritura original contiene un argumento indefinido, multiplicar por cero no le da automáticamente un valor allí: se conserva el dominio de la expresión original, como en C20.

Recuperación breve. Determine dominio, imagen y orientación de $F(x) = 4 - 3\,2^{-x}$.

Respuesta razonada. El dominio es $\mathbb{R}$. Como $-x$ recorre todos los reales, 2^{-x} recorre todos los positivos, así que la imagen es $(-\infty, 4)$. Aumentar x disminuye $-x$ y la exponencial; multiplicar por -3 invierte esa disminución. Por tanto, F es estrictamente creciente. El valor 4 se excluye porque la exponencial nunca vale cero.

Qué debemos conservar. Leer una transformación exige seguir entrada, función exterior y salida. El dominio se hereda desde el argumento; la imagen se transporta mediante escala y traslación; la orientación se determina por operaciones que conservan o invierten el orden. Las hipótesis no nulas separan las funciones invertibles de sus degeneraciones.

23.5. El logaritmo como función inversa

La ecuación $2^x = 7$ tiene una única solución real, pero no podemos nombrarla con un exponente entero sencillo. El logaritmo dará un nombre exacto a ese exponente; no es una aproximación ni una nueva operación sin relación con las anteriores.

Existencia y unicidad antes de la notación. Fijemos $a > 0$, $a \neq 1$. Para cada $b > 0$, la imagen de E_a garantiza un real y con $a^y = b$. Su inyectividad garantiza que ese real sea único.

Definición. Llamamos **logaritmo de b en base a** a ese exponente único y lo escribimos $\log_a b$. Así,

$$y = \log_a b \iff a^y = b, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Se trata de la inversa $L_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de E_a. En la forma exponencial, a es la base, y el exponente y b el valor. En la forma logarítmica, la base sigue siendo a, el argumento es b y el valor es el exponente y.

Una traducción que conserva tres papeles.

Forma exponencial	Forma logarítmica	Lectura
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = 4$	exponente que produce 81
$5^{-2} = 1/25$	$\log_5(1/25) = -2$	un argumento positivo puede dar logaritmo negativo
$(1/2)^3 = 1/8$	$\log_{1/2}(1/8) = 3$	una base menor que uno es válida
$9^{1/2} = 3$	$\log_9 3 = 1/2$	el exponente puede ser fraccionario

En particular, $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$, porque $a^0 = 1$ y $a^1 = a$. Para $2^x = 7$, la solución exacta es $x = \log_2 7$. La notación identifica completamente el número mediante una propiedad de existencia y unicidad.

Por qué no hay logaritmo real de cero o negativo. Para todo real y, $a^y > 0$. Por ello no existe un exponente que produzca 0 o un número negativo. Las expresiones $\log_a 0$ y $\log_a(-3)$ no están definidas en nuestro marco real.

Que el valor del logaritmo pueda ser negativo no contradice esa condición: el argumento debe ser positivo, mientras el resultado puede ser cualquier real. $\log_2(1/8) = -3$ es un ejemplo que distingue ambos papeles.

Por qué la base uno no sirve. La función 1^y vale 1 para todos los exponentes. Si el argumento es 1, no hay un exponente único; si el argumento es diferente de 1, no hay ninguno. En ningún caso se obtiene una inversa de la exponencial constante.

Por eso $\log_1 b$ no es una función logarítmica válida. La restricción de la base no es una dificultad de la calculadora: es una obligación matemática anterior al cálculo.

Soluciones por definición. Considere $\log_3(x + 2) = 2$. Primero se exige $x + 2 > 0$, es decir $x > -2$. Dentro de ese dominio, la definición da $x + 2 = 3^2 = 9$, de modo que $x = 7$. Ese valor está en el dominio y sustituirlo recupera $\log_3 9 = 2$.

La definición también permite que la base sea la incógnita, si se conservan sus restricciones. Para $\log_x 16 = 2$, el dominio es $x > 0$, $x \neq 1$. La forma exponencial da $x^2 = 16$; de los candidatos ± 4 sólo 4 es una base admisible. Por tanto, $S = \{4\}$.

Prueba de estrés de la traducción. De $\log_2 8 = 3$ no se obtiene $2^8 = 3$. Esa escritura intercambia argumento y exponente. La verificación por la definición muestra inmediatamente el error: el exponente buscado es 3, y $2^3 = 8$.

Tampoco $\log_a b$ significa dividir b entre a. Con $a = 2, b = 8$, el logaritmo vale 3 y el cociente vale 4.

Recuperación breve. Evalúe $\log_4(1/8)$ y determine si $\log_{-4} 16$ pertenece al marco de este capítulo.

Respuesta razonada. Como $4^{-3/2} = (2^2)^{-3/2} = 2^{-3} = 1/8$, se obtiene $\log_4(1/8) = -3/2$. La segunda expresión tiene base negativa y no es un logaritmo real de base válida. No se rescata la función por observar que alguna potencia entera de -4 pueda ser positiva.

Qué debemos conservar. Un logaritmo es un exponente único, definido mediante una inversa. Su argumento es positivo, su base positiva y distinta de uno, y su valor puede ser cualquier real. Traducir de forma exponencial a logarítmica conserva los papeles de los tres números.

23.6. Dominios, imagen y composiciones inversas

Una operación inversa sólo deshace la original en el dominio donde ambas tienen sentido. Esa condición merece escribirse incluso cuando los símbolos parezcan cancelarse.

Las dos identidades inversas. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el número a^x es positivo. Su logaritmo está definido y, por la unicidad del exponente, $\log_a(a^x) = x$.

Para todo $t > 0$, el número $\log_a t$ está definido y su propiedad definitoria da $a^{\log_a t} = t$. Esta segunda identidad no está definida en $t = 0$ ni en $t < 0$.

En términos de composición, $L_a \circ E_a$ es la identidad de $\mathbb{R}$ y $E_a \circ L_a$ es la identidad de $(0, \infty)$. Son identidades sobre conjuntos diferentes.

Por ejemplo, $2^{\log_2(x-3)} = x - 3$ sólo en $x > 3$. La expresión simplificada $x - 3$ puede escribirse para todo real, pero eso no amplía el dominio de la expresión original.

Dominio de un logaritmo compuesto. Para $\log_a G(x)$, conservamos el dominio de G y añadimos $G(x) > 0$. No basta exigir que G esté definida.

En $F(x) = \log_2((x-1)/(x+2))$, la racional exige $x \neq -2$ y el argumento positivo exige $(x-1)/(x+2) > 0$. Por C22, el cociente es positivo para $x < -2$ o $x > 1$. El dominio de F es $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$.

El punto 1 no es un polo, pero produce argumento cero y queda excluido. El punto -2 es un polo y queda excluido antes de preguntar por el logaritmo. Ambos extremos son abiertos por razones diferentes.

Una composición dentro de otra. Para $H(x) = \log_2(\log_3 x)$, el logaritmo interior exige $x > 0$. El exterior exige además $\log_3 x > 0$. Como la base $3 > 1$ y $\log_3 1 = 0$, esa condición equivale a $x > 1$. El dominio completo es $(1, \infty)$.

Si se cambia el interior por $\log_{1/3} x$, su positividad equivale a $0 < x < 1$. La base modifica el dominio de la composición porque modifica el signo del valor interior.

No confundimos aquí «argumento positivo» con «logaritmo positivo». Para un logaritmo simple basta el primero; si ese logaritmo es argumento de otro, aparece también el segundo.

Un logaritmo en un denominador. En $J(x) = 1/\log_2(x-1)$ necesitamos $x - 1 > 0$ y $\log_2(x-1) \neq 0$. El logaritmo vale cero exactamente cuando $x - 1 = 1$. Por tanto, $D = (1, 2) \cup (2, \infty)$.

La exclusión $x = 2$ proviene de la división exterior. El argumento del logaritmo es positivo allí, pero el valor resultante no puede usarse como denominador.

Imagen del logaritmo y de una restricción. La función $L_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cubre todo $\mathbb{R}$: dado $y \in \mathbb{R}$, el argumento a^y produce $\log_a(a^y) = y$. Esta prueba utiliza la primera identidad inversa.

Una restricción de dominio modifica la imagen. Para $\log_2 x$ con $x \in [1, 8]$, escriba $y = \log_2 x$, de modo que $x = 2^y$. Como la exponencial de base 2 es creciente, $1 \leq 2^y \leq 8$ equivale a $0 \leq y \leq 3$. Recíprocamente, cada $y \in [0, 3]$ tiene preimagen $x = 2^y \in [1, 8]$. Por tanto, la imagen es $[0, 3]$. La prueba usa la monotonía exponencial ya establecida; la monotonía de la inversa se demostrará en §23.7.

Prueba de estrés: simplificar sin recuperar restricciones. La expresión $2^{\log_2(x^2-1)}$ se simplifica a $x^2 - 1$ cuando $x^2 - 1 > 0$, esto es $x < -1$ o $x > 1$. En $x = 0$, el polinomio simplificado vale -1, pero la expresión original no existe.

La igualdad de expresiones se afirma sobre el dominio común. La simplificación puede ofrecer una fórmula más extendida; usarla en valores nuevos cambia el objeto original.

Recuperación breve. Determine el dominio de $\log_5(\sqrt{x+4}-2)$.

Respuesta razonada. La raíz exige $x \geq -4$. El argumento debe ser estrictamente positivo: $\sqrt{x+4} > 2$. Ambos miembros son no negativos, así que cuadrar equivale a $x+4 > 4$, es decir $x > 0$. Esta última condición ya garantiza la existencia de la raíz. El dominio es $(0, \infty)$; en 0 el argumento vale cero y se excluye.

Qué debemos conservar. En una composición, cada capa aporta sus condiciones. Las identidades inversas conservan los dominios originales; no convierten una expresión indefinida en un valor nuevo. La imagen también se transporta con cuidado cuando se restringe el dominio.

Leer las capas antes de aplicar una inversa. Para $F = \log_a(a^{\log_a G(x)})$, primero debe existir G, luego ser positivo para el logaritmo interior. La exponencial produce entonces un positivo y el logaritmo exterior existe. Solo después se reduce a $\log_a G(x)$. **Control resuelto:** si $G(x) = (x-r)/(x-s)$ con $r < s$, el dominio es $(-\infty, r) \cup (s, \infty)$. La reducción conserva ese mismo dominio, porque el cociente debe ser positivo y estar definido. Si en cambio escribimos $a^{\log_a G(x)} = G(x)$, la fórmula racional final tiene un dominio natural mayor, pero la composición no lo adquiere. Las operaciones inversas deshacen valores admisibles; no reparan capas originalmente indefinidas.

23.7. Monotonía y signo del logaritmo

Si la exponencial permite comparar exponentes, su inversa permite comparar argumentos. Debemos demostrar cuál es la orientación de esa inversa, sin deducirla únicamente de una gráfica.

Inversa de una exponencial creciente. Sean $0 < u < v$ y $a > 1$. Escribamos $r = \log_a u$ y $s = \log_a v$, de modo que $a^r = u$ y $a^s = v$.

Si $r = s$, tendríamos $u = v$, contradicción. Si $r > s$, la exponencial creciente daría $u > v$, otra contradicción. Por tricotomía, $r < s$. Así, $\log_a$ es estrictamente creciente.

La vuelta también se obtiene mediante la exponencial: si $\log_a u < \log_a v$, aplicar a^x conserva el orden y produce $u < v$. Ambas operaciones están definidas en los dominios indicados.

Inversa de una exponencial decreciente. Ahora sea $0 < a < 1$. Con los mismos $u < v$ y exponentes r, s, si $r \leq s$, la exponencial decreciente daría $u \geq v$. Por tanto, $r > s$.

Así, $\log_a$ es estrictamente decreciente. La equivalencia completa es $\log_a u < \log_a v \iff u > v$ para argumentos positivos. También es inyectiva: valores logarítmicos iguales producen argumentos iguales al aplicar la exponencial.

Signo respecto de uno. Como $\log_a 1 = 0$, para $a > 1$ el logaritmo es negativo en $(0, 1)$, cero en 1 y positivo en $(1, \infty)$. Para $0 < a < 1$, los signos se invierten.

Argumento t	$\log_2 t$	$\log_{1/2} t$
$0 < t < 1$	negativo	positivo
$t = 1$	cero	cero
$t > 1$	positivo	negativo

La condición $t > 0$ se conserva en toda la tabla. Un valor negativo del logaritmo nunca implica argumento negativo.

Comparar sin aproximaciones. Para comparar $\log_2 5$ y $\log_2 7$, basta $5 < 7$ y la monotonía creciente. Para comparar $\log_{1/2} 5$ y $\log_{1/2} 7$, se invierte: el primero es mayor.

También podemos acotar $\log_3 20$ porque $9 < 20 < 27$. Aplicar el logaritmo creciente da $2 < \log_3 20 < 3$. Una cota exacta comunica información sin calcular un decimal.

No comparamos automáticamente $\log_2 5$ con $\log_3 5$ mediante sus argumentos iguales: las funciones son diferentes. Más adelante el cambio de base permitirá relacionarlas.

Transportar una comparación con un número real. Para $G(x) > 0$, la comparación $\log_a G(x) \le c$ equivale a $G(x) \le a^c$ si $a > 1$, y a $G(x) \ge a^c$ si $0 < a < 1$.

La prueba consiste en escribir $c = \log_a(a^c)$ y aplicar la equivalencia de orden entre argumentos positivos. La restricción $G(x) > 0$ no desaparece después de transformar.

Por ejemplo, $\log_{1/2}(x-1) \le 2$ exige inicialmente $x > 1$. La orientación decreciente da $x - 1 \ge 1/4$, de modo que $S = [5/4, \infty)$. En ese caso la desigualdad transformada implica la restricción original, pero se comprobó antes de descartarla como redundante.

Prueba de estrés. La frase «el logaritmo es creciente» omite una hipótesis. Para base $1/2$, $\log_{1/2}(1/4) = 2$ y $\log_{1/2}(1/2) = 1$: el argumento aumenta y el valor disminuye.

Una demostración o resolución que aplique monotonía debe identificar la base. Si depende de un parámetro, los regímenes pueden exigir respuestas distintas.

Recuperación breve. Sin decimales, determine el signo de $\log_7(1/3)$ y de $\log_{1/7}(1/3)$. Después resuelva $\log_7(x+1) > 0$.

Respuesta razonada. El argumento $1/3$ está entre cero y uno: el primer logaritmo es negativo y el segundo positivo. La inequación exige $x + 1 > 0$ y, por base creciente, $x + 1 > 1$. Su solución es $(0, \infty)$; la condición final implica el dominio inicial.

Qué debemos conservar. La inversa conserva la orientación de una función monótona: creciente con creciente y decreciente con decreciente. El signo del logaritmo se lee comparando el argumento con uno. Al transportar desigualdades, mantenemos positividad y controlamos la base.

23.8. Leyes de productos, cocientes y potencias

Los logaritmos convierten estructuras multiplicativas en estructuras aditivas. Esa afirmación necesita hipótesis: todos los argumentos de los logaritmos que aparezcan deben ser positivos.

Ley del producto y su demostración. Sean $u, v > 0$ y una base válida a. Defina $r = \log_a u$ y $s = \log_a v$. Entonces $u = a^r$ y $v = a^s$, de modo que $uv = a^r a^s = a^{r+s}$.

El exponente que produce uv es único. Por definición, $\log_a(uv) = r+s = \log_a u + \log_a v$. Esta prueba muestra de dónde proviene la suma: de la suma de exponentes en la ley exponencial.

Por ejemplo, $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$. El argumento compuesto es $32 = 2^5$, lo que permite una comprobación independiente.

Ley del cociente. Con $u, v > 0$, los mismos exponentes dan $u/v = a^{r-s}$. Por la definición inversa,

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v.$$

El cociente es positivo y los dos logaritmos del lado derecho existen. Un cociente positivo formado por dos negativos no autoriza esta escritura: los logaritmos separados serían indefinidos.

Por ejemplo, $\log_2((-8)/(-2)) = \log_2 4 = 2$ existe. La escritura $\log_2(-8) - \log_2(-2)$ no existe en los reales, aunque el cociente previo sí exista.

Ley de la potencia. Si $u > 0$ y $t \in \mathbb{R}$, escribimos $u = a^r$ con $r = \log_a u$. La ley exponencial da $u^t = (a^r)^t = a^{rt}$. Por tanto, $\log_a(u^t) = t \log_a u$.

Se admite cualquier exponente real porque las bases u y a son positivas. La ley también cubre $t = 0$, cuando ambos miembros valen cero, y exponentes negativos, que corresponden a recíprocos positivos.

Cuadrados y valor absoluto. Para $x \neq 0$, $x^2 = |x|^2$ y $|x| > 0$. La ley de potencia se aplica a la base positiva $|x|$, así que $\log_a(x^2) = 2 \log_a |x|$.

Escribir $2 \log_a x$ sólo es válido si $x > 0$. En $x = -2$, el lado izquierdo $\log_a 4$ existe, pero $\log_a(-2)$ no. La fórmula con valor absoluto conserva todo el dominio original.

Análogamente, para $x, y \neq 0$, $\log_a(x^2/y^2) = 2 \log_a |x| - 2 \log_a |y|$. Los valores absolutos no son adornos: permiten que los argumentos de los logaritmos separados sigan siendo positivos.

Expandir y condensar conservando dominio. En $x > 2$, podemos expandir $\log_3((x-2)(x+1)^2)$ como $\log_3(x-2) + 2 \log_3(x+1)$, porque los dos factores base son positivos.

El dominio del logaritmo original también es $x > 2$: el cuadrado es positivo salvo en -1, y el signo del producto exige $x - 2 > 0$. Ambas formas representan la misma función allí.

En cambio, $\log_3((x-2)(x+1))$ tiene dominio $x < -1$ o $x > 2$. Expandir como $\log_3(x-2) + \log_3(x+1)$ conserva sólo $x > 2$. Si se necesita una expansión sobre todo el dominio original, se usa $\log_3 |x-2| + \log_3 |x+1|$ allí, ya que el producto original es positivo y coincide con el producto de los valores absolutos.

Condensar dos logaritmos tampoco permite ampliar el dominio. Si partimos de la suma sin valores absolutos, seguimos exigiendo ambos argumentos positivos aunque el producto condensado también sea positivo en otra región.

Prueba de estrés: no hay ley de suma. En general, $\log_a(u+v) \neq \log_a u + \log_a v$. La ley del producto identifica el lado derecho con $\log_a(uv)$, no con un logaritmo de suma.

Por ejemplo, $\log_2(1+3) = 2$, mientras $\log_2 1 + \log_2 3 = \log_2 3 < 2$, porque $3 < 4$. El contraejemplo usa valores definidos y comparación exacta.

Tampoco $(\log_a u)^2$ es $2 \log_a u$: el primero es un cuadrado del valor logarítmico; el segundo puede expresarse como $\log_a(u^2)$ con $u > 0$. Son operaciones distintas.

Recuperación breve. Expanda $\log_5(25x^2/y)$ sin perder valores de su dominio.

Respuesta razonada. El argumento es positivo exactamente cuando $x \neq 0$ y $y > 0$: el numerador es positivo para $x \neq 0$, y el denominador debe ser positivo. Sobre ese dominio, la expansión es $2 + 2 \log_5 |x| - \log_5 y$. Se usaron producto, potencia de $|x| > 0$ y cociente, manteniendo $y > 0$.

Qué debemos conservar. Las leyes logarítmicas se demuestran desde leyes exponenciales y unicidad del exponente. Su uso conserva argumentos positivos y el dominio original. Expandir o condensar cambia la forma de una expresión; no concede automáticamente valores nuevos.

23.9. Cambio de base

Una calculadora suele ofrecer logaritmos de base 10 y de una base especial llamada e. Eso no limita el concepto a esas bases. Podemos relacionar cualesquiera dos bases válidas mediante una identidad demostrada.

Derivación de la fórmula. Sean $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, y $t > 0$. Si $y = \log_a t$, entonces $a^y = t$. Aplicar $\log_b$ a ambos miembros es válido porque son positivos. La ley de potencia da $y \log_b a = \log_b t$.

Además, $\log_b a \neq 0$: un logaritmo vale cero exactamente cuando su argumento es 1, y $a \neq 1$. Podemos dividir y obtener

$$\log_a t = \frac{\log_b t}{\log_b a}.$$

No se trata de elegir una base «mejor» en la definición. Se trata de expresar el mismo exponente con valores de otra función logarítmica.

Una evaluación exacta. Para $\log_4 8$, elegimos base 2. Tenemos $\log_4 8 = \log_2 8 / \log_2 4 = 3/2$. La comprobación por definición es $4^{3/2} = 8$.

Para $\log_{1/3} 9$, la base 3 da $2/(-1) = -2$. El denominador negativo es correcto: la nueva fórmula también representa bases menores que uno.

Identidades entre bases. Con $t = b$, la fórmula da $\log_a b = 1/\log_b a$. Ambas expresiones existen porque las bases son positivas y distintas de uno.

Para tres bases válidas, $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$, como se comprueba usando una misma base auxiliar y cancelando un denominador no nulo. Esta identidad enlaza conversiones sucesivas de base; no expresa un producto de argumentos de una misma función.

Si $a > 0$, $a \neq 1$ y $r \neq 0$, la base a^r es válida. La fórmula y la ley de potencia dan $\log_{a^r} t = (1/r) \log_a t$. La hipótesis $r \neq 0$ evita la base $a^0 = 1$.

Signo del denominador y orientación. Si se usa una base auxiliar $b > 1$, el denominador $\log_b a$ es positivo para $a > 1$ y negativo para $0 < a < 1$. Como el numerador $\log_b t$ es creciente, dividir por ese denominador explica las dos orientaciones de $\log_a t$.

No es una nueva admisión: es una reinterpretación de la monotonía ya demostrada. El signo de una constante multiplicativa vuelve a gobernar el orden, como en C22.

Base variable y dominio. En $F(x) = \log_x 9$, la base variable exige $x > 0$ y $x \neq 1$. El argumento fijo 9 es positivo. Usando base 3, $F(x) = 2/\log_3 x$ sobre ese dominio.

La fórmula muestra las dos exclusiones: el logaritmo del denominador exige $x > 0$ y la división exige $\log_3 x \neq 0$, esto es $x \neq 1$. No podemos tratar $\log_x 9$ como un logaritmo de base fija al comparar distintos valores de x; el cambio de base permite analizar su dependencia real.

Prueba de estrés. El cociente $\log_b t / \log_b a$ no es $\log_b(t/a)$. La ley del cociente resta logaritmos; el cambio de base divide sus valores.

Por ejemplo, $\log_2 8 / \log_2 4 = 3/2$, mientras $\log_2(8/4) = 1$. Las dos formas responden a operaciones diferentes.

Recuperación breve. Evalúe $\log_9 27$ y $\log_{1/9} 27$ por una base común. Explique por qué no puede usar base auxiliar 1.

Respuesta razonada. En base 3, los cocientes son $3/2$ y $3/(-2) = -3/2$. La base auxiliar 1 no define un logaritmo ni una función inversa, de modo que sus supuestos valores no existen.

Qué debemos conservar. El cambio de base se deriva de una identidad exponencial y una ley de potencia. Conserva argumento positivo, bases válidas y denominador no nulo. Permite cambiar representación sin cambiar el número que queremos describir.

23.10. e, exp y ln

Hasta ahora cualquier base positiva distinta de uno ha sido válida. Una de ellas recibe una notación especial por su papel en el análisis y en muchos modelos: la constante e.

Un objeto nombrado, no construido aquí. Denotamos por e la constante distinguida de los reales cuya aproximación es $e \approx 2.71828$. En particular, $e > 1$. Su construcción y caracterización analítica se estudiarán en cálculo/análisis; no se deducen en este capítulo de esa aproximación.

No definiremos e mediante una serie, una integral, un límite de capitalización o una ecuación diferencial. Tampoco definiremos simultáneamente e desde ln y ln desde e: eso sería circular.

Para la práctica algebraica de este capítulo usamos e como base nombrada y aplicamos las propiedades de exponenciales positivas ya admitidas.

Definiciones de las funciones. La **exponencial natural** es $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $\exp(x) = e^x$. El **logaritmo natural** es $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\ln t = \log_e t$.

Como $e > 1$, ambas son estrictamente crecientes. Son inversas, con $\ln(\exp x) = x$ para $x \in \mathbb{R}$ y $\exp(\ln t) = t$ para $t > 0$.

Además, $\exp(0) = 1$, $\ln 1 = 0$ y $\ln e = 1$. Por ejemplo, $\ln(e^{-3}) = -3$, aunque el argumento e^{-3} sea positivo.

La escritura $\exp(x)$ hace visible el argumento cuando es largo. $\exp((x+1)/(x-2))$ equivale a $e^{(x+1)/(x-2)}$ y conserva $x \neq 2$.

Leyes ya demostradas, nueva notación. Las leyes de §23.8 se aplican a base e: $\ln(uv) = \ln u + \ln v$, $\ln(u/v) = \ln u - \ln v$ y $\ln(u^r) = r \ln u$ para $u, v > 0$ y $r \in \mathbb{R}$.

La exponencial satisface $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ y $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. Estas notaciones no crean leyes nuevas ni eliminan las condiciones de las anteriores.

Toda base positiva mediante exp. Para $a > 0$, la identidad inversa da $a = \exp(\ln a)$. Elevando a $x \in \mathbb{R}$ y usando la ley de potencia,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a).$$

La fórmula también vale para $a = 1$, pues $\ln 1 = 0$ y ambos miembros valen 1. Si queremos invertir a^x, vuelve a necesitarse $a \neq 1$.

Con $a \neq 1$, el cambio de base da $\log_a t = \ln t / \ln a$. El signo de $\ln a$ distingue crecimiento ($a > 1$) y decrecimiento ($0 < a < 1$).

Reparametrizar un modelo. La expresión hipotética $Q(t) = Q_0 b^t$, con $Q_0 > 0, b > 0$, puede escribirse $Q(t) = Q_0 \exp(kt)$, donde $k = \ln b$. Para $b > 1$, $k > 0$; para $b < 1$, $k < 0$; para $b = 1$, $k = 0$.

Ese k es un parámetro logarítmico del factor por unidad, no el porcentaje $b - 1$. En un factor $b = 1.10$, el porcentaje por paso es $10\,\%$, mientras $k = \ln(1.10)$. La distinción es algebraica; no requiere introducir derivadas ni tasas instantáneas.

Prueba de estrés. Sustituir e por 2.71828 da aproximaciones a valores de exp, no identidades exactas de la función. Por eso $\ln e = 1$ es exacto, mientras $\ln(2.71828)$ sólo es próximo a 1.

Tampoco $\ln(x+y)$ se convierte en $\ln x + \ln y$ por ser «natural». Las mismas restricciones y falsas leyes siguen vigentes.

Recuperación breve. Escriba 5^{2x-1} mediante exp y evalúe $\ln(\sqrt{e})$.

Respuesta razonada. La primera expresión es $\exp((2x-1)\ln 5)$ para todo real x. La segunda vale $1/2$ porque $\sqrt{e} = e^{1/2}$ y $\ln(e^{1/2}) = 1/2$. Ambas conclusiones son exactas y no usan el decimal de e.

Qué debemos conservar. exp y ln nombran una pareja inversa en base e. La constante se introduce sin simular su construcción analítica. El cambio de base permite expresar cualquier exponencial positiva mediante exp y cualquier logaritmo válido mediante ln.

23.11. Ecuaciones exponenciales

Resolver una ecuación exponencial significa determinar exactamente los valores del dominio que igualan dos expresiones. La variable en el exponente cambia las herramientas disponibles, pero no el objeto de resolución de C21.

Primero positividad. En $4\,3^{x-1} + 2 = 14$, restar 2 y dividir por 4 da $3^{x-1} = 3$. Como la base es válida, inyectividad da $x - 1 = 1$, así que $x = 2$. La sustitución produce $4 \cdot 3 + 2 = 14$.

Si el segundo miembro hubiera sido -2, obtendríamos $3^{x-1} = -1$, imposible por positividad. No tomamos logaritmos de ese valor negativo; decidimos que no existe solución real.

En general, para $Aa^{kx+h} + B = C$ con $A \neq 0$, primero se aísla $a^{kx+h} = (C - B)/A$. Si ese cociente es no positivo, no hay soluciones. Si es positivo, se puede usar el logaritmo y resolver la condición sobre el argumento.

Bases comunes. La ecuación $9^{x+1} = 3^{4x-2}$ se reescribe $3^{2x+2} = 3^{4x-2}$ mediante $(a^u)^v = a^{uv}$. Inyectividad da $2x + 2 = 4x - 2$ y por tanto $x = 2$. Ambas expresiones originales valen $9^3 = 3^6$.

La transformación conserva toda la información porque la exponencial de base 3 es inyectiva sobre todos los exponentes reales.

Cuando no aparece una potencia conocida. Para $5^{2x-1} = 7$, la definición inversa da $2x - 1 = \log_5 7$, así que $x = (1 + \log_5 7)/2$. También puede escribirse $(1 + \ln 7/\ln 5)/2$.

La solución es exacta. La verificación simbólica usa $5^{\log_5 7} = 7$, sin decimales. Una aproximación puede ayudar a ubicar el valor, pero no es necesaria para declarar el conjunto solución.

Bases diferentes con variable en ambos exponentes. En $2^x = 3^{x-1}$, ambos miembros son positivos. Aplicar ln es una equivalencia por inyectividad y da $x \ln 2 = (x-1)\ln 3$. Reunir términos produce $x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3$.

El coeficiente $\ln 3 - \ln 2 = \ln(3/2) > 0$, así que no es cero. La solución es $x = \ln 3/\ln(3/2)$. Se puede verificar sustituyendo esta relación en la igualdad de logaritmos y recuperando la igualdad original con exp.

Sustitución positiva. Para $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$, se usa $4^x = (2^x)^2$. La auxiliar $u = 2^x$ recorre $(0, \infty)$ y la ecuación es $(u-2)(u-4) = 0$.

Ambos candidatos auxiliares son positivos. Reconstruir $2^x = 2$ y $2^x = 4$ da $x = 1, 2$, de modo que $S = \{1, 2\}$. La sustitución es biyectiva entre $\mathbb{R}$ y los positivos, por lo que cada u válido tiene exactamente una preimagen.

Si una ecuación auxiliar diera $u = -2$, esa rama no tendría preimagen real. No se intenta escribir un logaritmo real de -2 ni se conserva ese candidato en el conjunto original.

Factores que nunca se anulan. En $(x-1)e^{2x} = 0$, la exponencial es estrictamente positiva. Dividir por ella es reversible y queda $x - 1 = 0$. El conjunto solución es $\{1\}$.

La ecuación $e^{2x} = 0$ no aporta una rama; sabemos de antemano que es imposible. Reconocer ese factor puede simplificar una resolución sin introducir candidatos adicionales.

Prueba de estrés: no tomar logaritmo de una suma por partes. En $2^x + 3^x = 5$, no podemos escribir $x \ln 2 + x \ln 3 = \ln 5$: eso reemplazaría logaritmo de suma por suma de logaritmos.

Aquí $x = 1$ es solución. Además, la suma de dos funciones estrictamente crecientes es estrictamente creciente: si $u < v$, cada sumando en u es menor que el correspondiente en v, y sumar conserva una desigualdad estricta. Por tanto, la solución es única y $S = \{1\}$. Se eligió una ruta distinta porque las leyes no autorizaban la primera.

Recuperación breve. Resuelva $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$.

Respuesta razonada. Con $u = e^x > 0$, queda $(u - 4)(u + 1) = 0$. Se descarta $u = -1$ por imagen y se conserva $u = 4$. La vuelta da $x = \ln 4$. Sustituir produce $16 - 12 - 4 = 0$, y la biyectividad de exp demuestra que no se omitieron otras soluciones.

Qué debemos conservar. Una ecuación exponencial se resuelve mediante forma e imagen: bases comunes, logaritmos de valores positivos, sustituciones positivas o factores que nunca se anulan. Cada ruta necesita una equivalencia y una vuelta completa al dominio original.

23.12. Ecuaciones logarítmicas

El riesgo principal de una ecuación logarítmica es borrar el dominio al condensar o al aplicar la función inversa. La condición de positividad debe fijarse antes de transformar.

Una ecuación directa. Para $\ln(2x - 3) = \ln 7$, el dominio exige $2x - 3 > 0$, esto es $x > 3/2$. Por inyectividad de ln, la ecuación equivale allí a $2x - 3 = 7$. Así, $x = 5$, que pertenece al dominio y satisface la original.

Si aparece $\ln(2x - 3) = 0$, escribimos $0 = \ln 1$ y obtenemos $x = 2$. Un logaritmo cero corresponde a argumento uno, nunca a argumento cero.

Suma de logaritmos y candidatos. Resolvamos $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$. Las dos condiciones de dominio dan $x > 1$. Sobre ese conjunto, condensar es válido y produce $\log_2(x^2 - 1) = 3$.

La definición da $x^2 - 1 = 8$, así que los candidatos algebraicos son ± 3. Sólo 3 pertenece al dominio original. En él, $\log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$. Por tanto, $S = \{3\}$.

La ecuación condensada considerada aisladamente también tendría sentido en $x < -1$. Eso no autoriza incorporar -3: el problema inicial requería dos argumentos positivos separados.

Diferencia de logaritmos. Para $\ln(x+4) - \ln(x-1) = \ln 2$, el dominio común es $x > 1$. La ley de cociente da $\ln((x + 4)/(x - 1)) = \ln 2$ y la inyectividad da $(x + 4)/(x - 1) = 2$.

Multiplicar por $x - 1 \neq 0$ es reversible en ese dominio. Queda $x + 4 = 2x - 2$ y $x = 6$. La comprobación usa $10/5 = 2$. La solución es $\{6\}$.

No se exige que $\ln(x - 1)$ sea positivo: aquí se resta su valor, no se usa como argumento de otro logaritmo.

Potencia del valor logarítmico. En $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$, el dominio es $x > 0$. Definimos $u = \ln x$, que puede recorrer todo $\mathbb{R}$. La ecuación $(u - 1)(u - 2) = 0$ da $u = 1$ o $u = 2$, de donde $x = e$ o $x = e^2$.

La imagen auxiliar es distinta de la de $u = e^x$: un logaritmo puede ser negativo o cero. Las restricciones de la sustitución provienen de la función escogida, no de una receta universal.

Composiciones logarítmicas. Para $\ln(\ln x) = 0$, el dominio exige $x > 0$ y $\ln x > 0$, es decir $x > 1$. Aplicar exp da $\ln x = 1$ y una segunda aplicación da $x = e$. El resultado está en el dominio porque $e > 1$.

El razonamiento hace visibles las dos capas y sus argumentos. No se «eliminan» dos símbolos de ln en un mismo paso.

Base variable. En $\log_x 27 = 3$, se exige $x > 0$, $x \neq 1$. La forma exponencial da $x^3 = 27$, con único candidato real $x = 3$, que es base válida.

En $\log_x 1 = 0$, todo $x > 0$, $x \neq 1$ sirve: para cada base válida, el exponente que produce uno es cero. La forma exponencial $x^0 = 1$ no determina una base única. Siempre se conserva el dominio de bases.

Prueba de estrés: aplicar exp no amplía el dominio. Una resolución de $\ln(x-2) = \ln(4-x)$ que se limita a $x - 2 = 4 - x$ obtiene $x = 3$. En este caso la respuesta es correcta porque 3 está en el dominio $(2, 4)$, pero la resolución necesita expresar o verificar ese requisito.

La cadena sería inválida para una igualdad con argumentos no positivos: exp no convierte en reales logaritmos que nunca existieron. La admisibilidad es anterior a la aplicación de la inversa.

Recuperación breve. Resuelva $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 4$.

Respuesta razonada. El dominio es $x > 1$. Condensar da $(x-1)(x+2) = 4$, equivalente allí a $x^2 + x - 6 = 0$, con candidatos $2, -3$. Sólo 2 es admisible. La sustitución produce $\ln 1 + \ln 4 = \ln 4$, de modo que $S = \{2\}$. La exclusión de -3 conserva los dos argumentos originales.

Qué debemos conservar. Las ecuaciones logarítmicas empiezan por el dominio. Condensar, aplicar exp o sustituir el valor del logaritmo son operaciones válidas sobre ese dominio, y sus candidatos se reconstruyen con las restricciones originales.

23.13. Inequaciones exponenciales y logarítmicas

En una ecuación, la inyectividad permite recuperar argumentos iguales. En una inequación, necesitamos además conocer la orientación de la función. Compare $2^x < 8$ con $(1/2)^x < 8$: ambas tienen una base válida, pero sus conjuntos solución se extienden en sentidos opuestos.

Transportar el orden mediante una exponencial. Para una base fija $a > 0$, $a \neq 1$, y argumentos reales $U(x), V(x)$ definidos en un dominio D, la monotonía de §23.3 da

$$a^{U(x)} < a^{V(x)} \iff \begin{cases} U(x) < V(x), & a > 1, \\ U(x) > V(x), & 0 < a < 1. \end{cases}$$

La equivalencia se afirma sobre D. Las relaciones no estrictas incluyen también la igualdad: con base creciente se conserva $\leq$; con base decreciente se transforma en $\geq$.

Para $2^{3x-1} \leq 16$, escribimos $16 = 2^4$. La base creciente da $3x - 1 \leq 4$, de donde $x \leq 5/3$. Así, $S = (-\infty, 5/3]$. En la frontera ambos miembros valen 16; para cualquier x menor, el exponente es menor o igual que 4, lo que prueba que se admite toda la semirrecta.

En $(1/2)^{2x+1} < 4$, escribimos $4 = (1/2)^{-2}$. La base decreciente da $2x + 1 > -2$, así que $S = (-3/2, \infty)$. La frontera produce igualdad y se excluye.

Condición	Base y orientación	Condición equivalente	Solución
$2^x < 8$	creciente	$x < 3$	$(-\infty, 3)$
$(1/2)^x < 8$	decreciente	$x > -3$	$(-3, \infty)$

La tabla registra el argumento completo de la comparación. La inversión procede de la función decreciente, no de que un exponente concreto sea negativo.

Comparar con cero o con un número negativo. Para cualquier base positiva, $a^{U(x)} > 0$ en todo el dominio de U. Por tanto, $a^{U(x)} \leq 0$ no tiene soluciones y $a^{U(x)} > 0$ admite todo ese dominio.

Si el término de comparación es $c > 0$, podemos escribir $c = a^{\log_a c}$ y transportar el orden. Si $c \leq 0$, ese logaritmo real no existe; la positividad ya decide las comparaciones elementales y no debemos intentar aplicar una fórmula fuera de su dominio.

Por ejemplo, $3^x < 5$ equivale a $x < \log_3 5$. La frontera es exacta aunque no se exprese con un decimal. En cambio, $3^x < -5$ tiene solución vacía.

Logaritmos: dos controles antes de transformar. Para comparar $\log_a U(x)$ y $\log_a V(x)$, ambos argumentos deben ser positivos. Sobre ese dominio común, una base mayor que uno conserva el orden de los argumentos y una base entre cero y uno lo invierte.

La comparación con un real c se obtiene escribiendo $c = \log_a(a^c)$:

$$\log_a U(x) \leq c \iff \begin{cases} 0 < U(x) \leq a^c, & a > 1, \\ U(x) \geq a^c, & 0 < a < 1, \end{cases}$$

siempre que U esté definida. En la segunda rama, la condición $U(x) \geq a^c > 0$ ya implica positividad. En la primera, la cota superior no basta: debemos mantener también $U(x) > 0$.

Por ejemplo, $\log_2(x-1) \leq 3$ exige $x > 1$ y luego $x - 1 \leq 8$. Su solución es $(1, 9]$, no $(-\infty, 9]$. El punto 1 produce argumento cero y se excluye por dominio; el punto 9 se incluye porque el logaritmo vale 3.

Para $\log_{1/2}(x-1) \geq -1$, el dominio vuelve a ser $x > 1$. La base decreciente da $x - 1 \leq (1/2)^{-1} = 2$. Intersectando, $S = (1, 3]$. La relación $\geq$ entre valores se convirtió en $\leq$ entre argumentos.

Un argumento racional. Resolvamos $\log_2((x-1)/(x+2)) \geq 0$. La expresión interior exige $x \neq -2$ y el logaritmo exige cociente positivo. Como la base es creciente y $0 = \log_2 1$, la condición equivale, en ese dominio, a $(x-1)/(x+2) \geq 1$.

Restar 1 produce $-3/(x+2) \geq 0$, que se cumple exactamente si $x < -2$: el numerador es negativo y el denominador debe ser negativo. En esa región, el argumento original es mayor que 1, así que también satisface el dominio logarítmico.

Por tanto, $S = (-\infty, -2)$. No multiplicamos por $x + 2$ sin conocer su signo. La racional se decidió mediante C22, conservando el punto excluido.

Comparar dos logaritmos con base fraccionaria. Considere $\log_{1/2}(x-1) < \log_{1/2}(5-x)$. El dominio común es $1 < x < 5$. La monotonía decreciente transforma la condición en $x - 1 > 5 - x$, es decir $x > 3$.

La intersección con el dominio da $S = (3, 5)$. En 3 los argumentos coinciden y la desigualdad estricta falla; en 5 el segundo logaritmo no existe. Las dos fronteras son abiertas por motivos diferentes.

Condiciones compuestas y sistemas. En $-1 < \log_2(x-1) \leq 2$, el dominio exige $x > 1$. La función creciente transporta las dos comparaciones a $2^{-1} < x - 1 \leq 2^2$. Así, $S = (3/2, 5]$. Las condiciones deben cumplirse simultáneamente: forman una intersección, como en C22.

Si añadimos $2^x < 16$ a $\log_2(x-1) \geq 1$, la primera condición selecciona $x < 4$ y la segunda $x \geq 3$. El sistema tiene solución $[3, 4)$. En 3 el logaritmo admite igualdad; en 4 la exponencial no admite igualdad.

La operación que transforma cada condición puede ser distinta, pero el enlace lógico del sistema no cambia.

Prueba de estrés: invertir dos veces sin motivo. Una resolución de $\log_{1/2}(x+1) < -2$ obtiene correctamente $x+1 > 4$, pero luego escribe $x < 3$ «porque la base es menor que uno». La primera inversión ya incorporó esa información. Restar 1 conserva el orden, de modo que el resultado correcto es $x > 3$.

Para todos esos valores, el argumento supera 4 y el logaritmo decreciente es menor que $\log_{1/2} 4 = -2$. En la frontera hay igualdad. Cada inversión debe corresponder a una operación concreta; la base no sigue invirtiendo los pasos algebraicos posteriores.

Recuperación breve. a) Resuelva $(1/3)^{x-2} \geq 9$.

b) Resuelva $\ln(4-x) < 0$ conservando el dominio.

Respuesta razonada. En **a)**, $9 = (1/3)^{-2}$ y la base decreciente da $x-2 \leq -2$. Por tanto, $S = (-\infty, 0]$; en 0 se produce igualdad.

En **b)**, el dominio exige $4-x > 0$, así que $x < 4$. Como ln es creciente y $\ln 1 = 0$, la comparación exige además $4-x < 1$, esto es $x > 3$. La solución es $(3, 4)$. En 3 el logaritmo vale cero; en 4 no existe. Ambas fronteras quedan excluidas.

Qué debemos conservar. La base decide cómo se transporta el orden; el dominio decide dónde ese transporte tiene sentido. Después se resuelven las condiciones algebraicas con las reglas de C22 y se conserva su enlace lógico. Una respuesta completa justifica las regiones admitidas y distingue fronteras excluidas por desigualdad estricta de puntos donde una expresión no está definida.

23.14. Sustituciones, parámetros y varias capas

La expresión $4^x - 5 \cdot 2^x + 4$ contiene una cuadrática, aunque no esté escrita como un polinomio en x. Reconocerla permite usar C19–C22. La sustitución debe registrar qué valores puede tomar la nueva variable y cómo se vuelve a la original.

Exponencial como variable auxiliar. En $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$, escribimos $4^x = (2^x)^2$ y tomamos $u = 2^x$. La auxiliar recorre exactamente $(0, \infty)$ y cada valor positivo tiene una única preimagen $x = \log_2 u$.

La inequación se transforma en $(u-1)(u-4) \leq 0$. Por signos, $1 \leq u \leq 4$, intervalo ya contenido en la imagen válida. Al volver, $1 \leq 2^x \leq 4$ equivale a $0 \leq x \leq 2$ por monotonía creciente. Por tanto, $S = [0, 2]$.

Los extremos producen cero en la expresión original. Para $x < 0$, la auxiliar es menor que 1 y el producto es positivo; para $x > 2$, supera 4 y vuelve a ser positivo. La reconstrucción demuestra tanto la inclusión del intervalo como la exclusión de sus regiones exteriores.

Resolver en toda la recta auxiliar no basta. Para $(e^x + 2)(e^x - 3) < 0$, la auxiliar $u = e^x > 0$ da formalmente $-2 < u < 3$. La intersección con su imagen es $(0, 3)$, no $(-2, 3)$.

Reconstruir $0 < e^x < 3$ da $x < \ln 3$. La cota inferior se cumple para todo real y no produce un extremo finito. Así, $S = (-\infty, \ln 3)$.

No escribimos $\ln(-2)$ para transformar la frontera negativa. Esa frontera pertenece al problema polinómico auxiliar, pero no a los valores alcanzables por la exponencial.

Un logaritmo tiene otra imagen auxiliar. En $(\ln x)^2 - \ln x - 2 \leq 0$, el dominio inicial es $x > 0$. Con $u = \ln x$, la auxiliar puede ser cualquier real. La factorización $(u-2)(u+1) \leq 0$ da $-1 \leq u \leq 2$.

La vuelta mediante exp, que es creciente, produce $e^{-1} \leq x \leq e^2$. Ambos extremos son positivos y pertenecen al dominio, por lo que $S = [e^{-1}, e^2]$.

Sustitución	Imagen auxiliar	Reconstrucción
$u = a^x$, base válida	$(0, \infty)$	$x = \log_a u$

Sustitución	Imagen auxiliar	Reconstrucción
$u = \ln x$, $x > 0$	$\mathbb{R}$	$x = e^u$
$u = 2^{x^2}$	$[1, \infty)$	$x^2 = \log_2 u$, con todas sus raíces reales

La tercera fila muestra que una composición puede cambiar la imagen y destruir la inyectividad. No todas las sustituciones exponenciales identifican una única preimagen.

Sustitución no inyectiva. Resolvamos $2^{x^2} \leq 8$. El dominio es toda $\mathbb{R}$. Por base creciente, la comparación equivale a $x^2 \leq 3$, de donde $S = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Si se usa $u = 2^{x^2}$, su imagen es $[1, \infty)$: el cuadrado es no negativo y cada exponente no negativo tiene preimágenes reales. La condición auxiliar $u \leq 8$ selecciona $[1, 8]$. Reconstruir ese intervalo exige $0 \leq x^2 \leq 3$ y conserva las dos ramas de x.

Elegir sólo $x = \sqrt{\log_2 u}$ perdería los valores negativos. La inversa de la exponencial recupera x^2, no identifica automáticamente una inversa de toda la composición.

Parámetro de base: separar regímenes reales. Clasifiquemos $a^x \leq a^2$ para $a > 0$. El parámetro es una base fija en cada problema; no varía mientras se resuelve para x.

Si $a > 1$, la monotonía creciente da $x \leq 2$. Si $0 < a < 1$, la monotonía decreciente da $x \geq 2$. Si $a = 1$, ambos miembros valen 1 y todo real sirve.

$$S(a) = \begin{cases} [2, \infty), & 0 < a < 1, \\ \mathbb{R}, & a = 1, \\ (-\infty, 2], & a > 1. \end{cases}$$

La familia incluye el caso constante como degeneración de las potencias positivas. No lo tratamos como una función exponencial invertible. Para $a \leq 0$, la expresión no pertenece a esta familia real definida para todos los exponentes.

Si el problema fuera $\log_a x \leq 2$, el caso $a = 1$ estaría fuera del dominio de bases, no daría toda la recta. Para $a > 1$, se obtiene $0 < x \leq a^2$; para $0 < a < 1$, $x \geq a^2$. La existencia de la expresión determina qué casos paramétricos se pueden resolver.

Un parámetro en el término de comparación. En $e^x \leq c$, con $c \in \mathbb{R}$, la positividad da solución vacía si $c \leq 0$. Si $c > 0$, ln es aplicable y creciente: $x \leq \ln c$. Por tanto, $S(c) = (-\infty, \ln c]$ en ese régimen.

En $c = 0$ no aparece una solución aislada ni un extremo llamado «$\ln 0$». El cambio de régimen proviene de la imagen de exp. Las fronteras paramétricas deben justificarse por una propiedad, no añadirse mecánicamente a una lista de casos.

Varias capas: un logaritmo en un denominador. Considere $1/(\ln x - 1) \geq 0$. El dominio exige $x > 0$ y $\ln x \neq 1$, es decir $x \neq e$. Como el numerador es positivo, el cociente sólo puede ser no negativo si el denominador es positivo; nunca vale cero.

Así, $\ln x > 1$ y la monotonía de exp da $x > e$. La solución es (e, ∞), con extremo abierto pese a la relación no estricta. La razón es que e anula el denominador, no que falle una comparación numérica definida.

Si añadimos $\ln x \leq 2$, el sistema selecciona $(e, e^2]$. Cada capa conserva su condición y la simultaneidad termina en una intersección.

Prueba de estrés: condensar antes de fijar dominio. Para $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) \leq \ln 3$, el dominio inicial es $x > 1$. Allí se puede condensar y comparar argumentos: $x^2 - 1 \leq 3$, equivalente a $-2 \leq x \leq 2$. La intersección da $S = (1, 2]$.

Responder $[-2, 2]$ pierde el dominio. Incluso resolver el logaritmo condensado por su propio dominio daría una región negativa adicional, porque $x^2 - 1$ también es positivo para $x < -1$. Esa región nunca perteneció a la suma de los dos logaritmos originales.

La primera operación válida no borra las hipótesis que la autorizaron. Una cadena de varias capas conserva el dominio desde el principio hasta la respuesta.

Recuperación breve. a) Resuelva $(2^x)^2 - 2^x - 6 \geq 0$.

b) Clasifique $b^x = 4$ para bases $b > 0$, incluido el caso constante.

Respuesta razonada. En **a)**, $u = 2^x > 0$ da $(u - 3)(u + 2) \geq 0$. La solución auxiliar en toda la recta es $u \leq -2$ o $u \geq 3$; la imagen positiva conserva sólo $u \geq 3$. La vuelta da $S = [\log_2 3, \infty)$. En el extremo, $u = 3$ anula el producto, y para valores mayores ambos factores son positivos.

En **b)**, si $b \neq 1$, la imagen positiva y la inyectividad garantizan exactamente una solución $x = \log_b 4$. Es positiva para $b > 1$ y negativa para $0 < b < 1$, por el signo del logaritmo. Si $b = 1$, la igualdad sería $1 = 4$, falsa para todo real: la solución es vacía.

Qué debemos conservar. Una sustitución se justifica por la estructura que revela, su imagen y la reconstrucción de todas las preimágenes. Un parámetro exige separar los regímenes donde cambian definición, orientación o existencia de soluciones. En expresiones de varias capas, esas obligaciones se acumulan: cada transformación conserva las condiciones que la hicieron válida.

23.15. Modelos multiplicativos y laboratorio de errores

Una cantidad hipotética comienza en 80 y aumenta un 25 % en cada paso. Después del primer paso vale 100; después del segundo, 125. El incremento absoluto cambió, pero el cociente entre valores consecutivos siguió siendo 5/4. La función exponencial expresa esa regla multiplicativa.

Del paso repetido a la fórmula. Si $Q_0 > 0$ es el valor inicial y $b > 0$ el factor por paso, la regla $Q(n + 1) = bQ(n)$ da $Q(n) = Q_0 b^n$ para enteros $n \geq 0$. La fórmula se justifica por inducción: en $n = 0$ vale $Q_0 b^0 = Q_0$; si vale en n, multiplicar por b produce $Q_0 b^{n+1}$.

Para el ejemplo, $Q(n) = 80(5/4)^n$. El porcentaje de aumento es $b - 1 = 1/4$, mientras el factor es $b = 5/4$. Si disminuyera un 25 % por paso, el factor sería 3/4.

Paso n	$Q(n)$	Incremento desde el paso anterior
0	80	—
1	100	20
2	125	25
3	625/4	125/4

La constancia del cociente caracteriza la regla estipulada. Una tabla con unos pocos valores puede sugerir un modelo; no demuestra que una situación real lo obedezca en todos los pasos.

Extender el modelo exige una decisión. La regla de pasos enteros no determina por sí sola los valores entre pasos. Si elegimos el modelo exponencial para tiempo real, escribimos $Q(t) = Q_0 b^t$, normalmente con $t \geq 0$. Esta elección utiliza la extensión real de §23.2 y agrega una hipótesis al modelo discreto.

Podrían existir otras funciones que coincidieran en tiempos enteros y difirieran entre ellos. No afirmamos que el proceso discreto haya probado la interpolación exponencial.

En el modelo elegido, avanzar una cantidad fija h de tiempo multiplica por b^h, pues $Q(t + h)/Q(t) = b^h$. El cociente es independiente de t, siempre que ambos tiempos pertenezcan al dominio del modelo.

Cambiar la unidad de tiempo. Suponga que una cantidad se duplica cada tres horas. Si t mide horas, el modelo exponencial es $Q(t) = Q_0\,2^{t/3}$. En tres horas el exponente aumenta una unidad y el factor es 2.

Si s cuenta períodos de tres horas, entonces $t = 3s$ y la misma cantidad se escribe $Q = Q_0\,2^{s}$. Son dos coordenadas temporales para el mismo modelo.

Escribir $Q_0\,2^{3t}$ cuando t mide horas describiría otra regla: al avanzar una hora, el factor sería 8. La fracción $t/3$ cuenta cuántos períodos de tres horas han transcurrido; el exponente es adimensional.

Tiempo de duplicación y semivida. Para $Q(t) = Q_0 b^t$ con $b > 1$, el tiempo de duplicación T satisface $Q(T) = 2Q_0$. Dividir por $Q_0 > 0$ y tomar ln da $T \ln b = \ln 2$, así que $T = \ln 2/\ln b > 0$.

Para $0 < b < 1$, el tiempo de reducción a la mitad H satisface $b^H = 1/2$. Por tanto, $H = \ln(1/2)/\ln b = -\ln 2/\ln b > 0$: numerador y denominador son negativos.

Estas fórmulas son propiedades del modelo, no datos de una sustancia real. Si el tiempo se restringe a pasos enteros, el valor real obtenido puede no ser un instante permitido; se debe distinguir igualdad exacta de primer paso en que se supera un umbral.

Umbral real y primer paso entero. En el modelo $Q(t) = 30\,2^{t/2}$, con $t \ge 0$ medido en horas, queremos $Q(t) \ge 100$. Dividir por 30 y aplicar el logaritmo creciente da $t/2 \ge \log_2(10/3)$, de modo que $t \ge 2\log_2(10/3)$.

Si sólo observamos en horas enteras, comprobamos $Q(3) = 60\sqrt{2} < 100$ y $Q(4) = 120 > 100$. La primera comparación es exacta: $60\sqrt{2} < 100$ equivale, entre positivos, a $7200 < 10000$. Como el modelo es creciente, el primer entero admisible es 4.

No redondeamos al entero más cercano: buscamos el primer entero que cumple la desigualdad. La condición del problema decide cómo pasar de tiempo real a una observación discreta.

Inferir un modelo exponencial de dos valores. Dentro de la familia $Q(t) = Cb^t$ con $C > 0, b > 0$, suponga $Q(1) = 12$ y $Q(3) = 27$. Dividir las ecuaciones da $b^2 = 27/12 = 9/4$. La base positiva obliga a $b = 3/2$ y luego $C = 12/(3/2) = 8$.

Así, el único miembro de esa familia que cumple los datos es $Q(t) = 8(3/2)^t$. La comprobación produce 12 y 27 en los tiempos indicados.

La unicidad se refiere a la familia elegida. Dos datos no prueban que el fenómeno sea exponencial ni excluyen todas las demás familias funcionales.

Laboratorio: localizar la primera ruptura. Error de factor. Una resolución dice: «aumentar un 20 % por paso da $Q(n) = Q_0(0.20)^n$». La primera ruptura es confundir la parte añadida con el valor que permanece después de añadirla. La reparación es $Q_0(1.20)^n$. Para $n = 1$, la fórmula errónea reduce al 20 % el valor inicial en vez de aumentarlo.

Error de unidad. «Duplicar cada cuatro pasos da $Q(n) = Q_0\,2^{4n}$». El exponente debe contar períodos de cuatro pasos: $n/4$. La reparación $Q_0\,2^{n/4}$ da $2Q_0$ en $n = 4$; la fórmula errónea daría $2^{16}Q_0$.

Error de ley. De $2^x + 2 = 10$ se escribe $x\ln 2 + \ln 2 = \ln 10$. El primer paso inválido distribuye ln sobre una suma. Debemos aislar $2^x = 8$ y usar inyectividad para obtener $x = 3$. La sustitución da $8 + 2 = 10$.

Error de dominio. Se afirma $\ln(x^2) = 2\ln x$ para todo $x \neq 0$. La ley de potencia usada con base x exige $x > 0$. Sobre el dominio completo del miembro izquierdo, la reparación es $\ln(x^2) = 2\ln|x|$. En $x = -1$, el miembro izquierdo existe y vale cero, mientras $\ln x$ no existe.

Error de orientación. De $(1/5)^x < (1/5)^2$ se concluye $x < 2$. La función es decreciente y exige $x > 2$. Para $x = 3$, la comparación original es verdadera y la respuesta errónea excluye una solución.

En cada caso, un contraejemplo muestra que la respuesta falla; la reparación requiere además una regla válida que caracterice todas las soluciones o todos los valores del modelo.

Prueba de estrés: tasa porcentual y parámetro logarítmico. Escribir $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ y $Q(t) = Q_0 b^t$ describe el mismo modelo si $k = \ln b$. El aumento porcentual por unidad es $b - 1 = e^k - 1$, no k.

Para un factor $b = 2$, el aumento por unidad es $100\,\%$ y el parámetro logarítmico es $\ln 2$. Son números distintos. La igualdad de modelos se demuestra mediante $b^t = e^{t \ln b}$; no se obtiene identificando indebidamente sus parámetros.

Recuperación breve. a) Una cantidad hipotética comienza en 96 y conserva tres cuartas partes de su valor en cada paso. Escriba el modelo discreto y calcule los dos primeros valores posteriores al inicial.

b) Una cantidad se triplica cada dos horas según un modelo exponencial de tiempo real. Determine cuándo alcanza nueve veces su valor inicial.

Respuesta razonada. En **a)**, $Q(n) = 96(3/4)^n$ para enteros $n \geq 0$. Los valores son 72 y 54; en cada paso se pierde una cuarta parte del valor presente, no una cantidad absoluta fija.

En **b)**, $Q(t) = Q_0\, 3^{t/2}$ con $Q_0 > 0$ y $t \geq 0$ medido en horas. La condición $Q(t) = 9Q_0$ equivale a $3^{t/2} = 3^2$. Inyectividad da $t/2 = 2$ y $t = 4$ horas. La sustitución produce exactamente el factor 9.

Qué debemos conservar. Un modelo multiplicativo conserva un factor por períodos iguales. Su uso exige declarar valor inicial, factor, unidad temporal y dominio; la extensión entre pasos es una hipótesis adicional. Los logaritmos recuperan tiempos y parámetros, mientras el diagnóstico controla leyes, dominios y orientación en cada transición.

Un ajuste exacto no demuestra una ley universal. Dos datos positivos en tiempos diferentes pueden fijar Q_0 y b en un modelo $Q(t) = Q_0 b^t$. Un tercer dato prueba compatibilidad con esa elección, no la validez del modelo para todo tiempo. **Control resuelto:** $Q(0) = 6$, $Q(1) = 9$ fuerzan $b = 3/2$, y predicen $Q(2) = 27/2$. Si el tercer dato es 14, el modelo no ajusta los tres exactamente. Incluso tres coincidencias permiten otras funciones entre los tiempos observados. Debemos indicar además si t cuenta pasos enteros o tiempo continuo y cuál es su unidad: cambiar de horas a minutos cambia el exponente, no el proceso. La distinción entre datos, parámetros e hipótesis de extensión evita atribuir a una tabla una demostración que no proporciona.

23.16. Síntesis y puente al álgebra polinómica

En este capítulo hemos aprendido a recuperar exponentes, transportar comparaciones y reconocer estructuras algebraicas dentro de expresiones exponenciales y logarítmicas. La dificultad final consiste en elegir qué herramienta aplicar sin perder las condiciones que sostienen el argumento.

Considere $\ln(4^x - 5 \cdot 2^x + 4) \leq \ln 4$. Antes de aplicar una ley, debemos preguntar dónde existe el logaritmo y qué forma tiene su argumento. La factorización y la monotonía resuelven obligaciones diferentes; ninguna sustituye a la otra.

Organizar una resolución autónoma. El primer dato es el dominio original. Para cada logaritmo se exige base válida y argumento positivo; para cada denominador, valor no nulo; para cada composición, las condiciones de todas sus capas.

Después se identifica la estructura: bases comunes, una potencia de otra exponencial, un polinomio en un valor logarítmico, una comparación que se transporta por monotonía o una familia que cambia según el parámetro. La forma elegida debe hacer visible esa estructura.

Cada transición necesita una razón. Aplicar una función inyectiva a una igualdad puede conservarla como equivalencia; aplicarla a una desigualdad exige además su orientación.

Expandir un logaritmo requiere argumentos positivos. Dividir exige un factor no nulo y, para orden, conocer su signo.

Una sustitución añade la obligación de registrar su imagen y reconstruir todas las preimágenes. Al final se declara un conjunto en la variable original, conservando los puntos excluidos y la unión o intersección que exige el problema.

Pregunta	Evidencia que debe aparecer
¿Dónde tiene sentido el problema?	dominio de las expresiones originales
¿Qué estructura permite avanzar?	forma equivalente y herramienta disponible
¿Por qué vale el paso?	hipótesis de ley, inyectividad, monotonía o signo
¿Qué valores admite la auxiliar?	imagen y restricciones heredadas
¿Cómo volvemos a la variable original?	preimágenes completas
¿Por qué ésta es toda la solución?	prueba de regiones y control de fronteras

Estas preguntas organizan el razonamiento; no obligan a escribir una plantilla larga para un problema sencillo. En una síntesis de varias capas, permiten detectar qué información aún falta.

Síntesis: logaritmo de un polinomio en una exponencial. Resolvamos la condición inicial. El dominio exige $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 > 0$. Como ln es creciente y ambos argumentos deben ser positivos, la inequación equivale a

$$0 < 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 4.$$

Tomamos $u = 2^x > 0$, de modo que $4^x = u^2$. Debemos resolver simultáneamente $u^2 - 5u + 4 > 0$ y $u^2 - 5u + 4 \leq 4$.

La primera condición se factoriza como $(u-1)(u-4) > 0$. En la imagen positiva selecciona $0 < u < 1$ o $u > 4$.

La segunda se reduce a $u(u-5) \leq 0$. En la imagen positiva, equivale a $0 < u \leq 5$. Intersectando ambas condiciones, obtenemos $S_u = (0,1) \cup (4,5]$.

La vuelta mediante la exponencial de base 2, creciente y biyectiva hacia los positivos, da $x < 0$ o $2 < x \leq \log_2 5$. Por tanto,

$$S = (-\infty, 0) \cup (2, \log_2 5].$$

El orden de las fronteras está justificado: $5 > 4$ implica $\log_2 5 > 2$.

Verificar regiones y extremos de la síntesis. Si $x < 0$, entonces $0 < u < 1$. El producto $(u-1)(u-4)$ es positivo y $u(u-5) < 0$, así que el argumento del logaritmo está estrictamente entre 0 y 4. La condición original es verdadera en toda esa región.

Si $2 < x \leq \log_2 5$, tenemos $4 < u \leq 5$. El argumento vuelve a ser positivo y no excede 4. En el extremo superior, $u = 5$ produce argumento 4, de modo que la igualdad se admite.

Los puntos $x = 0$ y $x = 2$ producen argumento cero: allí el logaritmo no existe. No son fronteras excluidas por una desigualdad estricta entre valores definidos. Entre esos puntos, $1 < u < 4$ produce argumento negativo. Para $x > \log_2 5$, el argumento es mayor que 4 y la comparación falla.

Esta verificación separa inadmisibilidad de dominio y falsedad de una condición definida. La biyectividad de la sustitución garantiza que todas las regiones auxiliares se reconstruyeron.

Otra ruta: resolver primero el dominio en x. Podemos empezar por el dominio: $(2^x - 1)(2^x - 4) > 0$ equivale a $x < 0$ o $x > 2$.

Dentro de ese dominio, ln creciente permite comparar el argumento con 4. La condición restante es $2^x(2^x - 5) \leq 0$. Dividir por $2^x > 0$ conserva la relación y da $2^x \leq 5$, esto es $x \leq \log_2 5$.

Intersectar esta semirrecta con el dominio anterior recupera $(-\infty, 0) \cup (2, \log_2 5]$. La primera ruta reunió las condiciones en la auxiliar; la segunda resolvió por separado dominio y comparación. Ambas conservan exactamente las mismas obligaciones.

El alcance de una sustitución algebraica. La expresión $4^x - 5 \cdot 2^x + 4$ es un polinomio en 2^x: si $P(u) = u^2 - 5u + 4$, la expresión es $P(2^x)$. No es por ello un polinomio en x.

En el anillo de expresiones polinómicas que estudiaremos, un polinomio en x combina coeficientes con potencias enteras no negativas de x mediante una suma finita. La posición exponencial de x pertenece a otra estructura. Reemplazar 2^x por u permite resolver un problema polinómico auxiliar, pero no cambia el tipo de la función original.

Las identidades, factorizaciones y reglas de signo de C19–C22 ya han proporcionado herramientas para esa auxiliar. C24 estudiará sistemáticamente el objeto polinomio y sus operaciones, incluida la división. C25 desarrollará raíces, factores e irreducibilidad. La función logarítmica seguirá siendo la herramienta para reconstruir el exponente después de resolver en la imagen positiva.

Qué se demostró y qué se admitió. Las leyes de logaritmos, el cambio de base, la monotonía de la inversa y las transformaciones usadas en esta síntesis se demostraron a partir de las propiedades exponenciales declaradas.

La construcción de la exponencial real, con sus leyes fundamentales, monotonía e imagen positiva, se admitió explícitamente en §23.2. Nombrar e y usar exp y ln no equivale a haber construido analíticamente esa constante o esas funciones.

Esta frontera permite reconocer qué podemos justificar con el álgebra disponible y qué queda para cálculo/análisis. Una gráfica, una tabla o un decimal puede ilustrar o comprobar un caso; no reemplaza la prueba de existencia diferida.

Prueba de estrés de la estrategia. Resolvamos $\ln((e^x - 1)^2) \leq 0$. La exponencial existe para todo real, pero el logaritmo exige $e^x \neq 1$, es decir $x \neq 0$.

Como ln es creciente, la condición equivale a $0 < (e^x - 1)^2 \leq 1$. Con $u = e^x > 0$, la cota superior exige $|u - 1| \leq 1$, es decir $0 \leq u \leq 2$. Se conserva $u > 0$ y se excluye $u = 1$, de modo que $S_u = (0, 1) \cup (1, 2]$.

La vuelta da $S = (-\infty, 0) \cup (0, \ln 2]$. El punto 0 permanece excluido aunque una expansión incorrecta del logaritmo pudiera ocultarlo. La identidad válida es $\ln((e^x - 1)^2) = 2 \ln |e^x - 1|$ para $x \neq 0$; escribir $2 \ln(e^x - 1)$ perdería toda la rama negativa de x.

Recuperación breve. Resuelva $\ln((2^x - 1)/(2^x + 1)) \geq -\ln 3$ y verifique la frontera.

Respuesta razonada. El denominador $2^x + 1$ es positivo para todo real. El argumento del logaritmo es positivo exactamente si $2^x > 1$, de modo que el dominio es $x > 0$.

Como $-\ln 3 = \ln(1/3)$ y ln es creciente, la comparación equivale en ese dominio a $(2^x - 1)/(2^x + 1) \geq 1/3$. Multiplicar por el denominador positivo y por $3 > 0$ da $3(2^x - 1) \geq 2^x + 1$, equivalente a $2^x \geq 2$. Por monotonía, $x \geq 1$, condición que ya respeta el dominio.

Así, $S = [1, \infty)$. En $x = 1$, el cociente es $1/3$ y los dos miembros logarítmicos coinciden. Para $x > 1$, el argumento es mayor que $1/3$, como muestra la misma cadena reversible. Los valores $0 < x < 1$ incumplen la comparación y los valores $x \leq 0$ no pertenecen al dominio.

Qué debemos conservar del capítulo. Exponenciales y logaritmos relacionan exponentes, productos y orden mediante funciones inversas con dominios precisos. La base gobierna la orientación; la imagen decide qué valores pueden reconstruirse; las leyes cambian la forma sin ampliar el dominio. Resolver requiere conservar esos datos hasta declarar el conjunto solución.

El paso hacia los polinomios prolonga una práctica ya adquirida: reconocer una estructura, elegir una forma útil y justificar cada operación. Ahora estudiaremos ese objeto algebraico por derecho propio, con sus operaciones y algoritmos.

Ejercicios

Intente resolver cada ejercicio antes de consultar su solución. Conserve las condiciones de base y dominio en las traducciones y simplificaciones.

A. Lectura.

Ejercicio 1. Compare $f(x) = x^4$ y $g(x) = 4^x$. Identifique qué papel ocupa la variable en cada expresión y dé un valor de x que muestre que no son la misma función.

Ejercicio 2. Entre $a = -2, 0, 1, 1/4, 3$, identifique las bases que definen una función exponencial real invertible sobre todo $\mathbb{R}$. Explique qué ocurre con las restantes.

Ejercicio 3. Traduzca $5^{-2} = 1/25$ a forma logarítmica. Identifique base, argumento y valor del logaritmo.

Ejercicio 4. Determine si están definidas en los reales las expresiones $\log_2(-4)$, $\log_2(1/4)$ y $\log_1 4$. Evalúe la que corresponda.

Ejercicio 5. Escriba el dominio y la imagen de $E_3(x) = 3^x$ y de su inversa $L_3(t) = \log_3 t$. Indique qué pares corresponden a $(2, 9)$.

Ejercicio 6. Para $\log_2(x - 4)$, explique por qué no basta excluir $x = 4$ y determine el dominio.

Ejercicio 7. Determine el dominio de $F(x) = 2^{\log_2(x+3)}$ y la fórmula que resulta al componer las funciones inversas. ¿Esa fórmula amplía el dominio de F?

Ejercicio 8. Sin calcular decimales, compare $(1/3)^2$ con $(1/3)^5$, y $\log_{1/3} 2$ con $\log_{1/3} 7$. Indique la propiedad usada.

Ejercicio 9. Una cantidad hipotética comienza en 60 y conserva el 80 % de su valor en cada paso entero. Identifique valor inicial, factor y porcentaje de disminución; escriba el modelo y el valor tras un paso.

Ejercicio 10. En la sustitución $u = e^x$, ¿qué valores reales puede tomar u? Si una ecuación auxiliar ofrece $u = -1$ o $u = 4$, determine qué candidatos se reconstruyen y cómo.

B. Fluidez. Practique las leyes y las funciones inversas conservando sus hipótesis. En ecuaciones e inequaciones, declare el conjunto solución.

Ejercicio 11. Evalúe exactamente $27^{2/3}$, $16^{-3/4}$ y $(1/9)^{-1/2}$.

Ejercicio 12. Evalúe $\log_4(1/8)$, $\log_{1/2} 8$ y $\log_9 3$ sin aproximaciones decimales.

Ejercicio 13. Simplifique $5^{2t-1}5^{3-t}/5^{t+1}$ para $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 14. Simplifique $\ln(e^{3x-2})$ y $e^{\ln(x^2-4)}$, indicando el dominio de cada expresión original.

Ejercicio 15. Expanda $\log_3(9x^2/\sqrt{y})$ para $x \neq 0$ e $y > 0$. Conserve una fórmula válida también cuando $x < 0$.

Ejercicio 16. Condense $2\ln(x-1) - \ln(x+2)$ en un solo logaritmo y determine el dominio que debe acompañar a la fórmula.

Ejercicio 17. Escriba $\log_7 20$ mediante ln y calcule exactamente $\log_8 32$ usando cambio de base.

Ejercicio 18. Resuelva en $\mathbb{R}$ la ecuación $9^{x-1} = 27^{2x+1}$.

Ejercicio 19. Resuelva $5\,2^{x+1} = 30$ y dé la solución exacta.

Ejercicio 20. Resuelva $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ y reconstruya todas las soluciones reales.

Ejercicio 21. Resuelva $\log_3(2x - 1) = 2$ y compruebe el dominio.

Ejercicio 22. Resuelva $\ln(x + 3) = \ln(2x - 1)$.

Ejercicio 23. Resuelva $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$, conservando el dominio antes de condensar.

Ejercicio 24. Resuelva $(1/4)^{2x-1} \geq 8$ y escriba el resultado como intervalo.

Ejercicio 25. Resuelva $\log_{1/2}(x-2) < -1$, distinguiendo dominio y comparación.

Ejercicio 26. Resuelva la condición compuesta $0 \leq \ln(x+1) < \ln 4$ y compruebe ambos extremos.

C. Justificación. En cada argumento, identifique las hipótesis que hacen posibles las expresiones y las propiedades que autorizan las transformaciones. Una equivalencia debe conservar el dominio y justificarse en ambos sentidos.

Ejercicio 27. Sean $a > 0$, $a \neq 1$ y $u, v > 0$. Demuestre $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$ a partir de las leyes exponenciales y la definición de inversa. Indique dónde se utiliza cada hipótesis.

Ejercicio 28. Con $a > 0$, $a \neq 1$ y $u, v > 0$, demuestre la ley $\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v$. Explique por qué la sola condición $u/v > 0$ no basta para que la igualdad escrita tenga sentido.

Ejercicio 29. Para $a > 0$, $a \neq 1$, $u > 0$ y $r \in \mathbb{R}$, demuestre $\log_a(u^r) = r \log_a u$. Separe las propiedades exponenciales admitidas del argumento que demuestra esta consecuencia.

Ejercicio 30. Demuestre que $\ln(x^2) = 2\ln|x|$ para todo $x \neq 0$. Determine en qué dominio puede reemplazarse $|x|$ por x y dé un contraejemplo a ese reemplazo fuera de dicho dominio.

Ejercicio 31. Demuestre que el logaritmo de base $a > 1$ es estrictamente creciente y el de base $0 < a < 1$ es estrictamente decreciente. Puede usar la monotonía de la exponencial, pero no asumir la monotonía de su inversa.

Ejercicio 32. Sean $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ y $u > 0$. Demuestre la fórmula de cambio de base $\log_a u = \log_b u / \log_b a$ y justifique que el denominador no es cero.

Ejercicio 33. Demuestre $a^x = e^{x \ln a}$ para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. ¿Debe excluirse $a = 1$ en esta identidad? Justifique su respuesta sin usar límites ni series.

Ejercicio 34. Para $a > 0$ fijo y $p, q \in \mathbb{R}$, justifique la equivalencia $a^p = a^q \iff p = q$ cuando $a \neq 1$. Explique exactamente qué cambia si $a = 1$.

Ejercicio 35. Fije $0 < a < 1$. Demuestre $a^p \leq a^q \iff p \geq q$ para $p, q \in \mathbb{R}$, incluyendo la vuelta y el caso de igualdad. Úselo para resolver $(1/5)^{x+2} \leq (1/5)^{3x-4}$.

Ejercicio 36. Sea $D = (2, \infty)$. Justifique, para $x \in D$, la equivalencia $\log_2(x-2) + \log_2(x+2) = 2 \iff x^2 - 4 = 4$. Resuelva la ecuación original y explique por qué no puede borrar D en la equivalencia.

Ejercicio 37. Justifique que la sustitución $u = 3^x$ establece una correspondencia biyectiva entre las soluciones reales de $9^x - 2\,3^x - 3 = 0$ y las soluciones positivas de $u^2 - 2u - 3 = 0$. Resuelva y explique por qué «resolver el polinomio» no termina el problema.

Ejercicio 38. Determine el dominio de $\ln((x-1)/(x+1))$ y justifique, sobre ese dominio, la equivalencia $\ln((x-1)/(x+1)) \geq 0 \iff (x-1)/(x+1) \geq 1$. Resuelva sin multiplicar por $x+1$ antes de conocer su signo.

D. Diagnóstico. Localice la primera ruptura o la obligación omitida en cada resolución. Explique su efecto y dé una reparación completa.

Ejercicio 39. Una resolución propone $\ln(x+2) = \ln x + \ln 2 = 0$, y concluye $x = 1/2$. Localice la primera ruptura y resuelva correctamente $\ln(x+2) = 0$.

Ejercicio 40. Se afirma que $F(x) = e^{\ln(x-3)} = x - 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Identifique el error, determine el dominio de F y decida si $F(2)$ existe.

Ejercicio 41. Una cadena dice $1^{2x-1} = 1^{x+3} \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$. Localice la primera falsa equivalencia y dé el conjunto solución original.

Ejercicio 42. Para resolver $(1/2)^x > 4$, se escribe $x > 2$ «porque $4 = (1/2)^2$». Identifique los errores en el valor exponencial y en el transporte de orden; repare la solución.

Ejercicio 43. Se resuelve $\log_{1/3}(x+1) \geq 0$ como $x+1 \geq 1$, y se responde $x \geq 0$. Localice la primera ruptura y conserve el dominio al corregirla.

Ejercicio 44. Se propone $\ln(x^2) = \ln 9 \iff 2\ln x = 2\ln 3 \iff x = 3$. Indique qué solución se pierde y repare la cadena sobre el dominio original.

Ejercicio 45. Para $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 5$, se condensa y se obtiene $x^2 - 4 = 5$, luego se aceptan $x = \pm 3$. Localice la obligación omitida y dé la respuesta correcta.

Ejercicio 46. Una resolución de $\ln x\,(\ln x - 2) = 0$ divide por $\ln x$ y concluye $x = e^2$. Localice la primera operación no reversible y recupere todas las soluciones.

Ejercicio 47. Se afirma $\log_2 8 = \ln 2 / \ln 8 = 1/3$. Identifique la fórmula mal aplicada y repare el cálculo con una verificación exponencial.

Ejercicio 48. De $2^x + 2^{x+1} = 12$ se pasa a $2^{2x+1} = 12$ y se igualan exponentes tras expresar $12 = 2^{\log_2 12}$. Localice la primera ruptura y resuelva la ecuación original.

Ejercicio 49. Tras sustituir $u = e^x$ en $e^{2x} + e^x - 2 = 0$, se obtienen $u = 1, -2$ y se anuncian $x = 0, \ln 2$ «tomando logaritmo del valor absoluto». Diagnostique la reconstrucción y repárela.

Ejercicio 50. Se dice que «el logaritmo de -4 es negativo» y se usa $\ln(-4) = -\ln 4$ para justificar $e^x = -4 \iff x = -\ln 4$. Localice la primera ruptura y decida la ecuación real.

E. Estrategia. Compare las rutas propuestas atendiendo a la estructura, las hipótesis y la información que cada una conserva. Resuelva con argumentos exactos.

Ejercicio 51. Resuelva $16^{x-1} = 8^{x+1}$ por bases comunes y por logaritmos. Compare qué ruta ofrece menos operaciones y qué hipótesis comparten.

Ejercicio 52. Resuelva $3^{2x+1} = 7$. Compare usar ln con usar $\log_3$, y explique por qué una solución decimal no es necesaria.

Ejercicio 53. Resuelva $4^x - 6\,2^x + 8 = 0$. Compare tratarla como cuadrática en 2^x con aplicar ln a ambos miembros después de aislar 4^x. Indique qué ruta aprovecha mejor la estructura.

Ejercicio 54. Para $x > 0$, resuelva $\ln x + \ln(4x) = \ln 36$ por condensación y por expansión. Compare la cantidad de pasos sin perder el dominio.

Ejercicio 55. Decida sin aproximaciones si $\log_2 7 < \log_4 49$. Compare cambio de base e interpretación como exponentes.

Ejercicio 56. Determine el signo de $\log_{1/4} 3$ y ubíquelo entre dos enteros consecutivos, sin calculadora. Compare trabajar con potencias de $1/4$ con cambiar a base 4.

Ejercicio 57. Resuelva $5^{x-2} \leq 3$. Compare transportar el orden con $\log_5$ y con ln; indique por qué no conviene redondear la frontera antes de dar el conjunto solución.

Ejercicio 58. Resuelva $e^x + e^{-x} = 5/2$. Compare la sustitución positiva con tomar ln de la suma y justifique cuál elimina mejor la dificultad.

Ejercicio 59. Determine el dominio de $\ln((x-2)^2)$ y el de $\ln(x-2) + \ln(x-2)$. Decida si expandir es útil para estudiar la primera función en todo su dominio y proponga una expansión válida.

Ejercicio 60. Resuelva $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$. Compare condensar el cociente con exponenciar por separado las expresiones, y explique qué verificación requiere su ruta.

F. Transferencia. Use las herramientas de dominios, ecuaciones y orden en composiciones, parámetros y modelos. Conserve las restricciones al reconstruir la variable original.

Ejercicio 61. Determine dominio e imagen de $F(x) = \ln((x-2)/(x+1))$. Justifique cada valor omitido y reconstruya una preimagen para cualquier valor de la imagen.

Ejercicio 62. Resuelva $\log_2((x+1)/(x-1)) = 2$, conservando el dominio racional y logarítmico.

Ejercicio 63. Resuelva $\ln((x+2)/(x-2)) < \ln 3$ y explique cómo conserva el signo del denominador.

Ejercicio 64. Resuelva $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$. Indique la imagen de la variable auxiliar y reconstruya todas las soluciones.

Ejercicio 65. Resuelva $2^{x^2-1} = 8$ y explique por qué la inyectividad exponencial no implica una única solución en x.

Ejercicio 66. Resuelva $\ln(\sqrt{x+1}) = \ln 2$. Determine primero el dominio de la composición.

Ejercicio 67. Para cada parámetro $a > 0$, determine el conjunto solución de $a^{x-1} = a^2$. Separe los valores de base que cambian el argumento.

Ejercicio 68. Para cada $c \in \mathbb{R}$, clasifique las soluciones de $\ln(x-1) = c$, indicando existencia y unicidad.

Ejercicio 69. Una cantidad hipotética comienza en 96 unidades y conserva $3/4$ de su valor por paso entero. Escriba el modelo, calcule su valor tras dos pasos y decida si ya es menor que la mitad inicial.

Ejercicio 70. Se estipula el modelo real $Q(t) = 80(1/2)^{t/6}$, donde $t \geq 0$ se mide en horas y Q en unidades. Reescríbalo con tiempo s medido en minutos y determine el tiempo para alcanzar 20 unidades.

Ejercicio 71. En la familia hipotética $Q(n) = Ab^n$, con $A > 0$, $b > 0$ y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se conocen $Q(1) = 18$ y $Q(3) = 72$. Determine A, b y compruebe ambos datos.

Ejercicio 72. Para el modelo real estipulado $Q(t) = 10\,2^{t/3}$, $t \geq 0$ en horas, halle el primer tiempo real con $Q(t) \geq 50$. Si sólo se observa en horas enteras $n \geq 0$, determine la primera observación que satisface el umbral y justifíquela sin redondear.

G. Síntesis avanzada. Elija una representación útil sin que el enunciado anuncie el método. Justifique dominio, transformaciones, reconstrucción y cobertura completa de las soluciones.

Ejercicio 73. Resuelva en $\mathbb{R}$ la inequación $8^x - 3\,4^x - 6\,2^x + 8 \geq 0$. Justifique que su respuesta cubre todas las regiones y determine qué fronteras se admiten.

Ejercicio 74. Resuelva $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(3x+3)$. Distinga los candidatos que ofrecen las transformaciones algebraicas de las soluciones de la ecuación original.

Ejercicio 75. Resuelva $\log_{1/2}((x-2)/(x+1)) \geq 1$. Justifique por separado la positividad del argumento y la orientación de la comparación.

Ejercicio 76. Para cada parámetro $a > 0$, clasifique el conjunto solución de $a^{x^2-1} \leq a$. Explique cómo cambian las regiones al atravesar el valor de base 1 y qué ocurre exactamente en él.

Ejercicio 77. Determine el dominio y resuelva $\ln(e^{\ln(x^2-1)} - 3) = 0$. Explique por qué simplificar las inversas interiores no basta para fijar el dominio de toda la composición.

Ejercicio 78. Resuelva el sistema $\ln 2/\ln(x-1) \geq 1/2$ y $\log_{1/2} x \geq -2$. Dé un único conjunto solución y justifique cualquier multiplicación por un denominador de signo variable.

Ejercicio 79. En la familia hipotética $Q(t) = Ab^t$, con $A, b > 0$ y $t \geq 0$ medido en días, se registran $Q(0) = 12$ y $Q(2) = 27$ unidades. Determine los parámetros. Si el modelo se estipula para todo tiempo real, halle el primer tiempo con $Q(t) \geq 100$; si sólo se consulta en días enteros, determine el primero sin aproximaciones decimales.

Ejercicio 80. Resuelva $\ln((2^x-1)/(2^x-4)) \leq \ln 2$. Justifique el dominio, todas las regiones y las fronteras. Presente una segunda ruta o una verificación independiente que confirme el conjunto solución.

H. Profundización y reconstrucción. Intente cada tarea antes de consultar su solución. Los parámetros son reales salvo indicación distinta.

Ejercicio 081. Una base que cruza el valor uno. Para $t > 0$, resuelva $t^{x-2} = t^{2x+1}$ y clasifique el caso $t = 1$.

Ejercicio 082. Clasificar una inequación por la base. Para $t > 0$, resuelva $t^{2x-1} \le t^{x+3}$.

Ejercicio 083. Una ecuación logarítmica con dos bases. Para $t > 0$, $t \neq 1$, resuelva $\log_t(x+1) = \log_{1/t}(x+1) + 2$.

Ejercicio 084. Una familia exponencial con una región imposible. Para $t > 0$, resuelva $t^x = 2t^{x/2}$ y clasifique $t = 1$.

Ejercicio 085. Construir un logaritmo con dos regiones de dominio. Dados $a < b$ y una base $q > 0$, $q \neq 1$, construya una composición logarítmica cuyo dominio sea $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$.

Ejercicio 086. Prescribir un intervalo abierto mediante dos capas. Dados $a < b$, construya una composición de logaritmo y raíz con dominio exactamente (a, b).

Ejercicio 087. Un dominio con una exclusión interior. Para $a < b$, determine el dominio de $1/\log_2[(x-a)/(b-x)]$ y simplifique la descripción del punto excluido.

Ejercicio 088. La base interior cambia una composición. Para $t > 0$, $t \neq 1$, determine el dominio de $\log_2(\log_t x)$.

Ejercicio 089. Umbral discreto por comparaciones exactas. Una sucesión satisface $Q(0) = 5$ y $Q(n+1) = 2Q(n)$ para enteros $n \ge 0$. Determine el primer paso con $Q(n) \ge 100$, sin aproximar logaritmos.

Ejercicio 090. Convertir un umbral en una condición sobre el factor. Para $0 < b < 1$, una sucesión vale $Q(n) = 80b^n$. Determine todas las bases para las que el primer paso con $Q(n) < 30$ es exactamente $n = 4$.

Ejercicio 091. Elegir una unidad que normaliza el factor. En $Q(t) = Q_0 b^{t/\tau}$, con $Q_0 > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\tau > 0$, el tiempo t se mide en horas. Encuentre la duración d de una nueva unidad para que, al contar $s = t/d$, el factor por unidad sea b^2. Indique qué pasa si $b = 1$.

Ejercicio 092. Todos los factores que cruzan un umbral en un paso dado. Para $b > 1$, $Q_0 > 0$ y un entero $m \ge 2$, determine todas las bases b para las que $Q(n) = Q_0 b^n$ alcanza por primera vez $5Q_0$ en el paso m.

Ejercicio 093. Ajustar dos datos y comprobar un tercero. En $Q(n) = Ab^n$ con $A, b > 0$, ajuste $Q(0) = 6$, $Q(1) = 9$ y decida si puede cumplirse también $Q(2) = 14$.

Ejercicio 094. Un solo dato y una familia de ajustes. Para $A, b > 0$, se conoce $Q(2) = 12$ en $Q(t) = Ab^t$. Describa todos los ajustes. Determine cuál de ellos satisface además $Q(5) = 12$ y explique qué información añade el segundo dato.

Ejercicio 095. Un parámetro de datos y un test de compatibilidad. Para $u > 0$, se dan $Q(0) = u$, $Q(1) = u + 1$, $Q(2) = u + 3$. Determine si existe $Q(n) = Ab^n$, $A, b > 0$, que ajuste los tres.

Ejercicio 096. Datos finitos frente a una extensión continua. Construya dos funciones positivas distintas en $t \ge 0$ que coincidan con Ab^n en cada entero $n \ge 0$, para $A > 0, b > 0$. Explique qué demuestra el ejemplo.

Soluciones desarrolladas

A. Lectura.

Solución 1. En f varía la base y el exponente permanece fijo; es una función potencia. En g la base permanece fija y varía el exponente; es una función exponencial. En $x = 0$, $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$. Por tanto, no coinciden en todo su dominio común y no son iguales como funciones. Una coincidencia en algún otro argumento no repararía esa diferencia.

Solución 2. Las bases válidas son $1/4$ y 3: son positivas y distintas de 1. La base negativa -2 no admite, por ejemplo, el exponente real $1/2$. La base 0 no admite exponentes negativos, pues exigirían dividir por cero. La base 1 produce la constante 1, definida para todos los reales pero no inyectiva. Sólo las dos bases válidas proporcionan la pareja exponencial–logaritmo inversa del capítulo.

Solución 3. La forma equivalente es $\log_5(1/25) = -2$. La base es 5, el argumento es $1/25$ y el valor es el exponente -2. El argumento es positivo, aunque el resultado sea negativo. La equivalencia se comprueba elevando 5 a ese resultado: $5^{-2} = 1/25$.

Solución 4. La primera no está definida: una potencia real de base 2 nunca produce un valor negativo. La segunda está definida y vale -2, porque $2^{-2} = 1/4$. La tercera no está definida como logaritmo de base válida: la función de base 1 es constante y no tiene inversa. Las restricciones de argumento y base son distintas y ambas deben cumplirse.

Solución 5. La exponencial tiene dominio $\mathbb{R}$ e imagen $(0, \infty)$. Su inversa tiene dominio $(0, \infty)$ e imagen $\mathbb{R}$. El par $(2, 9)$ pertenece a E_3, y el par intercambiado $(9, 2)$ pertenece a L_3, porque $3^2 = 9$ equivale a $\log_3 9 = 2$. La inversión intercambia entrada y salida, además de dominio e imagen.

Solución 6. El argumento debe ser estrictamente positivo: $x - 4 > 0$, de modo que el dominio es $(4, \infty)$. Excluir sólo 4 seguiría admitiendo los valores $x < 4$, que producen argumentos negativos y no tienen logaritmo real. En 4 el argumento es cero y tampoco se admite.

Solución 7. El logaritmo interior exige $x + 3 > 0$, así que $D = (-3, \infty)$. La exponencial exterior acepta todo valor real del logaritmo. Sobre D, la identidad inversa da $F(x) = x + 3$. El polinomio $x + 3$ existe en más argumentos, pero la composición original conserva D; la simplificación no define F en $x \le -3$.

Solución 8. La base $1/3$ está entre cero y uno, por lo que tanto la exponencial como su inversa logarítmica son estrictamente decrecientes. Como $2 < 5$, se tiene $(1/3)^2 > (1/3)^5$. Como $2 < 7$ y ambos argumentos son positivos, se tiene $\log_{1/3} 2 > \log_{1/3} 7$. En cada caso la función decreciente invierte el orden de las entradas.

Solución 9. El valor inicial es 60 y el factor por paso es $0.80 = 4/5$. La disminución es $1 - 0.80 = 0.20$, es decir $20\,\%$ del valor presente. El modelo discreto es $Q(n) = 60(4/5)^n$ para enteros $n \ge 0$. Tras un paso, $Q(1) = 48$. El $80\,\%$ conservado no es el porcentaje perdido, y la fórmula no decide por sí sola valores entre pasos.

Solución 10. La imagen de exp es $(0, \infty)$: u puede ser cualquier positivo, pero no cero ni negativo. El candidato -1 carece de preimagen real y se descarta. El candidato 4 tiene una única preimagen $x = \ln 4$, pues $\exp(\ln 4) = 4$ y exp es inyectiva. La resolución auxiliar sólo produce soluciones originales después de intersectar con la imagen y reconstruirlas.

B. Fluidez.

Solución 11. Las bases son positivas, por lo que podemos usar raíces principales y las leyes de exponentes racionales. Se obtiene $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 9$. Asimismo, $16^{-3/4} = 1/(\sqrt[4]{16})^3 = 1/8$. Finalmente, $(1/9)^{-1/2} = 1/\sqrt{1/9} = 3$. Los exponentes negativos indican recíprocos, sin cambiar el signo positivo de los valores.

Solución 12. Cada base es positiva y distinta de 1, y los tres argumentos son positivos. Como $4^{-3/2} = 1/8$, la definición inversa da $\log_4(1/8) = -3/2$. Puesto que $(1/2)^{-3} = 8$, resulta $\log_{1/2} 8 = -3$. Finalmente, $9^{1/2} = 3$ da $\log_9 3 = 1/2$. En cada caso, el resultado es el exponente que recupera el argumento.

Solución 13. El denominador es positivo para todo real t, así que el dominio es $\mathbb{R}$. Las leyes de producto y cociente de potencias de la misma base dan $5^{(2t-1)+(3-t)-(t+1)} = 5^1 = 5$. Por tanto, la expresión es la constante 5 sobre todo su dominio. La cancelación se realiza en los exponentes mediante leyes admitidas para exponentes reales.

Solución 14. En la primera, $e^{3x-2} > 0$ para todo real y la identidad inversa da $\ln(e^{3x-2}) = 3x-2$ sobre $\mathbb{R}$. En la segunda, el logaritmo interior exige $x^2-4>0$, esto es $x<-2$ o $x>2$. Sobre ese dominio, $e^{\ln(x^2-4)} = x^2-4$. Aunque el polinomio final existe para todos los reales, la composición conserva el dominio $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

Solución 15. Con las hipótesis dadas, $9x^2>0$ y $\sqrt{y}>0$, de modo que el cociente tiene logaritmo real. Las leyes de cociente y producto dan $\log_3 9 + \log_3(x^2) - \log_3(y^{1/2})$. Como $x^2 = |x|^2$ y $|x|>0$, la ley de potencia da $\log_3(x^2) = 2\log_3|x|$. La expansión válida es $2 + 2\log_3|x| - \frac{1}{2}\log_3 y$. Reemplazar $|x|$ por x perdería los argumentos negativos permitidos.

Solución 16. Las expresiones originales exigen $x-1>0$ y $x+2>0$, cuya intersección es $x>1$. En ese dominio, las leyes de potencia y cociente dan $\ln((x-1)^2/(x+2))$. La igualdad se afirma sobre $(1,\infty)$. El logaritmo condensado aislado también admitiría algunos valores $x<1$, pero éstos no pertenecen al dominio original. Condensar conserva la restricción $x>1$.

Solución 17. El cambio de base da $\log_7 20 = \ln 20/\ln 7$. El denominador no se anula porque $7\neq 1$, y $20>0$ garantiza que el numerador existe. Para el segundo cálculo conviene usar base 2: $\log_8 32 = \log_2 32/\log_2 8 = 5/3$. La comprobación $8^{5/3} = 32$ confirma el valor exacto. No se requieren aproximaciones decimales.

Solución 18. Ambos miembros están definidos y son positivos para todo real. Escribiendo las bases como potencias de 3, obtenemos $3^{2x-2} = 3^{6x+3}$. La inyectividad de la exponencial de base 3 hace esta igualdad equivalente a $2x-2 = 6x+3$, de donde $x=-5/4$. En ese valor ambos exponentes son $-9/2$. Por tanto, $S=\{-5/4\}$.

Solución 19. El dominio es $\mathbb{R}$. Dividir por $5\neq 0$ da $2^{x+1}=6$, equivalente a $x+1=\log_2 6$ por la definición de logaritmo. Así, $x=\log_2 6-1=\log_2 3$, usando $1=\log_2 2$ y la ley de cociente con argumentos positivos. La comprobación da $5\,2^{\log_2 3+1} = 5\cdot 6 = 30$. El conjunto solución es $S=\{\log_2 3\}$.

Solución 20. El dominio original es $\mathbb{R}$. Con $u=e^x>0$, la ecuación equivale a $u^2-5u+6=(u-2)(u-3)=0$. Los candidatos $u=2$ y $u=3$ pertenecen a la imagen positiva de exp. La inversa ln reconstruye exactamente una preimagen para cada uno: $x=\ln 2$ y $x=\ln 3$. Sustituir $e^x=2$ o 3 anula el polinomio, y la biyectividad garantiza que no faltan soluciones. Así, $S=\{\ln 2,\ln 3\}$.

Solución 21. El argumento exige $2x-1>0$, así que $D=(1/2,\infty)$. Sobre D, la definición de logaritmo convierte la ecuación en $2x-1=3^2=9$. Resulta $x=5$, que pertenece a D. La sustitución original da $\log_3 9=2$, de modo que $S=\{5\}$. La equivalencia inversa y el control de dominio prueban que ésta es toda la solución.

Solución 22. Las dos condiciones de argumento positivo son $x>-3$ y $x>1/2$, por lo que $D=(1/2,\infty)$. En ese dominio, la inyectividad de ln hace la ecuación equivalente a $x+3=2x-1$. La solución algebraica es $x=4$ y pertenece a D. Ambos argumentos valen 7, lo que verifica la igualdad original. Por tanto, $S=\{4\}$.

Solución 23. Los argumentos exigen $x>1$ y $x>-1$, así que el dominio original es $D=(1,\infty)$. Allí la ley de producto da $\log_2((x-1)(x+1))=3$, equivalente a $x^2-1=8$. Los candidatos algebraicos son $x=3$ y $x=-3$, pero sólo 3 pertenece a D. En 3, la suma es $\log_2 2+\log_2 4 = 1+2=3$. En consecuencia, $S=\{3\}$; el candidato -3 no tiene logaritmos originales definidos.

Solución 24. El dominio es $\mathbb{R}$ y $8=(1/4)^{-3/2}$. Como la base $1/4$ está entre cero y uno, la exponencial es estrictamente decreciente. La comparación equivale a $2x-1\le -3/2$, de donde $x\le -1/4$. La frontera produce igualdad y se incluye. Así, $S=(-\infty,-1/4]$. La inversión del orden ocurre al comparar exponentes, mientras dividir por $2>0$ conserva el orden.

Solución 25. El logaritmo exige $x-2>0$, así que $D=(2,\infty)$. Escribimos $-1=\log_{1/2} 2$. La base menor que uno hace el logaritmo estrictamente decreciente; por tanto, sobre D, la inequación equivale a $x-2>2$. Se obtiene $x>4$, condición que ya respeta el dominio. El punto 4 produce igualdad y queda excluido por la comparación estricta. El conjunto solución es $S=(4,\infty)$.

Solución 26. El dominio original exige $x > -1$. Como $0 = \ln 1$ y ln es estrictamente creciente, la condición compuesta equivale a $1 \le x + 1 < 4$. Esto da $0 \le x < 3$, una región contenida en el dominio. En $x = 0$, el logaritmo vale cero y la primera igualdad se admite; en $x = 3$, vale $\ln 4$ y la cota estricta lo excluye. Por tanto, $S = [0, 3)$. Ambas comparaciones se han intersectado, no unido.

C. Justificación.

Solución 27. Definamos $r = \log_a u$ y $s = \log_a v$. La positividad de u, v permite definir ambos números y la inversión da $u = a^r$, $v = a^s$. La ley exponencial produce $uv = a^r a^s = a^{r+s}$. Como $uv > 0$, podemos aplicar $\log_a$ y obtener $\log_a(uv) = r + s$. La base positiva permite utilizar la exponencial real, y $a \neq 1$ garantiza su inyectividad y la existencia de su inversa. No se han aplicado leyes logarítmicas para demostrar la misma ley que se buscaba.

Solución 28. Sean $r = \log_a u$ y $s = \log_a v$, bien definidos por las hipótesis. La ley exponencial del cociente da $u/v = a^r/a^s = a^{r-s}$. El cociente es positivo y la identidad inversa permite concluir $\log_a(u/v) = r - s$. La igualdad requiere también que los dos logaritmos del miembro derecho existan. Por ejemplo, con $u = -2$ y $v = -1$, el cociente es $2 > 0$ y el miembro izquierdo está definido, pero $\log_a u$ y $\log_a v$ no son reales. La positividad del cociente sólo autoriza su propio logaritmo.

Solución 29. Escribamos $s = \log_a u$, de modo que $u = a^s$. Como las bases son positivas, la ley exponencial admitida para exponentes reales da $u^r = (a^s)^r = a^{sr}$. También por las propiedades admitidas, $u^r > 0$, así que su logaritmo está definido. La identidad de inversa proporciona $\log_a(u^r) = sr = r \log_a u$. Aquí se usaron la ley de potencia de una potencia, la positividad y la inversa. La construcción de las potencias reales no se ha demostrado: se ha demostrado la ley logarítmica como consecuencia de aquellas propiedades.

Solución 30. Si $x \neq 0$, entonces $|x| > 0$ y $x^2 = |x|^2$. La ley de potencia aplicada a la base positiva $|x|$ da $\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2 \ln |x|$. Ambas expresiones tienen dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podemos escribir $2 \ln x$ sólo cuando $x > 0$, pues allí $|x| = x$ y el logaritmo existe. En $x = -2$, el miembro izquierdo es $\ln 4$ y la fórmula con valor absoluto da $2 \ln 2$, mientras $\ln(-2)$ no está definido en los reales. El reemplazo falla por dominio, aunque el cuadrado original sea positivo.

Solución 31. Sean $0 < u < v$ y escribamos $r = \log_a u$, $s = \log_a v$, de manera que $a^r = u$ y $a^s = v$. Si $a > 1$ y fuese $r \ge s$, la monotonía de la exponencial daría $u \ge v$, contradicción. Por tricotomía, $r < s$, lo que prueba que el logaritmo es estrictamente creciente. Si $0 < a < 1$ y fuese $r \le s$, la exponencial decreciente volvería a dar $u \ge v$, contradicción. En este régimen debe cumplirse $r > s$, y el logaritmo es estrictamente decreciente. La prueba utiliza preimágenes positivas y orden, sin añadir una admisión sobre la inversa.

Solución 32. Sea $r = \log_a u$, así que $u = a^r$. Aplicando $\log_b$, definido porque ambos lados son positivos, y la ley de potencia ya demostrada, resulta $\log_b u = r \log_b a$. Si $\log_b a = 0$, la definición inversa daría $a = b^0 = 1$, contrario a la hipótesis. Podemos dividir por ese denominador no nulo y obtener $r = \log_b u / \log_b a$. Las restricciones sobre b aseguran una base logarítmica válida; las de a permiten definir r. La prueba sirve también cuando alguno de los logaritmos es negativo.

Solución 33. Como $a > 0$, existe $\ln a$ y la identidad inversa da $a = e^{\ln a}$. La ley de potencia de una potencia con base positiva permite escribir $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. No es necesario excluir $a = 1$: en ese caso $\ln 1 = 0$ y los dos miembros valen 1 para todo x. La condición $a \neq 1$ corresponde a la invertibilidad de la exponencial de base a, que aquí no se necesita. El argumento usa las leyes reales admitidas y las identidades de inversa; no construye analíticamente e ni exp.

Solución 34. Si $a \neq 1$, la exponencial es estrictamente monótona. Si $p < q$ o $p > q$, sus valores son distintos, tanto en el régimen creciente como en el decreciente. Así, $a^p = a^q$ obliga a $p = q$; la implicación inversa se obtiene sustituyendo exponentes iguales. Para $a = 1$, ambos valores son siempre 1, incluso si $p \neq q$. Por ejemplo, $1^0 = 1^2$ con $0 \neq 2$. Por tanto, en ese

caso sólo subsiste la implicación $p = q \Rightarrow a^p = a^q$, y la igualdad de valores no impone una condición sobre los exponentes.

Solución 35. Si $p > q$, la monotonía estrictamente decreciente da $a^p < a^q$; si $p = q$, los valores son iguales. Esto prueba $p \geq q \Rightarrow a^p \leq a^q$. Para la vuelta, si $p < q$, la misma monotonía daría $a^p > a^q$, contradiciendo la comparación propuesta. La tricotomía deja $p \geq q$, y la igualdad de valores ocurre exactamente cuando $p = q$. En el problema, el dominio es $\mathbb{R}$ y la equivalencia da $x + 2 \geq 3x - 4$, es decir $x \leq 3$. Por tanto, $S = (-\infty, 3]$; en 3 ambos exponentes valen 5 y se admite la frontera.

Solución 36. Para $x \in D$, los dos factores $x - 2$ y $x + 2$ son positivos. La ley de producto permite condensar la suma como $\log_2(x^2 - 4)$, y la definición inversa hace $\log_2(x^2 - 4) = 2$ equivalente a $x^2 - 4 = 2^2 = 4$. La ecuación algebraica tiene candidatos $x = \pm 2\sqrt{2}$. Sólo $2\sqrt{2} > 2$ pertenece a D, por lo que $S = \{2\sqrt{2}\}$. El candidato negativo satisface la ecuación algebraica y tiene producto positivo, pero los dos argumentos logarítmicos originales son negativos. La equivalencia se ha probado sobre D; fuera de él, el miembro original ni siquiera está definido.

Solución 37. La ley de potencia da $9^x = (3^x)^2$, de modo que cada solución original produce una solución auxiliar $u = 3^x > 0$. Recíprocamente, para cada raíz auxiliar positiva existe una única preimagen $x = \log_3 u$; al sustituirla, se recupera la ecuación original. Ésta es la correspondencia biyectiva entre los dos conjuntos indicados. Factorizando, $u^2 - 2u - 3 = (u - 3)(u + 1)$, con raíces 3 y -1. La raíz -1 no está en la imagen exponencial; la raíz 3 se reconstruye como $x = 1$. Así, $S = \{1\}$, verificado por $9 - 6 - 3 = 0$. Resolver en toda $\mathbb{R}$ la auxiliar sólo ofrece candidatos: todavía debe conservarse $u > 0$ y volverse a x.

Solución 38. El cociente debe existir y ser positivo. Su tabla de signos, con puntos -1 y 1, da $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. En ese dominio, escribir $0 = \ln 1$ y usar la monotonía estrictamente creciente de ln justifica la equivalencia en ambos sentidos. Restar 1 en la comparación racional da $-2/(x + 1) \geq 0$. Como el numerador es estrictamente negativo y el denominador no se anula, esto ocurre exactamente si $x + 1 < 0$, es decir $x < -1$. La intersección con D conserva esa región, así que $S = (-\infty, -1)$. Allí el cociente es mayor que 1; para $x > 1$ está entre 0 y 1. No hay punto de igualdad, y -1 se excluye porque la expresión no existe.

D. Diagnóstico.

Solución 39. La primera ruptura es distribuir el logaritmo sobre la suma $x + 2$: la ley conocida corresponde a productos, no a sumas. Además, $\ln x + \ln 2$ exigiría $x > 0$, mientras el dominio original es $x > -2$. La definición inversa da $\ln(x + 2) = 0 \iff x + 2 = 1$, y resulta $x = -1$, que pertenece al dominio. Así, $S = \{-1\}$. El candidato $1/2$ tiene argumento $5/2 \neq 1$ y no satisface la ecuación. La falsa ley ha perdido la solución verdadera y producido una respuesta incorrecta.

Solución 40. La identidad inversa sólo puede aplicarse si el logaritmo interior está definido. Su argumento exige $x - 3 > 0$, de modo que $D_F = (3, \infty)$. Sobre ese dominio, $F(x) = x - 3$ es correcto. La primera ruptura está en extender la igualdad funcional a todo $\mathbb{R}$ después de simplificar. En particular, $F(2)$ no existe, aunque el polinomio $x - 3$ tenga valor -1 en 2. La reparación consiste en acompañar la fórmula simplificada de su dominio heredado.

Solución 41. El primer paso usa inyectividad de una exponencial de base 1, que es constante y no inyectiva. Ambos miembros originales valen 1 para todo real x, por lo que $S = \mathbb{R}$. La ecuación de exponentes sí tiene solución 4, pero no es equivalente a la original. Todos los demás reales se perdieron al imponer una condición innecesaria. La reparación es separar la base 1 antes de igualar exponentes; no basta verificar que 4 satisface la igualdad.

Solución 42. La igualdad numérica es falsa: $(1/2)^2 = 1/4$, mientras $4 = (1/2)^{-2}$. Ésta es la primera ruptura. Al comparar con el exponente correcto también debe usarse que la base $1/2$ produce una función decreciente. Por tanto, $(1/2)^x > (1/2)^{-2} \iff x < -2$. El dominio es $\mathbb{R}$ y $S = (-\infty, -2)$. El extremo -2 da igualdad y queda excluido; no basta cambiar sólo el signo del exponente sin reparar la orientación.

Solución 43. El dominio exige $x+1>0$, es decir $x>-1$. Como $0=\log_{1/3}1$ y el logaritmo es decreciente, la comparación correcta es $x+1\le 1$, no $x+1\ge 1$. La primera ruptura está en transportar el orden como si la base fuese mayor que uno. Al intersectar $x\le 0$ con el dominio se obtiene $S=(-1,0]$. El punto 0 se admite por igualdad y -1 se excluye porque su argumento es cero. La respuesta propuesta pierde todos los valores entre -1 y 0 y agrega valores positivos falsos.

Solución 44. El dominio original es $x\neq 0$. La primera equivalencia introduce $\ln x$, que sólo existe para $x>0$, y pierde la rama negativa. La identidad válida en todo el dominio es $\ln(x^2)=2\ln|x|$. Dividir por 2 e inyectividad de ln dan $|x|=3$, de donde $x=\pm 3$. Ambos valores tienen cuadrado 9 y satisfacen la ecuación, así que $S=\{-3,3\}$. Verificar sólo 3 no revelaría la solución perdida.

Solución 45. Los argumentos originales exigen simultáneamente $x>2$ y $x>-2$, así que $D=(2,\infty)$. La condensación y el paso a $x^2-4=5$ son equivalentes sobre D. La obligación omitida consiste en conservar ese dominio al aceptar las raíces algebraicas. Sólo 3 pertenece a D; en -3 ambos logaritmos originales tienen argumentos negativos. En 3, la suma es $\ln 1+\ln 5=\ln 5$, de modo que $S=\{3\}$. La reparación no altera la factorización: filtra los candidatos por las condiciones originales.

Solución 46. El dominio original es $x>0$. Dividir por $\ln x$ exige además $\ln x\neq 0$, condición que no estaba asegurada y que excluye $x=1$. La primera operación no reversible es esa división sin separar el caso nulo. La ley del producto nulo da $\ln x=0$ o $\ln x-2=0$. Aplicando exp, se reconstruyen $x=1$ y $x=e^2$, ambos positivos y ambos verificables en el producto original. Por tanto, $S=\{1,e^2\}$.

Solución 47. La fórmula de cambio de base coloca el logaritmo del argumento en el numerador y el de la base en el denominador. La primera ruptura es invertir ese cociente. La reparación es $\log_2 8=\ln 8/\ln 2=3$, porque $\ln 8=3\ln 2$ y $\ln 2\neq 0$. La comprobación exponencial da $2^3=8$. En cambio, $2^{1/3}\neq 8$; el valor $1/3$ corresponde a $\log_8 2$.

Solución 48. La primera ruptura es reemplazar una suma de potencias por una potencia cuyo exponente es la suma. La ley $2^u2^v=2^{u+v}$ corresponde a un producto. En el dominio $\mathbb{R}$, la identidad $2^{x+1}=2\,2^x$ permite factorizar la suma como $3\,2^x=12$. Dividir por 3 da $2^x=4=2^2$, y la inyectividad produce $x=2$. La sustitución $4+8=12$ verifica el resultado, de modo que $S=\{2\}$. La operación posterior con logaritmos no repara la igualdad falsa anterior.

Solución 49. La ecuación auxiliar $u^2+u-2=(u-1)(u+2)=0$ está bien resuelta. La primera ruptura aparece al reconstruir el candidato negativo como si u pudiera ser cualquier real. La imagen de exp es $(0,\infty)$, así que $u=-2$ no tiene preimagen y debe descartarse. Reemplazarlo por $|u|=2$ cambia el candidato; en $x=\ln 2$ la ecuación original vale $4+2-2=4\neq 0$. El candidato positivo $u=1$ tiene única preimagen $x=0$, y $1+1-2=0$ verifica. Por tanto, $S=\{0\}$.

Solución 50. La primera ruptura consiste en tratar $\ln(-4)$ como un número real: el argumento negativo está fuera del dominio de ln. La identidad correcta es $-\ln 4=\ln(1/4)$, con argumento positivo. La exponencial real es siempre positiva, por lo que $e^x=-4$ carece de solución y $S=\varnothing$. En particular, $e^{-\ln 4}=1/4$, no -4. Un valor logarítmico negativo representa el exponente de un argumento positivo menor que uno; no autoriza argumentos negativos.

E. Estrategia.

Solución 51. Ambos miembros son positivos para todo real. Con base común 2, la ecuación equivale a $2^{4x-4}=2^{3x+3}$, luego $4x-4=3x+3$ y $x=7$. Por logaritmos, la inyectividad de ln da $(x-1)\ln 16=(x+1)\ln 8$. Como $\ln 16=4\ln 2$ y $\ln 8=3\ln 2$, dividir por $\ln 2\neq 0$ recupera la misma ecuación. En 7 ambos miembros son 2^{24}, así que $S=\{7\}$. La base común evita introducir logaritmos y sus coeficientes; ambas rutas necesitan leyes con bases positivas e inyectividad.

Solución 52. El dominio es $\mathbb{R}$ y el valor 7 pertenece a la imagen positiva. Usar $\log_3$ da directamente $2x+1=\log_3 7$ y $x=(\log_3 7-1)/2$. Con ln obtenemos $(2x+1)\ln 3=\ln 7$, de donde $x=(\ln 7/\ln 3-1)/2$, ya que $\ln 3\neq 0$. El cambio de base muestra que ambas respuestas coinciden. La primera ruta expresa más directamente el exponente buscado; la segunda permite trabajar con una base habitual de cálculo. La sustitución devuelve $3^{\log_3 7}=7$, por lo que el singleton indicado es la solución exacta y no requiere redondeo.

Solución 53. La relación $4^x=(2^x)^2$ sugiere $u=2^x>0$. La auxiliar se factoriza como $(u-2)(u-4)=0$, y ambas raíces positivas se reconstruyen como $x=1,2$. Así, $S=\{1,2\}$, verificado por $4-12+8=0$ y $16-24+8=0$. Aislar primero $4^x=6\,2^x-8$ y tomar ln sólo sería reversible donde el miembro derecho sea positivo. Además produciría $x\ln 4=\ln(6\,2^x-8)$, cuyo logaritmo no se distribuye sobre la diferencia ni elimina la variable interior. La ruta cuadrática resuelve una estructura reconocible y permite reconstruir todas las preimágenes; la otra añade una condición sin simplificar el problema.

Solución 54. El dominio original es $x>0$, que asegura ambos argumentos positivos. Condensar da $\ln(4x^2)=\ln 36$, equivalente a $4x^2=36$; las raíces algebraicas son ± 3, y el dominio conserva sólo 3. Expandir $\ln(4x)=\ln 4+\ln x$ da $2\ln x=\ln 36-\ln 4=\ln 9=2\ln 3$, y luego $x=3$. En la original, $\ln 3+\ln 12=\ln 36$, por lo que $S=\{3\}$. La condensación reduce pronto a una cuadrática y exige filtrar su raíz negativa; la expansión mantiene directamente el logaritmo de un argumento positivo y evita ese candidato. Ambas rutas son breves si se declara $x>0$ al comienzo.

Solución 55. El cambio de base a 2 da $\log_4 49=\log_2(7^2)/\log_2 4=2\log_2 7/2=\log_2 7$. Por tanto, la desigualdad estricta es falsa: los dos números son iguales. Una segunda ruta toma $r=\log_2 7$, de modo que $2^r=7$. Entonces $4^r=(2^r)^2=49$ y la definición inversa implica $r=\log_4 49$. Todos los argumentos son positivos y las bases son válidas. Ambas rutas son exactas; la segunda muestra directamente que el mismo exponente sirve para las dos bases.

Solución 56. Como $(1/4)^0=1<3<4=(1/4)^{-1}$ y la exponencial es decreciente, el exponente que produce 3 está entre -1 y 0. Así, $-1<\log_{1/4}3<0$, y el signo es negativo. Con cambio de base, $\log_{1/4}3=\log_4 3/\log_4(1/4)=-\log_4 3$. De $1<3<4$ y monotonía creciente se deduce $0<\log_4 3<1$; multiplicar por -1 recupera la misma ubicación. La primera ruta usa directamente la base dada; la segunda convierte la comparación a una base creciente y explicita la inversión de signo.

Solución 57. El dominio es $\mathbb{R}$. Como $5>1$ y $3=5^{\log_5 3}$, la comparación equivale a $x-2\leq\log_5 3$, de modo que $S=(-\infty,2+\log_5 3]$. La ruta con ln da $(x-2)\ln 5\leq\ln 3$; al dividir por $\ln 5>0$ se obtiene la misma frontera por cambio de base. El extremo satisface igualdad y se incluye. Redondearlo sustituiría la frontera exacta por otra y podría incluir valores falsos o excluir valores verdaderos cercanos a ella. Una aproximación puede acompañar la respuesta, pero el intervalo exacto conserva toda la solución.

Solución 58. El dominio es $\mathbb{R}$. Con $u=e^x>0$, tenemos $e^{-x}=1/u$ y la ecuación equivale a $u+1/u=5/2$. Multiplicar por $2u>0$ da $2u^2-5u+2=(2u-1)(u-2)=0$. Las raíces positivas $1/2$ y 2 se reconstruyen como $x=-\ln 2$ y $x=\ln 2$, y ambas verifican $2+1/2=5/2$. Por tanto, $S=\{-\ln 2,\ln 2\}$. Tomar ln de la suma conservaría la igualdad porque ambos miembros son positivos, pero $\ln(e^x+e^{-x})$ no se separa en una suma de logaritmos. La sustitución convierte el problema en una cuadrática y controla la reconstrucción.

Solución 59. La primera expresión exige $(x-2)^2>0$, de modo que su dominio es $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. La suma exige $x-2>0$, así que sólo existe en $(2,\infty)$. Sustituir la primera por esa suma perdería todos los argumentos $x<2$. La expansión válida en todo el dominio original es $\ln((x-2)^2)=2\ln|x-2|$, porque $|x-2|>0$ cuando $x\neq 2$. Esta forma puede ser útil para estudiar el tamaño o resolver condiciones de orden, siempre conservando la exclusión $x=2$. La elección de representación debe respetar el dominio antes de buscar economía de cálculo.

Solución 60. El dominio original es $x > 1$. Condensar da $\log_2((x+1)/(x-1)) = 1$, equivalente en ese dominio a $(x+1)/(x-1) = 2$. Multiplicar por $x-1 \neq 0$ da $x+1 = 2x-2$, luego $x = 3$. Exponenciar la igualdad completa también produce $2^{\log_2(x+1)-\log_2(x-1)} = 2$, y la ley de cociente lleva a la misma ecuación racional; no permite sustituir la diferencia por $(x+1)-(x-1)$. El candidato 3 pertenece al dominio y verifica $\log_2 4 - \log_2 2 = 2-1 = 1$. Así, $S = \{3\}$. La cadena conserva equivalencias sobre $x > 1$, por lo que no creó candidatos extraños; la sustitución final aporta un control independiente.

F. Transferencia.

Solución 61. El cociente debe ser positivo y su denominador no nulo. La tabla de signos da $D = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Si $t = (x-2)/(x+1) = 1 - 3/(x+1)$, entonces $t > 1$ en $x < -1$ y $0 < t < 1$ en $x > 2$. Todo $t > 0$, $t \neq 1$, tiene preimagen $x = (t+2)/(1-t)$, que pertenece a la rama correspondiente. Así, la imagen del cociente es $(0, \infty) \setminus \{1\}$ y la de F es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para cualquier $y \neq 0$, tomar $t = e^y$ y $x = (e^y+2)/(1-e^y)$ construye una preimagen. El valor 0 se omite porque exigiría un cociente igual a 1, imposible con numerador y denominador separados por 3.

Solución 62. El cociente existe y es positivo exactamente si $x < -1$ o $x > 1$. Sobre ese dominio, la definición inversa da $(x+1)/(x-1) = 4$. Multiplicar por el denominador no nulo produce $x+1 = 4x-4$, luego $x = 5/3$. Este valor pertenece a $x > 1$ y el cociente vale 4, de modo que el logaritmo vale 2. Todas las transformaciones fueron equivalentes sobre el dominio original, así que $S = \{5/3\}$.

Solución 63. El dominio es $D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Sobre él, ln creciente da $(x+2)/(x-2) < 3$. Restar 3 sin multiplicar por un signo desconocido produce $-2(x-4)/(x-2) < 0$, equivalente a $(x-4)/(x-2) > 0$. Su tabla de signos da $x < 2$ o $x > 4$. Al intersectar con D, resulta $S = (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$. El punto -2 produce argumento cero, 2 anula el denominador y 4 produce igualdad; ninguno se admite. La tabla resuelve la comparación sin suponer un signo global para $x-2$.

Solución 64. El dominio original es $x > 0$. La sustitución $u = \ln x$ recorre todo $\mathbb{R}$, y la ecuación se convierte en $(u-1)(u-2) = 0$. Ambas raíces $u = 1, 2$ pertenecen a esa imagen. La inversa exp proporciona las únicas preimágenes $x = e$ y $x = e^2$, ambas positivas. Sustituir sus logaritmos anula el polinomio y la biyectividad asegura cobertura completa. Por tanto, $S = \{e, e^2\}$. No se impone $u > 0$ por el mero hecho de que aparezca un logaritmo: esa restricción corresponde a su argumento, no a su valor.

Solución 65. El dominio es $\mathbb{R}$ y $8 = 2^3$. La inyectividad de la función exterior da $x^2 - 1 = 3$, equivalente a $x^2 = 4$. La expresión interior no es inyectiva sobre $\mathbb{R}$, de modo que debe reconstruirse $x = \pm 2$. Ambos valores producen exponente 3 y verifican la ecuación. Así, $S = \{-2, 2\}$. La exponencial identifica el valor del argumento, pero no identifica entre sí las distintas preimágenes de ese argumento bajo la función cuadrática.

Solución 66. La raíz exige $x+1 \geq 0$, pero el logaritmo exige que la raíz sea estrictamente positiva. La condición conjunta es $x > -1$. En ese dominio, ln inyectiva da $\sqrt{x+1} = 2$. La equivalencia de raíz principal con segundo miembro positivo permite elevar al cuadrado y obtener $x+1 = 4$, luego $x = 3$. El candidato pertenece al dominio y la raíz vale 2, por lo que $S = \{3\}$. El extremo -1 no se admite aunque la raíz exista, pues su valor cero no tiene logaritmo.

Solución 67. Todas las expresiones existen para $x \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 1$, la exponencial es inyectiva y la ecuación equivale a $x - 1 = 2$, de donde $S(a) = \{3\}$. Esta conclusión vale tanto para $a > 1$ como para $0 < a < 1$, pues ambos regímenes son estrictamente monótonos. Si $a = 1$, ambos miembros valen 1 para cualquier real y $S(1) = \mathbb{R}$. El caso constante debe separarse antes de igualar exponentes; no se define aquí un logaritmo de base 1.

Solución 68. El dominio en x es $(1,\infty)$, independiente de c. Aplicar exp da $x-1=e^c$, por lo que $x=1+e^c$. Como $e^c>0$ para todo real c, este valor siempre pertenece al dominio. La identidad $\ln(e^c)=c$ verifica la ecuación y la inyectividad de ln prueba que no hay otra solución. Así, $S(c)=\{1+e^c\}$ para cada $c\in\mathbb{R}$. No se exige $c>0$: la imagen de ln es todo $\mathbb{R}$.

Solución 69. El modelo discreto es $Q(n)=96(3/4)^n$ para enteros $n\geq 0$. El factor se aplica al valor presente en cada paso, así que $Q(2)=96\cdot 9/16=54$ unidades. La mitad inicial es 48 unidades y $54>48$, por lo que después de dos pasos todavía no se ha reducido por debajo de la mitad. La disminución por paso es $1/4=25\,\%$ del valor presente, no $25\,\%$ del valor inicial cada vez. La fórmula no fija por sí sola un comportamiento entre pasos.

Solución 70. La relación de unidades es $t=s/60$. Sustituirla da $Q=80(1/2)^{s/360}$, con $s\geq 0$ en minutos. Para $Q=20$, se requiere $(1/2)^{s/360}=1/4=(1/2)^2$. La inyectividad da $s/360=2$, así que $s=720$ minutos, equivalentes a 12 horas. La sustitución en cualquiera de las dos fórmulas produce 20 unidades. La escala 6 horas corresponde a 360 minutos; cambiar sólo el nombre de la variable sin ajustar el exponente alteraría el modelo.

Solución 71. Los datos dan $Ab=18$ y $Ab^3=72$. Dividir la segunda igualdad por la primera, no nula, produce $b^2=4$. La hipótesis $b>0$ selecciona $b=2$ y luego $A=18/2=9$. El modelo es $Q(n)=9\,2^n$. Se verifica $Q(1)=18$ y $Q(3)=9\cdot 8=72$. Dentro de la familia declarada los parámetros son únicos; los dos datos no prueban que una cantidad real siga esa ley para otros tiempos.

Solución 72. Dividir por $10>0$ da $2^{t/3}\geq 5$. La base creciente hace esta condición equivalente a $t\geq 3\log_2 5$, que ya respeta $t\geq 0$; el primer tiempo real es $t_*=3\log_2 5$ horas. Para ubicarlo, $2^6=64<125<128=2^7$ implica $6<\log_2 125=3\log_2 5<7$. Por tanto, la primera hora entera admisible es $n=7$. En $n=6$, el valor es $40<50$; en $n=7$, la comparación $2^{7/3}>5$ se deduce al elevar al cubo ambos positivos y usar $128>125$. El umbral continuo y la primera observación entera son objetos distintos.

G. Síntesis avanzada.

Solución 73. El dominio es $\mathbb{R}$. Reconocer $4^x=(2^x)^2$ y $8^x=(2^x)^3$ permite tomar $u=2^x>0$. El polinomio auxiliar factoriza como $u^3-3u^2-6u+8=(u-1)(u-4)(u+2)$. Sobre la imagen $u>0$, el factor $u+2$ es positivo, así que la inequación equivale a $(u-1)(u-4)\geq 0$. La tabla de signos conserva $0<u\leq 1$ o $u\geq 4$. Como 2^x es creciente y biyectiva hacia los positivos, la vuelta da $x\leq 0$ o $x\geq 2$. Por tanto, $S=(-\infty,0]\cup[2,\infty)$. En 0 y 2 el polinomio se anula y ambos extremos se incluyen; entre ellos el producto de los dos factores es negativo. La raíz auxiliar -2 no tiene preimagen y no crea otra región original.

Solución 74. Los tres argumentos deben ser positivos: $x>1$, $x>-1$ y $x>-1$, cuya intersección es $D=(1,\infty)$. Sobre D, la ley de producto y la inyectividad de ln dan $x^2-1=3x+3$. La factorización $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)=0$ ofrece candidatos 4 y -1. Sólo 4 pertenece a D; en -1 dos argumentos son cero y el primero es negativo. En 4, la igualdad se comprueba como $\ln 3+\ln 5=\ln 15$. Así, $S=\{4\}$. Condensar el producto no autoriza borrar el dominio original, y la raíz inadmisible no es un valor en el que la ecuación logarítmica sea falsa: allí no está definida.

Solución 75. El dominio racional y logarítmico es $D=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$. Como $1=\log_{1/2}(1/2)$ y el logaritmo es decreciente, la condición equivale sobre D a $(x-2)/(x+1)\leq 1/2$. Restar $1/2$ da $(x-5)/(2(x+1))\leq 0$, cuya tabla de signos produce $(-1,5]$. La intersección con D es $S=(2,5]$. En 5 el argumento vale $1/2$ y la igualdad se admite; en 2 vale cero y el logaritmo no existe. En la rama $x<-1$ el argumento es mayor que 1, por lo que su logaritmo de base fraccionaria es negativo y no puede ser al menos 1. Esta observación verifica independientemente la exclusión de esa rama.

Solución 76. El dominio en x es $\mathbb{R}$ para todas las bases permitidas. Si $a>1$, escribir $a=a^1$ y usar la monotonía creciente da $x^2-1\leq 1$, equivalente a $x^2\leq 2$. Así, $S(a)=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Si $0<a<1$, la monotonía decreciente invierte el orden y da $x^2-1\geq 1$, es decir $S(a)=$

$(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$. En ambos regímenes los extremos se incluyen por igualdad. Para $a = 1$, la comparación es $1 \leq 1$ para todo real, luego $S(1) = \mathbb{R}$. Las regiones pasan del intervalo central a las dos regiones exteriores, y el caso constante no se obtiene igualando exponentes. Tampoco puede justificarse con $\log_1$, que no existe como inversa.

Solución 77. El logaritmo interior exige $x^2 - 1 > 0$. Sobre esa condición, la identidad inversa da $e^{\ln(x^2-1)} = x^2 - 1$. El logaritmo exterior exige además $x^2 - 4 > 0$, condición que implica la interior. Por tanto, el dominio completo es $D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. En él, la ecuación equivale a $\ln(x^2-4) = 0$, luego $x^2-4 = 1$ y $x = \pm\sqrt{5}$. Ambos candidatos pertenecen a D y producen argumento exterior 1, así que $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. La simplificación interior es válida, pero la sustracción posterior puede producir valores no positivos; éstos deben excluirse antes de usar el logaritmo exterior.

Solución 78. La primera expresión exige $x > 1$ y $\ln(x-1) \neq 0$, es decir $x \neq 2$. La segunda exige $x > 0$, de modo que el dominio conjunto es $D = (1, 2) \cup (2, \infty)$. Si $1 < x < 2$, entonces $\ln(x - 1) < 0$ y el cociente de la primera condición es negativo, así que no puede ser al menos $1/2$. Si $x > 2$, el denominador es positivo y multiplicar por $2\ln(x - 1)$ conserva el orden: $2\ln 2 \geq \ln(x-1)$. La monotonía de ln da $x - 1 \leq 4$, por lo que la primera condición selecciona $(2, 5]$. La segunda, por base decreciente y $-2 = \log_{1/2} 4$, equivale a $x \leq 4$ sobre su dominio. Intersectando, $S = (2, 4]$. En 4 ambos requisitos se cumplen y la segunda es igualdad; en 2 la primera expresión no existe. La separación de signos autoriza la multiplicación sólo en la rama positiva.

Solución 79. El dato inicial da $A = 12$. El segundo da $12b^2 = 27$, de donde $b^2 = 9/4$ y la positividad selecciona $b = 3/2$. El modelo es $Q(t) = 12(3/2)^t$, y verifica ambos datos. Puesto que $3/2 > 1$, el umbral real equivale a $(3/2)^t \geq 25/3$, es decir $t \geq t_* = \log_{3/2}(25/3)$. Este número es positivo porque $25/3 > 1$. Para observaciones enteras, $Q(5) = 729/8 < 100$ y $Q(6) = 2187/16 > 100$, con comparaciones exactas $729 < 800$ y $2187 > 1600$. La monotonía prueba que $5 < t_* < 6$ y que el primer día entero es 6. Los datos determinan los parámetros dentro de la familia; la extensión a tiempos reales es una hipótesis adicional del modelo, no una conclusión de dos observaciones.

Solución 80. El denominador debe ser no nulo y el cociente positivo. Con $u = 2^x > 0$, la tabla de signos del argumento da $0 < u < 1$ o $u > 4$. En ese dominio, ln creciente hace la comparación equivalente a $(u-1)/(u-4) \leq 2$. Restar 2 da $(7-u)/(u-4) \leq 0$, que selecciona $u < 4$ o $u \geq 7$ entre los valores con denominador no nulo. Intersectando con el dominio y la imagen positiva queda $0 < u < 1$ o $u \geq 7$. La vuelta creciente produce $S = (-\infty, 0) \cup [\log_2 7, \infty)$. Como $\log_2 7 > 2$, la segunda región respeta el dominio. Para verificar sin repetir la tabla, escribimos el argumento como $1 + 3/(u - 4)$. Si $0 < u < 1$, está entre 0 y 1, por lo que su logaritmo es menor que $0 < \ln 2$. Si $u > 4$, la comparación con 2 equivale, multiplicando por $u - 4 > 0$, a $3 \leq u - 4$, esto es $u \geq 7$. En $u = 7$ hay igualdad y se admite; en $u = 1$ el argumento es cero y en $u = 4$ el denominador se anula, de modo que $x = 0, 2$ permanecen excluidos. Ambas rutas cubren las dos ramas del dominio y confirman la respuesta.

H. Soluciones de profundización y reconstrucción.

Solución 081. Si $t \neq 1$, la exponencial es estrictamente monótona y por ello inyectiva: $x - 2 = 2x + 1$ da $x = -3$. Sustituir produce t^{-5} en ambos miembros. Si $t = 1$, ambos valen uno para todo real x, luego $S(1) = \mathbb{R}$. No se usa un logaritmo de base uno. El sentido de monotonía cambia entre $0 < t < 1$ y $t > 1$, pero la inyectividad sigue siendo válida en ambos casos.

Solución 082. Si $t > 1$, la monotonía creciente da $2x - 1 \leq x + 3$, luego $x \leq 4$. Si $0 < t < 1$, la monotonía decreciente invierte la comparación y da $2x - 1 \geq x + 3$, luego $x \geq 4$. Si $t = 1$, la igualdad $1 \leq 1$ vale para todo real. En $x = 4$ ambos exponentes coinciden y el extremo se incluye en las dos ramas no constantes. Las propiedades utilizadas para exponentes reales son las admitidas en §23.2.

Solución 083. El dominio es $x > -1$. Como $\log_{1/t} u = -\log_t u$ para $u > 0$, la ecuación equivale a $2\log_t(x+1) = 2$, luego $x+1 = t$ y $x = t-1$. Este valor está en el dominio porque $t > 0$. Sus logaritmos son 1 y -1, de modo que verifica $1 = -1 + 2$. La identidad entre bases sigue de $(1/t)^v = t^{-v}$ y la unicidad del exponente. El valor $t = 1$ queda fuera de la familia porque ambos logaritmos serían indefinidos.

Solución 084. Con $u = t^{x/2} > 0$, la ley de potencias da $u^2 = 2u$. Dividir por u es seguro y deja $u = 2$. Si $t \neq 1$, la solución única es $x = 2\log_t 2$; sustituir da $t^x = 4$ y $2t^{x/2} = 4$. Si $t = 1$, la ecuación original es $1 = 2$ y no tiene soluciones. La sustitución auxiliar no puede tratar $u = 0$ como candidato ni suponer que la base uno alcanza todos los positivos.

Solución 085. Una elección es $F(x) = \log_q[(x-a)/(x-b)]$. El cociente existe fuera de b y es positivo exactamente en las dos regiones exteriores a a, b. En a vale cero y el logaritmo no existe; entre los dos puntos es negativo. Así el dominio es el prescrito. El sentido creciente o decreciente de la base no afecta esta condición de existencia, que solo exige argumento positivo.

Solución 086. Tomemos $F(x) = \log_2 \sqrt{(x-a)(b-x)}$. La raíz existe cuando el producto es no negativo; el logaritmo exige que la raíz sea estrictamente positiva, equivalente a producto positivo. Este ocurre exactamente para $a < x < b$, porque ambos factores son positivos dentro y tienen signos opuestos fuera. En los extremos la raíz vale cero y la capa exterior falla. La segunda condición implica la primera, pero debe justificarse antes de reducir el dominio.

Solución 087. El argumento es positivo exactamente en (a, b). Además, el denominador logarítmico no puede ser cero; esto ocurre cuando $(x-a)/(b-x) = 1$, equivalente a $2x = a+b$. Así $D = (a, (a+b)/2) \cup ((a+b)/2, b)$. En el punto medio el argumento es uno, por lo que falla solo la división exterior. En los extremos falla el argumento o el cociente. Todos los demás puntos tienen logaritmo definido y no nulo.

Solución 088. Primero $x > 0$; después $\log_t x > 0$. Si $t > 1$, la monotonía creciente y $\log_t 1 = 0$ dan $x > 1$, luego $D = (1, \infty)$. Si $0 < t < 1$, la monotonía decreciente da $0 < x < 1$, luego $D = (0, 1)$. Ambos extremos se excluyen: cero no admite el logaritmo interior y uno produce argumento exterior cero. Las condiciones exteriores se aplican al valor del logaritmo, no directamente al signo de x.

Solución 089. La inducción da $Q(n) = 5\,2^n$: vale en cero y multiplicar por dos avanza un paso. La condición es $2^n \geq 20$. Como $2^4 = 16 < 20 < 32 = 2^5$ y las potencias de base dos crecen, el primer paso es $n = 5$. En el modelo continuo elegido $Q(t) = 5\,2^t$, el umbral sería $t = \log_2 20$, situado estrictamente entre cuatro y cinco. Ese tiempo continuo requiere una hipótesis adicional a la recurrencia.

Solución 090. Como la sucesión decrece estrictamente, basta exigir $Q(3) \geq 30$ y $Q(4) < 30$. Estas condiciones son $b^3 \geq 3/8$ y $b^4 < 3/8$. Por monotonía de las potencias positivas equivalen a $\sqrt[3]{3/8} \leq b < \sqrt[4]{3/8}$. Ambos extremos están en $(0, 1)$ y el inferior es menor que el superior: para un número de ese intervalo, la raíz cuarta es mayor que la cúbica. El extremo izquierdo se admite porque la comparación del paso tres es no estricta; el derecho se excluye porque en el cuarto habría igualdad. Los pasos anteriores quedan descartados por monotonía.

Solución 091. Sustituir $t = ds$ da $Q = Q_0(b^{d/\tau})^s$. El requisito $b^{d/\tau} = b^2$ equivale, por inyectividad, a $d/\tau = 2$, luego $d = 2\tau$ horas. Esa elección es única cuando $b \neq 1$ y comprobarla devuelve $Q_0 b^{2s}$. Si $b = 1$, la cantidad es constante y cualquier $d > 0$ cumple un factor por unidad igual a $b^2 = 1$; la unidad no queda identificada por los datos. Se conserva el mismo proceso al cambiar las coordenadas temporales.

Solución 092. La monotonía estricta hace necesaria y suficiente la condición $b^{m-1} < 5 \leq b^m$. Tomar raíces positivas da $5^{1/m} \leq b < 5^{1/(m-1)}$. Ambas fronteras son mayores que uno y el intervalo no es vacío. En el extremo inferior el paso m alcanza exactamente el umbral y se admite; en el superior lo alcanzaría ya $m-1$, así se excluye. La clasificación cubre todos los factores que satisfacen el primer cruce, en vez de redondear un tiempo para una sola base.

Solución 093. El primer dato fuerza $A = 6$; el segundo, $6b = 9$ y $b = 3/2$. Entonces $Q(2) = 6(3/2)^2 = 27/2$, distinto de 14. No existe un modelo de esa familia que ajuste los tres exactamente, pues los dos primeros ya fijaron ambos parámetros. La conclusión refuta ese ajuste, no la posibilidad de otros modelos ni una medición aproximada cuya tolerancia no fue especificada.

Solución 094. El dato exige $Ab^2 = 12$, luego todos los ajustes son $b > 0$, $A = 12/b^2$. No hay unicidad con un solo dato. El segundo da $Ab^5 = 12$; dividir por el primero produce $b^3 = 1$, y como $b > 0$, $b = 1$, $A = 12$. La única función que ajusta ambos es la constante doce. Sustituir verifica los datos. Dos observaciones iguales en tiempos distintos fuerzan base uno dentro de esta familia, pero no prueban que cualquier proceso real entre esos tiempos sea constante.

Solución 095. Los primeros datos obligan $A = u$ y $b = (u + 1)/u$. La predicción del tercero es $ub^2 = (u + 1)^2/u = u + 2 + 1/u$. Igualarla a $u + 3$ exige $1/u = 1$, luego $u = 1$. En ese caso $A = 1, b = 2$ y los tres valores son $1, 2, 4$, que coinciden. Para cualquier otro $u > 0$ no hay ajuste exacto de esta familia. Todas las divisiones se hicieron por cantidades positivas.

Solución 096. La exponencial es $F(t) = Ab^t$. Defina $H(t) = Ab^t[1 + (t - n)(n + 1 - t)]$ cuando $n \le t < n + 1$, para cada entero $n \ge 0$. El factor entre corchetes es al menos uno y vale uno en cada entero; en los límites derechos también tiende a uno. Así H es positiva, coincide en todos los enteros con F y difiere en $t = n + 1/2$, donde el factor es $5/4$. Incluso todos los datos enteros no determinan por sí solos la extensión continua exponencial. No se afirma que H conserve las leyes multiplicativas de esa extensión.

Capítulo 24

Polinomios: operaciones y división

Una división aritmética separa una cantidad en múltiplos de otra y un resto. Con polinomios, la misma idea sigue funcionando, pero la medida que hace terminar el procedimiento es el grado. En este capítulo aprenderemos a calcular y a justificar: una identidad se comprueba por coeficientes, una división por reconstrucción y cota del resto, y un máximo común divisor por las divisiones que lo producen.

Trabajaremos principalmente con coeficientes racionales o reales. La letra K designará uno de esos dos conjuntos, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, fijo durante cada argumento. Ambos permiten dividir por cualquier coeficiente no nulo. No es una condición decorativa: veremos qué falla cuando se exigen coeficientes enteros.

24.1. Polinomios como objetos formales

¿Qué estamos comparando al escribir $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$? No basta comprobar la igualdad para un valor de x. Estamos afirmando que, después de efectuar las operaciones, los coeficientes de cada potencia coinciden.

Un **polinomio formal con coeficientes en** K es una sucesión $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ de elementos de K en la que solo hay un número finito de coeficientes no nulos. Lo escribimos como

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Aquí x es una indeterminada: organiza los coeficientes, y todavía no representa un número elegido. Las potencias tienen exponentes enteros no negativos. Escribir ceros al final no cambia el polinomio; $3 + 2x$ y $3 + 2x + 0x^2$ representan la misma sucesión. El conjunto de estos objetos se denota $K[x]$.

Dos polinomios son iguales si y solo si tienen el mismo coeficiente en cada posición, completando con ceros cuando sea necesario. Esta es nuestra definición de igualdad formal, no un resultado deducido de sustituir valores. Más adelante asociamos a cada polinomio una función mediante evaluación.

Contraste. Las expresiones $x^{-1} + 1$ y $\sqrt{x} + 2$ no son polinomios en $K[x]$: sus exponentes no cumplen la condición. En cambio, $\sqrt{2}x^2 + 1$ pertenece a $\mathbb{R}[x]$. La restricción afecta a los exponentes de la indeterminada, no a la forma de escribir un coeficiente real.

Recuperación resuelta. ¿Son iguales $x^3 - x$ y $x^3 - x + 0x^5$? Sí: sus sucesiones de coeficientes coinciden. ¿Basta que $x^3 - x$ y 0 valgan cero en $x = 0$? No: el coeficiente de x^3 distingue los objetos. Conserva esta separación entre igualdad formal e igualdad en un punto.

Identidad formal y coincidencia en puntos. Un polinomio formal es una sucesión finita de coeficientes; su evaluación produce valores. Dos expresiones formales son iguales cuando coinciden sus coeficientes después de operar. **Control resuelto:** $P = x^2$ y $Q = x$ coinciden en 0 y 1, pero no son el mismo polinomio: sus coeficientes difieren y en 2 sus valores son 4 y 2. En C25 justificaremos cuántos puntos bastan si se conoce una cota de grado. Por ahora, reconstruir una división significa expandir y comparar todos los coeficientes; unos ensayos numéricos pueden detectar un fallo, pero no reemplazan ese certificado. La función asociada ayuda a interpretar, sin cambiar el criterio formal de igualdad que utilizamos aquí.

24.2. Coeficientes, grado y polinomio nulo

La longitud de una escritura no determina el grado. Primero hay que eliminar los coeficientes finales nulos. Para $P \neq 0$, su **grado**, $\deg P$, es el mayor exponente con coeficiente no nulo. Ese coeficiente es el **coeficiente principal**; si vale 1, el polinomio es **mónico**.

Así, $5x^4 - 2x + 7$ tiene grado 4 y coeficiente principal 5. Todo polinomio constante no nulo tiene grado 0. El polinomio nulo tiene todos sus coeficientes iguales a cero; aquí **no le asignamos grado**. Algunos textos usan $\deg 0 = -\infty$. Esa convención es posible, pero en este capítulo escribiremos las alternativas que involucran cero explícitamente.

Una familia con parámetros requiere distinguir casos antes de usar el grado. En

$P_t(x) = (t-2)x^3 + (t+1)x + 3$

el grado es 3 si $t \neq 2$ y es 1 si $t = 2$. No existe un valor de t que anule todo el polinomio, porque el término constante es 3.

Recuperación resuelta. Para $Q_t = (t-1)x^2 + (t-1)x$, si $t \neq 1$ el grado es 2; si $t = 1$, $Q_t = 0$ y su grado no está definido. La frase “el grado baja a cero” sería incorrecta: cero y constante no nula son casos distintos.

La normalización mónica de $P \neq 0$ consiste en dividir todos sus coeficientes por el principal. Por ejemplo, $2x^2 - 4x + 6$ se transforma en $x^2 - 2x + 3$. No son polinomios iguales, pero uno es un múltiplo constante no nulo del otro.

24.3. Suma, resta y comparación de coeficientes

La suma se define posición a posición. Si $P = \sum a_k x^k$ y $Q = \sum b_k x^k$, completando con ceros, entonces

$$P + Q = \sum_{k} (a_k + b_k)x^k, \qquad P - Q = \sum_{k} (a_k - b_k)x^k.$$

Multiplicar por un escalar $c \in K$ significa reemplazar cada a_k por ca_k. Las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, y la distributividad escalar, se heredan coeficiente a coeficiente de la aritmética de K. No necesitamos adivinarlas a partir de ejemplos.

Si P, Q son no nulos y $P + Q \neq 0$, entonces $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$. Por encima de ese máximo ambos coeficientes son cero. Si los grados son distintos, el término principal del polinomio de mayor grado no tiene otro término que lo cancele: la suma tiene ese mismo grado. Si los grados son iguales, puede haber cancelación.

Por ejemplo, $(2x^3 - x + 4) + (-2x^3 + 3x^2 + x - 1) = 3x^2 + 3$.

El grado desciende de 3 a 2. La suma de P y $-P$ sería cero, caso en que no hablamos de su grado.

Comparación resuelta. Para que $ax^2 + (a+b)x + 2b = x^2 + 4x + 6$, deben cumplirse simultáneamente $a = 1$, $a + b = 4$ y $2b = 6$. Las tres condiciones son compatibles y dan $(a, b) = (1, 3)$. Resolver solo una igualdad de valores dejaría información sin usar.

Recuperación resuelta. Si P tiene grado 5 y Q grado 2, ¿puede $P - Q$ tener grado 1? No: el coeficiente principal de P permanece intacto. En una suma, identifica primero qué términos tienen posibilidad real de cancelarse.

24.4. Producto y grado

El producto combina exponentes y luego reúne los términos con el mismo exponente. Su coeficiente de x^k es

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Solo intervienen coeficientes de las sucesiones originales. Esta fórmula expresa la distributividad de las sumas finitas: cada par $a_i x^i$, $b_j x^j$ aporta $a_i b_j x^{i+j}$.

Si $P, Q \neq 0$, de grados n, m, el coeficiente de x^{n+m} en PQ es exactamente $a_n b_m$. Los demás pares con suma $n+m$ tienen un índice fuera de los grados posibles y aportan cero. Como el producto de dos racionales o reales no nulos no es cero, obtenemos

$$PQ \neq 0, \qquad \deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

Esta es una prueba; comprobar diez productos no sustituiría el argumento para todos ellos.

Ejemplo. Al multiplicar $P = x^2 - 2x + 3$ y $Q = 2x + 1$,

$PQ = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 3$.

El resultado tiene grado $3 = 2 + 1$ y coeficiente principal $2 = 1 \cdot 2$. Ambas comprobaciones detectan algunos errores, pero no garantizan por sí solas que los coeficientes intermedios estén bien: hay que conservar el cálculo completo.

Recuperación resuelta. ¿Puede el producto de dos polinomios cuadráticos no nulos tener grado 3 en $\mathbb{R}[x]$? No: debe tener grado 4. El argumento depende de que los coeficientes principales no nulos tengan producto no nulo; no debe exportarse sin comprobar esa propiedad a cualquier aritmética modular.

La hipótesis que protege el coeficiente principal. El término de mayor grado de PQ tiene coeficiente $a_n b_m$, donde ambos factores son no nulos. En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ su producto sigue siendo no nulo; eso demuestra la suma de grados. **Diagnóstico resuelto:** con aritmética módulo 6, $(2x)(3x) = 0$, aunque los dos polinomios iniciales sean no nulos. La aritmética modular de C17 permite comprobar $2 \cdot 3 \equiv 0$. No se trata de una excepción dentro de los cuerpos elegidos, sino de una hipótesis perdida al exportar el argumento. Antes de usar la regla del grado, hay que fijar los coeficientes y excluir el polinomio cero. Tampoco basta acertar el coeficiente principal para certificar todos los demás términos de un producto.

24.5. Cancelación e inversos polinómicos

Si $A \neq 0$ y $AB = AC$, la distributividad da $A(B - C) = 0$. Si $B - C$ fuera no nulo, el resultado anterior impediría que su producto por A fuera cero. Por tanto $B = C$. Hemos probado la **cancelación de un factor polinómico no nulo**.

Esta cancelación es una propiedad de objetos formales. No exige dividir numéricamente por $A(t)$ en cada punto, operación que podría fallar cuando $A(t) = 0$. Por ejemplo, de $(x-1)B = (x-1)C$ se concluye $B = C$ aunque al evaluar en 1 la igualdad original solo diga $0 = 0$.

¿Cuándo existe $Q \in K[x]$ con $PQ = 1$? Tanto P como Q deben ser no nulos. La fórmula del grado exige $\deg P + \deg Q = 0$, de modo que ambos son constantes. Recíprocamente, una constante $c \neq 0$ tiene el inverso constante $1/c$. Así, **los únicos polinomios con inverso polinómico son las constantes no nulas**.

Recuperación resuelta. $x + 1$ no tiene inverso en $\mathbb{Q}[x]$. La expresión $1/(x+1)$ sirve como función racional donde esté definida, pero no es un polinomio. La cancelación y la existencia de inversos son afirmaciones distintas: la primera no implica la segunda.

Esta distinción prepara la división con resto. No intentaremos fabricar un inverso polinómico para cada divisor; construiremos un cociente y un resto.

24.6. Evaluación y composición

Evaluar P en $a \in K$ significa calcular $P(a) = \sum a_k a^k$. En esta evaluación, la potencia formal $x^0 = 1$ aporta siempre el término constante a_0, también cuando $a = 0$: la notación abrevia $a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k a^k$, con solo finitísimos términos no nulos. No requiere evaluar un radical ni un límite escrito como 0^0. De las propiedades de las sumas finitas se deduce

$$(P+Q)(a) = P(a) + Q(a), \qquad (PQ)(a) = P(a)Q(a).$$

Para el producto, al evaluar la suma de los términos $a_i b_j x^{i+j}$ obtenemos $\sum_{i,j} a_i b_j a^{i+j} = (\sum_i a_i a^i)(\sum_j b_j a^j)$. Esa igualdad explica por qué una identidad formal conserva su validez al evaluar.

La **composición** $P \circ Q$ se obtiene reemplazando cada x^k de P por $Q(x)^k$. Si $P = x^2 + 1$ y $Q = x - 2$, entonces $(P \circ Q)(x) = x^2 - 4x + 5$, mientras que $(Q \circ P)(x) = x^2 - 1$. La composición no es conmutativa.

Si P tiene grado $n \geq 1$ y Q grado $m \geq 1$, el término $a_n Q^n$ tiene grado nm y coeficiente principal $a_n b_m^n \neq 0$. Los términos $a_k Q^k$ con $k < n$ tienen grado menor cuando son no nulos. Por tanto $\deg(P \circ Q) = nm$. Las composiciones con constantes se analizan aparte: por ejemplo, $P \circ 0$ puede ser cero.

Recuperación resuelta. Para $P = x^2 - 1$, $P(1) = 0$, pero $P \neq 0$. Evaluar una identidad es válido; inferir una identidad de una coincidencia en un punto no lo es. La relación entre suficientes puntos distintos y la igualdad formal se justificará en C25.

24.7. División con resto: enunciado y condiciones

Sean $P, D \in K[x]$ y $D \neq 0$. Existen únicos $Q, R \in K[x]$ tales que

$$P = DQ + R, \qquad R = 0 \text{ o } \deg R < \deg D.$$

P es el dividendo, D el divisor, Q el cociente y R el resto. La segunda condición es indispensable: sin ella, $Q + 1$ y $R - D$ darían otra descomposición del mismo P.

Si $P = 0$, sirven $Q = R = 0$. Si $P \neq 0$ y su grado es menor que el del divisor, sirven $Q = 0$, $R = P$. Si $D = c$ es una constante no nula, $Q = P/c$ y $R = 0$; ningún resto no nulo tiene grado menor que 0.

Límite del dominio. En $\mathbb{Z}[x]$, dividir x por 2 con resto cero exigiría $Q = x/2$, que no tiene coeficientes enteros. La división euclídea de este enunciado no vale para todo divisor en $\mathbb{Z}[x]$. Si el divisor es mónico, el procedimiento sí permanece en los enteros: al cancelar el coeficiente principal solo se divide por 1.

Recuperación resuelta. Al dividir $x + 2$ por $x^2 + 1$, ¿se debe seguir hasta obtener una constante? No: el resto $x + 2$ ya tiene grado menor que 2. El criterio de parada depende del divisor, no de un grado fijo que deba tener todo resto.

24.8. División larga y verificación

Dividamos $P = 2x^4 - 3x^2 + x - 5$ por $D = x^2 - 1$. Es útil escribir $0x^3$ y organizar las restas por potencias.

El primer término del cociente es $2x^2$, porque cancela $2x^4$. Restamos $2x^2 D = 2x^4 - 2x^2$ y obtenemos $-x^2 + x - 5$. El siguiente término es -1. Restamos $-D = -x^2 + 1$ y queda $x - 6$. Este resto tiene grado $1 < 2$, así que terminamos: $Q = 2x^2 - 1, \qquad R = x - 6$.

La verificación reconstruye el dividendo completo:

$$(x^2 - 1)(2x^2 - 1) + (x - 6) = 2x^4 - 3x^2 + x - 5.$$

Si el divisor no es mónico, dividimos los coeficientes principales. Para $P = x^2 + 1$ y $D = 2x - 1$, el primer término es $x/2$; queda $x/2 + 1$. El siguiente es $1/4$; queda $5/4$. Por tanto $Q = x/2 + 1/4$ y $R = 5/4$.

Recuperación resuelta. Para $P = x^3 + 2x + 1$ y $D = x^2 + 1$, el término x deja el resto $x + 1$. La identidad $P = xD + (x + 1)$ y la cota $1 < 2$ verifican la respuesta. Si se omite el coeficiente cero de x^2, hay riesgo de desplazar los demás coeficientes en una tabla; los ceros no son pasos inútiles, conservan las posiciones.

Una sustitución numérica puede detectar un error en una división, pero la certificación usa la identidad formal y la cota del resto.

Tres obligaciones en una división. Un certificado de división contiene $P = DQ + R$, $D \neq 0$ y $R = 0$ o $\deg R < \deg D$. La identidad sola no fija un cociente: de $P = DQ + R$ se obtiene también $P = D(Q + H) + (R - DH)$. La cota selecciona el único par válido. **Control resuelto:** $x^2 = (x + 1)x - x$ es identidad, pero $-x$ no es resto válido para un divisor lineal. Reparar da $x^2 = (x + 1)(x - 1) + 1$. En el algoritmo, cada resta cancela el término principal del residual y baja estrictamente su grado, hasta cero o un grado menor que el del divisor. Esta disminución demuestra terminación; verificar solo el último renglón no explica por qué el proceso pudo detenerse.

24.9. Existencia del cociente y del resto

Ahora probamos que el procedimiento siempre funciona. El caso $P = 0$ ya está resuelto. Para $P \neq 0$, fijamos el divisor D, de grado m, y usamos inducción fuerte en $n = \deg P$.

Si $n < m$, tomamos $Q = 0$, $R = P$. Si $n \geq m$, sean a y $b \neq 0$ los coeficientes principales de P y D. Construimos

$$T = \frac{a}{b}x^{n-m}, \qquad P_1 = P - TD.$$

El coeficiente de x^n de P_1 es $a - (a/b)b = 0$, y no aparecen potencias superiores. Entonces $P_1 = 0$ o $\deg P_1 < n$. En el primer caso $P = TD + 0$. En el segundo, la hipótesis de inducción da $P_1 = DQ_1 + R$ con resto admisible. Sustituyendo, $P = D(Q_1 + T) + R$. Esto completa la existencia.

El mismo argumento explica la terminación operativa. En cada paso, el resto parcial o se vuelve cero o pierde grado. No hay una sucesión infinita estrictamente decreciente de enteros no negativos. Durante el proceso se mantiene la identidad **dividendo = divisor por cociente acumulado + resto parcial**. Esa identidad es el invariante que permite reconstruir el resultado.

Recuperación resuelta. ¿Por qué no basta afirmar que "en cada paso baja un coeficiente"? Porque una medida de terminación debe descender de forma controlada. Aquí desciende el grado, no el valor numérico de los coeficientes. También se explica por qué podemos efectuar el paso: b tiene inverso en K.

24.10. Unicidad de la división

Supongamos dos divisiones admisibles:

$P = DQ_1 + R_1 = DQ_2 + R_2$.

Entonces $D(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Si $Q_1 - Q_2 \neq 0$, el miembro izquierdo es no nulo y tiene grado al menos $\deg D$. El miembro derecho es cero o tiene grado menor que $\deg D$, pues cada resto solo contiene potencias menores que ese grado. Ninguna opción permite la igualdad. Así, $Q_1 = Q_2$, y la misma ecuación da $R_1 = R_2$.

Para un divisor constante, los dos restos admisibles son necesariamente cero; la cancelación da directamente la igualdad de cocientes. Esto evita hablar del grado de un resto nulo.

Diagnóstico resuelto. La identidad $x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1) + 2$ tiene resto admisible. También es cierto que $x^2 + 1 = (x + 1)x + (1 - x)$, pero el resto de esta segunda expresión tiene grado 1, igual al del divisor. No contradice la unicidad: no es una división con resto admisible.

Recuperación resuelta. Si una división larga y otra sintética dan restos diferentes para el mismo divisor, ¿pueden ser ambas correctas? No, siempre que ambas reconstruyan el dividendo y satisfagan la cota. La unicidad convierte esas dos verificaciones en un certificado, independiente del método usado.

24.11. División lineal, Horner y teorema del resto

Dividir por $x - c$ deja un resto constante, incluido el cero. De $P = (x - c)Q + r$, al evaluar en c obtenemos $P(c) = r$. Este es el **teorema del resto**; no requiere conocer ni buscar todas las raíces de P.

Para $P = a_n x^n + \cdots + a_0$, con $n \geq 1$, podemos construir el cociente mediante la recurrencia

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = a_k + c b_k \quad (k = n-1, \ldots, 1), \qquad r = a_0 + c b_0.$$

El cociente es $Q = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$. En $(x - c)Q + r$, el coeficiente de x^n es $b_{n-1} = a_n$; el de x^k es $b_{k-1} - c b_k = a_k$ para $1 \leq k < n$; el constante es $r - c b_0 = a_0$. Por comparación de coeficientes queda probada la fórmula de Horner o división sintética.

Ejemplo. Para $P = 2x^3 + 0x^2 - 3x + 4$ y $c = 2$, obtenemos $b_2 = 2$, $b_1 = 4$, $b_0 = 5$ y $r = 14$. Así, $Q = 2x^2 + 4x + 5$. La evaluación directa $P(2) = 16 - 6 + 4 = 14$ confirma el resto.

Si el divisor es $ax - b$, con $a \neq 0$, se escribe $a(x - b/a)$. Horner con $c = b/a$ da el cociente para $x - c$; el cociente para $ax - b$ es ese cociente dividido por a. El resto no cambia.

Recuperación resuelta. Para dividir $x^2 + 1$ por $2x - 1$, Horner con $c = 1/2$ da cociente $x + 1/2$ para $x - 1/2$ y resto $5/4$. El cociente buscado es $x/2 + 1/4$. No se puede usar la tabla como si el divisor original fuera mónico.

24.12. Divisibilidad polinómica

Escribimos $D \mid P$ si existe $Q \in K[x]$ con $P = DQ$. Para $D \neq 0$, el teorema de división muestra que esto equivale a tener resto cero. Cada polinomio divide a cero; cero solo divide a cero. Una constante no nula divide a cualquier polinomio de $K[x]$.

Si $D \mid P$ y $D \mid S$, escribimos $P = DU$, $S = DV$. Para cualesquiera polinomios A, B,

$AP + BS = D(AU + BV)$,

de modo que $D \mid (AP + BS)$. Además, si $D \mid P$ y $P \mid S$, la sustitución de las dos factorizaciones prueba $D \mid S$.

Si $D, P \neq 0$ y $D \mid P$, el cociente es no nulo, por lo que $\deg D \leq \deg P$. Si ambos se dividen mutuamente, sus grados coinciden y los cocientes son constantes no nulas: uno es un múltiplo escalar del otro. A estos polinomios se les llama **asociados**.

Contraste. La divisibilidad depende del conjunto de coeficientes: $2x \mid x$ en $\mathbb{Q}[x]$, mediante el cociente $1/2$, pero no en $\mathbb{Z}[x]$.

Recuperación resuelta. Si $D \mid P$ y $D \mid (P + S)$, entonces $D \mid S$, porque $S = (P + S) - P$. En cambio, que $P(a)$ sea múltiplo numérico de $D(a)$ en un punto no ofrece una factorización formal de P. La divisibilidad se certifica con un cociente polinómico.

24.13. Cálculo con restos

Fijemos un divisor no nulo D de grado al menos 1. Denotemos por $\operatorname{rem}_D(P)$ su resto único. También escribimos $P \equiv S \pmod{D}$ si $D \mid (P - S)$.

Esta congruencia es reflexiva, simétrica y transitiva: las diferencias $P - P = 0$, $S - P = -(P - S)$ y $P - T = (P - S) + (S - T)$ preservan la divisibilidad. Además, si $P \equiv P_0$ y $S \equiv S_0$, entonces sus sumas son congruentes y sus productos también, porque

$$PS - P_0 S_0 = (P - P_0)S + P_0(S - S_0).$$

Cada término de la derecha es divisible por D. Así, podemos reducir antes de sumar o multiplicar, pero debemos reducir otra vez si el resultado aún tiene grado demasiado grande. Por unicidad, dos polinomios congruentes tienen el mismo resto.

Ejemplo. Módulo $D = x^2 + 1$ se tiene $x^2 \equiv -1$, por lo que $x^4 \equiv 1$ y

$x^7 + 2x^4 - x \equiv -x + 2 - x = 2 - 2x$.

El resultado ya tiene grado menor que 2 y es el resto. La reducción evita una división larga de grado siete.

Recuperación resuelta. Para $D = x^2 - x - 1$, se tiene $x^2 \equiv x + 1$ y $x^3 \equiv x(x+1) \equiv 2x + 1$. Entonces el resto de $x^3 - 2x - 1$ es cero. No hace falta encontrar los valores que anulan D; el argumento ocurre enteramente entre polinomios.

24.14. Algoritmo de Euclides y máximo común divisor

Para P, S no ambos nulos, un **máximo común divisor** G es un polinomio que divide a ambos y al que divide todo divisor común. "Máximo" expresa esta propiedad de divisibilidad, no una comparación del tamaño de los coeficientes. Elegiremos G mónico para eliminar la ambigüedad por factores constantes.

Si $P = SQ + R$, un polinomio divide a P y S si y solo si divide a S y R: una dirección usa $R = P - SQ$; la otra, $P = SQ + R$. Dividimos sucesivamente

$$P = SQ_1 + R_1, \quad S = R_1Q_2 + R_2, \quad R_1 = R_2Q_3 + R_3, \quad \dots$$

hasta un resto cero. Los grados de los restos no nulos descienden estrictamente, así que el proceso termina. En la última pareja $(L, 0)$, los divisores comunes son exactamente los divisores de L. La equivalencia anterior, repetida hacia atrás, muestra que L es un MCD de la pareja inicial. Dividir L por su coeficiente principal da el MCD mónico.

Si dos MCD mónicos G, H existieran, cada uno dividiría al otro; serían asociados. Como sus coeficientes principales son 1, el factor escalar sería 1. Luego $G = H$.

Ejemplo. Para $P = x^3 - x$ y $S = x^2 - 1$, la primera división da $P = xS + 0$. El MCD mónico es $x^2 - 1$. Si uno de los polinomios es cero y el otro $P \neq 0$, el MCD es la normalización mónica de P. Para $(0, 0)$ no adoptamos un MCD mónico: no hay uno que satisfaga la definición.

Recuperación resuelta. En $P = x^2 + 1$, $S = x + 1$, el resto inicial es 2, y dividir S por 2 deja cero. El MCD mónico es 1, no 2. La normalización es parte de la respuesta acordada.

Lo que Euclides conserva y lo que la normalización elige. Si $P = DQ + R$, un polinomio divide a P, D exactamente cuando divide a D, R: en una dirección restamos DQ, en la otra sumamos DQ. Esta equivalencia conserva el conjunto de divisores comunes en cada paso de Euclides. El último resto no nulo determina el MCD salvo una constante no nula; hacerlo mónico elige un representante único. **Control resuelto:** si el último resto es $6(x - 2)$, el MCD mónico es $x - 2$. Dividir por seis no cambia sus divisores ni su propiedad universal. Para certificar un MCD propuesto, comprobamos que divide ambos polinomios y damos una combinación $UP + VD = G$: todo divisor común debe dividir entonces a G. No basta presentar solo un factor compartido.

24.15. Identidad de Bézout y coprimalidad

El algoritmo también produce un certificado: $G = UP + VS$

para ciertos $U, V \in K[x]$, donde G es el MCD mónico. En efecto, P y S ya son combinaciones de sí mismos. Si dos restos consecutivos lo son, su diferencia después de multiplicar uno por el cociente vuelve a serlo. Por inducción, el último resto no nulo es una combinación de P, S; la normalización mónica multiplica esa combinación por una constante. Esto prueba la existencia de la **identidad de Bézout**.

Ejemplo con sustitución hacia atrás. Sean $P = x^3 + 2x + 1$ y $S = x^2 + 1$. Las divisiones son

$$P = xS + (x + 1), \qquad S = (x - 1)(x + 1) + 2.$$

El MCD mónico es 1. Sustituyendo $x + 1 = P - xS$ en la segunda igualdad,

$$1 = \frac{1-x}{2}P + \frac{x^2-x+1}{2}S.$$

No basta anunciar que el MCD vale 1: esta identidad permite comprobarlo multiplicando. Cualquier divisor común divide al miembro derecho y por tanto divide a 1.

Decimos que P, S son **coprimos** si su MCD mónico es 1. Si A, B son coprimos y $A \mid BC$, Bézout da $UA + VB = 1$. Multiplicamos por C: $C = UAC + VBC$. Ambos sumandos son divisibles por A, de modo que $A \mid C$. Esta cancelación de divisibilidad necesita la hipótesis de coprimalidad.

Recuperación resuelta. Sin esa hipótesis, con $A = B = x$ y $C = 1$ tenemos $A \mid BC$, pero $A \nmid C$. La ley no autoriza a "tachar" un factor común de cualquier afirmación de divisibilidad.

24.16. Parámetros, síntesis y enlace con C25

Una condición sobre un resto suele transformarse en una ecuación. Para una división lineal podemos evaluar; para un divisor de mayor grado usamos reducción o comparación de coeficientes. Si aparecen parámetros en el divisor, antes comprobamos cuándo es no nulo y cuándo cambia su grado.

Problema de síntesis resuelto. Sea $P_t = x^3 + tx + 2$. Hallar t para que, al dividir por $x - 1$, el resto sea 5, y obtener el cociente. Por el teorema del resto, $P_t(1) = t + 3 = 5$, de donde $t = 2$. Horner con coeficientes $1, 0, 2, 2$ y $c = 1$ produce el cociente $x^2 + x + 3$ y el resto 5. La comprobación final es

$(x - 1)(x^2 + x + 3) + 5 = x^3 + 2x + 2$.

Se han satisfecho la condición numérica, la identidad formal y la cota del resto.

Caso excepcional resuelto. Si el divisor es $D_t = (t - 1)x + 2$, para $t \neq 1$ podemos tratarlo como un divisor lineal no mónico. Para $t = 1$ es la constante 2 y el resto de cualquier división en $K[x]$ debe ser cero. Aplicar una tabla con $c = -2/(t - 1)$ en ese caso introduciría una división por cero.

La identidad $P = DQ + R$ puede convertirse en $P(a)/D(a) = Q(a) + R(a)/D(a)$ solamente para los valores con $D(a) \neq 0$. La identidad formal original no tiene esa restricción; el paso a cocientes numéricos sí.

Recuperación resuelta. Para $P = x^2 - 1$ y $D = x - 1$, el cociente polinómico es $x + 1$ y el resto es cero. La función $(a^2 - 1)/(a - 1)$ coincide con $a + 1$ cuando $a \neq 1$; la cancelación no asigna por sí sola un valor al cociente original en $a = 1$.

El capítulo deja disponibles tres certificaciones: igualdad por coeficientes; división por identidad y cota del resto; MCD por Euclides y Bézout. En C25 estudiaremos qué información adicional proporciona la anulación de un polinomio, cómo se relaciona con sus factores y cómo interviene el conjunto de coeficientes en la factorización.

Ejercicios

Todos los coeficientes son racionales o reales según se indique. Si se utiliza K, designa uno de los conjuntos $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. Justifica las respuestas; el polinomio cero no tiene grado en la convención del capítulo. Las soluciones se reúnen después del banco para permitir un intento autónomo.

Lectura formal y grado. 1. Reconocer el objeto. Clasifica $3x^2 - \sqrt{2}x + 1$, $x^{-2} + 3$ y 5 según pertenezcan a $\mathbb{Q}[x]$, a $\mathbb{R}[x]$ o a ninguno.

2. Ceros finales. Escribe la sucesión de coeficientes de $P = 4 - 3x^2 + 0x^5$. Determina su grado y compárala con la de $Q = 4 - 3x^2$.

3. Una familia que se anula. Determina el grado de $P_t = (t^2 - 1)x^3 + (t - 1)x + 2(t - 1)$ para todos los valores reales de t.

4. Coeficientes y posiciones. En $P = 7x^4 - 2x + 9$, identifica $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_6$ y el coeficiente principal.

5. Normalizar. Obtén la normalización mónica de $-3x^3 + 6x - 9$ y explica si es igual al polinomio inicial.

6. Grados desiguales. Sean $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ de grados 7 y 4. Sin conocer sus coeficientes, determina los grados de $P + Q$ y PQ.

7. Cancelar un factor. De $(x^2 + 1)A = (x^2 + 1)(2x - 3)$ en $\mathbb{Q}[x]$, determina A y justifica la cancelación.

8. Una comprobación insuficiente. Un estudiante evalúa x^2 y x en 0 y 1 y concluye que son iguales. Audita su conclusión.

9. Grado de una potencia. Si $P \neq 0$ tiene grado 3, determina el grado de P^4 y explica por qué no es 3^4.

10. Inversos. Decide cuáles de 0, -5 y $x^2 + 1$ tienen inverso en $\mathbb{Q}[x]$.

Operaciones, evaluación y composición. 11. Suma organizada. Calcula $(3x^3 - 2x^2 + 4) + (-x^3 + 2x^2 + 5x - 7)$ y determina el grado.

12. Resta con signos. Calcula $(2x^4 - x^2 + 3x - 1) - (x^4 + 2x^2 - x + 5)$.

13. Combinación lineal. Para $P = x^2 - 2x + 1$ y $Q = 2x^2 + x - 3$, calcula $2P - Q$.

14. Producto completo. Multiplica $(x^2 + x - 2)(x - 3)$.

15. Producto con huecos. Calcula $(2x^3 - 1)(x^2 + 2)$ y especifica el coeficiente de x^4.

16. Un coeficiente sin expandir todo. Obtén el coeficiente de x^3 en $(1 + 2x - x^2 + 3x^3)(2 - x + 4x^2)$.

17. Cuadrado. Desarrolla $(x^2 - 2x + 2)^2$.

18. Producto telescópico. Demuestra por distributividad $(x - 1)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) = x^n - 1$ para todo entero $n \geq 1$.

19. Evaluación exacta. Para $P = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$, calcula $P(-2)$ y $P(1/2)$.

20. Evaluar con Horner. Evalúa $P = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ en $x = -1$ mediante Horner.

21. Dos composiciones. Para $P = x^2 - 2$ y $Q = 2x + 1$, calcula $P \circ Q$ y $Q \circ P$.

22. Composición con una constante. Con $P = x^2 - 4$ y el polinomio constante $C = 2$, calcula $P \circ C$ y $C \circ P$, y trata sus grados.

23. Identidad con parámetros. Determina a, b, c para que $(ax + b)(x + 2) + c = 2x^2 + 3x + 5$.

24. Factor desconocido. Encuentra u, v si $(x - 2)(ux + v) = 3x^2 - 7x + 2$.

25. Trasladar una indeterminada. Para $P = x^2 + 3x + 1$, desarrolla $P(x + 1) - P(x)$ y determina su grado.

26. Grado de una composición. Sin desarrollar, determina el grado y el principal de $P(Q(x))$ si $P = 3x^4 - x + 1$ y $Q = 2x^3 + x^2 - 5$.

División larga y división lineal. 27. División cuadrática. Divide $x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por $x^2 + x + 1$.

28. División lineal con signos. Divide $2x^3 + 3x^2 - x + 5$ por $x + 2$.

29. Un resto constante con divisor cuadrático. Divide $x^4 + 1$ por $x^2 + 2$.

30. Divisor no mónico. Divide $3x^3 - x^2 + 4x - 2$ por $2x^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[x]$.

31. Resto negativo. Divide $x^3 - 4x + 1$ por $x - 1$.

32. Horner y escala. Divide $2x^3 + x^2 - 5x + 4$ por $2x + 1$.

33. Dividendo de menor grado. Divide $3x - 2$ por $x^3 + x + 1$. Explica el criterio de parada.

34. División por una constante. Divide $6x^2 - 3x + 9$ por -3 en $\mathbb{Q}[x]$.

35. Dividendo cero. Divide el polinomio nulo por $x^2 - 5$ y justifica la respuesta sin atribuir grado a cero.

36. División dentro de los enteros. Divide $x^3 + 2x + 1$ por $x^2 + x$ y explica por qué el resultado está en $\mathbb{Z}[x]$.

37. Reconstrucción hacia atrás. Una división tiene divisor $x^2 - 2$, cociente $2x + 3$ y resto $x - 1$. Encuentra el dividendo y comprueba que el dato del resto es admisible.

38. Identidad que todavía necesita reducirse. Se propone $x^3 = (x^2 + 1)(x - 1) + (x^2 - x + 1)$ como división. Decide si es admisible y corrígela.

Demostraciones y diagnóstico. 39. Cancelación del término principal. Para P, Q no nulos de igual grado n, demuestra que $P + Q$ es cero o tiene grado menor que n si y solo si sus coeficientes principales suman cero.

40. Dónde falla la ley del grado. En la aritmética de coeficientes módulo 4, calcula $(2x)(2x)$ y explica qué hipótesis de la prueba de §24.4 falla.

41. Divisor mónico entero. Justifica que dividir $P \in \mathbb{Z}[x]$ por un divisor mónico no nulo $D \in \mathbb{Z}[x]$ produce cociente y resto enteros.

42. Una cancelación numérica inválida. Se intenta justificar que $(x - 2)A = (x - 2)B$ implica $A = B$ "dividiendo por $x - 2$ para cada real x". Señala la falla y da una prueba formal válida.

43. Cambiar el dividendo por un múltiplo. Si $P = DQ + R$ es una división admisible y $T \in K[x]$, encuentra la división de $P + DT$ por D.

44. Grado del cociente. Demuestra que, si $P, D \neq 0$ y $\deg P \geq \deg D$, el cociente de su división es no nulo y tiene grado $\deg P - \deg D$.

45. Qué exige un resto lineal. Un alumno afirma que "en toda división el resto es una constante". Refútalo y formula la afirmación correcta.

46. Multiplicar restos y volver a reducir. Módulo $x^2 + 1$, los restos de x y x son x. ¿Es x^2 el resto de su producto? Corrige el razonamiento.

47. Distributividad en composición. Prueba $(P + Q) \circ S = (P \circ S) + (Q \circ S)$ y decide si siempre $P \circ (Q + S) = (P \circ Q) + (P \circ S)$.

48. Por qué se excluye el divisor cero. Explica qué falla al pedir una división por el polinomio cero, incluso cuando el dividendo es cero.

49. El factor de normalización. Si G es un MCD no nulo de P, S y $c \in K$ es no nulo, prueba que cG también es MCD. Explica por qué se exige que el MCD canónico sea mónico.

50. Evaluar no certifica un MCD. Un alumno concluye que $\gcd(x, x^2 + 1) = x$ porque $x(0) = 0$. Diagnostica y calcula el MCD correcto.

Restos y parámetros. 51. Una potencia grande. Encuentra el resto de $x^{100} + 3x^{99} - 2$ al dividir por $x^2 + 1$.

52. Reducir por recurrencia. Calcula el resto de x^6 módulo $x^2 - x - 1$.

53. Divisibilidad sin raíces complejas. Para enteros $r, s, t \geq 0$, demuestra que $x^{3r+2} + 2x^{3s+1} + x^{3t} - x$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

54. Resto cuadrático prescrito. Encuentra $a, b \in \mathbb{R}$ para que el resto de $x^3 + ax^2 + bx + 1$ por $x^2 + 1$ sea $x + 2$.

55. Resto y valor del cociente. Al dividir $P = ax^3 + bx^2 + 2x + 1$ por $x - 1$, el resto es 4 y el cociente satisface $Q(2) = 7$. Encuentra a, b.

56. El divisor cambia de grado. Para $P = x^2 - 1$, determina el resto al dividir por $D_t = (t - 2)x + 1$ para todo real t.

57. Toda una familia divisible. Determina todos los pares (a, b) para los que $x^4 + ax^2 + b$ es divisible por $x^2 + 1$, y da el cociente.

58. Paridad de exponentes. Obtén el resto de $x^{2025} + 1$ por $x^2 - 1$.

59. Dos restos lineales. Encuentra a, b si $P = x^3 + ax + b$ deja resto 3 al dividir por $x - 1$ y resto 1 al dividir por $x + 1$.

60. Reconstruir un resto a partir de valores. Si $P(1) = 5$ y $P(-1) = 1$, determina el resto de P por $x^2 - 1$, sin conocer el grado de P.

Euclides y Bézout. 61. Euclides: un resto lineal. Calcula el MCD mónico de $P = x^3 - 1$ y $S = x^2 - 1$.

62. Grados mayores con la misma estrategia. Calcula el MCD mónico de $x^4 - 1$ y $x^3 - 1$.

63. Bézout con resto uno. Calcula el MCD de $P = x^2 + 2x + 2$ y $S = x + 1$, y una identidad de Bézout para su representante mónico.

64. Normalizar una constante final. Calcula el MCD y una identidad de Bézout de $P = x^3 + x + 2$ y $S = x^2 + 1$.

65. Factores escalares distintos. Calcula el MCD mónico de $2x^2 - 2$ y $3x - 3$.

66. Un argumento cero. Determina el MCD mónico de 0 y $4x^2 + 2x$, y una identidad de Bézout.

67. Auditar un certificado. Se propone $1 = x^2 - (x - 1)(x + 1)$ como certificado de coprimalidad de x^2 y $x + 1$. Verifícalo y extrae el MCD.

68. Cancelar divisibilidad coprima. Si $A = x^2 + 1$, $B = x$ y $A \mid BC$, demuestra que $A \mid C$ sin factorizar A.

69. Producto de divisores coprimos. Si A, B son no nulos y coprimos, y ambos dividen a P, prueba que $AB \mid P$.

70. Describir todos los certificados. Para $P = x^2$, $S = x + 1$, una pareja de Bézout es $(U_0, V_0) = (1, 1 - x)$. Demuestra que todas las parejas que satisfacen $UP + VS = 1$ son $U = 1 + (x + 1)T$, $V = 1 - x - x^2T$ con $T \in K[x]$.

71. MCD y un parámetro constante. Determina el MCD mónico de $x^2 + 1$ y $x^2 + t$ para cada real t.

72. Certificado con MCD no constante. Para $P = x^3 - x$ y $S = x^2 + x$, calcula el MCD mónico y justifícalo mediante una combinación de P, S.

Problemas de síntesis. 73. Dos divisiones simultáneas. Encuentra todos los $P \in K[x]$ cuyo resto por $A = x^2 + 1$ es x y cuyo resto por $B = x^2 - x + 1$ es 1. Determina el único de grado menor que 4 y justifica la unicidad.

74. Euclides con bifurcaciones. Determina, para cada real t, el MCD mónico de $P = x^3 - 2x + 1$ y $S_t = x^2 + t$. No utilices una factorización completa de P.

75. Una recurrencia y una identidad de enteros. Define $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geq 1$. Demuestra que el resto de x^n por $D = x^2 - x - 1$ es $f_n x + f_{n-1}$ para $n \geq 1$. Deducir, para $m, n \geq 1$, la identidad $f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$.

76. Euclides en los exponentes. Demuestra que para enteros positivos m, n el MCD mónico de $x^m - 1$ y $x^n - 1$ es $x^d - 1$, donde $d = \gcd(m, n)$ es el MCD entero.

77. Certificados con grados acotados. Sean $A, B \in K[x]$ coprimos, de grados $a, b \geq 1$. Prueba que existe una única pareja U, V con $UA + VB = 1$, donde $U = 0$ o $\deg U < b$, y $V = 0$ o $\deg V < a$.

78. Invertir un resto mediante Euclides. Para $D = x^3 + x + 1$ y $A = x^2 + 1$, encuentra un polinomio H de grado menor que 3 tal que $AH \equiv 1 \pmod{D}$. Explica por qué es único entre los de ese grado y cómo cambia la conclusión si A, D no son coprimos.

79. Reconstrucción y libertad residual. Encuentra todos los polinomios mónicos P de grado 4 que dejan resto $x + 1$ por $x^2 + 1$ y cumplen $P(1) = 6$, $P(-1) = 2$. Luego describe todas las soluciones de las tres condiciones sin imponer grado ni monicidad.

80. Inversos y parámetros en dos restos. Para cada real t, decide si existe un polinomio H_t de grado menor que 2 o cero tal que $(x-t)H_t \equiv 1 \pmod{x^2-1}$. Encuéntralo cuando exista y describe todos los polinomios que satisfacen la congruencia.

H. Profundización y reconstrucción. Intente cada tarea antes de consultar su solución. Los parámetros son reales salvo indicación distinta.

Ejercicio 081. Una división válida en racionales que falla en enteros. Divida x^3 por $3x-1$ en $\mathbb{Q}[x]$ y explique por qué el mismo cociente y resto no pertenecen a $\mathbb{Z}[x]$.

Ejercicio 082. Ampliar los coeficientes no altera una división ya certificada. Divida $P = (x^3+2x+1)/2$ por $D = x^2+1$ y compare la división en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

Ejercicio 083. El divisor obliga a usar coeficientes reales. Divida x^2 por $\sqrt{2}x-1$ en $\mathbb{R}[x]$. Explique por qué no es una división formulada en $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 084. Diagnosticar una regla de grados fuera de un cuerpo. Usando coeficientes módulo 6, calcule $(2x+1)(3x+1)$. Compare el grado obtenido con la suma de grados y localice la hipótesis perdida.

Ejercicio 085. Clasificar cuándo la división conserva coeficientes enteros. Para $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, divida x^2 por $mx-1$ en $\mathbb{Q}[x]$. Determine cuándo cociente y resto son enteros.

Ejercicio 086. Construir un dividendo desde cociente, grado y valores. Construya P cuya división por x^2+1 tenga cociente x^2-2, resto de grado menor que dos y valores $P(0)=3$, $P(1)=7$.

Ejercicio 087. Prescribir dos valores del resto. Dados $u, v \in \mathbb{R}$ y un polinomio Q, construya el único P con cociente Q al dividir por x^2-1 y resto R que satisfaga $R(1)=u$, $R(-1)=v$.

Ejercicio 088. Diseñar un cúbico mediante un resto. Para cada $k \in \mathbb{R}$, construya el cúbico mónico P cuya división por x^2-1 tenga resto $2x+3$ y que cumpla $P(0)=k$.

Ejercicio 089. Construir todos los dividendos pares de una división. Sean $c, v \in \mathbb{R}$. Describa todos los polinomios pares P de grado cuatro y coeficiente principal dos cuya división por x^2+1 tenga $Q(0)=v$ y $P(0)=c$.

Ejercicio 090. Una reconstrucción que todavía no certifica la división. Para $P = x^3+1$, $D = x^2+1$, alguien propone $Q = x+1$, $R = -x^2-x$. Verifique la identidad y repare el par.

Ejercicio 091. Un divisor lineal que se vuelve constante. Divida x^2+1 por $tx+1$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 092. Un divisor cuadrático que baja de grado. Divida x^3 por $(t-1)x^2+x$ para todo real t.

Ejercicio 093. Un divisor que desaparece. Divida x^3-1 por $t(x^2+1)$ cuando la operación exista. Identifique todos los parámetros inadmisibles.

Ejercicio 094. Clasificar una división y detectar un cociente nulo. Divida tx^2+1 por x^2+1 para todo real t, e indique los cambios de grado del dividendo y del resto.

Ejercicio 095. Un divisor cuyo término principal se anula en dos valores. Divida x^2+1 por $(t^2-1)x+1$ y clasifique los valores especiales.

Ejercicio 096. Certificar un MCD sin buscar todas las raíces. Sean $P = x^2+1$ y $S = x^3+x+1$. Determine su MCD mónico y dé un certificado de Bézout.

Ejercicio 097. Leer un factor común y certificar que es máximo. Sean $P = (x-2)(x^2+1)$ y $S = (x-2)(x^2+2)$. Determine su MCD mónico y una combinación que lo certifique.

Ejercicio 098. Construir un inverso residual que existe para todo parámetro. Para $t \in \mathbb{R}$, encuentre todos los $H \in \mathbb{R}[x]$ tales que $(x-t)H$ deje resto uno al dividir por $D = x^2+x+1$.

Ejercicio 099. Certificar unicidad de un resto por grados. Sea $D \neq 0$ y suponga que $P = DQ_1 + R_1 = DQ_2 + R_2$, con ambos restos cero o de grado menor que $\deg D$. Pruebe la unicidad y explique el caso de divisor constante.

Ejercicio 100. Normalizar un certificado de Euclides. Se dispone de $G = 6x - 12$, $P = (6x - 12)(x + 1)$, $S = (6x - 12)(x + 2)$ y $S - P = G$. Obtenga el MCD mónico y su Bézout; explique qué cambia.

Soluciones desarrolladas

Soluciones — Lectura formal y grado. 1. Los exponentes de una indeterminada deben ser enteros no negativos. El primer objeto tiene coeficientes reales, pero el coeficiente $-\sqrt{2}$ no es racional: pertenece a $\mathbb{R}[x]$ y no a $\mathbb{Q}[x]$. El segundo tiene un exponente negativo, así que no pertenece a ninguno. La constante 5 pertenece a ambos y tiene grado 0. El dominio de los coeficientes y la condición sobre los exponentes son controles independientes.

2. La sucesión es $(4, 0, -3, 0, 0, \ldots)$. El último coeficiente no nulo ocupa la posición 2, por lo que $\deg P = 2$. El coeficiente escrito de x^5 es cero y no aumenta el grado. La sucesión de Q es idéntica; por definición formal, $P = Q$.

3. El coeficiente principal se anula exactamente en $t = 1, -1$. Para $t \notin \{-1, 1\}$ el grado es 3. Si $t = -1$, resulta $P_t = -2x - 4$, de grado 1. Si $t = 1$, todos los coeficientes son cero y el grado no está definido. Revisar solo el coeficiente cúbico no permite distinguir los dos casos excepcionales.

4. Cada índice es un exponente: $a_0 = 9$, $a_1 = -2$, $a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 7$ y $a_6 = 0$. El grado es 4 y el principal es 7. Los términos ausentes tienen coeficiente cero, incluso por encima del grado; no hay un coeficiente "desconocido" en esas posiciones.

5. Dividir todos los coeficientes por -3 da $G = x^3 - 2x + 3$. Su principal es 1 y el polinomio inicial es $-3G$. No son iguales: sus coeficientes cúbicos son diferentes. La normalización conserva la clase de asociados, no la igualdad formal.

6. El término de grado 7 de P no puede cancelarse con uno de Q, así que $\deg(P + Q) = 7$. En el producto, los principales no nulos tienen producto no nulo y $\deg(PQ) = 7 + 4 = 11$. La primera conclusión usa que los grados son distintos; la segunda usa la aritmética real.

7. Restar da $(x^2 + 1)(A - (2x - 3)) = 0$. El primer factor es un polinomio no nulo; un producto de dos polinomios no nulos en $\mathbb{Q}[x]$ no puede ser cero. Por tanto el segundo factor debe ser cero y $A = 2x - 3$. La justificación es formal y no requiere elegir valores de x.

8. Ambas evaluaciones coinciden en esos dos puntos, pero sus coeficientes no: el de x^2 es 1 en el primer polinomio y 0 en el segundo. Además, en $x = 2$ sus valores son 4 y 2. La conclusión es falsa; coincidir en una muestra sin un teorema y sus hipótesis no certifica una identidad.

9. Cada multiplicación suma grados. Aplicando la fórmula tres veces, $\deg(P^4) = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Todos los productos intermedios son no nulos. La expresión 3^4 elevaría el número que mide el grado; el polinomio se eleva mediante cuatro productos.

10. Cero no tiene inverso porque $0Q = 0 \neq 1$. La constante -5 tiene inverso $-1/5$. Si $(x^2 + 1)Q = 1$, entonces $Q \neq 0$ y la fórmula del grado exigiría $2 + \deg Q = 0$, imposible. La expresión racional $1/(x^2 + 1)$ no es un inverso polinómico.

Soluciones — Operaciones, evaluación y composición. 11. Se agrupan coeficientes del mismo exponente: $(3 - 1)x^3 + (-2 + 2)x^2 + 5x + (4 - 7) = 2x^3 + 5x - 3$. El término cuadrático desaparece, pero el cúbico permanece. El grado es 3, con principal 2.

12. El signo menos afecta a todos los términos del segundo polinomio. Después de distribuirlo, queda $(2 - 1)x^4 + (-1 - 2)x^2 + (3 + 1)x + (-1 - 5) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$. La comprobación consiste en sumar el sustraendo al resultado y recuperar el minuendo.

13. Primero $2P = 2x^2 - 4x + 2$. Al restar Q, los términos cuadráticos se cancelan y obtenemos $-5x + 5$. Su grado es 1. Sustituir P, Q en $2P - Q$ y comparar coeficientes verifica la cancelación y el término constante.

14. La distributividad da $x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6$. Reunir términos produce x^3-2x^2-5x+6. El grado 3 y el principal 1 concuerdan con los de los factores; el constante $6=(-2)(-3)$ comprueba el extremo inferior.

15. Los cuatro productos son $2x^5$, $4x^3$, $-x^2$ y -2. Por tanto el resultado es $2x^5+4x^3-x^2-2$. No hay pareja de términos que produzca x^4, cuyo coeficiente es cero. El hueco debe conservarse si después se usa una tabla de división.

16. Solo se necesitan las parejas cuyos exponentes suman 3: $a_1b_2=2\cdot 4$, $a_2b_1=(-1)(-1)$ y $a_3b_0=3\cdot 2$. La pareja a_0b_3 aporta cero. La suma es $8+1+6=15$. Esta selección evita calcular coeficientes que no pide el problema.

17. Los cuadrados de los tres términos son x^4, $4x^2$ y 4; los productos cruzados dobles son $-4x^3$, $4x^2$ y $-8x$. Al reunirlos resulta $x^4-4x^3+8x^2-8x+4$. Olvidar los términos cruzados produciría otro polinomio, aunque conservara el grado y el constante.

18. Multiplicar la suma por x produce $x+x^2+\cdots+x^n$; multiplicarla por -1 produce $-1-x-\cdots-x^{n-1}$. Los términos de grados 1 a $n-1$ se cancelan por parejas y quedan x^n-1. Para $n=1$ las sumas intermedias vacías no aparecen y la identidad dice $(x-1)\cdot 1=x-1$.

19. Sustituir -2 da $3(-8)-2(4)-2-4=-38$. Para $1/2$, $P(1/2)=3/8-1/2+1/2-4=-29/8$. Las potencias se calculan antes de multiplicar por los coeficientes; el término cuadrático conserva signo positivo antes de aplicar su coeficiente negativo.

20. Se usan los coeficientes $2,0,-3,5,-1$. Acumular multiplicaciones por -1 y sumas sucesivas da 2, -2, -1, 6, -7. El último valor es $P(-1)=-7$. La sustitución directa $2-3-5-1=-7$ confirma el resultado. El cero del término cúbico mantiene la posición de los coeficientes.

21. En la primera composición reemplazamos la indeterminada de P por Q: $(2x+1)^2-2=4x^2+4x-1$. En la segunda, $2(x^2-2)+1=2x^2-3$. No coinciden: el coeficiente cuadrático es 4 en una y 2 en otra. El orden determina cuál polinomio actúa por fuera.

22. $P(C)=2^2-4=0$, así que $P\circ C$ es el polinomio nulo y no tiene grado. La composición $C\circ P$ sigue siendo la constante 2, de grado 0: C no depende de su argumento. No se aplica la fórmula de grados para dos polinomios no constantes.

23. La expansión izquierda es $ax^2+(2a+b)x+2b+c$. Igualar coeficientes da $a=2$, $2a+b=3$ y $2b+c=5$. Así, $b=-1$ y $c=7$. Comprobar $(2x-1)(x+2)+7=2x^2+3x+5$ verifica las tres condiciones simultáneamente.

24. El producto es $ux^2+(v-2u)x-2v$. El coeficiente principal exige $u=3$ y el constante exige $v=-1$. El coeficiente intermedio queda $-1-6=-7$, por lo que también se satisface. Es necesario revisar esta tercera ecuación: dos extremos correctos no garantizan una identidad.

25. $P(x+1)=(x+1)^2+3(x+1)+1=x^2+5x+5$. Al restar $P(x)$, queda $2x+4$, de grado 1. La cancelación del término cuadrático explica la disminución del grado; no se utilizó ninguna derivada.

26. El término $3Q^4$ tiene grado 12 y principal $3\cdot 2^4=48$. Los otros términos, $-Q$ y 1, tienen grados 3 y 0, y no pueden cancelar el término de grado 12. Por tanto la composición tiene grado 12 y principal 48.

Soluciones — División larga y división lineal. 27. El término x^2 del cociente cancela los dos primeros términos y deja $-3x^2+3x-1$. El siguiente término es -3; al restar $-3(x^2+x+1)$ queda $6x+2$. Por tanto $Q=x^2-3$, $R=6x+2$. El resto tiene grado $1<2$ y la reconstrucción $(x^2+x+1)(x^2-3)+6x+2$ devuelve el dividendo.

28. Horner usa $c=-2$, no 2. Con coeficientes $2,3,-1,5$, obtiene $2,-1,1,3$. El cociente es $2x^2-x+1$ y el resto 3. Multiplicar $(x+2)(2x^2-x+1)$ da $2x^3+3x^2-x+2$; al sumar 3 recuperamos el dividendo. También $P(-2)=3$.

29. Restar $x^2(x^2+2)$ deja $-2x^2+1$. Restar $-2(x^2+2)$ deja 5. Así, $Q=x^2-2$ y $R=5$. La identidad $(x^2+2)(x^2-2)+5=x^4+1$ y la cota $0<2$ lo verifican. El resto podría haber sido lineal; que aquí sea constante se debe al cálculo.

30. El primer término del cociente es $(3/2)x$. Después de restar su producto por el divisor queda $-x^2 + (5/2)x - 2$. El siguiente término es $-1/2$, y el resto es $(5/2)x - 3/2$. Por tanto $Q = (3/2)x - 1/2$. La expansión de $(2x^2 + 1)Q$ es $3x^3 - x^2 + (3/2)x - 1/2$; sumar el resto restituye los coeficientes pedidos.

31. Los coeficientes son $1, 0, -4, 1$. Horner con $c = 1$ da $1, 1, -3, -2$, de modo que $Q = x^2 + x - 3$ y $R = -2$. La reconstrucción $(x-1)(x^2+x-3) - 2 = x^3 - 4x + 1$ lo confirma. Un resto polinómico no está sujeto a la condición de ser un número no negativo de la división entera.

32. El divisor es $2(x + 1/2)$. Horner con $c = -1/2$ da cociente $2x^2 - 5$ para $x + 1/2$, y resto $13/2$. Dividir ese cociente por 2 da $Q = x^2 - 5/2$ para el divisor original. En efecto, $(2x + 1)(x^2 - 5/2) + 13/2 = 2x^3 + x^2 - 5x + 4$.

33. El grado del dividendo es $1 < 3$, por lo que $Q = 0$ y $R = 3x - 2$. La identidad $P = D \cdot 0 + P$ ya cumple la cota. No se introducen potencias negativas para continuar: eso cambiaría el tipo de objeto que admite el cociente.

34. Dividir cada coeficiente por -3 produce $Q = -2x^2 + x - 3$, y $R = 0$. Un resto no nulo tendría grado al menos 0, así que no cumpliría la cota estricta respecto de un divisor de grado 0. La multiplicación por -3 reconstruye el dividendo.

35. La identidad $0 = (x^2 - 5)0 + 0$ demuestra que $Q = R = 0$ es una división admisible, pues la condición del resto admite explícitamente cero. La unicidad de la división prueba que es la única. No se necesita ninguna comparación que use $\deg 0$.

36. Restar $x(x^2 + x)$ deja $-x^2 + 2x + 1$. Restar $-(x^2 + x)$ deja $3x + 1$. Entonces $Q = x - 1$, $R = 3x + 1$. La identidad $(x^2 + x)(x - 1) + 3x + 1 = x^3 + 2x + 1$ y la cota verifican el resultado. El divisor es mónico: cada cancelación divide el principal del resto por 1, por lo que conserva coeficientes enteros.

37. La identidad de división obliga a tomar $P = (x^2 - 2)(2x + 3) + (x - 1) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 7$. El resto es no nulo de grado $1 < 2$, por lo que los datos sí constituyen una división. La unicidad asegura que, al dividir el polinomio construido, se recuperarán ese cociente y ese resto.

38. La expansión confirma la identidad, pero el supuesto resto tiene grado 2, igual al del divisor. Hay que dividirlo otra vez: $x^2 - x + 1 = (x^2 + 1) \cdot 1 - x$. Sumando 1 al cociente propuesto, resulta $Q = x$ y $R = -x$. La identidad corregida es $x^3 = (x^2 + 1)x - x$, con resto de grado $1 < 2$.

Soluciones — Demostraciones y diagnóstico. 39. El coeficiente de x^n de la suma es $a_n + b_n$, y todos los superiores son cero. Si $a_n + b_n = 0$, desaparece el término de grado n; la suma es cero o su último coeficiente no nulo aparece por debajo. Recíprocamente, cualquiera de esas dos posibilidades exige que el coeficiente de x^n sea cero. La equivalencia incluye $n = 0$: entonces la suma debe ser el polinomio nulo.

40. El producto formal es $4x^2$, que tiene todos los coeficientes cero módulo 4. Cada factor $2x$ es no nulo, pero su producto es cero. Falla la inferencia “dos coeficientes principales no nulos tienen producto no nulo”: $2 \cdot 2 = 0$ en esa aritmética. No contradice el resultado del capítulo, formulado para $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

41. En cada cancelación, si el principal del resto parcial es a, el término agregado al cociente es ax^{n-m} porque el principal del divisor vale 1. Ese término y su producto por D tienen coeficientes enteros; restarlos mantiene los coeficientes enteros del nuevo resto. La propiedad vale al inicio y se conserva en todos los pasos. El descenso de grado termina el proceso, incluso si el divisor es la constante mónica 1, cuyo resto es cero.

42. En $x = 2$ no se puede dividir por el valor del factor. La prueba formal evita ese paso: \$ (x-2)(A-B)=0\$ como identidad. Si $A - B \neq 0$, el producto tendría grado $1 + \deg(A - B)$ y sería no nulo, contradicción. Luego $A = B$. La conclusión era correcta, pero el argumento numérico tal como se escribió no la justificaba para cada real.

43. Sustituir la identidad da $P + DT = D(Q + T) + R$. El resto conserva su condición de ser cero o de grado menor que el divisor. Por unicidad, el nuevo cociente es $Q + T$ y el nuevo resto es R. Esta prueba permite modificar el dividendo sin recalcular cuando la diferencia es un múltiplo del divisor.

44. Si el cociente fuera cero, la identidad daría $P = R$, incompatible con la cota del resto. Por tanto $DQ \neq 0$ y su grado es $\deg D + \deg Q$, al menos $\deg D$. El resto tiene grado menor que $\deg D$ o es cero, y no puede cancelar el principal de DQ. Así $\deg P = \deg D + \deg Q$, que da la fórmula. El caso de divisor constante también cumple el razonamiento, con resto cero.

45. Al dividir x por $x^2 + 1$, el cociente es cero y el resto es x, que no es constante. La condición correcta es que el resto sea cero o tenga grado menor que el divisor. En particular, para un divisor de grado 1, el resto sí es constante; para uno de grado 2 puede ser lineal.

46. La multiplicación de congruencias da $x \cdot x \equiv x^2$, pero x^2 aún tiene grado igual al del divisor. Como $x^2 = (x^2 + 1) - 1$, su resto es -1. La regla correcta es reducir el producto de los restos una segunda vez si no cumple la cota. Una expresión congruente no es necesariamente el representante de grado mínimo.

47. Por coeficientes, al sustituir S en $P + Q$ se obtiene $\sum_k (a_k + b_k) S^k = \sum_k a_k S^k + \sum_k b_k S^k$. Esto prueba la primera identidad. La segunda es falsa: con $P = x^2$, $Q = x$ y $S = 1$, la izquierda es $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ y la derecha es $x^2 + 1$. El término cruzado distingue los polinomios.

48. Para $P \neq 0$, la identidad $P = 0Q + R$ fuerza $R = P$, y no existe grado del divisor con el que imponer la cota. Para $P = 0$, tomando $R = 0$ la identidad vale para cualquier cociente Q; no hay unicidad. El requisito $D \neq 0$ garantiza tanto una cota de grado definida como una cancelación principal que puede ejecutarse.

49. De $P = GA$ resulta $P = (cG)(A/c)$, y lo mismo para S, así que cG divide a ambos. Si H es divisor común, $H \mid G$, luego también $H \mid cG$. Eso prueba las dos obligaciones del MCD. La condición mónica fija c para que el principal sea 1 y selecciona un único representante entre los asociados.

50. Que el primer polinomio se anule en un punto no demuestra que divida al segundo. De hecho, $x^2 + 1 = x \cdot x + 1$ deja resto 1. Todo divisor común divide a ese resto, y la constante 1 divide a ambos. Por tanto el MCD mónico es 1. La división ofrece el certificado que la evaluación aislada no proporciona.

Soluciones — Restos y parámetros. 51. Módulo el divisor, $x^2 \equiv -1$ y $x^4 \equiv 1$. Así $x^{100} \equiv 1$ y $x^{99} = x^{96} x^3 \equiv -x$. El polinomio es congruente con $-1 - 3x$, que ya tiene grado menor que 2. Por unicidad ese es el resto. La reducción de exponentes evita efectuar cincuenta pasos de división larga.

52. Usamos $x^2 \equiv x + 1$ y multiplicamos sucesivamente por x, reduciendo de nuevo: $x^3 \equiv 2x + 1$, $x^4 \equiv 3x + 2$, $x^5 \equiv 5x + 3$, $x^6 \equiv 8x + 5$. Cada sustitución cambia la expresión por un múltiplo del divisor. Como la última expresión tiene grado 1, el resto buscado es $8x + 5$.

53. La identidad $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ muestra $x^3 \equiv 1$ módulo el divisor. Al elevar esa congruencia a exponentes no negativos, los tres primeros términos se reducen a x^2, $2x$ y 1. Tras restar x, queda $x^2 + x + 1$, cuyo resto es cero. Por tanto el polinomio original es divisible por el divisor. Se comprueba también el caso $r = s = t = 0$: el polinomio ya es $x^2 + x + 1$. El argumento usa aritmética de restos, sin raíces complejas.

54. Al reducir $x^2 \equiv -1$ y $x^3 \equiv -x$, el resto es $(b - 1)x + (1 - a)$. Igualar sus dos coeficientes con los de $x + 2$ da $b - 1 = 1$ y $1 - a = 2$, es decir, $b = 2$, $a = -1$. El cociente es $x - 1$, y $(x^2 + 1)(x - 1) + (x + 2) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ verifica la división.

55. El resto da $P(1) = a + b + 3 = 4$, luego $a + b = 1$. Evaluar $P = (x - 1)Q + 4$ en 2 da $P(2) = 11$, o $8a + 4b + 5 = 11$. Así $2a + b = 3/2$, y al restar la primera ecuación queda $a = 1/2$, $b = 1/2$. Horner produce $Q = x^2/2 + x + 3$, cuyo valor en 2 es 7; el resto es $1 + 3 = 4$.

56. Si $t \neq 2$, el divisor es lineal y se anula en $c = -1/(t-2)$. Por el teorema del resto para un divisor lineal no mónico, el resto es $P(c) = 1/(t-2)^2 - 1$. Si $t = 2$, el divisor es la constante 1, de modo que $Q = P$ y $R = 0$. La fórmula del caso lineal no está definida en 2 y no se extiende por sustitución.

57. Reducir módulo $x^2 + 1$ deja el constante $1 - a + b$. La divisibilidad equivale a $b = a - 1$. En ese caso $Q = x^2 + a - 1$, porque $(x^2+1)(x^2+a-1) = x^4 + ax^2 + (a-1)$. Todos los reales a son posibles y la igualdad muestra la suficiencia, además de la necesidad obtenida con el resto.

58. Se tiene $x^2 \equiv 1$, así que $x^{2025} = x(x^2)^{1012} \equiv x$. El resto es $x + 1$, de grado $1 < 2$. Evaluar el resto en 1 y -1 da 2 y 0, igual que el polinomio original; esto comprueba dos valores, mientras que la congruencia demuestra la reducción formal.

59. Los datos son $P(1) = 1 + a + b = 3$ y $P(-1) = -1 - a + b = 1$. Por tanto $a + b = 2$ y $-a + b = 2$. Sumando, $b = 2$; sustituyendo, $a = 0$. Con $P = x^3 + 2$, las evaluaciones dan efectivamente 3 y 1. Cada resto aporta una ecuación distinta.

60. Por división, el resto se escribe $R = ux + v$, permitiendo $u = 0$. Como el divisor vale cero en $1, -1$, la identidad de división da $u + v = 5$ y $-u + v = 1$. Entonces $u = 2$, $v = 3$, y $R = 2x + 3$. El argumento no supone que dos valores determinen todo P: solo determinan el resto, cuyo grado ya está acotado por el teorema de división.

Soluciones — Euclides y Bézout. 61. La primera división es $P = xS + (x-1)$. La siguiente es $S = (x+1)(x-1) + 0$. El último resto no nulo es $x - 1$, ya mónico. Cada paso conserva los divisores comunes, por lo que $\gcd(P, S) = x - 1$. La factorización visible en la segunda igualdad comprueba que ese polinomio divide a ambos.

62. Restar $x(x^3 - 1)$ del primer polinomio deja $x - 1$. Después, $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$. Así el último resto no nulo es $x - 1$ y ese es el MCD mónico. No es necesario factorizar ambos polinomios completamente: Euclides identifica un divisor que recoge todos los divisores comunes.

63. La división da $P = (x+1)S + 1$. El siguiente paso divide S por 1 y termina. El MCD es 1 y la misma igualdad produce $1 = P - (x+1)S$. Los coeficientes de Bézout son $U = 1$, $V = -(x+1)$. Expandir el miembro derecho deja la constante 1.

64. Se tiene $P = xS + 2$. Al dividir S por 2 queda resto cero. El último resto es 2, pero su normalización mónica es 1. Dividir la identidad del resto por 2 da $1 = P/2 - (x/2)S$, así que $U = 1/2$, $V = -x/2$. Esa normalización es admisible porque trabajamos con coeficientes racionales o reales.

65. La primera división tiene cociente $(2/3)(x+1)$ y resto cero, puesto que $(3x-3)(2/3)(x+1) = 2x^2 - 2$. El último divisor es $3x - 3$; dividirlo por su principal 3 da $x - 1$. La constante escalar del divisor no se conserva en el MCD mónico.

66. Todos los divisores comunes son exactamente los divisores del segundo polinomio, porque cualquier polinomio divide a cero. Su normalización es $G = x^2 + x/2$. Una identidad es $G = 0 \cdot 0 + (1/4)(4x^2 + 2x)$. El polinomio no nulo fija el MCD; no se utiliza el grado del argumento cero.

67. El producto $(x-1)(x+1)$ es $x^2 - 1$, así que la igualdad vale. Todo divisor común de x^2 y $x + 1$ divide su combinación 1 y debe ser constante no nulo. Como 1 divide a ambos, es el MCD mónico. El certificado corresponde a $U = 1$, $V = 1 - x$.

68. La identidad $1 = A - xB$ certifica la coprimalidad. Multiplicar por C da $C = AC - xBC$. El primer sumando es múltiplo de A, y el segundo también por la hipótesis $A \mid BC$. Su diferencia es divisible por A, luego $A \mid C$. La identidad de Bézout permite seleccionar la cancelación adecuada.

69. Como $A \mid P$, existe T con $P = AT$. La otra hipótesis da $B \mid AT$. La coprimalidad permite cancelar A en esta afirmación, de modo que $B \mid T$. Escribiendo $T = BU$, resulta $P =$

ABU. Si $P = 0$, el mismo argumento admite $U = 0$. Sin coprimalidad, $A = B = x$, $P = x$ refutaría la conclusión.

70. Sustituir esas fórmulas produce la identidad inicial más $SPT - PST = 0$, por lo que toda pareja construida sirve. Recíprocamente, restar el certificado inicial da $(U - 1)P + (V - (1 - x))S = 0$. Entonces $S \mid (U - 1)P$. Como P, S son coprimos por el ejercicio 67, $S \mid U - 1$, así que $U - 1 = ST$. La ecuación restante es $S(PT + V - (1 - x)) = 0$; cancelar $S \neq 0$ da $V = 1 - x - PT$.

71. La diferencia entre los dos polinomios es $t - 1$. Si $t \neq 1$, todo divisor común divide a una constante no nula, de modo que el MCD mónico es 1. Si $t = 1$, los polinomios coinciden y su MCD es $x^2 + 1$. La identidad de Bézout en el primer caso es $1 = ((x^2 + t) - (x^2 + 1))/(t - 1)$, que también señala por qué debe separarse $t = 1$.

72. La división exacta es $P = (x - 1)S$, porque $(x - 1)(x^2 + x) = x^3 - x$. Por tanto $G = S = x^2 + x$, ya mónico. Es divisor de ambos y tiene el certificado $G = 0P + 1S$. Todo divisor común divide a S por definición, así que esa elección también satisface la condición universal del MCD. Una identidad de Bézout puede tener un coeficiente cero.

Soluciones — Problemas de síntesis. 73. La dificultad es compatibilizar dos divisiones, no resolverlas aisladamente. Como $A - B = x$ y $B = x(x - 1) + 1$, obtenemos $1 = (1 - x)A + xB$. Esto certifica que A, B son coprimos.

Un candidato es $P_0 = -x^3$: módulo A, $x^2 \equiv -1$ y $-x^3 \equiv x$; módulo B, $x^2 \equiv x - 1$, luego $x^3 \equiv x^2 - x \equiv -1$, de modo que $-x^3 \equiv 1$. Así satisface ambos datos.

Si P es cualquier otra solución, los dos divisores dividen a $P - P_0$. Por la coprimalidad y el resultado del ejercicio 69, $AB \mid P - P_0$. Por tanto todas las soluciones son $P = -x^3 + ABT$, con $T \in K[x]$; la sustitución verifica la suficiencia. Si $T \neq 0$, el término ABT tiene grado al menos 4 y no puede cancelarse con $-x^3$. El único de grado menor que 4 es $-x^3$. La identidad de Bézout es la herramienta que permite combinar condiciones sobre restos.

74. La primera división es $P = xS_t + R_t$, donde $R_t = 1 - (t + 2)x$. Si $t = -2$, el resto es 1 y el MCD es 1.

Para $t \neq -2$, R_t es lineal, asociado a $x - c$, con $c = 1/(t + 2)$. Dividir S_t por $x - c$ deja el resto $S_t(c) = 1/(t + 2)^2 + t$. Si este resto es no nulo, el algoritmo termina en una constante y el MCD mónico es 1. Si es cero, termina en R_t, cuyo representante mónico es $x - c$.

La condición excepcional es $t(t + 2)^2 + 1 = 0$. Por expansión se verifica que el miembro izquierdo es $(t + 1)(t^2 + 3t + 1)$. La resolución de estas ecuaciones, disponible desde C19–C21, da $t = -1$ o $t = (-3 \pm \sqrt{5})/2$, ninguno igual a -2. Para esos tres valores, $G_t = x - 1/(t + 2)$; para todos los demás, $G_t = 1$.

Cada bifurcación corresponde a la anulación de un resto real del algoritmo. No se supuso de antemano que el grado del MCD permaneciera constante cuando cambiaba t.

75. Para $n = 1$, el resto es $x = f_1 x + f_0$. Si la fórmula vale en n, multiplicar por x y usar $x^2 \equiv x + 1$ da

$$x^{n+1} \equiv f_n(x + 1) + f_{n-1}x = f_{n+1}x + f_n.$$

La expresión tiene grado menor que 2, por lo que es el resto único. La inducción prueba la fórmula para todo $n \geq 1$; el resto de x^0 se trata aparte y es 1.

Para deducir la identidad, reducimos el producto de los restos de x^m y x^n. Antes de reducir es $f_m f_n x^2 + (f_m f_{n-1} + f_{m-1} f_n)x + f_{m-1} f_{n-1}$. Después de reemplazar x^2 por $x + 1$, su coeficiente lineal es $f_m(f_n + f_{n-1}) + f_{m-1} f_n = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$. El producto representa el resto de x^{m+n}, cuyo coeficiente lineal ya sabemos que es f_{m+n}. La unicidad del resto y la igualdad por coeficientes prueban la identidad. La recurrencia numérica se recupera como consecuencia de una operación polinómica.

76. La señal que permite cambiar de problema es que la división de exponentes también produce una división de polinomios. Si $m = qn + r$, con $0 \le r < n$ y $m \ge n$, la identidad telescópica da

$$x^m - 1 = (x^n - 1)x^r\big(1 + x^n + \cdots + x^{(q-1)n}\big) + (x^r - 1).$$

Para $r = 0$, el último término es cero; para $r > 0$ tiene grado $r < n$. Esta es una división admisible y transforma la pareja de divisores comunes en $(x^n - 1, x^r - 1)$.

Se repite el procedimiento según el algoritmo de Euclides entero. Sus restos positivos descienden hasta el último, d, y el paso siguiente tiene resto cero. En la versión polinómica se llega a $(x^d - 1, 0)$. Como cada paso conserva todos los divisores comunes, el último polinomio no nulo es un MCD. Ya es mónico, así que no requiere otra normalización. Si inicialmente $m < n$, se intercambian los argumentos; si son iguales, la conclusión es inmediata con $d = m$.

La prueba no usa raíces de la unidad. Transporta el algoritmo entero mediante una identidad que puede comprobarse por distributividad.

77. Bézout proporciona alguna pareja U_0, V_0, pero sus grados pueden ser grandes. Dividimos U_0 por B: $U_0 = BT + U$, con U de grado menor que b o cero. La identidad se convierte en $UA + (V_0 + TA)B = 1$. Definimos $V = V_0 + TA$.

Si $U = 0$, entonces $VB = 1$, imposible porque $b \ge 1$. Por tanto $U \neq 0$; UA tiene grado menor que $a + b$. El polinomio $1 - UA$ tiene grado menor que $a + b$ o es cero. Como $VB = 1 - UA$, si $V \neq 0$, la fórmula del producto da $\deg V + b < a + b$, luego $\deg V < a$. Esto demuestra la existencia con las dos cotas.

Para la unicidad, restamos dos certificados: $(U - U')A = -(V - V')B$. Entonces $B \mid (U - U')A$, y la coprimalidad implica $B \mid U - U'$. Si la diferencia fuera no nula, tendría grado al menos b por divisibilidad, pero también menor que b por las cotas de U, U'. Así $U = U'$. Cancelar $B \neq 0$ en la igualdad restante da $V = V'$. La reducción de un coeficiente de Bézout controla el otro sin necesitar calcularlos explícitamente.

78. Para construir el inverso no buscamos un cociente racional: buscamos un certificado de Bézout. La división $D = xA + 1$ da directamente $1 = D - xA$. Entonces $H = -x$ satisface $AH = 1 - D$, y por tanto $AH \equiv 1 \pmod{D}$. Su grado es $1 < 3$.

Si otro H' con grado menor que 3 o cero cumple la misma congruencia, $D \mid A(H - H')$. La identidad anterior certifica que A, D son coprimos; cancelando divisibilidad, $D \mid H - H'$. La diferencia es cero o tiene grado menor que 3, y la segunda posibilidad no puede ser un múltiplo no nulo de D. Luego $H = H'$.

En general, la existencia de $AH = 1 + DT$ obliga a que todo divisor común de A, D divida a 1, es decir, a que su MCD mónico sea 1. Si son coprimos, Bézout proporciona un inverso y la división por D lo reduce al representante único. Un MCD no constante impide la existencia, no solamente la unicidad del candidato.

79. La división prescrita dice $P = (x^2 + 1)Q + x + 1$. Si P es mónico de grado 4, el cociente debe ser mónico de grado 2, así que $Q = x^2 + ax + b$. Al evaluar en 1, $6 = 2(1 + a + b) + 2$, de donde $a + b = 1$. En -1, $2 = 2(1 - a + b)$, de donde $b = a$. Así $a = b = 1/2$ y

$$P_0 = x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{2}.$$

La forma $P_0 = (x^2 + 1)(x^2 + x/2 + 1/2) + x + 1$ comprueba el resto; evaluar da 6 y 2.

Sin restricciones de grado, toda solución tiene $Q = Q_0 + T$, donde $Q_0 = x^2 + x/2 + 1/2$. Las condiciones de evaluación exigen $T(1) = T(-1) = 0$. Para describir estos T sin teoría posterior de raíces, dividimos por $x^2 - 1$: $T = (x^2 - 1)W + ux + v$. Evaluar en $1, -1$ da $u + v = 0$ y $-u + v = 0$, luego $u = v = 0$. Por tanto todas las soluciones son $P = P_0 + (x^2 + 1)(x^2 - 1)W$, con $W \in K[x]$.

Si $W \neq 0$ tiene grado positivo, el resultado tiene grado mayor que 4. Si W es constante no nula, el principal cambia de 1 a $1 + W$, y no es mónico de grado 4. Esto también comprueba que P_0 es la única solución con las restricciones iniciales.

80. Escribimos $H_t = ux + v$. Al reducir el producto usando $x^2 \equiv 1$, obtenemos $(u - tv) + (v - tu)x$. Para que el resto sea 1, las ecuaciones son $u - tv = 1$ y $v - tu = 0$. La segunda da $v = tu$ y la primera se convierte en $(1 - t^2)u = 1$.

Si $t = \pm 1$, la última ecuación es imposible, por lo que no hay inverso. Si $t \neq \pm 1$, existe la pareja única $u = 1/(1 - t^2)$, $v = t/(1 - t^2)$, y $H_t = (x + t)/(1 - t^2)$. La identidad

$$(x - t)H_t = 1 + \frac{x^2 - 1}{1 - t^2}$$

verifica el resultado e identifica el múltiplo que se descarta al reducir.

Para clasificar inversos sin cota de grado, divide cualquier candidato H por $x^2 - 1$. Su resto también es inverso, ya que cambiar H por un múltiplo del divisor no cambia la congruencia del producto. La unicidad de las dos ecuaciones fuerza ese resto a ser H_t. Por tanto todos son $H = H_t + (x^2 - 1)T$, con $T \in \mathbb{R}[x]$. La ausencia de solución en $t = \pm 1$ también se comprueba evaluando una supuesta identidad en $x = t$, donde ambos términos divisibles se anularían y dejarían $0 = 1$.

H. Soluciones de profundización y reconstrucción.

Solución 081. El cociente es $Q = x^2/3 + x/9 + 1/27$ y el resto $R = 1/27$. Multiplicar da $(3x-1)Q = x^3 - 1/27$, luego $P = DQ + R$ y el resto constante tiene grado menor que uno. Son válidos también en $\mathbb{R}[x]$. En enteros no puede existir división con resto constante: comparar el término cúbico exigiría un coeficiente principal q entero con $3q = 1$, imposible. Multiplicar la identidad por 27 elimina denominadores, pero cambia el dividendo y no resuelve la división entera original.

Solución 082. Tenemos $Q = x/2$ y $R = (x + 1)/2$, pues $DQ + R = (x^3 + x)/2 + (x + 1)/2 = P$. El resto tiene grado uno, menor que dos. Ambos pertenecen a $\mathbb{Q}[x]$ y por tanto a $\mathbb{R}[x]$. La unicidad de división en cada cuerpo impide que ampliar a reales genere otro par válido. El certificado contiene todos los coeficientes y la cota; no depende de probar valores aislados de x.

Solución 083. El cociente es $Q = x/\sqrt{2} + 1/2$ y el resto $R = 1/2$: multiplicar da $(\sqrt{2}x - 1)Q = x^2 - 1/2$. La cota es $0 < 1$. El divisor tiene coeficiente irracional, de modo que no pertenece a $\mathbb{Q}[x]$ y la operación no tiene allí los objetos requeridos. Además, comparar el término cuadrático forzaría un coeficiente $1/\sqrt{2}$ en cualquier cociente, que tampoco es racional. No se confunde un resultado real correcto con una operación dentro de otro conjunto de coeficientes.

Solución 084. El producto formal previo a reducir es $6x^2 + 5x + 1$, que módulo seis se convierte en $5x+1$, de grado uno. Los factores tienen grado uno cada uno, pero sus coeficientes principales multiplican a $2 \cdot 3 = 0$ módulo seis. Falló la propiedad de que el producto de no nulos sea no nulo, usada en la prueba sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. El cálculo no contradice ese teorema; muestra por qué no puede aplicarse a esta aritmética modular sin revisar sus hipótesis.

Solución 085. El par es $Q = x/m + 1/m^2$, $R = 1/m^2$, porque $(mx - 1)Q = x^2 - 1/m^2$. La cota del resto es válida. Si $m = \pm 1$, ambos tienen coeficientes enteros. Si $|m| > 1$, el coeficiente $1/m$ del cociente no es entero; por unicidad no existe otro par entero con resto de grado menor que uno. Así la condición necesaria y suficiente es $|m| = 1$. El valor cero se excluye porque el divisor perdería el grado que usa la clasificación.

Solución 086. Escribimos $R = ax + b$. En cero, $-2 + b = 3$ fuerza $b = 5$; en uno, $2(-1) + a + 5 = 7$ fuerza $a = 4$. Por tanto $P = (x^2 + 1)(x^2 - 2) + 4x + 5 = x^4 - x^2 + 4x + 3$. Evaluar da los dos datos, y la identidad con resto lineal certifica la división. Los dos valores fijaron de forma única a, b, luego no hay otro dividendo con el cociente impuesto.

Solución 087. La cota obliga $R = ax + b$, incluyendo constantes y cero. Los datos dan $a + b = u$ y $-a + b = v$, así $a = (u - v)/2$, $b = (u + v)/2$. El único dividendo es $P = (x^2 - 1)Q + [(u-v)x+u+v]/2$. Reconstruir confirma la identidad y la cota. Si $u = v$, el resto es constante; si ambos son cero, es cero. No debe asignarse un grado natural al resto cero.

Solución 088. El cociente debe ser mónico lineal, $Q = x + b$. Así $P = (x^2 - 1)(x + b) + 2x + 3 = x^3 + bx^2 + x + 3 - b$. En cero, $3 - b = k$, luego $b = 3 - k$. Resulta $P = x^3 + (3 - k)x^2 + x + k$. Su coeficiente principal es uno, su valor en cero es k y el resto impuesto tiene grado uno menor que dos. La comparación del término constante fija la única elección de b, probando unicidad.

Solución 089. El cociente es $Q = 2x^2 + ux + v$ y el resto $R = ax + b$. La reconstrucción da $P = 2x^4 + ux^3 + (v + 2)x^2 + (u + a)x + v + b$. Ser par exige $u = 0$ y luego $a = 0$; el dato en cero fuerza $b = c - v$. Así solo hay $P = 2x^4 + (v + 2)x^2 + c$, con $Q = 2x^2 + v$, $R = c - v$. La identidad y la cota certifican el resultado también si el resto es cero. No se necesitan condiciones adicionales para conservar grado cuatro, porque el coeficiente principal es dos.

Solución 090. En efecto, $(x^2 + 1)(x + 1) - x^2 - x = x^3 + 1$. Pero el resto propuesto tiene grado dos, igual al divisor, y no cumple la cota. Restamos al cociente el término uno y añadimos D al resto: $Q = x$, $R = 1 - x$. Ahora $DQ + R = x^3 + x + 1 - x = P$ y $\deg R = 1 < 2$. La identidad incorrectamente interpretada era verdadera; lo que faltaba era una condición del certificado de división.

Solución 091. Si $t = 0$, el divisor es uno y la división es $Q = x^2 + 1$, $R = 0$. Si $t \neq 0$, $Q = x/t - 1/t^2$ y $R = 1 + 1/t^2$: multiplicar DQ da $x^2 - 1/t^2$, y añadir el resto reconstruye P. El resto es constante y el divisor lineal. La rama constante exige resto cero; intentar sustituir $t = 0$ en las fórmulas genéricas no tiene sentido porque se obtuvieron dividiendo por t.

Solución 092. Si $t = 1$, $D = x$, $Q = x^2$, $R = 0$. Si $t \neq 1$, sea $a = t - 1 \neq 0$: $Q = x/a - 1/a^2$ y $R = x/a^2$. El producto $(ax^2 + x)Q$ es $x^3 - x/a^2$, de modo que la suma con R da x^3. El resto lineal cumple la cota del divisor cuadrático. Ningún valor de t produce divisor cero; separar el descenso de grado evita usar una cota equivocada en la rama lineal.

Solución 093. Para $t = 0$, el divisor es el polinomio cero y la división no está definida. Para $t \neq 0$, $Q = x/t$, $R = -x - 1$: $t(x^2 + 1)(x/t) + (-x - 1) = x^3 - 1$. El resto tiene grado uno menor que dos y la identidad certifica el par. La cota no compensa un divisor cero; por eso no puede extenderse el resultado a $t = 0$ aunque el resto escrito no dependa del parámetro.

Solución 094. La identidad es $tx^2 + 1 = t(x^2 + 1) + (1 - t)$, luego $Q = t$, $R = 1 - t$. Para $t \neq 0$, el dividendo tiene grado dos; para $t = 0$ es la constante uno y el cociente es cero. Para $t = 1$, el resto es cero; para los demás parámetros es constante no nulo. La cota se cumple en todos los casos. Los grados del polinomio cero se tratan como ausencia de grado natural, no como cero.

Solución 095. Sea $a = t^2 - 1$. Si $t = \pm 1$, $a = 0$ y el divisor es uno: $Q = x^2 + 1$, $R = 0$. Si $t \neq \pm 1$, $Q = x/a - 1/a^2$ y $R = 1 + 1/a^2$, pues $(ax + 1)Q = x^2 - 1/a^2$. La identidad y el resto constante certifican la división lineal. Los dos valores especiales tienen el mismo comportamiento, pero ambos deben constar: dividir por $t^2 - 1$ sin separarlos omitiría dos operaciones válidas de otro grado.

Solución 096. La identidad $S - xP = 1$ muestra que todo divisor común divide uno, por lo que es una constante no nula. El polinomio uno divide ambos; así el MCD mónico es uno. Los coeficientes de Bézout son $U = -x$, $V = 1$. Esta prueba es formal y vale en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$, sin calcular raíces ni suponer factorizaciones irreducibles.

Solución 097. El polinomio $G = x - 2$ divide ambos por construcción. Además $S - P = x - 2 = G$. Por tanto, cualquier divisor común de P, S divide a G. Estas dos propiedades prueban que G es MCD, y es mónico. La combinación tiene coeficientes $-1, 1$. Compartir un factor solo habría probado divisibilidad; la diferencia certifica la propiedad universal que faltaba.

Solución 098. Sea $c = t^2 + t + 1 = (t + 1/2)^2 + 3/4 > 0$. La identidad $D = (x - t)(x + t + 1) + c$ da $H_0 = -(x + t + 1)/c$ y $(x - t)H_0 = 1 - D/c$. Todos los $H = H_0 + DT$ cumplen la condición. Recíprocamente, si D divide $(x - t)(H - H_0)$, la misma identidad, multiplicada por $H - H_0$, muestra que D divide $c(H - H_0)$ y por tanto $H - H_0$. Así la lista es completa.

El resto de grado menor que dos es único y existe para todos los parámetros porque c nunca es cero.

Solución 099. Restar da $D(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Si $Q_1 - Q_2 \neq 0$, el miembro izquierdo tiene grado al menos $\deg D$, mientras el derecho es cero o tiene grado menor; es imposible. Por tanto $Q_1 = Q_2$ y luego $R_1 = R_2$. Si D es constante no nulo, no existe resto no nulo de grado menor que cero, así ambos restos son cero y el cociente es P/D. La prueba usa el grado del producto sobre el cuerpo y no aplica un grado natural al cero.

Solución 100. Como G divide ambos y es su diferencia, todo divisor común divide a G. El MCD mónico es $g = G/6 = x - 2$. También divide a P, S, y $g = (-1/6)P + (1/6)S$. La normalización cambia los coeficientes de la combinación y el representante, pero no la clase de divisores comunes. Dividir por seis es legítimo en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. La reconstrucción de la diferencia comprueba el certificado; elegir el factor común sin esa segunda propiedad no bastaría para demostrar que es máximo.

Referencias y continuidad del trabajo

La exposición es original. El rigor estructural se contrastó con Nicholson, *Introduction to Abstract Algebra*, 4.ª ed., §4.1 y §4.2; la división y su nivel universitario, con el apunte UChile de 2019, cap. 11. Lial, *College Algebra*, 12.ª ed., §3.2, y McCallum, *Algebra: Form and Function*, §13.3, aportan referentes de fluidez. La selección de tareas toma también como referencia el Control 7 de la Universidad de Chile de 2009 y el repertorio de polinomios de la Universidad de La Serena.

Capítulo 25

Raíces, factores e irreducibilidad elemental

Una evaluación puede dar información sobre todo un polinomio. Por ejemplo, de $P(2) = 0$ podremos deducir que $x - 2$ divide a P. Esa conexión convierte una búsqueda de números en una búsqueda de factores. Para utilizarla con precisión necesitamos especificar dónde buscamos las raíces, justificar la extracción de factores y controlar cuánto puede certificar el grado.

En estas primeras secciones trabajaremos con coeficientes racionales o reales. La división, el grado del producto y la evaluación se recuperan de C24. Cada vez que una conclusión dependa del conjunto de coeficientes, lo indicaremos.

25.1. Raíces y conjunto de coeficientes

Sea $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{R}$, y sea $P \in K[x]$. Un número $a \in K$ es una **raíz de P en K** si $P(a) = 0$. La condición es una igualdad comprobable: sustituimos x por a y operamos en K. Un candidato solo se convierte en raíz cuando esa igualdad queda justificada.

Consideremos $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Las evaluaciones $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ y $P(2) = 4 - 6 + 2 = 0$ certifican dos raíces. En cambio, $P(3) = 9 - 9 + 2 = 2$ descarta el candidato 3. Como los coeficientes y los tres números son racionales, estas comprobaciones son válidas tanto en $\mathbb{Q}$ como en $\mathbb{R}$.

El conjunto de búsqueda forma parte del problema. El polinomio $R(x) = x^2 - 2$ tiene coeficientes racionales. Su evaluación en un número real también está definida: interpretamos esos coeficientes como reales y efectuamos las mismas operaciones. En $\mathbb{R}$ sus raíces son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, porque $a^2 = 2$ equivale a $a = \pm\sqrt{2}$.

En $\mathbb{Q}$ no tiene raíces. Recordemos la justificación aritmética: si un racional en forma reducida p/q, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q > 0$, satisficiera $(p/q)^2 = 2$, tendríamos $p^2 = 2q^2$. Entonces p sería par; al escribir $p = 2r$, resultaría $q^2 = 2r^2$, de modo que q también sería par. Esto contradice que la fracción esté reducida.

La expresión $x^2 - 2$ sigue siendo la misma; cambia el conjunto en el que permitimos buscar a. También cambiará el conjunto de coeficientes permitido para los factores: $x - \sqrt{2}$ pertenece a $\mathbb{R}[x]$, pero no a $\mathbb{Q}[x]$. Por eso una afirmación como «el polinomio no tiene raíces» necesita indicar el conjunto de búsqueda.

Cero y constantes. El polinomio cero se anula en cada número del conjunto elegido. Por tanto, todos los racionales son raíces del polinomio cero en $\mathbb{Q}$, y todos los reales lo son en $\mathbb{R}$.

Un polinomio constante no nulo, $P(x) = c$ con $c \neq 0$, no tiene raíces: su evaluación siempre es c. El contraste será decisivo al relacionar raíces y grado. El polinomio cero no recibe un grado natural y quedará excluido de la cota que probaremos.

Recuperación resuelta. Un estudiante dice: «$x^2 - 2$ no tiene raíces porque no encontré una fracción que lo anule». ¿Qué puede concluir y cómo debe justificarlo?

La búsqueda de unas cuantas fracciones solo descarta esas candidatas. La conclusión universal requiere la demostración de irracionalidad anterior. Con ella sí podemos afirmar que no hay raíces racionales. Las evaluaciones en $\pm\sqrt{2}$ muestran, además, que sí hay raíces reales. La respuesta completa distingue los dos conjuntos y aporta un argumento para cada uno.

Comprobación resuelta. Para $P(x) = 0$, $Q(x) = 5$ y $R(x) = x - 5$, ¿es 5 una raíz?

Sí para P, pues $P(5) = 0$; no para Q, pues $Q(5) = 5$; sí para R, pues $R(5) = 5 - 5 = 0$. Los tres casos impiden confundir «constante» con «sin raíces»: la constante cero es la excepción.

25.2. Teorema del factor

La división por $x - a$ establece el vínculo entre raíz y factor. Como su divisor tiene grado uno, el resto es constante. Por la división y el teorema del resto de §§24.7–24.11, para $a \in K$ existe un único cociente $Q \in K[x]$ tal que

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a).$$

Teorema del factor. Para $P \in K[x]$ y $a \in K$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $P(a) = 0$.
2. $x - a$ divide a P en $K[x]$.

Demostración. Si $P(a) = 0$, la identidad de división se reduce a $P = (x - a)Q$, que es exactamente la divisibilidad afirmada. Recíprocamente, si $P = (x - a)Q$, evaluamos en a y obtenemos $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$. Ambas direcciones usan identidades; no dependen de aproximaciones numéricas. □

El teorema también vale para $P = 0$: podemos tomar $Q = 0$. Si $P \neq 0$ y a es una raíz, entonces P no es constante. Además, $Q \neq 0$ y la regla del grado del producto de §24.4 da $\deg Q = \deg P - 1$.

Extraer el factor y comprobarlo. Sea $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$. La evaluación en 2 da $16 - 12 - 16 + 12 = 0$. El teorema asegura que $x - 2$ es factor; todavía debemos calcular el cociente si queremos usar la factorización.

Horner con $a = 2$ transforma los coeficientes $2, -3, -8, 12$ del siguiente modo: bajamos 2; obtenemos $-3 + 2 \cdot 2 = 1$; después $-8 + 2 \cdot 1 = -6$; finalmente $12 + 2(-6) = 0$. El cociente es $2x^2 + x - 6$, y el último número es el resto. Así,

$$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(2x^2 + x - 6).$$

La multiplicación comprueba el certificado: $2x^3 + x^2 - 6x - 4x^2 - 2x + 12 = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$. Comprobar únicamente el resto confirma que 2 es raíz; reconstruir el producto confirma también el cociente calculado.

Una identidad que permite ver todos los factores lineales. Para cualquier entero $n \geq 1$ y cualquier $a \in K$,

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

Al distribuir el producto, los términos intermedios se cancelan por parejas, y quedan $x^n - a^n$. Para $n = 1$, la suma entre paréntesis consta del único término 1. Si $P(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$, aplicamos esta identidad a cada término de $P(x) - P(a)$; el término constante se cancela. Obtenemos que $x - a$ divide siempre a $P(x) - P(a)$. Cuando $P(a) = 0$, esto vuelve a demostrar el teorema del factor y ofrece una construcción del cociente.

Recuperación resuelta. Dividimos $S(x) = x^2 + x + 1$ por $x - 1$. ¿Qué información contiene el resto?

La identidad es $S = (x - 1)(x + 2) + 3$. El resto 3 coincide con $S(1)$, de modo que 1 no es raíz y $x - 1$ no divide a S. El cociente existe aunque el candidato falle; lo que decide la divisibilidad es el resto cero.

Diagnóstico resuelto. «Como $x^2 - 2$ tiene raíz $\sqrt{2}$, se factoriza en $\mathbb{Q}[x]$ como $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$». ¿Dónde está el error?

La igualdad del producto es correcta, pero ambos factores tienen coeficientes irracionales. Es una factorización en $\mathbb{R}[x]$. Para invocar el teorema del factor dentro de $\mathbb{Q}[x]$, necesitaríamos una raíz $a \in \mathbb{Q}$, y §25.1 demuestra que no existe. El conjunto elegido en la hipótesis determina dónde pertenece el cociente.

25.3. Raíces distintas y factores simultáneos

Si conocemos varias raíces, queremos extraer todos sus factores lineales. Debemos justificar que, al extraer uno, las otras raíces permanecen en el cociente.

Proposición. Si $a_1, \ldots, a_r$ son raíces distintas de $P \in K[x]$, con $r \geq 1$, entonces existe $Q \in K[x]$ tal que

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r)Q(x).$$

Demostración por inducción sobre r. Para $r = 1$, es el teorema del factor. Supongamos probado el resultado para $r - 1$ y consideremos r raíces distintas. Por la hipótesis inductiva,

$$P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{r-1})R(x).$$

Evaluamos en a_r. Como $P(a_r) = 0$, obtenemos $(a_r - a_1) \cdots (a_r - a_{r-1})R(a_r) = 0$. Cada diferencia es no nula porque las raíces son distintas. En $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$, un producto de números no nulos es no nulo; por tanto, $R(a_r) = 0$. El teorema del factor aplicado a R da $R = (x - a_r)Q$. Sustituyendo, resulta la identidad buscada. □

La proposición incluye al polinomio cero, para el que $Q = 0$. Si $P \neq 0$, necesariamente $Q \neq 0$; entonces los grados dan $\deg P = r + \deg Q$. No hemos supuesto que la lista contenga todas las raíces: cualquier lista finita de raíces distintas proporciona su propio divisor.

Extraer sin perder las otras raíces. Para $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, comprobamos $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$ y $P(2) = 0$. Una primera extracción da $P = (x - 1)(x^2 - x - 2)$. La raíz -1 queda en el cociente porque $0 = P(-1) = (-2)(1 + 1 - 2)$ y el primer factor es no nulo. El cociente se factoriza como $(x + 1)(x - 2)$, de modo que $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

Desarrollar $(x^2 - 1)(x - 2)$ devuelve $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Esta identidad permite certificar también que las únicas raíces en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$ son $1, -1, 2$: si un producto de estos tres factores vale cero, al menos uno debe valer cero.

Por qué no podemos repetir un nombre de raíz. La lista $1, 1$ no cumple la hipótesis de raíces distintas. El polinomio $P(x) = x - 1$ se anula en 1, pero $(x - 1)^2$ no lo divide: un producto no nulo que contenga ese factor tendría grado al menos dos, mientras que P tiene grado uno.

La prueba anterior muestra exactamente qué falla. Tras extraer $x - 1$, el cociente es 1. Evaluar P en 1 produce $0 = 0 \cdot 1$, una igualdad que no obliga al cociente a anularse. Repetir el mismo dato $P(1) = 0$ no añade un nuevo factor. La extracción repetida requerirá comprobar de nuevo la anulación del cociente.

Recuperación resuelta. Sabemos que $P(3) = P(5) = 0$. Después de escribir $P = (x - 3)R$, ¿por qué podemos extraer $x - 5$ de R?

Evaluamos en 5: $0 = P(5) = (5 - 3)R(5) = 2R(5)$. Como $2 \neq 0$, se sigue que $R(5) = 0$. El teorema del factor da $R = (x - 5)Q$. El paso crucial es la diferencia no nula entre las raíces.

Diagnóstico resuelto. «Si dos polinomios dividen a P, su producto divide a P». ¿Basta esta regla para la proposición?

La regla, sin hipótesis adicionales, es falsa. Por ejemplo, $x - 1$ divide a $P = x - 1$; tomarlo como ambos divisores no hace que $(x - 1)^2$ divida a P. Nuestra demostración evita esa regla: muestra directamente, mediante evaluación y diferencias no nulas, que cada factor siguiente divide al cociente anterior.

25.4. Cota del número de raíces

Teorema. Un polinomio no nulo $P \in K[x]$ de grado n tiene a lo sumo n raíces distintas en K.

Demostración por inducción sobre el grado. Si $n = 0$, P es una constante no nula y no tiene raíces. Supongamos válida la afirmación para los polinomios no nulos de grado $n-1$, con $n \geq 1$, y consideremos un polinomio de grado n.

Si P no tiene raíces, la cota se cumple. Si tiene una raíz a, el teorema del factor da $P = (x-a)Q$, donde $Q \neq 0$ y $\deg Q = n-1$. Toda raíz b de P distinta de a satisface $0 = (b-a)Q(b)$; como $b - a \neq 0$, es raíz de Q. Por la hipótesis inductiva, Q tiene a lo sumo $n-1$ raíces distintas. Por tanto, las raíces de P están contenidas en el conjunto formado por a y esas, a lo sumo, $n-1$ raíces de Q. Hay a lo sumo n en total. □

La prueba establece también que el conjunto de raíces es finito. No comienza enumerando todas las raíces y suponiendo, sin justificación, que existe una lista finita de ellas.

La proposición de §25.3 ofrece otro certificado de la misma cota: si hubiera más de n raíces distintas, podríamos seleccionar $n+1$ de ellas. Su producto de factores lineales dividiría a P, de modo que $P = (x-a_1)\cdots(x-a_{n+1})Q$ con $Q \neq 0$. La regla del grado daría $n = n+1+\deg Q \geq n+1$, una contradicción. Seleccionar una cantidad finita de raíces no presupone que el conjunto completo sea finito.

La cota no afirma que existan tantas raíces. El polinomio x^2+1 no tiene raíces reales: para cada real a, $a^2+1 \geq 1 > 0$. Su grado es dos. El polinomio $(x-1)^3$ tiene grado tres, pero una sola raíz distinta, 1, pues una potencia se anula exactamente cuando su base se anula. En cambio, $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ tiene tres raíces distintas: $0, 1, -1$.

La cota cuenta números distintos. Tres apariciones del factor $x-1$ no representan tres números diferentes. Por otra parte, el polinomio cero tiene infinitas raíces en ambos conjuntos y está excluido del teorema: no podemos asignarle un grado natural para aplicar esta conclusión.

Reconstruir a partir de un grado y de raíces. Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado cuatro, con coeficiente principal 3, y supongamos que $-2, -1, 1, 2$ son raíces. Por §25.3, el producto de los cuatro factores lineales divide a P. El cociente es no nulo y tiene grado cero; por tanto, es una constante. Como el producto de los factores es mónico, esa constante debe ser 3. Así,

$$P(x) = 3(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 3x^4 - 15x^2 + 12.$$

Para desarrollar, agrupamos $(x+2)(x-2) = x^2-4$ y $(x+1)(x-1) = x^2-1$, cuyo producto es $x^4 - 5x^2 + 4$. Las cuatro raíces ya encontradas agotan la cota; ninguna otra raíz real puede añadirse.

Recuperación resuelta. Un polinomio de grado tres se anula en cuatro reales distintos. ¿Qué conclusión corresponde?

Las dos afirmaciones son incompatibles: «de grado tres» implica que el polinomio es no nulo, y la cota permite a lo sumo tres raíces distintas. Si solo supiéramos que su grado es a lo sumo tres, admitiendo además al polinomio cero como posibilidad, las cuatro anulaciones obligarían a que fuese el polinomio cero.

Diagnóstico resuelto. Una supuesta prueba empieza: «Sean $a_1, \ldots, a_k$ todas las raíces de P; entonces su producto de factores divide a P y $k \leq n$». ¿Qué paso necesita reparación?

La escritura de todas las raíces como una lista finita presupone la finitud que se intenta demostrar. Podemos repararla con la inducción sobre el grado desarrollada arriba. También podemos suponer que existen más de n raíces, elegir solo $n+1$ distintas y obtener la contradicción de grados. Ambas reparaciones evitan usar como premisa la propia conclusión.

Contar valores y contar factores. La cota por grado distingue raíces diferentes de sus multiplicidades. En $P = (x-a)^3(x-b)^2$, con $a \neq b$, hay dos raíces distintas y la suma de multiplicidades es cinco. Para certificar la multiplicidad exacta en a, retiramos $(x-a)^3$: el residual vale $(a-b)^2 \neq 0$. En b, retiramos $(x-b)^2$ y el residual vale $(b-a)^3 \neq 0$. **Control resuelto:** si $a = b$, el producto se convierte en $(x-a)^5$. Ya no tiene dos raíces ni multiplicidades tres y dos separadas: hay una raíz de multiplicidad cinco. Una construcción por factores certifica existencia, pero la exactitud exige revisar que el residual no vuelva a anularse. La coincidencia de parámetros debe comprobarse antes de contar.

25.5. Identidades y datos de evaluación

Dos expresiones polinómicas pueden parecer diferentes y, sin embargo, tener los mismos coeficientes al desarrollarlas. La cota de raíces proporciona otra manera de justificar su igualdad: comparar sus valores en suficientes puntos. El número de puntos necesario depende de un control previo del grado.

Diremos que un polinomio tiene **grado a lo sumo** n, con $n \geq 0$, si es el polinomio cero o si es no nulo y su grado es menor o igual que n. Esta convención incluye al cero sin asignarle un grado natural.

Proposición de identificación. Sean $P, Q \in K[x]$ de grado a lo sumo n. Si coinciden en $n+1$ puntos distintos de K, entonces $P = Q$ como polinomios.

Demostración. Sea $D = P - Q$. Si $D \neq 0$, su grado es a lo sumo n, porque la resta no puede crear términos de grado mayor. Cada punto de coincidencia es raíz de D, de modo que tendría $n+1$ raíces distintas. Esto contradice §25.4. Por tanto, $D = 0$ y $P = Q$. □

Por ejemplo, $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$ y $Q(x) = x^3 + 1$ tienen grado a lo sumo tres. Sus valores en $-1, 0, 1, 2$ son, respectivamente, $0, 1, 2, 9$ para ambas expresiones. Esas cuatro coincidencias prueban la identidad. Aquí también es breve desarrollar el producto; la identificación por puntos será útil cuando las expresiones tengan formas distintas y evaluar resulte más sencillo que comparar todos sus coeficientes.

Construir el polinomio que toma unos valores dados. Sean $a_0, \dots, a_n$ puntos distintos de K, y sean $b_0, \dots, b_n \in K$ los valores que queremos imponer. Buscamos un polinomio de grado a lo sumo n que satisfaga $P(a_i) = b_i$ para cada i.

La construcción separa los datos. Para cada índice i, queremos un polinomio que valga 1 en a_i y 0 en todos los demás puntos. Los factores $x - a_j$, con $j \neq i$, producen los ceros deseados; dividimos por su valor en a_i para normalizar. Definimos

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}, \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(x).$$

Todos los denominadores son constantes no nulas, pues los puntos son distintos. Por tanto, $L_i \in K[x]$ y tiene grado n. Para $n = 0$, el producto sin factores se interpreta como 1, y la construcción da el polinomio constante b_0.

En a_i, cada fracción del producto vale 1, así que $L_i(a_i) = 1$. En a_k con $k \neq i$, aparece el factor $a_k - a_k = 0$, así que $L_i(a_k) = 0$. Al evaluar la suma en a_k, todos los términos desaparecen salvo $b_k L_k(a_k) = b_k$. Esto prueba la existencia del polinomio buscado, de grado a lo sumo n. Si hubiera otro con las mismas condiciones y la misma cota de grado, la proposición de identificación los haría iguales. La construcción y la unicidad constituyen la **interpolación polinómica elemental** en esos puntos.

Tomemos los datos $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(2) = 5$ y grado a lo sumo dos. Los tres polinomios de la construcción son $L_{-1} = x(x-2)/3$, $L_0 = -(x+1)(x-2)/2$ y $L_2 = x(x+1)/6$. Los subíndices nombran aquí los puntos correspondientes. Entonces

$$P(x) = \frac{2x(x-2)}{3} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} + \frac{5x(x+1)}{6} = x^2 + 1.$$

El coeficiente de x^2 es $2/3 - 1/2 + 5/6 = 1$; el de x es $-4/3 + 1/2 + 5/6 = 0$; el término constante es 1. Evaluar $x^2 + 1$ en los tres puntos devuelve $2, 1, 5$, y la identificación asegura que ningún otro polinomio de grado a lo sumo dos satisface esos datos.

Recuperación resuelta. ¿Siguen siendo únicos esos datos si permitimos grado tres?

No. Para cualquier $t \in K$, el polinomio $P_t(x) = x^2 + 1 + t\,x(x+1)(x-2)$ toma los mismos tres valores, porque el término añadido se anula en cada punto. Si $t \neq 0$, su grado es tres y difiere de $P_0 = x^2 + 1$. Los tres datos identifican un polinomio dentro de la clase de grado a lo sumo dos; no lo identifican entre todos los polinomios.

Diagnóstico resuelto. Se intenta interpolar con $P(1) = 2$ y $P(1) = 3$. ¿Cómo se repara el planteamiento?

Esos datos son incompatibles: una evaluación en un mismo número tiene un único valor. Si los dos valores fueran 2, el segundo dato repetiría el primero y no aportaría otro punto distinto. La construcción debe partir de puntos distintos y de un valor por punto; repetir un punto tampoco aumenta el número de coincidencias que permite aplicar la cota de raíces.

25.6. Multiplicidad mediante divisiones sucesivas

Saber que $P(a) = 0$ permite extraer una vez $x - a$. Para extraerlo otra vez necesitamos que el cociente también se anule en a. La multiplicidad registra cuántas extracciones consecutivas son posibles.

Sea $P \in K[x]$ no nulo y sea $a \in K$. Definimos la **multiplicidad de a en P**, denotada por $\nu_a(P)$, como el mayor entero $m \geq 0$ para el que $(x-a)^m$ divide a P. El valor $m = 0$ siempre está permitido, pues $(x-a)^0 = 1$ divide a cualquier polinomio. Si $\deg P = n$ y $(x-a)^m$ divide a P, el cociente es no nulo y la regla del grado exige $m \leq n$. El conjunto de valores posibles es, por tanto, un subconjunto no vacío de $\{0, \dots, n\}$ y tiene máximo. Esto justifica que la definición existe.

Por el teorema del factor, a es raíz si y solo si $\nu_a(P) \geq 1$. Una raíz de multiplicidad uno se llama **simple**; una de multiplicidad dos, **doble**. Para un número que no es raíz, la multiplicidad es cero.

El residual certifica dónde termina la extracción. Proposición. Para $P \neq 0$, $a \in K$ y $m \geq 0$, se tiene $\nu_a(P) = m$ si y solo si existe $Q \in K[x]$ tal que

$$P(x) = (x-a)^m Q(x), \qquad Q(a) \neq 0.$$

Demostración. Si $m = \nu_a(P)$, la divisibilidad de la definición proporciona Q. Si $Q(a) = 0$, el teorema del factor daría $Q = (x-a)R$; entonces $(x-a)^{m+1}$ dividiría a P, contradiciendo la maximalidad de m. Luego $Q(a) \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos la identidad con $Q(a) \neq 0$. Ya sabemos que $(x-a)^m$ divide a P. Si también lo dividiera $(x-a)^{m+1}$, tendríamos $P = (x-a)^{m+1}R$. Al comparar ambas expresiones, $(x-a)^m[Q - (x-a)R] = 0$. Como el primer factor no es cero y el producto de dos polinomios no nulos no puede ser cero (§24.4), se sigue que $Q = (x-a)R$. Evaluar en a contradice $Q(a) \neq 0$. Ninguna potencia superior puede dividir a P, pues implicaría también la divisibilidad por la potencia $m+1$. Así, $\nu_a(P) = m$. $\square$

Una vez fijado m, el cociente Q es único: si dos cocientes dieran la misma identidad, su diferencia multiplicada por $(x-a)^m$ sería cero y la misma cancelación los haría iguales.

Para calcular m, dividimos sucesivamente por $x - a$ mientras el resto sea cero. Cada extracción reduce el grado en uno, y un cociente constante no nulo ya no puede anularse en

a. El proceso termina, a más tardar, después de $\deg P$ extracciones. El primer resto no nulo es el valor en a del residual final.

Un cálculo completo. Sea $P(x) = x^3 - 3x + 2$ y busquemos la multiplicidad de 1. Las divisiones sucesivas son:

Polinomio dividido	Cociente al dividir por $x-1$	Resto
$x^3 - 3x + 2$	$x^2 + x - 2$	0
$x^2 + x - 2$	$x + 2$	0
$x + 2$	1	3

Las identidades que justifican las dos primeras filas son $P = (x-1)(x^2+x-2)$ y $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. En la tercera, $x + 2 = (x-1)\cdot 1 + 3$. Hemos extraído dos factores, y el residual $x + 2$ vale $3 \neq 0$ en 1. Por eso $P = (x-1)^2(x+2)$ y $\nu_1(P) = 2$.

Para -2, extraer $x + 2$ deja el residual $(x-1)^2$, cuyo valor en -2 es $9 \neq 0$. Por tanto, $\nu_{-2}(P) = 1$. Las dos raíces distintas tienen multiplicidades diferentes.

El polinomio cero se excluye de esta definición: cualquier potencia de $x - a$ lo divide, y no existe un mayor entero de extracciones. Las constantes no nulas sí están incluidas; su multiplicidad es cero en cada punto.

Recuperación resuelta. Se encontró $P = (x-4)^2 Q$. ¿Ya está demostrado que 4 es raíz doble?

Solo se ha probado que su multiplicidad es al menos dos. Para afirmar que es exactamente dos debemos verificar $Q(4) \neq 0$. Por ejemplo, si $Q = x - 4$, la multiplicidad es tres; si $Q = x + 1$, es dos, pues $Q(4) = 5 \neq 0$.

Variación resuelta. Sea $P_t(x) = (x-1)^2(x-t)$, con $t \in K$. Determine la multiplicidad de 1 según t.

Si $t \neq 1$, el residual $x - t$ vale $1 - t \neq 0$ en 1, así que la multiplicidad es dos. Si $t = 1$, obtenemos $P_1 = (x-1)^3$, y el residual después de tres extracciones es 1, no nulo en 1; la multiplicidad es tres. La condición sobre el parámetro se obtiene evaluando el residual, sin desarrollar el producto.

25.7. Multiplicidad de productos y límites del conteo

Los factores de un producto pueden aportar varias copias de un mismo factor lineal. Para contarlas necesitamos una regla que sume las multiplicidades sin crear cancelaciones inexistentes.

Proposición. Si $P, R \in K[x]$ son no nulos y $a \in K$, entonces $\nu_a(PR) = \nu_a(P) + \nu_a(R)$.

Demostración. Escribamos $P = (x-a)^m U$ y $R = (x-a)^s V$, donde $m = \nu_a(P)$, $s = \nu_a(R)$ y $U(a), V(a) \neq 0$. Entonces $PR = (x-a)^{m+s} UV$. Como $(UV)(a) = U(a)V(a) \neq 0$, la caracterización de §25.6 da $\nu_a(PR) = m + s$. □

En particular, multiplicar por una constante no nula no cambia ninguna multiplicidad. El resultado se aplica también cuando uno de los números m, s es cero: el factor que no se anula en a no añade multiplicidad allí.

Por ejemplo, para $P = (x-1)^2(x+2)$ y $R = (x-1)(x+2)^3(x^2+1)$, la multiplicidad de 1 en PR es $2 + 1 = 3$, y la de -2 es $1 + 3 = 4$. Los factores $x^2 + 1$ y los factores lineales correspondientes al otro punto no se anulan en el punto evaluado. Así, $PR = (x-1)^3(x+2)^4(x^2+1)$ tiene grado nueve y suma de multiplicidades reales $3 + 4 = 7$. El residual $x^2 + 1$ es positivo en $\mathbb{R}$ y no aporta otras raíces reales.

Extraer las multiplicidades de varias raíces. Proposición. Sean $a_1, \ldots, a_r$ raíces distintas de un polinomio no nulo $P \in K[x]$, y sea $m_i = \nu_{a_i}(P)$. Entonces existe un polinomio no nulo $Q \in K[x]$ tal que

$$P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{m_i} Q(x), \qquad Q(a_i) \neq 0 \text{ para cada } i.$$

Demostración. Extraemos primero $(x - a_1)^{m_1}$ mediante §25.6. Supongamos extraídas las potencias correspondientes a $a_1, \ldots, a_{j-1}$ y escribamos $P = BR$, con $B = \prod_{i<j} (x - a_i)^{m_i}$. La evaluación $B(a_j)$ es un producto de diferencias no nulas, por lo que $B(a_j) \neq 0$ y $\nu_{a_j}(B) = 0$. La aditividad ya probada da $\nu_{a_j}(R) = \nu_{a_j}(P) = m_j$. Podemos extraer de R la potencia $(x - a_j)^{m_j}$ y continuar. Esto construye el producto completo y su cociente no nulo Q.

Para cualquier índice i, la multiplicidad en a_i del producto completo de factores es m_i: los factores de los otros puntos tienen multiplicidad cero allí. La aditividad aplicada a la identidad final da $m_i = m_i + \nu_{a_i}(Q)$. Luego $\nu_{a_i}(Q) = 0$, equivalente a $Q(a_i) \neq 0$. □

Tomar grados proporciona la cota más precisa

$$m_1 + \cdots + m_r \leq \deg P, \qquad \deg Q = \deg P - (m_1 + \cdots + m_r).$$

Si la lista incluye todas las raíces de P en K, entonces Q no tiene ninguna raíz en K. En los puntos de la lista ya probamos que no se anula; en cualquier otro punto, una raíz de Q sería también raíz de P y contradice que la lista fuese completa. La cota de §25.4 asegura que podemos listar todas las raíces de un polinomio no nulo en K; si no hay ninguna, la suma es cero y el producto sin factores es 1.

La suma de multiplicidades puede ser menor que el grado aun después de encontrar todas las raíces en el conjunto elegido. Para $S = (x - 1)^2 (x^2 + 1)$, la única raíz real es 1 y tiene multiplicidad dos, pues el residual vale 2 allí. El grado es cuatro. La diferencia $4 - 2 = 2$ es el grado del residual sin raíces reales. La igualdad entre suma y grado ocurre exactamente cuando, después de extraer todas esas potencias, el residual es una constante no nula.

Recuperación resuelta. Si $\nu_{-1}(P) = 2$ y $R(-1) \neq 0$, ¿puede multiplicar por R eliminar la raíz -1?

No. Como $\nu_{-1}(R) = 0$, la aditividad da $\nu_{-1}(PR) = 2$. Los polinomios se multiplican sin denominadores; no hay un factor que pueda cancelar las dos copias de $x + 1$.

Diagnóstico resuelto. «Un polinomio de grado cinco tiene cinco raíces cuando contamos multiplicidades». ¿Es una conclusión disponible para raíces reales?

No. El polinomio $T = (x - 2)(x^2 + 1)^2$ tiene grado cinco y una única raíz real, 2, de multiplicidad uno; el residual vale 25 en 2 y es positivo en todos los reales. La conclusión disponible es que la suma de multiplicidades reales es a lo sumo cinco. Para que sea cinco hace falta que el polinomio se descomponga por completo en factores lineales reales, condición que el grado por sí solo no garantiza.

25.8. Construir polinomios con raíces prescritas

Construir un polinomio exige traducir cada dato a una condición sobre factores, grado o evaluaciones. Primero distinguimos «tener estas raíces» de «tener únicamente estas raíces», y «multiplicidad al menos m» de «multiplicidad exactamente m».

Sean $a_1, \ldots, a_r \in K$ distintos, y sean $m_1, \ldots, m_r$ enteros positivos. Definamos $H(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{m_i}$ y $d = m_1 + \cdots + m_r$. El polinomio H es mónico y tiene grado d.

Todo polinomio no nulo que tenga esas raíces con multiplicidades al menos m_i es de la forma $P = HQ$. Para justificarlo, podemos aplicar la extracción de §25.7 a las multiplicidades efectivas, que son mayores o iguales que las pedidas, y absorber las potencias sobrantes en Q. Recíprocamente, cualquier producto HQ con $Q \neq 0$ cumple esas cotas inferiores, por la aditividad.

Si pedimos multiplicidades **exactamente** m_i, debemos añadir $Q(a_i) \neq 0$ para cada i. Si además pedimos grado exactamente N y coeficiente principal $c \neq 0$, entonces $N \geq d$, el

grado de Q es $N-d$ y su coeficiente principal es c. La monicidad de H justifica esta última condición.

Grado mínimo y un valor adicional. Cuando $N=d$, el residual es una constante no nula, de modo que $P=cH$. El coeficiente principal fija todo el polinomio. Si ese coeficiente no estaba dado, un valor $P(b)=v$ con $H(b)\neq 0$ obliga a $c=v/H(b)$. Es necesario que $v\neq 0$ para conservar el polinomio no nulo de grado d.

Si b es una de las raíces prescritas, entonces $H(b)=0$. Un valor $v\neq 0$ es incompatible con esa raíz; un valor $v=0$ no agrega información a su anulación y no determina el coeficiente principal.

Busquemos un polinomio de grado tres cuya raíz -1 sea doble, cuya raíz 2 sea simple y que satisfaga $P(0)=-6$. El producto requerido es $H=(x+1)^2(x-2)$, de grado tres; por tanto, $P=cH$. Como $H(0)=-2$, la condición $-2c=-6$ da $c=3$. Obtenemos $P(x)=3(x+1)^2(x-2)=3x^3-9x-6$.

La multiplicidad en -1 es exactamente dos: al extraer $(x+1)^2$, el residual $3(x-2)$ vale -9 allí. En 2 es exactamente uno: el residual $3(x+1)^2$ vale 27. La evaluación en cero devuelve -6 y el grado es tres. Si se hubiera añadido coeficiente principal 2, los datos serían incompatibles, porque el único polinomio con ese coeficiente y esos factores de grado mínimo tendría valor -4 en cero.

Qué libertad deja un grado mayor. Mantengamos las multiplicidades exactas dos en -1 y uno en 2, pero pidamos grado cuatro y coeficiente principal 3. El residual debe ser lineal de coeficiente principal 3, así que todos los candidatos tienen la forma

$$P_t(x)=(x+1)^2(x-2)(3x+t),\qquad t\in K.$$

La condición de multiplicidad en -1 exige $t-3\neq 0$; la de 2 exige $t+6\neq 0$. Por tanto, los parámetros admisibles son $t\neq 3,-6$. Queda una familia de polinomios, y un valor adicional puede seleccionarlos: $P_t(0)=-2t$. Si imponemos $P_t(0)=-2$, resulta $t=1$, que es admisible. El polinomio correspondiente es $3x^4+x^3-9x^2-9x-2$.

En cambio, imponer $P_t(0)=-6$ fuerza $t=3$. El producto sería $3(x+1)^3(x-2)$, que aumenta a tres la multiplicidad de -1. Ese dato era compatible con el grado mínimo tres del ejemplo anterior, pero resulta incompatible con el nuevo conjunto de condiciones: grado cuatro, coeficiente principal 3 y multiplicidades exactas dos y uno.

Para un residual de grado mayor, la condición $P(b)=v$ en un punto con $H(b)\neq 0$ se convierte en $Q(b)=v/H(b)$. Es una restricción sobre Q, además de su grado, su coeficiente principal y sus valores no nulos en las raíces de H; no garantiza por sí sola unicidad.

Recuperación resuelta. ¿Puede un polinomio real de grado cuatro tener únicamente las raíces -1 y 2, con multiplicidades exactas dos y uno?

No. Después de extraer H, queda un residual lineal no nulo, que tiene una raíz real. Si esa raíz fuera -1 o 2, aumentaría una de sus multiplicidades; si fuera otra, añadiría una raíz distinta. Ambas posibilidades contradicen las condiciones. En grado cinco sí existe un ejemplo: $H(x)(x^2+1)$ conserva esas multiplicidades y no añade raíces reales.

Comprobación resuelta. Se solicita grado dos con una raíz doble en -1 y otra simple en 2. ¿Hace falta resolver un sistema de coeficientes?

No. Los factores exigidos tienen grado total $2+1=3$, y deben dividir a cualquier polinomio no nulo que cumpla las multiplicidades. La cota de §25.7 obliga a un grado al menos tres. Las condiciones son incompatibles antes de iniciar un cálculo de coeficientes.

25.9. Teorema de las raíces racionales

Para un polinomio con coeficientes enteros, una raíz racional tiene un numerador y un denominador restringidos por dos coeficientes: el término constante y el coeficiente principal. Esto reduce la búsqueda a una lista finita, siempre que el término constante sea no nulo.

El argumento necesita una propiedad de divisibilidad entera. La recordamos con su justificación para no confundir «no divide» con «es coprimo».

El paso aritmético de la prueba. Lema. Sean $u, v \in \mathbb{Z}$ no nulos y coprimos, sea $k \geq 1$ y sea $w \in \mathbb{Z}$. Si u divide a $v^k w$, entonces u divide a w.

Demostración. La identidad de Bézout para enteros proporciona $s, t \in \mathbb{Z}$ con $su + tv = 1$. Para recuperar su justificación, consideramos el menor entero positivo de la forma $su + tv$, que existe porque hay combinaciones positivas. Al dividir u y v por ese entero, cada resto es también una combinación de u, v. Un resto positivo y menor contradiría su elección; por tanto, ambos restos son cero. El entero elegido divide a u, v, y la coprimalidad obliga a que sea 1.

Elevando $su + tv = 1$ a la potencia k y desarrollando, todos los términos salvo $t^k v^k$ contienen un factor u. Así, $1 = uA + t^k v^k$ para algún $A \in \mathbb{Z}$. Multiplicamos por w: $w = uAw + t^k v^k w$. Ambos términos de la derecha son divisibles por u bajo la hipótesis del lema, de modo que u divide a w. □

Los signos de u, v no afectan la divisibilidad ni la coprimalidad. En cambio, reemplazar la coprimalidad por $u \nmid v$ haría falso el lema: 6 divide a $2 \cdot 3$, pero no divide a 2 ni a 3.

Numerador y denominador de una raíz. Teorema de las raíces racionales. Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con coeficientes enteros, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si p/q es una raíz, escrita en forma irreducible con $p \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ y $\gcd(|p|, q) = 1$, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Demostración. Como $a_0 \neq 0$, la raíz no puede ser cero y $p \neq 0$. Multiplicamos $P(p/q) = 0$ por q^n:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Todos los términos salvo el último son divisibles por p, por lo que p divide a $a_0 q^n$. Aplicamos el lema con $u = p$, $v = q$, $k = n$ y $w = a_0$; la fracción irreducible asegura la coprimalidad necesaria. Se sigue que p divide a a_0.

Todos los términos salvo el primero son divisibles por q, de modo que q divide a $a_n p^n$. Aplicamos el mismo lema con $u = q$, $v = p$, $k = n$ y $w = a_n$, y obtenemos que q divide a a_n. □

Por tanto, los candidatos se construyen con numeradores entre los divisores positivos y negativos de a_0 y denominadores positivos entre los divisores de $|a_n|$. Reducimos las fracciones y eliminamos duplicados. Cada raíz racional está en esa lista; pertenecer a la lista no demuestra que sea raíz.

Si P es mónico, $a_n = 1$ y necesariamente $q = 1$. Sus raíces racionales, si las tiene, son enteros que dividen al término constante. La conclusión se refiere a coeficientes enteros: un polinomio mónico con coeficientes racionales puede tener raíces racionales no enteras.

Candidatos y comprobaciones. Para $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$, los candidatos racionales distintos son $\pm 1, \pm 2, \pm 1/2$. Las evaluaciones exactas son:

Candidato a	$P(a)$	Resultado
1	-1	No es raíz
-1	9	No es raíz
2	0	Es raíz

Candidato a	$P(a)$	Resultado
-2	20	No es raíz
$1/2$	0	Es raíz
$-1/2$	5	No es raíz

El producto $(2x-1)(x-2) = 2x^2 - 5x + 2$ confirma la factorización. En particular, no se deduce que 1 sea raíz por el hecho de que su numerador y su denominador cumplan las divisibilidades.

Recuperación resuelta. Determine las raíces racionales de $x^3 - 2$ usando el teorema.

Por ser mónico, sus candidatos son $\pm 1, \pm 2$. Sus valores son, respectivamente, $-1, -3, 6, -10$, todos no nulos. Por tanto, no tiene raíces racionales. Esto no excluye raíces reales: $\sqrt[3]{2}$ es real y su cubo es 2.

Diagnóstico resuelto. Se afirma: «Como p no divide a q^n y divide a $a_0 q^n$, divide a a_0». ¿Qué argumento falta?

La condición suficiente es la coprimalidad entre p y q, seguida del lema aritmético. El ejemplo $6 \mid 3 \cdot 2$ con $6 \nmid 2$ y $6 \nmid 3$ refuta la inferencia basada solo en «no divide». En la prueba del teorema, la fracción irreducible aporta la hipótesis correcta, y el lema explica cómo se utiliza.

Una lista exhaustiva de candidatos todavía necesita evaluaciones. El teorema de raíces racionales proporciona una condición necesaria. Para $P = 2x^2 + x - 1$, los candidatos reducidos son $\pm 1, \pm 1/2$. Evaluarlos da $P(1) = 2$, $P(-1) = 0$, $P(1/2) = 0$, $P(-1/2) = -1$. Solo $-1, 1/2$ son raíces, y $(2x-1)(x+1)$ reconstruye el polinomio. **Control resuelto:** decir que 1 es raíz porque divide al término independiente confunde pertenencia a la lista con verificación. Si el término constante es cero, primero extraemos las potencias de x y aplicamos el teorema al residual de término constante no nulo. La lista completa evita perder candidatos; las evaluaciones separan los candidatos de las soluciones.

25.10. Búsqueda finita y factorización progresiva

Una lista de candidatos organiza la búsqueda, pero el trabajo puede reducirse a medida que encontramos factores. Después de extraer una raíz, buscamos en el cociente: cada raíz del polinomio original es la ya extraída o una raíz del cociente. Una factorización comprobada permite conservar esa información sin volver a evaluar todos los candidatos originales.

Preparar el polinomio. Si los coeficientes son racionales, multiplicamos por un entero positivo que elimine sus denominadores. El polinomio cambia, pero sus raíces y multiplicidades se conservan, pues multiplicar por una constante no nula no cambia la anulación ni la multiplicidad (§25.7). Por ejemplo,

$$A(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{2x^2}{3} - \frac{17x}{6} + 1, \qquad 6A(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6.$$

El teorema de raíces racionales se aplica al segundo polinomio, con coeficientes enteros. Si todos esos coeficientes tienen además un divisor común, podemos retirarlo como factor constante; esto puede acortar la lista de candidatos sin cambiar las raíces.

Si el término constante es cero, extraemos primero la potencia de x presente en todos los términos. Para un polinomio no nulo, escribimos $P = x^m B$, donde $B(0) \neq 0$; el exponente m es el menor exponente con coeficiente no nulo. Entonces 0 tiene multiplicidad m, y las raíces no nulas están en B. Aplicar directamente la regla «el numerador divide al término constante» no produce una lista finita cuando ese término es cero: todo entero no nulo divide a 0.

Para $Z(x) = 2x^5 - 5x^4 + 2x^3$, extraemos x^3 y recuperamos la cuadrática anterior:

$$Z(x) = x^3(2x^2 - 5x + 2) = x^3(2x - 1)(x - 2).$$

La raíz 0 tiene multiplicidad tres porque el residual vale 2 en cero; $1/2$ y 2 son simples. La suma de multiplicidades es cinco, igual al grado en este ejemplo.

Buscar, extraer y reconstruir. Consideremos $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$. Los candidatos racionales son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 1/3, \pm 2/3$. Podemos probarlos en un orden conveniente, siempre manteniendo el registro de qué hemos comprobado. En particular, $P(1) = -12$ y $P(-1) = 16$ descartan esos dos números. En cambio,

$$P(1/3) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} - \frac{17}{3} + 6 = 0.$$

Horner con los coeficientes $3, -4, -17, 6$ y el número $1/3$ produce los coeficientes $3, -3, -18$ del cociente y resto cero. Así, $P = (x - 1/3)(3x^2 - 3x - 18)$. El cociente admite -2 como raíz; al dividirlo por $x + 2$ queda $3x - 9$. Por tanto,

$$P(x) = (x - 1/3)(x + 2)(3x - 9) = (3x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

La reconstrucción confirma el resultado: $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$, y multiplicar por $3x - 1$ devuelve $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$. Las raíces son $1/3, -2, 3$. La identidad muestra que ninguna otra raíz real puede existir, pues todo cero del producto debe anular uno de sus factores lineales. Las tres raíces son distintas y sus multiplicidades son uno.

No fue necesario evaluar todos los candidatos de la primera lista. Dejamos de buscarlos cuando la factorización completa proporcionó una justificación de exhaustividad. Si un cociente no tiene raíces racionales, la búsqueda racional termina allí, pero aún puede haber raíces reales no racionales o factores de grado mayor.

Al formar una nueva lista para un cociente con coeficientes racionales, podemos eliminar sus denominadores de nuevo. Hay que utilizar el término constante y el coeficiente principal de ese cociente preparado, no los del polinomio original. Cada extracción disminuye el grado, así que el proceso de extraer factores lineales no puede continuar indefinidamente.

Recuperación resuelta. Un polinomio entero no nulo tiene término constante cero y es $P = x^2(x^2 + 1)$. ¿Cuáles son sus raíces racionales y reales?

La extracción inicial certifica que 0 tiene multiplicidad dos, porque el residual vale 1 en cero. El residual $x^2 + 1$ es positivo para todo real, por lo que no aporta raíces reales ni racionales. La única raíz en ambos conjuntos es 0, aunque el grado del polinomio sea cuatro.

Diagnóstico resuelto. Se sustituye A por $6A$ para eliminar denominadores y se afirma que todos sus valores siguen siendo iguales. ¿Qué se conserva?

Se conservan las raíces y sus multiplicidades; los valores se multiplican por seis. En el ejemplo inicial, $A(0) = 1$, mientras que $(6A)(0) = 6$. Si una condición de construcción exigía un valor concreto, habría que transformarla al multiplicar el polinomio. La preparación para buscar ceros no autoriza a ignorar esa diferencia.

25.11. Factores cuadráticos y elección del dominio

La búsqueda racional puede dejar un factor cuadrático. Para decidir qué hacer con él, utilizamos el discriminante y especificamos si buscamos factores en $\mathbb{Q}[x]$ o en $\mathbb{R}[x]$.

Sea $B(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Recuperamos de C21 el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ y la identidad $4aB(x) = (2ax + b)^2 - \Delta$. Para coeficientes reales, los casos son:

Discriminante	Raíces reales	Forma factorizada real
$\Delta > 0$	Dos distintas: $r_\pm = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$	$a(x - r_+)(x - r_-)$
$\Delta = 0$	Una doble: $r = -b/(2a)$	$a(x - r)^2$

Discriminante	Raíces reales	Forma factorizada real
$\Delta < 0$	Ninguna	No hay descomposición en dos factores de grado positivo en $\mathbb{R}[x]$

Las dos primeras identidades se comprueban con $r_+ + r_- = -b/a$ y $r_+ r_- = c/a$, o completando el cuadrado cuando $\Delta = 0$. En el primer caso, el residual tras extraer cualquiera de los factores lineales no se anula en su raíz, pues las dos raíces son distintas; ambas son simples.

Si $\Delta < 0$, la identidad $4aB(x) = (2ax + b)^2 - \Delta$ tiene lado derecho positivo para todo real x. Por eso $B(x)$ nunca vale cero. Una descomposición $B = UV$ con ambos grados positivos obligaría, por la regla del grado, a que ambos factores fueran lineales. Todo polinomio lineal real no constante tiene una raíz real, que sería también raíz de B; la ausencia de raíces descarta esa descomposición.

La restricción adicional para coeficientes racionales. Supongamos $a, b, c \in \mathbb{Q}$. La existencia de raíces reales no garantiza que pertenezcan a $\mathbb{Q}$. Hay raíces racionales si y solo si Δ es el cuadrado de un racional, incluyendo el cuadrado cero.

Si $\Delta = s^2$ con $s \in \mathbb{Q}$, la fórmula cuadrática produce raíces racionales. Recíprocamente, si $r \in \mathbb{Q}$ es raíz, al evaluar la identidad anterior obtenemos $\Delta = (2ar + b)^2$, el cuadrado de un racional. En tal caso, la otra raíz también es racional, pues su suma con r es $-b/a$.

Esto decide la descomposición cuadrática en $\mathbb{Q}[x]$: si tiene una raíz racional, el teorema del factor deja un cociente lineal racional. Si se descompone en dos factores de grado positivo con coeficientes racionales, ambos deben ser lineales y uno proporciona una raíz racional. No estamos usando aquí la regla para grados mayores.

Por ejemplo, $x^2 - 2$ tiene discriminante 8, que no es un cuadrado racional: si $s^2 = 8$ con s racional, $(s/2)^2 = 2$ contradiría §25.1. En $\mathbb{Q}[x]$ no se descompone en dos factores de grado positivo. En $\mathbb{R}[x]$ sí tenemos $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

Para $2x^2 - 5x + 2$, el discriminante es $9 = 3^2$, y la fórmula da 2 y $1/2$. La factorización $(2x - 1)(x - 2)$ utiliza coeficientes enteros; equivalentemente, es $2(x - 1/2)(x - 2)$ en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$. La constante 2 debe conservarse para reconstruir el coeficiente principal.

El polinomio $x^2 + x + 1$ tiene discriminante -3. Completar el cuadrado da $(x + 1/2)^2 + 3/4 > 0$ para todo real. No tiene raíces reales y no se descompone en factores de grado positivo sobre $\mathbb{R}$ ni sobre $\mathbb{Q}$.

Recuperación resuelta. Clasifique $B(x) = x^2 + 2x + 1$ según sus raíces y multiplicidades.

El discriminante es cero y $B = (x+1)^2$. Su única raíz real y racional es -1, con multiplicidad dos, porque el residual después de extraer las dos copias de $x+1$ es la constante 1. La fórmula cuadrática produce dos expresiones iguales; no son dos números distintos.

Diagnóstico resuelto. «Como el discriminante es positivo, la cuadrática se factoriza en $\mathbb{Q}[x]$». ¿Qué debe corregirse?

Un discriminante positivo asegura dos raíces reales distintas. Para que la descomposición sea en $\mathbb{Q}[x]$, hace falta además que el discriminante sea un cuadrado racional. El ejemplo $x^2 - 2$ distingue ambas condiciones: tiene raíces reales distintas y ninguna racional.

25.12. Estrategias de factorización de grados mayores

Antes de preparar una lista de candidatos, inspeccionamos la forma del polinomio. Un factor común, una agrupación o una sustitución puede reducir el problema más que una sucesión de evaluaciones. La forma desarrollada permite comprobar coeficientes; la forma factorizada permite leer raíces, multiplicidades y grado residual.

Agrupar términos y reconocer una expresión repetida. En $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$, los dos primeros términos contienen x^2 y los dos últimos contienen -9. Agrupar produce

$$P(x) = x^2(x+2) - 9(x+2) = (x+2)(x^2-9) = (x+2)(x-3)(x+3).$$

Las raíces reales y racionales son $-2, 3, -3$, todas simples. La expresión repetida $x+2$ hace útil la agrupación; la diferencia de cuadrados termina el cálculo. Multiplicar los factores devuelve la expresión inicial.

En una expresión con solo potencias pares, la sustitución $y = x^2$ puede reducir el grado del cálculo. Para $S(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, resolvemos primero la factorización $y^2 - 10y + 9 = (y-1)(y-9)$. Al sustituir de nuevo,

$$S(x) = (x^2-1)(x^2-9) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3).$$

Las raíces son $\pm 1, \pm 3$. Si se usa la sustitución para resolver una ecuación real, hay que recordar que $y = x^2 \geq 0$; un valor negativo de y no corresponde a ningún x real.

Para $T(x) = x^4 + 3x^2 + 2$, la misma estrategia da $T = (x^2+1)(x^2+2)$. Ambos factores son positivos en $\mathbb{R}$, así que T no tiene raíces reales ni racionales. Sin embargo, sí está expresado como producto de dos factores de grado positivo, incluso con coeficientes racionales. La ausencia de raíces descarta factores lineales en el dominio elegido; no descarta factores cuadráticos en un polinomio de grado cuatro.

Combinar búsqueda racional y control del residual. Consideremos la cuártica $F(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$, sabiendo que tiene una raíz racional positiva no entera y una raíz entera negativa. El teorema de raíces racionales restringe la primera a $1/2$ o $5/2$, y la segunda a $-1, -2, -5, -10$. Estas listas utilizan la información adicional y las fracciones reducidas.

Evaluar en $1/2$ da $1/8 - 1/8 + 1/2 + 19/2 - 10 = 0$. La división por $x - 1/2$ produce el cociente $2x^3 + 2x + 20$. Por tanto, $F(x) = (2x-1)(x^3 + x + 10)$.

Para buscar la raíz entera negativa, podemos trabajar en el cociente: en ninguno de esos números se anula $2x - 1$. Probamos -2 y obtenemos $-8 - 2 + 10 = 0$. Dividir $x^3 + x + 10$ por $x + 2$ deja $x^2 - 2x + 5$. Así,

$$F(x) = (2x-1)(x+2)(x^2-2x+5).$$

El residual cuadrático es $(x-1)^2 + 4 > 0$ para todo real. Por ello, las únicas raíces reales son $1/2$ y -2. Son simples: el residual al extraer $x - 1/2$ es $2(x+2)(x^2-2x+5)$, no nulo en $1/2$; al extraer $x+2$, el residual es $(2x-1)(x^2-2x+5)$, no nulo en -2.

La comprobación por coeficientes también es breve: $(x+2)(x^2-2x+5) = x^3 + x + 10$, y multiplicar por $2x - 1$ devuelve $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$. La búsqueda queda cerrada por la identidad y la positividad del residual, sin necesidad de evaluar los candidatos restantes.

Elegir qué información necesita la conclusión. Una factorización es un certificado cuando el producto se reconstruye y los factores pertenecen al conjunto de coeficientes elegido. Para responder «todas las raíces reales», también debemos justificar qué raíces aportan los factores residuales. Para afirmar multiplicidades exactas, evaluamos esos residuales en las raíces extraídas. Son comprobaciones diferentes y cada una responde a una parte de la pregunta.

Recuperación resuelta. Factorice $U(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ y determine todas sus raíces reales.

La sustitución $y = x^2$ da $y^2 + 2y - 3 = (y-1)(y+3)$. Por tanto, $U = (x^2-1)(x^2+3) = (x-1)(x+1)(x^2+3)$. El factor $x^2 + 3$ es positivo para todo real; las únicas raíces son 1 y -1, ambas simples porque el residual de cada factor lineal no se anula en su raíz. Los valores

$y = 1, -3$ de la ecuación auxiliar no se convierten ambos en raíces reales de la original: solo $y = 1$ es compatible con $y = x^2 \geq 0$.

Diagnóstico resuelto. Una búsqueda exhaustiva de candidatos racionales de una cuártica no encontró ninguna raíz, y se concluyó que no se puede factorizar en $\mathbb{Q}[x]$. ¿Cómo se evalúa esa conclusión?

La búsqueda demuestra que no existen raíces racionales y, por el teorema del factor, que no hay factores lineales racionales. El ejemplo $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$ muestra que aún puede haber factores cuadráticos racionales. Para descartar cualquier descomposición de grado positivo habría que examinar también esa posibilidad.

25.13. Irreducibilidad elemental

Una descomposición en factores lineales puede terminar dejando un factor de grado mayor. La cuestión es entonces si ese factor admite otra descomposición dentro del conjunto de coeficientes elegido. Las constantes no nulas deben separarse de esta pregunta: siempre podemos escribir $P = c(P/c)$, y ese cambio no reduce el problema de factorización.

Trabajamos en $K[x]$, con $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{R}$. Un polinomio no nulo de grado positivo es **irreducible sobre** K si en toda identidad $P = AB$, con $A, B \in K[x]$, al menos uno de los factores es constante. Es **reducible sobre** K si admite una identidad así con ambos factores de grado positivo.

Como $P \neq 0$, ninguno de los factores de una identidad $P = AB$ puede ser cero. La condición de irreducibilidad permite factores constantes no nulos; prohíbe una descomposición en dos partes de grado positivo. En este capítulo reservamos «reducible» e «irreducible» para polinomios no nulos de grado positivo: el cero y las constantes quedan fuera de esa clasificación.

Constantes, grado y normalización. Las constantes no nulas son precisamente los polinomios con inverso multiplicativo en $K[x]$ (§24.5). En efecto, una constante $c \neq 0$ tiene inverso $1/c$. Si $AB = 1$, la regla del grado exige $\deg A + \deg B = 0$, así que ambos son constantes no nulas. Estos polinomios se llaman **unidades**.

Todo polinomio lineal no constante es irreducible. Si $P = AB$ tiene grado uno, la igualdad $\deg A + \deg B = 1$ obliga a que uno de los grados sea cero. Por ejemplo, $2x - 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$, aunque tenga la raíz $1/2$.

Multiplicar por una constante no nula conserva la irreducibilidad. Si $cP = AB$ con ambos grados positivos, entonces $P = (A/c)B$ proporciona una descomposición de los mismos grados. Recíprocamente, una descomposición $P = UV$ produce $cP = (cU)V$ con ambos grados positivos. Por tanto, P y cP son reducibles o irreducibles simultáneamente.

Dos polinomios no nulos de $K[x]$ se llaman **asociados** si uno es un múltiplo del otro por una constante no nula. Por ejemplo, $2x - 2$ y $x - 1$ son asociados; al normalizarlos como mónicos obtenemos el mismo polinomio.

Si c es el coeficiente principal de P, el polinomio P/c es mónico. Normalizarlo así facilita comparar factores: retiramos una constante y conservamos su condición de irreducibilidad. La constante deberá volver a aparecer al reconstruir el polinomio.

El dominio pertenece a la afirmación. Por §25.11, $x^2 - 2$ no se descompone en dos factores de grado positivo en $\mathbb{Q}[x]$; es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. En $\mathbb{R}[x]$ se descompone como $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ y es reducible. No hay contradicción: los factores permitidos son distintos en ambos conjuntos.

El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{Q}$. La positividad $a^2 + 1 > 0$ descarta raíces reales. Cualquier descomposición de una cuadrática en dos factores de grado positivo tendría dos factores lineales y produciría una raíz en el conjunto de coeficientes, como se justificó en §25.11.

Recuperación resuelta. Se escribe $x^2+1 = 2[(x^2+1)/2]$. ¿Se ha demostrado que es reducible?

No. Uno de los factores es constante y tiene grado cero. Esa identidad está permitida por la definición de irreducibilidad. Para demostrar reducibilidad haría falta una descomposición con ambos grados positivos.

Diagnóstico resuelto. Se afirma que todo irreducible carece de raíces en su conjunto de coeficientes. ¿Qué excepción necesita la afirmación?

Los irreducibles lineales sí tienen una raíz: para $ax+b$, con $a \neq 0$, es $-b/a \in K$. Por tanto, la afirmación solo puede plantearse para irreducibles de grado al menos dos. El grado es una hipótesis que no debe omitirse.

El criterio por raíces termina donde cambian las particiones del grado. Una cuadrática o una cúbica reducible tiene un factor lineal: las particiones en dos grados positivos son $1+1$ y $1+2$. Por eso, en esos grados, ausencia de raíces en K certifica irreducibilidad en $K[x]$. En grado cuatro existe además $2+2$, que puede no producir raíces en K. **Control resuelto:** $(x^2+1)(x^2+2)$ es reducible sobre $\mathbb{R}$, pero siempre positivo en la recta. No encontrar raíces reales no descarta sus dos factores cuadráticos. Para una cuártica se necesita un certificado que examine también esa posibilidad. La conclusión debe indicar cuerpo y grado; una regla válida para grados dos y tres no se extiende por analogía.

25.14. Criterios para grados dos y tres

En cualquier grado al menos dos, una raíz en K demuestra reducibilidad: el teorema del factor da $P = (x-a)Q$, y el cociente tiene grado $\deg P - 1 \geq 1$. La afirmación recíproca requiere controlar cómo puede repartirse el grado entre dos factores.

Teorema. Si $P \in K[x]$ tiene grado dos o tres, entonces es irreducible sobre K si y solo si no tiene raíces en K.

Demostración. Si P tiene una raíz $a \in K$, el argumento anterior lo descompone en dos factores de grado positivo. Por tanto, un irreducible de esos grados no puede tener raíces en K.

Recíprocamente, supongamos que P es reducible y escribamos $P = AB$ con ambos grados positivos. La suma de esos grados es dos o tres, de modo que uno de ellos debe ser uno: las únicas reparticiones posibles son $1+1$, $1+2$ y $2+1$. Ese factor lineal tiene una raíz en K, y la identidad del producto la convierte en raíz de P. Por contraposición, si P no tiene raíces en K, no puede ser reducible. □

Para una cuadrática racional, §25.11 convierte este criterio en otro comprobable: es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ si y solo si su discriminante no es un cuadrado racional. Para una cuadrática real, es irreducible sobre $\mathbb{R}$ si y solo si su discriminante es negativo. El caso de discriminante cero produce dos factores lineales iguales, por lo que sigue siendo reducible.

Una cúbica que cambia al ampliar los coeficientes. El polinomio $P(x) = x^3 - 2$ no tiene raíces racionales, como se comprobó en §25.9 mediante su lista completa de candidatos. Por el criterio de grado tres, es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

En $\mathbb{R}$, el número $r = \sqrt[3]{2}$ satisface $r^3 = 2$ y proporciona la identidad

$$x^3 - 2 = (x-r)(x^2 + rx + r^2).$$

La expansión cancela los términos intermedios y deja $x^3 - r^3$. Como $r > 0$, el discriminante del residual es $r^2 - 4r^2 = -3r^2 < 0$: es una cuadrática irreducible real. Por tanto, la cúbica es reducible sobre $\mathbb{R}$, con una única raíz real r, simple, pues el residual vale $3r^2 \neq 0$ allí. La existencia de esa raíz proviene del radical ya disponible; no se ha utilizado un teorema general de existencia de raíces para todos los grados.

El límite de la prueba por raíces. En grado cuatro aparece una repartición nueva, $2+2$, que no obliga a que exista un factor lineal. El ejemplo

$$x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$$

es reducible sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$, aunque no tiene raíces reales: ambos factores son positivos. La búsqueda exhaustiva de raíces racionales tampoco podría certificar su irreducibilidad.

Para una cuártica sin raíces en K, las reparticiones $1+3$ y $3+1$ están descartadas, pero queda por examinar la posibilidad de dos factores cuadráticos. El teorema de grados dos y tres funciona porque allí no existe esa posibilidad.

Recuperación resuelta. Determine si $C(x)=x^3-3x+1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

Por ser mónico con coeficientes enteros y término constante 1, sus únicos candidatos racionales son 1 y -1. Los valores son $C(1)=-1$ y $C(-1)=3$, de modo que no hay raíces racionales. Como su grado es tres, el criterio demuestra irreducibilidad sobre $\mathbb{Q}$. Esta comprobación no decide aquí una factorización sobre $\mathbb{R}$.

Diagnóstico resuelto. «Un polinomio tiene grado uno y una raíz racional, así que es reducible sobre $\mathbb{Q}$». ¿Qué falla?

Extraer el factor lineal deja un cociente constante, no otro factor de grado positivo. El argumento de reducibilidad por una raíz necesitaba grado al menos dos. Los polinomios lineales son irreducibles y sí tienen raíces.

25.15. Existencia y unicidad de factores irreducibles

Una identidad factorizada debe distinguirse de una factorización terminada. Por ejemplo, agrupar términos puede producir factores que todavía sean reducibles. Probaremos que todo polinomio no nulo admite una descomposición en irreducibles y que, al normalizar los factores como mónicos, esa descomposición es única salvo el orden.

La existencia se obtiene bajando el grado. Para la unicidad necesitamos un resultado distinto: un irreducible que divide un producto debe dividir alguno de sus factores. Bézout de §24.15 proporciona ese paso.

Un irreducible que divide un producto. Lema. Sean $I,A,B\in K[x]$, con I irreducible y A,B no nulos. Si I divide a AB, entonces I divide a A o divide a B.

Demostración. Si I divide a A, la conclusión ya se cumple. Supongamos que no lo divide y sea D el MCD mónico de I,A. Como D divide a I, escribimos $I=DE$. Si D tuviera grado positivo, la irreducibilidad de I obligaría a que E fuera una constante no nula. Entonces I sería un múltiplo constante de D; como D divide a A, también I dividiría a A, contradiciendo nuestra suposición.

Por tanto, D tiene grado cero y, por ser mónico, es 1. Bézout da $UI+VA=1$ para ciertos $U,V\in K[x]$. Multiplicamos por B:

$$B=UIB+VAB.$$

El primer sumando es divisible por I, y el segundo también porque I divide a AB. Así, I divide a B. $\square$

Por inducción sobre el número de factores, si I divide un producto finito de polinomios no nulos, divide alguno de ellos. Para pasar de dos a más, aplicamos el lema al primer factor y al producto de los restantes; si divide este último, repetimos el argumento. Un irreducible no puede dividir a una constante no nula, porque su grado es positivo.

Teorema de factorización. Teorema. Todo polinomio no nulo $P \in K[x]$ se escribe como

$$P = c\, I_1 I_2 \cdots I_r,$$

donde $c \in K$ es su coeficiente principal, cada I_j es mónico e irreducible sobre K, y los factores pueden repetirse. La lista de factores es única salvo su orden. Si P es constante, $r = 0$ y el producto sin factores es 1.

Demostración de existencia. Procedemos por inducción fuerte sobre $n = \deg P$. Si $n = 0$, P es una constante no nula y basta el producto sin factores. Si $n \geq 1$ y P es irreducible, escribimos $P = c(P/c)$; el segundo factor es mónico e irreducible por §25.13.

Si P es reducible, existe una descomposición $P = AB$ con ambos grados positivos y menores que n. Por la hipótesis inductiva, tanto A como B se descomponen en factores mónicos irreducibles. Multiplicamos sus descomposiciones. El producto de sus coeficientes principales es el coeficiente principal de P (§24.4), así que obtenemos exactamente la forma afirmada. Este paso cubre todos los casos y completa la inducción. □

Demostración de unicidad. Supongamos que hay dos descomposiciones

$$P = c\, I_1 \cdots I_r = d\, J_1 \cdots J_s,$$

con todos los factores mónicos e irreducibles. Comparar coeficientes principales da $c = d$, y cancelamos esa constante no nula. Si una lista está vacía, su producto tiene grado cero; la igualdad de grados obliga a que la otra también esté vacía.

Si ambas listas son no vacías, I_1 divide el producto $J_1 \cdots J_s$. Por el lema, divide algún J_j, que podemos colocar primero. Escribimos $J_j = I_1 H$. Como J_j es irreducible y I_1 tiene grado positivo, H debe ser una constante no nula. La monicidad de I_1, J_j obliga a $H = 1$, de modo que $I_1 = J_j$.

Cancelamos el factor común utilizando §24.5 y repetimos con las listas restantes. Cada cancelación elimina un factor de cada lado, así que el proceso es finito. No puede quedar una lista vacía y otra no vacía: sus productos tendrían grados cero y positivo, respectivamente. Por tanto, $r = s$ y los factores coinciden, contando sus repeticiones, después de reordenarlos. □

Qué fija la normalización. Para $P = 6(x-1)^2(x^2+1)$, los factores mónicos irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$ son $x-1, x-1, x^2+1$, y el coeficiente principal separado es 6. La escritura $(2x-2)(3x-3)(x^2+1)$ distribuye esa constante entre dos factores, pero al normalizar devuelve la misma lista. El orden tampoco crea una factorización distinta.

La repetición de un factor irreducible no siempre corresponde a una raíz en K. El producto $(x^2+1)^2$ repite un irreducible real y no tiene raíces reales. En cambio, para un factor lineal mónico $x - a$, su número de repeticiones en la descomposición es $\nu_a(P)$. Los otros factores lineales se anulan en otros puntos; los irreducibles de grado al menos dos no pueden tener una raíz en K, pues eso los haría reducibles por §25.14. La aditividad de §25.7 justifica el conteo.

El teorema asegura existencia y unicidad; no proporciona por sí solo una lista de todos los irreducibles posibles ni un procedimiento breve para encontrarlos en cualquier grado.

Recuperación resuelta. Si un irreducible I divide a A^2, con $A \neq 0$, ¿debe dividir a A?

Sí. Aplicamos el lema al producto $A \cdot A$: sus dos alternativas son la misma afirmación, $I \mid A$. La irreducibilidad es la hipótesis que convierte la divisibilidad del producto en divisibilidad de un factor.

Diagnóstico resuelto. Se usa la regla «si D divide a AB, divide a A o a B» para cualquier polinomio no constante D. ¿Es válida?

No. Tomemos $D = x^2 - 1$, $A = x - 1$ y $B = x + 1$. Entonces $D = AB$ divide al producto, pero no divide a ninguno de los factores, pues ambos tienen grado menor. El polinomio D es

reducible; el lema necesita irreducibilidad, o una hipótesis de coprimalidad adecuada como la de C24.

25.16. Síntesis: qué se puede certificar

Las herramientas del capítulo responden a preguntas diferentes. Evaluar certifica una raíz; dividir extrae su factor; repetir la división determina su multiplicidad. El grado limita cuántos factores pueden extraerse y cuántos datos de evaluación identifican un polinomio. Para terminar una factorización, necesitamos además justificar la irreducibilidad de los factores que quedan, dentro del conjunto de coeficientes elegido.

Parámetros que cambian las multiplicidades. Consideremos, para $t \in \mathbb{R}$,

$$P_t(x) = x^4 - (t+1)x^2 + t = (x^2-1)(x^2-t).$$

La identidad se comprueba multiplicando. Determinemos todas sus raíces reales, sus multiplicidades y una descomposición en irreducibles reales.

Parámetro	Raíces reales y multiplicidades	Factores irreducibles reales
$t<0$	$1,-1$, simples	$(x-1)(x+1)(x^2-t)$
$t=0$	$1,-1$, simples; 0, doble	$(x-1)(x+1)x^2$
$t>0$, $t\neq 1$	$1,-1,\sqrt{t},-\sqrt{t}$, simples	$(x-1)(x+1)(x-\sqrt{t})(x+\sqrt{t})$
$t=1$	$1,-1$, dobles	$(x-1)^2(x+1)^2$

En la segunda fila, x^2 representa dos copias del irreducible lineal x. En las otras filas, las potencias también indican repeticiones de factores, no nuevos números.

Si $t<0$, el residual x^2-t es positivo y su discriminante $4t$ es negativo; por tanto, es irreducible real y no agrega raíces. En $t=0$, el residual aporta dos copias de x y no se anula en $1,-1$. Si $t>0$ y $t\neq 1$, los cuatro números son distintos, y cada factor lineal aparece una vez. Para $t=1$, los dos factores cuadráticos coinciden y sus contribuciones a las multiplicidades se suman. Estos argumentos justifican tanto los ceros como sus multiplicidades exactas y la exhaustividad.

Si $t\in\mathbb{Q}$, el polinomio también pertenece a $\mathbb{Q}[x]$. El factor x^2-t se descompone en factores lineales racionales si y solo si t es el cuadrado de un racional, incluyendo $t=0$; en cualquier otro caso es irreducible racional por el criterio cuadrático. Así, para $t=2$, la descomposición racional es $(x-1)(x+1)(x^2-2)$, mientras que la real añade los factores $x-\sqrt{2}$ y $x+\sqrt{2}$.

Construcción, unicidad y comprobación por puntos. Busquemos un polinomio de grado cuatro, coeficiente principal 2, raíz doble en 1, raíz simple en -2 y valor $P(0)=4$. Los factores exigidos forman $H=(x-1)^2(x+2)$, mónico de grado tres. El residual debe ser lineal de coeficiente principal 2, por lo que $P=H(2x+b)$. Como $H(0)=2$, la condición $2b=4$ da $b=2$. El único candidato es $P(x)=2(x-1)^2(x+2)(x+1)$.

El residual al extraer $(x-1)^2$ vale $2(3)(2)=12\neq 0$ en 1; al extraer $x+2$, vale $2(-3)^2(-1)=-18\neq 0$ en -2. Las multiplicidades pedidas son exactas. También aparece la raíz simple -1, que el enunciado no prohibía. El grado, el coeficiente principal y el valor en cero quedan satisfechos.

Podemos certificar una expresión desarrollada sin repetir la multiplicación completa. Sea $Q(x)=2x^4+2x^3-6x^2-2x+4$. En los cinco puntos distintos $-2,-1,0,1,2$, tanto P como Q toman los valores $0,0,4,0,24$, respectivamente. Ambos tienen grado a lo sumo cuatro; §25.5 demuestra que son el mismo polinomio. Los factores certifican las multiplicidades, mientras que los cinco valores y la cota de grado certifican la identidad desarrollada.

Una cuártica sin raíces: cómo examinar factores cuadráticos. El polinomio $V(x) = x^4 + 1$ es positivo en todos los reales, por lo que no tiene raíces reales ni racionales. Esto descarta factores lineales en ambos dominios, pero todavía debemos examinar factores cuadráticos para decidir su irreducibilidad.

Supongamos una descomposición en $\mathbb{Q}[x]$ con ambos grados positivos. Al no haber factores lineales, los grados deben ser dos y dos. Como V es mónico, podemos normalizar ambos factores como mónicos sin alterar su producto. Escribimos

$$x^4 + 1 = (x^2 + ux + v)(x^2 + wx + z), \qquad u, v, w, z \in \mathbb{Q}.$$

Comparar coeficientes da $u + w = 0$, $v + z + uw = 0$, $uz + vw = 0$ y $vz = 1$. Sustituimos $w = -u$ y obtenemos

$$v + z - u^2 = 0, \qquad u(z - v) = 0, \qquad vz = 1.$$

Si $u = 0$, entonces $z = -v$ y $vz = -v^2 = 1$, imposible para racionales. Si $u \neq 0$, la segunda igualdad da $z = v$, y la tercera exige $v^2 = 1$. Para $v = -1$, la primera igualdad daría $u^2 = -2$, imposible; para $v = 1$, daría $u^2 = 2$, también imposible en $\mathbb{Q}$ por §25.1. Se han agotado los casos. No existen dos factores cuadráticos racionales, y $x^4 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

Sobre $\mathbb{R}$, la última posibilidad sí puede realizarse:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1).$$

La identidad es $(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = x^4 + 1$. Cada cuadrática tiene discriminante -2 y es irreducible real. Así, la misma cuártica es irreducible racional y reducible real, sin tener raíces reales. La comparación de coeficientes resolvió aquí la posibilidad que la búsqueda de raíces no podía decidir.

Recuperación resuelta. Para $W = (x - 3)^2(x^2 + 2)$, ¿qué certificados permiten dar todas las raíces reales y saber que la factorización está terminada sobre $\mathbb{R}$?

Los dos factores lineales aportan 3. Después de extraer $(x - 3)^2$, el residual vale $11 \neq 0$ en 3, de modo que su multiplicidad es dos. El residual $x^2 + 2$ es positivo y tiene discriminante -8; no aporta raíces reales y es irreducible real. Los factores lineales también son irreducibles. Por tanto, 3 es la única raíz real y la expresión, con las dos copias de $x - 3$, es una descomposición en irreducibles.

Diagnóstico resuelto. Se sabe que todo polinomio no nulo se descompone en irreducibles y se concluye que todos esos factores tienen que ser lineales. ¿Qué se ha añadido sin justificación?

El teorema de §25.15 no fija los grados de los irreducibles. Ya hemos probado que $x^2 + 1$ es irreducible real y que $x^3 - 2$ es irreducible racional. La existencia de una descomposición en irreducibles no garantiza una descomposición en factores lineales en el mismo dominio.

Una respuesta completa queda respaldada por las identidades calculadas, las hipótesis de grado y dominio y el criterio aplicado a cada factor residual. Esos certificados permiten distinguir lo demostrado de lo que una búsqueda de candidatos todavía deja abierto.

Ejercicios y soluciones

Intente cada ejercicio antes de consultar la solución que lo acompaña. En las respuestas que piden todas las raíces, compruebe también qué puede aportar el factor residual.

A. Lectura y reconocimiento.

Ejercicio 001. Comprobar candidatos. **Enunciado.** Para $P(x) = x^2 - 4x + 3$, determine cuáles de los números $-1, 0, 1, 3, 4$ son raíces. Justifique cada decisión por evaluación.

Solución. Evaluamos cada candidato: $P(-1) = 1 + 4 + 3 = 8$, $P(0) = 3$, $P(1) = 1 - 4 + 3 = 0$, $P(3) = 9 - 12 + 3 = 0$ y $P(4) = 16 - 16 + 3 = 3$. De la lista dada, las raíces son 1 y 3; los otros tres números quedan descartados porque sus valores no son cero. Además, $P = (x - 1)(x - 3)$ confirma las dos anulaciones. Como este producto se anula únicamente cuando uno de sus factores vale cero, también certifica que no hay otras raíces reales.

Ejercicio 002. Cero, constante y lineal. **Enunciado.** Describa las raíces en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ de $P(x) = 0$, $Q(x) = -7$ y $R(x) = 3x + 6$. Indique cuándo corresponde asignar una multiplicidad finita.

Solución. Para P, cada número del conjunto elegido es raíz, pues todas las evaluaciones son cero. La multiplicidad finita de §25.6 no se define para el polinomio cero: cualquier potencia de $x - a$ lo divide y no existe un exponente máximo.

El polinomio Q no tiene raíces en ninguno de los dos conjuntos, porque su evaluación siempre es -7. Su multiplicidad en cualquier punto es cero.

Para R, resolver $3a + 6 = 0$ da $a = -2$, racional y real. La identidad $R = 3(x + 2)$ y el residual constante $3 \neq 0$ demuestran que esa raíz es simple. La ecuación lineal también muestra que no existe otra raíz.

Ejercicio 003. Cambiar el conjunto de búsqueda. **Enunciado.** Determine todas las raíces de $P(x) = x^2 - 5$ en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$.

Solución. Una raíz racional de este polinomio mónico entero tendría que ser un entero divisor de -5. Los únicos candidatos son $\pm 1, \pm 5$. Sus valores son -4 para ± 1 y 20 para ± 5, así que no hay raíces racionales.

En $\mathbb{R}$, la ecuación $a^2 = 5$ da $a = \pm\sqrt{5}$. La identidad $P = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ comprueba la factorización real y la exhaustividad: cualquier raíz debe anular uno de los factores. Ambos números son irracionales, de acuerdo con la búsqueda racional anterior.

Ejercicio 004. Leer una forma factorizada. **Enunciado.** Sea $P(x) = -2(x+3)^2(x-1)^3(x^2+4)$. Determine su grado, coeficiente principal, todas sus raíces reales y sus multiplicidades. Compare la suma de multiplicidades con el grado.

Solución. Los factores tienen grados $2, 3, 2$; por tanto, el grado total es siete y el coeficiente principal es -2. El factor $x^2 + 4$ es positivo en todos los reales y no aporta raíces.

La raíz -3 tiene multiplicidad dos: después de extraer $(x+3)^2$, el residual es $-2(x-1)^3(x^2+4)$, cuyo valor en -3 es $-2(-4)^3 \cdot 13 = 1664 \neq 0$. La raíz 1 tiene multiplicidad tres, pues el residual $-2(x + 3)^2(x^2 + 4)$ vale $-2 \cdot 16 \cdot 5 = -160 \neq 0$ allí.

Las únicas raíces reales son, por tanto, -3 y 1. Sus multiplicidades suman $2 + 3 = 5$, dos menos que el grado. Esa diferencia corresponde al grado del factor residual $x^2 + 4$ sin raíces reales.

Ejercicio 005. Interpretar un cociente. **Enunciado.** Se conoce la identidad $4x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(4x^2 - 2x + 5)$. Determine si -1 es raíz y cuál es su multiplicidad. Compruebe también si 1 es raíz.

Solución. La identidad contiene el factor $x + 1$, de modo que -1 es raíz por el teorema del factor. Para decidir su multiplicidad exacta evaluamos el residual: $4(-1)^2 - 2(-1) + 5 = 11 \neq 0$. Por tanto, es una raíz simple.

En 1, la evaluación del polinomio original da $4 + 2 + 3 + 5 = 14 \neq 0$, así que 1 no es raíz. La factorización también devuelve ese valor: $(1 + 1)(4 - 2 + 5) = 2 \cdot 7 = 14$.

Ejercicio 006. Un candidato que falla. **Enunciado.** Para $P(x) = 3x^2 + x - 2$, compruebe si $1/3$ cumple las restricciones del teorema de raíces racionales y si realmente es raíz.

Solución. La fracción $1/3$ está reducida. Su numerador divide al término constante -2 y su denominador divide al coeficiente principal 3, así que pertenece a la lista de candidatos permitidos.

Sin embargo, $P(1/3) = 3/9 + 1/3 - 2 = 2/3 - 2 = -4/3 \neq 0$. No es raíz. Las divisibilidades son condiciones necesarias para una raíz racional; la evaluación decide si un candidato permitido se anula.

Ejercicio 007. Cinco anulaciones y grado acotado. **Enunciado.** Un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ tiene grado a lo sumo cuatro, admitiendo al polinomio cero, y se anula en cinco números reales distintos. ¿Qué puede concluirse?

Solución. Si P fuera no nulo, su grado sería un entero menor o igual que cuatro. La cota de §25.4 permitiría a lo sumo cuatro raíces distintas, en contradicción con las cinco dadas. Por tanto, P es el polinomio cero.

Esto no atribuye un grado cuatro al cero. «Grado a lo sumo cuatro» se usa con la convención de §25.5, que admite por separado al polinomio cero. Si se hubiera afirmado grado exactamente cuatro, los datos serían incompatibles.

Ejercicio 008. Qué falta para una raíz doble. **Enunciado.** Sea $P = (x-2)^2 R$, con R no nulo. Decida la multiplicidad de 2 cuando $R(2) \neq 0$ y qué puede afirmarse cuando $R(2) = 0$. Dé un ejemplo del segundo caso.

Solución. Si $R(2) \neq 0$, la caracterización por residual demuestra $\nu_2(P) = 2$.

Si $R(2) = 0$, el teorema del factor permite escribir $R = (x-2)S$, y $P = (x-2)^3 S$. La multiplicidad es al menos tres; podría ser mayor si S vuelve a anularse en 2. Por ejemplo, $R = x - 2$ produce $P = (x-2)^3$, cuya multiplicidad en 2 es exactamente tres porque el residual final es 1.

Ejercicio 009. Clasificar sin incluir unidades. **Enunciado.** Clasifique 0, 5, $x + 4$, $(x + 4)^2$ y $x^2 + 4$ como irreducibles, reducibles o fuera de esa clasificación, tanto sobre $\mathbb{Q}$ como sobre $\mathbb{R}$.

Solución. El cero y la constante 5 quedan fuera de la clasificación de §25.13, que se reserva a polinomios no nulos de grado positivo. La constante 5 es una unidad.

El lineal $x + 4$ es irreducible sobre ambos conjuntos, porque un producto de grado uno debe tener un factor constante. El polinomio $(x + 4)^2$ es reducible: presenta dos factores lineales de grado positivo.

Para $x^2 + 4$, la desigualdad $a^2 + 4 > 0$ descarta raíces reales y, en particular, racionales. Como es una cuadrática, el criterio de §25.14 demuestra irreducibilidad sobre ambos conjuntos. La presencia de una raíz en $x + 4$ no contradice su irreducibilidad lineal.

Ejercicio 010. Cuántos puntos identifican. **Enunciado.** Dos polinomios de grado a lo sumo tres coinciden en $0, 1, 2$. ¿Deben ser iguales? Indique qué cambia si también coinciden en 3.

Solución. Tres puntos no bastan. Por ejemplo, $P = 0$ y $Q = x(x-1)(x-2)$ coinciden en $0, 1, 2$, pero son polinomios diferentes: Q tiene coeficiente principal 1 y $Q(3) = 6$.

Si también coinciden en 3, tienen cuatro puntos distintos de coincidencia. Aplicar §25.5 con $n = 3$ demuestra que son iguales. La cota de grado y la cantidad de puntos deben utilizarse juntas.

B. Técnica y cálculo.

Ejercicio 011. Horner y una raíz simple. **Enunciado.** Divida $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 2$ por $x - 2$, reconstruya la identidad y determine la multiplicidad de 2.

Solución. Horner con 2 y los coeficientes $2, -1, -7, 2$ da: bajamos 2; luego $-1 + 2 \cdot 2 = 3$; después $-7 + 2 \cdot 3 = -1$; finalmente $2 + 2(-1) = 0$. El cociente es $2x^2 + 3x - 1$ y el resto es cero.

La identidad es $P = (x-2)(2x^2+3x-1)$. Al multiplicar obtenemos $2x^3+3x^2-x-4x^2-6x+2 = 2x^3 - x^2 - 7x + 2$, lo que verifica el cociente. El residual vale $8 + 6 - 1 = 13 \neq 0$ en 2, por lo que esa raíz es simple.

Ejercicio 012. Un resto no nulo. **Enunciado.** Divida $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ por $x - 1$. Decida si $x - 1$ es factor y compruebe la respuesta mediante una identidad.

Solución. Horner con 1 transforma los coeficientes $1, 2, -5, 4$ en $1, 3, -2$ para el cociente y resto 2. Por tanto, $P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x - 2) + 2$.

El producto es $x^3 + 2x^2 - 5x + 2$; añadir el resto devuelve el término constante 4. Como el resto no es cero, $x - 1$ no divide a P. El mismo número es $P(1) = 1 + 2 - 5 + 4 = 2$, de modo que 1 tampoco es raíz.

Ejercicio 013. Divisiones sucesivas. **Enunciado.** Para $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$, determine la multiplicidad de 1 mediante divisiones sucesivas. Obtenga después todas las raíces reales.

Solución. Dividimos repetidamente por $x - 1$:

Dividendo	Cociente	Resto
$x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$	$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	0
$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	$x^2 - 3x + 2$	0
$x^2 - 3x + 2$	$x - 2$	0

El residual final $x - 2$ vale $-1 \neq 0$ en 1. Hemos extraído exactamente tres copias de $x - 1$, así que $P = (x - 1)^3(x - 2)$ y $\nu_1(P) = 3$. Multiplicar estos factores devuelve los cinco coeficientes iniciales.

El factor residual aporta la raíz 2, simple, porque $(2 - 1)^3 = 1 \neq 0$. Cualquier cero del producto debe ser 1 o 2, por lo que esta lista de raíces reales es completa.

Ejercicio 014. Extraer dos raíces distintas. **Enunciado.** Compruebe que -1 y 2 son raíces de $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Extraiga sus factores sucesivamente y determine todas las raíces reales.

Solución. Las evaluaciones dan $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$ y $P(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$. Dividir por $x + 1$ produce el cociente $x^2 - 5x + 6$ y resto cero. Este cociente se anula en 2: $4 - 10 + 6 = 0$. Al dividirlo por $x - 2$, queda $x - 3$.

Por tanto, $P = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$. La multiplicación de $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$ por $x + 1$ reconstruye $x^3 - 4x^2 + x + 6$. Las únicas raíces son $-1, 2, 3$, todas simples porque los tres factores lineales corresponden a puntos distintos.

Ejercicio 015. Lista racional y reducción del grado. **Enunciado.** Determine todos los candidatos racionales de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$ y encuentre todas sus raíces racionales mediante una factorización comprobada.

Solución. El numerador debe dividir a -12 y el denominador positivo a 2. Después de reducir y eliminar duplicados, los candidatos son

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}.$$

Probamos $-3/2$: los términos cúbico y cuadrático son $-27/4$ y $27/4$, mientras que los dos restantes son 12 y -12. La suma es cero. Horner con $-3/2$ produce el cociente $2x^2 - 8$ y resto cero. Así,

$$P(x) = (x + 3/2)(2x^2 - 8) = (2x + 3)(x - 2)(x + 2).$$

El producto reconstruye $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$. Sus únicas raíces son $-3/2, 2, -2$, racionales y simples. La identidad determina todos los ceros, de modo que no es necesario evaluar los demás candidatos.

Ejercicio 016. Extraer cero antes de buscar. **Enunciado.** Determine todas las raíces reales y sus multiplicidades de $P(x) = \frac{3}{2}x^5 - \frac{9}{2}x^4 + 3x^3$.

Solución. El menor exponente con coeficiente no nulo es tres. Extraemos esa potencia y la constante:

$$P(x) = \frac{3}{2}x^3(x^2 - 3x + 2) = \frac{3}{2}x^3(x-1)(x-2).$$

El residual en cero es $(3/2)(-1)(-2) = 3 \neq 0$, por lo que 0 tiene multiplicidad tres. Los factores restantes dan las raíces simples 1 y 2: sus residuales son no nulos en los respectivos puntos, al ser distintos de cero y entre sí.

El desarrollo da $(3/2)x^5 - (9/2)x^4 + 3x^3$, que verifica la identidad. No hay otras raíces reales porque todos los factores restantes son lineales. La suma $3 + 1 + 1 = 5$ coincide con el grado.

Ejercicio 017. Eliminar denominadores. **Enunciado.** Encuentre todas las raíces racionales de $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ y escriba una factorización del polinomio original.

Solución. Multiplicamos por seis para obtener coeficientes enteros: $6A = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$. Agrupamos $x^2(2x+3) - (2x+3)$ y obtenemos $(2x+3)(x^2-1)$. Recuperar el polinomio original exige dividir por seis: $A(x) = \frac{1}{6}(2x+3)(x-1)(x+1)$.

Las raíces son $-3/2, 1, -1$, todas racionales. La identidad descarta otras raíces reales y racionales. Al multiplicar los factores y la constante $1/6$ se recuperan los coeficientes iniciales; por ejemplo, en cero dan $(1/6)\cdot 3\cdot(-1)\cdot 1 = -1/2$, el valor correcto de $A(0)$. Multiplicar para preparar la búsqueda conservó las raíces, pero no los valores del polinomio.

Ejercicio 018. Una cuadrática en dos dominios. **Enunciado.** Factorice $P(x) = 3x^2 - 6x - 6$ en irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$. Determine sus raíces reales y multiplicidades.

Solución. Retiramos la constante: $P = 3(x^2 - 2x - 2)$. El factor mónico entero tiene candidatos racionales $\pm 1, \pm 2$. Sus valores en $1, -1, 2, -2$ son $-3, 1, -2, 6$, respectivamente. No hay raíces racionales; al ser cuadrático, $x^2 - 2x - 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Esta es la factorización racional normalizada, con constante 3.

Completar el cuadrado da $x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$. En $\mathbb{R}$, $P(x) = 3(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$.

Las raíces son $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$, distintas y simples. El producto reproduce $3[(x-1)^2 - 3]$, y cada residual lineal es no nulo en la raíz del otro factor. Los factores lineales reales son irreducibles.

Ejercicio 019. Discriminante cero o negativo. **Enunciado.** Para $P(x) = 4x^2 + 12x + 9$ y $Q(x) = 2x^2 - 4x + 7$, determine las raíces reales con multiplicidad y decida reducibilidad o irreducibilidad sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$.

Solución. Para P, el discriminante es $12^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 0$, y $P = (2x+3)^2 = 4(x+3/2)^2$. Su única raíz real y racional es $-3/2$, doble, pues el residual después de dos extracciones es $4 \neq 0$. Es reducible sobre ambos conjuntos.

Para Q, el discriminante es $(-4)^2 - 4\cdot 2\cdot 7 = -40 < 0$. También podemos escribir $Q = 2(x-1)^2 + 5 > 0$ para todo real. No tiene raíces reales ni racionales; el criterio de grado dos demuestra irreducibilidad sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{Q}$. La constante 2 no afecta esa conclusión.

Ejercicio 020. Agrupar antes de evaluar. **Enunciado.** Factorice $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$ y determine todas sus raíces reales.

Solución. Los dos primeros términos contienen x^2 y los dos últimos contienen -9. Por agrupación,

$$P(x) = x^2(2x-1) - 9(2x-1) = (2x-1)(x^2-9) = (2x-1)(x-3)(x+3).$$

La reconstrucción da $2x^3 - x^2 - 18x + 9$. Las raíces son $1/2, 3, -3$ y no hay otras, porque cualquier cero del producto debe anular uno de los tres factores lineales. Son simples al corresponder a tres puntos distintos; todos los factores residuales en cada raíz son no nulos.

Ejercicio 021. Sustitución y dominio de factores. **Enunciado.** Factorice $P(x) = x^4 - 7x^2 + 12$ en irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$. Dé todas sus raíces reales.

Solución. La sustitución $y = x^2$ transforma la expresión en $y^2 - 7y + 12 = (y - 3)(y - 4)$. Volver a x da $P = (x^2 - 3)(x^2 - 4)$.

Sobre $\mathbb{Q}$, $x^2 - 3$ es irreducible: sus candidatos racionales, al ser mónico entero, son $\pm 1, \pm 3$, con valores -2 y 6, ninguno cero. El segundo factor es $(x - 2)(x + 2)$. La descomposición racional es $(x^2 - 3)(x - 2)(x + 2)$.

Sobre $\mathbb{R}$ se obtiene $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 2)(x + 2)$. Las raíces reales son $\pm\sqrt{3}, \pm 2$, distintas y simples. La multiplicación de los dos factores cuadráticos devuelve $x^4 - 7x^2 + 12$ y certifica la identidad.

Ejercicio 022. Factorizar sin raíces reales. **Enunciado.** Descomponga $P(x) = x^4 + 5x^2 + 4$ en irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$, y determine sus raíces reales.

Solución. Tratamos la expresión como una cuadrática en x^2: $y^2 + 5y + 4 = (y + 1)(y + 4)$. Así, $P = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$, cuya multiplicación devuelve la expresión inicial.

Ambos factores son cuadráticos positivos para todo real y tienen discriminantes negativos, -4 y -16. Son irreducibles sobre $\mathbb{R}$ y también sobre $\mathbb{Q}$. Por tanto, la misma expresión es una descomposición en irreducibles en ambos dominios.

El polinomio no tiene raíces reales: el producto de dos números positivos es positivo. Aun sin raíces reales, es reducible porque los dos factores tienen grado positivo.

Ejercicio 023. Construcción con coeficiente principal. **Enunciado.** Construya el polinomio de grado tres y coeficiente principal -4 que tiene raíz simple en 0 y raíz doble en -1. Compruebe las multiplicidades y calcule $P(2)$.

Solución. Los factores exigidos forman el polinomio mónico $H = x(x + 1)^2$, de grado tres. Como el grado pedido ya coincide con el de H, el residual debe ser constante. El coeficiente principal lo fija en -4. Por tanto, el único candidato es $P = -4x(x + 1)^2 = -4x^3 - 8x^2 - 4x$.

En cero, el residual tras extraer x vale $-4(0 + 1)^2 = -4 \neq 0$; la raíz es simple. En -1, después de extraer $(x + 1)^2$, el residual $-4x$ vale $4 \neq 0$; la raíz es doble. Finalmente, $P(2) = -4 \cdot 2 \cdot 3^2 = -72$. El grado y el coeficiente principal también se leen en la forma desarrollada.

Ejercicio 024. Construcción con un valor. **Enunciado.** Construya un polinomio de grado tres con raíz simple en 1, raíz doble en -2 y valor $P(0) = -12$. Justifique la unicidad y las multiplicidades exactas.

Solución. La suma de multiplicidades pedidas es tres, igual al grado. Todo candidato debe ser $P = c(x - 1)(x + 2)^2$, con $c \neq 0$. Evaluar en cero da $-4c = -12$, así que $c = 3$, que fija un único candidato: $P(x) = 3(x - 1)(x + 2)^2 = 3x^3 + 9x^2 - 12$.

En 1, el residual después de extraer $x - 1$ vale $3(1 + 2)^2 = 27 \neq 0$, y la raíz es simple. En -2, el residual tras extraer $(x + 2)^2$ es $3(x - 1)$ y vale $-9 \neq 0$, así que la multiplicidad es dos. El desarrollo confirma el grado y $P(0) = -12$.

Ejercicio 025. Interpolar tres datos. **Enunciado.** Encuentre el polinomio de grado a lo sumo dos que satisface $P(-1) = 4$, $P(0) = 1$ y $P(1) = 0$. Justifique que es único y determine sus raíces reales.

Solución. Escribimos $P = ax^2 + bx + c$, permitiendo que alguno de los coeficientes iniciales sea cero. El dato en cero da $c = 1$. Los otros dos datos se convierten en $a - b = 3$ y $a + b = -1$. Sumarlos da $2a = 2$, por lo que $a = 1$; entonces $b = -2$. Así, $P = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Evaluar en $-1, 0, 1$ devuelve $4, 1, 0$, de modo que el candidato satisface todos los datos. La identificación de §25.5 prueba unicidad porque son tres puntos distintos y el grado está acotado por dos. La única raíz real es 1, doble, pues el residual de $(x - 1)^2$ es 1.

Ejercicio 026. Normalizar factores irreducibles. **Enunciado.** Para $P(x) = (2x - 2)(3x + 3)(x^2 + 2)$, separe el coeficiente principal y escriba factores mónicos irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$. Determine todas sus raíces reales y sus multiplicidades.

Solución. Retiramos las constantes de los factores lineales: $2x-2=2(x-1)$ y $3x+3=3(x+1)$. Por tanto, $P(x)=6(x-1)(x+1)(x^2+2)=6x^4+6x^2-12$.

El coeficiente principal separado es 6. Los factores $x-1$ y $x+1$ son mónicos e irreducibles lineales en ambos conjuntos. El factor x^2+2 es mónico, positivo en todos los reales y tiene discriminante -8; es irreducible real y racional.

Las únicas raíces reales son 1 y -1. En 1, el residual $6(x+1)(x^2+2)$ vale $36\neq 0$; en -1, el residual $6(x-1)(x^2+2)$ vale $-36\neq 0$. Ambas raíces son simples. El producto desarrollado comprueba la normalización y muestra que no se perdió el coeficiente principal.

C. Demostraciones.

Ejercicio 027. Un factor común a partir de valores. **Enunciado.** Sean $P,Q\in K[x]$, con $K=\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, y $a_1,\dots,a_r$ distintos. Prueba que si $P(a_i)=Q(a_i)$ para todo i, entonces $\prod_{i=1}^{r}(x-a_i)$ divide a $P-Q$. Incluye el caso $P=Q$.

Solución. Escribimos $R=P-Q$. Si $R=0$, cualquier polinomio divide a R, pues $0=H\cdot 0$. Si $R\neq 0$, cada a_i es raíz de R. Extraemos $x-a_1$ por el teorema del factor: $R=(x-a_1)R_1$. Para $i>1$, $0=(a_i-a_1)R_1(a_i)$, y $a_i-a_1\neq 0$ permite concluir $R_1(a_i)=0$. Repetimos sobre el cociente con las raíces restantes. Tras r pasos obtenemos $R=\prod_i(x-a_i)S$. La distinción de los puntos justifica cada cancelación. Si $r=0$, el producto vacío es 1 y la afirmación sigue siendo válida.

Ejercicio 028. La cota con multiplicidades. **Enunciado.** Sean $P\neq 0$ en $K[x]$ y $a_1,\dots,a_r$ raíces distintas, de multiplicidades $m_1,\dots,m_r$. Prueba que $\sum_i m_i\le \deg P$ sin suponer que P se descompone completamente en factores lineales.

Solución. Si la lista de raíces es vacía, la suma es cero y la desigualdad se cumple porque P es no nulo y $\deg P\ge 0$. Para una lista no vacía, extraemos $(x-a_1)^{m_1}$ y obtenemos un cociente no nulo. Para $i>1$, el factor extraído tiene multiplicidad cero en a_i, pues allí vale $(a_i-a_1)^{m_1}\neq 0$. La aditividad de multiplicidad de §25.7 muestra que el cociente conserva multiplicidad m_i en a_i. Repetimos con las restantes raíces y obtenemos $P=\prod_i(x-a_i)^{m_i}S$, con $S\neq 0$. Por aditividad del grado, $\deg P=\sum_i m_i+\deg S\ge\sum_i m_i$. El residual puede tener grado positivo y carecer de raíces en K; no fue necesario eliminarlo.

Ejercicio 029. Multiplicidad de una suma. **Enunciado.** Sean $P,Q,P+Q$ no nulos en $K[x]$. Demuestra que $\nu_a(P+Q)\ge \min\{\nu_a(P),\nu_a(Q)\}$ y que hay igualdad si las dos multiplicidades son distintas. Da un ejemplo de desigualdad estricta cuando son iguales.

Solución. Sean $m=\nu_a(P)$ y $n=\nu_a(Q)$; intercambiando los nombres podemos suponer $m\le n$. Escribimos $P=(x-a)^mU$, $Q=(x-a)^nV$, con $U(a),V(a)\neq 0$. Entonces $P+Q=(x-a)^m[U+(x-a)^{n-m}V]$, lo que da la cota porque la suma es no nula. Si $m<n$, el corchete vale $U(a)\neq 0$, así que su multiplicidad es cero y la de la suma es m. Si $m=n$, los valores residuales pueden cancelarse. Por ejemplo, en $a=0$, $P=x$ y $Q=-x+x^2$ tienen multiplicidad 1, pero $P+Q=x^2$ tiene multiplicidad 2. Se excluye la suma cero para no atribuirle una multiplicidad finita.

Ejercicio 030. Escala y multiplicidad. **Enunciado.** Prueba que para $c\in K$, $c\neq 0$, y $P\neq 0$, los polinomios P y cP tienen las mismas raíces y multiplicidades. Explica qué parte cambia al comparar sus valores.

Solución. Para cada $a\in K$, $(cP)(a)=cP(a)$; al ser $c\neq 0$, uno de estos valores es cero si y solo si el otro lo es. Si $P=(x-a)^mU$ con $U(a)\neq 0$, entonces $cP=(x-a)^m(cU)$ y $(cU)(a)\neq 0$. Por la definición de multiplicidad, $\nu_a(cP)=m$. Esto también cubre $m=0$, es decir, un punto que no es raíz. Los valores no nulos se multiplican por c; no se conservan en general. Por ejemplo, $P=x+1$, $c=2$ dan $P(0)=1$ y $(cP)(0)=2$.

Ejercicio 031. Trasladar las raíces. **Enunciado.** Sea $b\in K$ y $P\neq 0$. Define $T(x)=P(x+b)$. Prueba que a es raíz de P de multiplicidad m si y solo si $a-b$ es raíz de T de multiplicidad m.

Solución. Si $P(x) = (x-a)^m U(x)$ y $U(a) \neq 0$, al sustituir $x+b$ obtenemos $T(x) = (x-(a-b))^m U(x+b)$. El residual en $a-b$ vale $U(a) \neq 0$, así que la multiplicidad es exactamente m. El polinomio trasladado es no nulo: la sustitución inversa $x-b$ devuelve P (también conserva el coeficiente principal y el grado). Para la implicación recíproca aplicamos el mismo argumento a $T(x-b) = P(x)$. Las raíces se trasladan por $-b$, no por b.

Ejercicio 032. Unicidad de una construcción mínima. **Enunciado.** Sean $a_i \in K$ distintos y $m_i \geq 1$. Pon $M = \sum_i m_i$ y $c \neq 0$. Prueba que hay un único polinomio de grado M, coeficiente principal c, y multiplicidad al menos m_i en cada a_i. Decide si las multiplicidades pueden ser mayores.

Solución. El polinomio $H = c\prod_i (x-a_i)^{m_i}$ cumple las condiciones: tiene grado M y coeficiente principal c. Su residual en a_i es $c\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)^{m_j} \neq 0$, luego sus multiplicidades son exactamente las prescritas. Si P es otro candidato, la extracción sucesiva de §25.7 da $P = \prod_i (x-a_i)^{m_i} S$. Como $\deg P = M$, S es constante; la condición del coeficiente principal obliga a $S = c$. Por tanto $P = H$. Una multiplicidad mayor haría que la suma excediera el grado M, contradiciendo la cota. Para una lista vacía, $M = 0$ y la única solución es la constante c.

Ejercicio 033. De raíz racional a raíz entera. **Enunciado.** Prueba que toda raíz racional de un polinomio mónico no constante de $\mathbb{Z}[x]$ es entera. Explica por qué no basta que el polinomio tenga coeficientes racionales.

Solución. Sea la raíz p/q escrita en forma reducida, con $q > 0$. Por el teorema de las raíces racionales, q divide al coeficiente principal, que es 1. Por tanto $q = 1$ y la raíz es el entero p. Si el término independiente es cero, podemos extraer primero la potencia de x; la raíz cero es entera y el residual sigue siendo mónico con coeficientes enteros, por lo que el argumento se aplica a las otras raíces. La integridad de los coeficientes es esencial: el polinomio mónico $x - \tfrac{1}{2}$ pertenece a $\mathbb{Q}[x]$ y tiene la raíz no entera $\tfrac{1}{2}$.

Ejercicio 034. Un cúbico y el dominio. **Enunciado.** Sea $P \in K[x]$ de grado 3. Prueba que P es reducible en $K[x]$ si y solo si tiene una raíz en K. Identifica los dos usos del grado.

Solución. Si $a \in K$ es raíz, el teorema del factor da $P = (x-a)Q$, con $\deg Q = 2$; ambos factores tienen grado positivo y esto es una factorización no trivial. Recíprocamente, si $P = AB$ con $\deg A, \deg B \geq 1$, la suma de sus grados es 3. Los únicos pares posibles son $(1,2)$ y $(2,1)$. Uno de los factores es $ux+v$, con $u \neq 0$, y se anula en $-v/u \in K$, donde también se anula P. El grado asegura primero que el cociente no es una unidad y después que una factorización no trivial contiene un lineal. No justifica el mismo criterio en grado cuatro.

Ejercicio 035. Un irreducible que divide un producto. **Enunciado.** Sea $p \in K[x]$ irreducible y supón que $p \mid AB$. Prueba que $p \mid A$ o $p \mid B$ usando Bézout, sin dar por supuesta la factorización única.

Solución. Si $p \mid A$, ya terminamos. En caso contrario, todo divisor común no constante de p y A sería asociado a p: al dividir a p, la irreducibilidad obliga a que su cofactor sea una unidad. Esto implicaría $p \mid A$, contradicción. Así, el máximo común divisor mónico de p y A es 1. Por Bézout de C24 existen $U, V \in K[x]$ tales que $Up + VA = 1$. Multiplicando por B, obtenemos $B = UpB + VAB$. Los dos sumandos son divisibles por p, el segundo por la hipótesis, por lo que $p \mid B$. Si $A = 0$, se cae en el primer caso; si $B = 0$, la conclusión también es inmediata.

Ejercicio 036. Conservar irreducibilidad al trasladar. **Enunciado.** Para $b \in K$ y P no constante, demuestra que $P(x)$ es irreducible en $K[x]$ si y solo si $P(x+b)$ lo es.

Solución. La sustitución $\tau_b : F(x) \mapsto F(x+b)$ conserva sumas, productos y el grado de todo polinomio no nulo: el término principal cx^d se transforma en $c(x+b)^d$, cuyo coeficiente de x^d sigue siendo c, y los otros términos tienen grado menor. Su inversa es τ_{-b}. Si $P = AB$ con ambos factores de grado positivo, entonces $\tau_b(P) = \tau_b(A)\tau_b(B)$ es una factorización no trivial. Si $\tau_b(P) = CD$ con grados positivos, al aplicar τ_{-b} obtenemos $P = C(x-b)D(x-b)$, también no trivial. La equivalencia de reducibilidad, negada para polinomios no constantes, da la de irreducibilidad.

Ejercicio 037. Raíces de un producto y de una potencia. **Enunciado.** Sean $P, Q \neq 0$ en $K[x]$ y $k \geq 1$ entero. Prueba que las raíces de PQ son la unión de las de P y Q, y que $\nu_a(P^k) = k\nu_a(P)$.

Solución. Para $a \in K$, $(PQ)(a) = P(a)Q(a)$. Como K es un cuerpo, un producto de escalares es cero si y solo si uno de ellos lo es; esto prueba la igualdad de conjuntos de raíces. Sea $m = \nu_a(P)$ y escribamos $P = (x-a)^m U$, con $U(a) \neq 0$. Entonces $P^k = (x-a)^{km} U^k$ y $U(a)^k \neq 0$, por lo que la multiplicidad es km. Se incluyen los puntos que no son raíces mediante $m = 0$. La primera afirmación habla de conjuntos y la segunda de multiplicidades: repetir un factor no añade una raíz distinta.

Ejercicio 038. Interpolar sin perder el grado. **Enunciado.** Sean $a_0, \ldots, a_n \in K$ distintos y $y_0, \ldots, y_n \in K$. Prueba existencia y unicidad de un polinomio P de grado a lo sumo n con $P(a_i) = y_i$. Incluye $n = 0$ y los datos todos nulos.

Solución. Para cada i definimos $L_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - a_j)/(a_i - a_j)$; los denominadores son no nulos. Tiene grado a lo sumo n y satisface $L_i(a_k) = 0$ si $k \neq i$, mientras que $L_i(a_i) = 1$. Por tanto $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$ tiene grado a lo sumo n (o es cero) y cumple todos los datos. Si Q es otra solución, $P - Q$ es cero o tiene grado a lo sumo n y $n+1$ raíces distintas. La cota de raíces excluye el segundo caso; así $P = Q$. Para $n = 0$, el producto vacío da $L_0 = 1$ y $P = y_0$. Si todos los datos son cero, la construcción y la unicidad dan el polinomio cero, sin asignarle un grado ordinario.

D. Diagnóstico y reparación.

Ejercicio 039. Tres puntos no siempre bastan. **Enunciado.** Un estudiante dice: «Dos polinomios de grado a lo sumo 3 coinciden en $0, 1, 2$; por tanto son iguales». Localiza el fallo, da un contraejemplo y repara el criterio.

Solución. La diferencia puede tener grado 3 y tres raíces distintas sin ser cero. Tomamos $P = 0$ y $Q = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Coinciden en los tres puntos, pero $Q(3) = 6 \neq 0 = P(3)$. La condición de grado a lo sumo 3 permite el polinomio cero; no se usa su grado como un número. La reparación consiste en pedir coincidencia en cuatro puntos distintos: una diferencia no nula de grado a lo sumo 3 no puede tener cuatro raíces. Alternativamente, con solo esos tres puntos se puede bajar la cota de grado a 2.

Ejercicio 040. Cancelar en una raíz repetida. **Enunciado.** Al partir de $P(a) = 0$ y $P = (x-a)Q$, alguien escribe $0 = (a-a)Q(a)$ y concluye $Q(a) = 0$. Explica el error y la condición correcta para una raíz de multiplicidad al menos dos.

Solución. La igualdad obtenida es $0 = 0 \cdot Q(a)$ y no permite cancelar el factor cero. Por ejemplo, $P = x - 2$, $a = 2$ y $Q = 1$ satisfacen la igualdad, pero $Q(2) = 1$. La condición correcta es $Q(a) = 0$, que debe verificarse por separado. Por el teorema del factor equivale a $Q = (x-a)R$ y, por tanto, a $(x-a)^2 \mid P$. Para multiplicidad exactamente dos hay que exigir además $R(a) \neq 0$; si $R(a) = 0$, puede extraerse otra copia y la multiplicidad es mayor. Se presupone $P \neq 0$ para hablar de multiplicidad finita.

Ejercicio 041. Una lista de candidatos no es una lista de raíces. **Enunciado.** Para $P = 2x^3 + x + 3$, un informe llama raíces a todos los números $\pm 1, \pm 3, \pm \tfrac{1}{2}, \pm \tfrac{3}{2}$. Corrige el informe y determina las raíces racionales.

Solución. El teorema de las raíces racionales solo da candidatos: numeradores divisores de 3 y denominadores positivos divisores de 2. Evaluarlos o extraer un factor es indispensable. Como $P(-1) = 0$, dividimos y obtenemos $P = (x+1)(2x^2 - 2x + 3)$; la expansión recupera $2x^3 + x + 3$. El discriminante del cuadrático es $(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20 < 0$, así que no tiene raíces reales y, en particular, tampoco racionales. La única raíz racional es -1, simple porque el residual en ella vale $7 \neq 0$. La lista inicial es exhaustiva para candidatos, no para raíces verdaderas.

Ejercicio 042. Cambiar el cuerpo cambia la conclusión. **Enunciado.** Se afirma: «$x^2 - 2$ no tiene raíces racionales, luego no puede factorizarse con coeficientes reales». Diagnostica la inferencia y clasifica el polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$.

Solución. La premisa se refiere a $\mathbb{Q}$ y no excluye raíces en un conjunto mayor. Si una raíz racional se escribe p/q reducida con $q > 0$, el carácter mónico exige $q = 1$, y la raíz entera tendría que dividir -2. Los candidatos $\pm 1, \pm 2$ no se anulan. Por el criterio de grado dos, $x^2 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. En $\mathbb{R}[x]$ tenemos $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, una factorización no trivial. Las raíces son distintas, y los dos factores lineales son irreducibles reales. La reparación es indicar el cuerpo en la conclusión: sin raíces racionales implica irreducibilidad racional aquí, por el grado dos.

Ejercicio 043. El criterio de raíces en grado cuatro. **Enunciado.** Un alumno prueba $x^4 + 6x^2 + 8 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y concluye irreducibilidad en $\mathbb{R}[x]$. Conserva la afirmación válida y corrige la conclusión.

Solución. La positividad es válida: $x^4 \geq 0$, $6x^2 \geq 0$ y el término constante es $8 > 0$, así que no hay raíces reales ni factores lineales reales. Pero $x^4 + 6x^2 + 8 = (x^2 + 2)(x^2 + 4)$, como comprueba el producto: $x^4 + (2 + 4)x^2 + 8$. Ambos factores tienen grado dos, de modo que el polinomio es reducible en $\mathbb{R}[x]$ y también en $\mathbb{Q}[x]$. Cada cuadrático es irreducible en ambos cuerpos, pues es positivo en $\mathbb{R}$ y el criterio de grado dos se aplica. La equivalencia entre no tener raíces e irreducibilidad exige grado dos o tres; no se extiende automáticamente a grado cuatro.

Ejercicio 044. Unidades que no cuentan como reducción. **Enunciado.** Se propone que $3x + 1$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$ porque $3x + 1 = 3(x + \frac{1}{3})$, y que 5 es irreducible porque no tiene raíces. Repara ambas clasificaciones según la convención del capítulo.

Solución. Una factorización que demuestra reducibilidad requiere dos factores de grado positivo. El 3 es una unidad en $\mathbb{Q}[x]$, con inversa $1/3$; por tanto la igualdad dada solo cambia la normalización. El polinomio lineal $3x + 1$ es irreducible: si fuera producto de dos factores de grado positivo, su grado sería al menos dos. La constante 5 también es unidad, con inversa $1/5$, y por la convención del capítulo no es ni reducible ni irreducible. No tener raíces no clasifica por sí solo a una unidad. El polinomio cero tampoco pertenece a esas dos clases y sí se anula en todo punto.

Ejercicio 045. Contar multiplicidades sin perder raíces. **Enunciado.** Para $P = (x-1)^2(x+2)^3(x^2+1)$, un registro declara siete raíces reales distintas y multiplicidad 5 en 1. Corrige todas las cantidades y explica cómo se obtienen.

Solución. El grado es $2 + 3 + 2 = 7$, pero ese número no cuenta raíces reales distintas. El residual cuadrático $x^2 + 1$ es positivo en $\mathbb{R}$ y no aporta raíces reales. Las únicas son 1 y -2. En 1, el residual $(x + 2)^3(x^2 + 1)$ vale $3^3 \cdot 2 = 54 \neq 0$, así que la multiplicidad es 2. En -2, el residual $(x - 1)^2(x^2 + 1)$ vale $9 \cdot 5 = 45 \neq 0$, así que la multiplicidad es 3. Hay dos raíces reales distintas y suma de multiplicidades $5 \leq 7$. El 5 suma multiplicidades en puntos distintos, no la multiplicidad de una raíz individual; no es preciso introducir otras clases de números para explicar el residual.

Ejercicio 046. Extraer cero antes del término independiente. **Enunciado.** Para $P = 3x^4 - 6x^3 = 3x^3(x - 2)$, se escribe: «El término independiente es cero; todos los racionales son candidatos y no se puede completar la búsqueda». Corrige el procedimiento y da multiplicidades.

Solución. El término independiente nulo indica que debe extraerse primero la potencia de x. Aquí la extracción ya está hecha: $P = x^3(3x - 6)$. El residual tiene valor $-6 \neq 0$ en cero, así que 0 tiene multiplicidad exactamente 3. Las otras raíces deben anular $3x - 6$, cuya única raíz es 2. Allí $3x^3$ vale $24 \neq 0$, por lo que la raíz es simple. La lista completa de raíces racionales y reales es $\{0, 2\}$. Para un residual de mayor grado y término independiente no nulo, se aplica entonces el teorema de las raíces racionales a sus coeficientes enteros; no se intenta crear una lista finita usando divisores de cero.

Ejercicio 047. Un coeficiente principal omitido. **Enunciado.** Un registro sustituye $P = 6x^2 - 6$ por $Q = (x-1)(x+1)$ y declara tanto «mismas raíces» como «mismos valores». Decide qué se conserva y repara la factorización normalizada.

Solución. Al expandir, $Q = x^2 - 1$ y $P = 6Q$. Como $6 \neq 0$, los dos polinomios tienen las mismas raíces $1, -1$, ambas simples. No tienen los mismos valores: $P(0) = -6$, mientras que $Q(0) = -1$. La factorización exacta es $P = 6(x-1)(x+1)$; el escalar 6 conserva el coeficiente principal original, mientras que los factores irreducibles lineales están normalizados como mónicos. Quitar una unidad no altera raíces, multiplicidades o reducibilidad, pero sí la identidad del polinomio y cualquier dato de valor no nulo.

Ejercicio 048. Aplicar la cota al polinomio cero. **Enunciado.** Se deduce: «El polinomio cero tiene infinitas raíces; esto contradice que un polinomio tiene a lo sumo tantas raíces como su grado». Identifica la hipótesis omitida y da una formulación válida para un polinomio de grado a lo sumo n que se anula en $n+1$ puntos distintos.

Solución. La cota exige que el polinomio sea no nulo; el polinomio cero no tiene un grado ordinario al que aplicar esa desigualdad. No hay contradicción: se anula en todos los puntos, pero queda fuera de la hipótesis del teorema. La formulación válida es: si P es cero o tiene grado a lo sumo n, con $n \geq 0$, y $P(a_i) = 0$ en $n+1$ puntos distintos, entonces $P = 0$. En efecto, suponer $P \neq 0$ permitiría aplicar la cota y daría $n+1 \leq \deg P \leq n$, imposible. Esta prueba no asigna un grado al cero y cubre también $n = 0$, donde una constante no nula no puede anularse.

Ejercicio 049. Una construcción con grado incorrecto. **Enunciado.** Se busca un polinomio de grado 3, coeficiente principal 2, raíz 1 doble y raíz -1 simple. Se propone $P = 2(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$ para «asegurar que no haya más raíces reales». Diagnostica y repara.

Solución. La propuesta tiene grado $2+1+2 = 5$, no 3. Aunque x^2+1 no aporta raíces reales, sí aumenta el grado. El factor mínimo exigido por las multiplicidades es $(x-1)^2(x+1)$, ya de grado tres, así que el residual debe ser constante y el coeficiente principal lo fija en 2. La única solución es $H = 2(x-1)^2(x+1) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$. En 1, el residual $2(x+1)$ vale $4 \neq 0$; en -1, el residual $2(x-1)^2$ vale $8 \neq 0$. Las multiplicidades son exactamente dos y uno. Toda raíz real de H anula uno de esos factores, de modo que no hace falta añadir un residual para impedir raíces adicionales.

Ejercicio 050. Un parámetro excepcional olvidado. **Enunciado.** Para $P_t = (x^2-1)(x^2-t)$, con $t \in \mathbb{R}$, un informe dice: «Cuando $t \geq 0$, las cuatro raíces reales son siempre distintas y simples». Corrige la afirmación, incluyendo también $t < 0$.

Solución. Si $t < 0$, $x^2 - t > 0$ en $\mathbb{R}$, así que solo hay raíces $1, -1$, ambas simples: el otro factor vale $1 - t \neq 0$ allí. Si $t = 0$, $P_0 = x^2(x-1)(x+1)$; hay tres raíces distintas, 0 doble y ± 1 simples. Si $t > 0$ y $t \neq 1$, las raíces $1, -1, \sqrt{t}, -\sqrt{t}$ son cuatro puntos distintos y cada lineal aparece una sola vez; por tanto son simples. Si $t = 1$, $P_1 = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$, con solo dos raíces distintas, ambas dobles. La reparación separa la aparición de la raíz cero y la coincidencia de los factores; el grado cuatro se mantiene en todos los casos, pero no obliga a cuatro raíces reales distintas.

E. Transferencia y elección de estrategia.

Ejercicio 051. Separar los casos de un parámetro. **Enunciado.** Para $t \in \mathbb{R}$, clasifica las raíces reales y sus multiplicidades de $P_t = x^2 - 2tx + 1$. Determina cuándo es irreducible en $\mathbb{R}[x]$. Si $t \in \mathbb{Q}$, expresa además un criterio de irreducibilidad en $\mathbb{Q}[x]$.

Solución. El discriminante es $4(t^2-1)$. Si $|t| < 1$, es negativo: no hay raíces reales y el cuadrático es irreducible real. Si $t = 1$, $P_t = (x-1)^2$; si $t = -1$, $P_t = (x+1)^2$: en ambos casos hay una raíz doble y reducibilidad. Si $|t| > 1$, hay dos raíces distintas $t \pm \sqrt{t^2-1}$, ambas simples, y la factorización real es el producto de sus dos lineales mónicos. Para t racional, el criterio de grado dos dice que es reducible racional si y solo si una de esas raíces es racional. Esto equivale a que $t^2 - 1$ sea un cuadrado de un racional: si la raíz r es racional, $(r-t)^2 =$

t^2-1; si $t^2-1=u^2$ con $u\in\mathbb{Q}$, $t\pm u$ son raíces racionales. Cuando $t^2-1<0$, no puede ser un cuadrado racional. La igualdad a cero sí cuenta como cuadrado y produce la raíz doble.

Ejercicio 052. Reconstruir con un valor y un coeficiente. **Enunciado.** Determina todos los polinomios reales de grado 4, coeficiente principal 3, con raíz -1 de multiplicidad exactamente dos, raíz 2 simple y valor $P(0)=8$. Decide si aparecen otras raíces reales.

Solución. Las condiciones de divisibilidad dan $P=(x+1)^2(x-2)Q$. Por el grado, Q es lineal; por el coeficiente principal, $Q=3x+b$. Como $(0+1)^2(0-2)=-2$, el dato $P(0)=8$ da $-2b=8$, es decir, $b=-4$. El único candidato es $P=(x+1)^2(x-2)(3x-4)$. En -1, el residual vale $(-3)(-7)=21\neq 0$, así que la multiplicidad es exactamente dos. En 2, vale $9\cdot 2=18\neq 0$, luego es simple. El residual lineal añade la raíz $4/3$, distinta de las anteriores y simple porque $(4/3+1)^2(4/3-2)\neq 0$. No hay otras: anular el producto exige anular uno de los factores. Esta verificación de los residuales es necesaria; la divisibilidad inicial solo garantizaba multiplicidades mínimas.

Ejercicio 053. Un dato que fija un parámetro. **Enunciado.** Sea $P_t=x^3-3x+t$ con $t\in\mathbb{R}$. Encuentra el valor de t para el cual 2 es raíz, y certifica todas las raíces y multiplicidades de ese polinomio.

Solución. Evaluar en 2 da $P_t(2)=8-6+t=2+t$, por lo que la condición equivale a $t=-2$. Dividimos entonces x^3-3x-2 por $x-2$ y obtenemos el cociente $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Así $P_{-2}=(x-2)(x+1)^2$. La expansión da x^3-3x-2, lo que comprueba la identidad. En 2, el residual $(x+1)^2$ vale $9\neq 0$: raíz simple. En -1, el residual $x-2$ vale $-3\neq 0$: raíz doble. El producto no se anula en ningún otro real; por tanto la lista es completa, y sus multiplicidades suman el grado tres.

Ejercicio 054. Una sustitución cúbica útil. **Enunciado.** Factoriza $P=x^6-7x^3-8$ en irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$ y de $\mathbb{R}[x]$. Determina sus raíces reales sin usar resultados generales sobre polinomios de grado impar.

Solución. La forma sugiere $y=x^3$: $y^2-7y-8=(y-8)(y+1)$. Por tanto $P=(x^3-8)(x^3+1)$. Las identidades de cubos dan $P=(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$. Sus cuadráticos tienen discriminantes $4-16=-12$ y $1-4=-3$, respectivamente; son irreducibles reales y también racionales. Los factores lineales son irreducibles en ambos cuerpos, así que esta expresión sirve en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$. Las únicas raíces reales son 2 y -1. En 2, el residual vale $12\cdot 3\cdot 3=108\neq 0$; en -1, vale $(-3)\cdot 3\cdot 3=-27\neq 0$. Ambas son simples. El producto inicial se verifica como $x^6+(1-8)x^3-8$, sin buscar seis raíces ni presuponer que todo factor se vuelve lineal.

Ejercicio 055. Comprobar la compatibilidad de datos. **Enunciado.** ¿Existe un polinomio de grado a lo sumo 2 que satisfaga $P(0)=1$, $P(1)=2$, $P(2)=5$ y $P(3)=11$? Resuelve también el problema si se permite grado a lo sumo 3.

Solución. Los primeros tres datos los satisface $Q=x^2+1$. Es la única solución de grado a lo sumo dos para esos datos: la diferencia de dos soluciones se anularía en tres puntos distintos y, por la cota, sería cero. Pero $Q(3)=10\neq 11$, así que los cuatro datos son incompatibles con grado a lo sumo dos. Para grado a lo sumo tres, cualquier solución difiere de Q en un múltiplo de $x(x-1)(x-2)$, por las tres coincidencias. La cota de grado obliga a que el múltiplo sea constante: $P=Q+c\,x(x-1)(x-2)$. En 3, $11=10+6c$, de donde $c=1/6$. Resulta $P=x^2+1+\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$. Cumple los cuatro valores y es único, pues dos cúbicos que coincidan en cuatro puntos son iguales.

Ejercicio 056. Certificar una diferencia entre cuerpos. **Enunciado.** Clasifica $P=x^2-6x+3$ en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$. Da en cada caso una factorización en irreducibles y determina las raíces reales.

Solución. El discriminante es $36-12=24$. Las raíces reales son $3\pm\sqrt{6}$, distintas, y $P=(x-(3+\sqrt{6}))(x-(3-\sqrt{6}))$ es la factorización en irreducibles reales mónicos. En $\mathbb{Q}[x]$, al ser mónico entero, toda raíz racional tendría que ser entera y dividir a 3: los candidatos son ±1, ±3. Los valores respectivos son $-2, 10, -6, 30$, todos no nulos. Por el criterio de grado dos, P

es irreducible racional, así que él mismo es su factor irreducible mónico. La ausencia de raíces racionales no elimina las dos raíces reales; cada una es simple porque en la factorización real el otro lineal tiene allí valor no nulo.

Ejercicio 057. Un residual que no se puede omitir. **Enunciado.** Determina el polinomio real de grado 5, coeficiente principal 2, con multiplicidad al menos dos en 1 y en -1, y con $P(0) = 6$. Comprueba las multiplicidades exactas y cualquier raíz adicional.

Solución. El producto impuesto es $H = (x-1)^2(x+1)^2 = (x^2-1)^2$, mónico de grado cuatro. Debe ser $P = H(2x+b)$; el grado y el coeficiente principal fijan la pendiente. Como $H(0) = 1$, el dato exige $b = 6$. Así $P = 2(x-1)^2(x+1)^2(x+3)$, y la construcción es única. En 1, el residual $2(x+1)^2(x+3)$ vale $32 \neq 0$; en -1, $2(x-1)^2(x+3)$ vale $16 \neq 0$. Esas raíces son exactamente dobles. La raíz adicional es -3, simple porque $2((-3)^2-1)^2 = 128 \neq 0$. No hay más raíces reales, y $2+2+1 = 5$ confirma que las multiplicidades consumen todo el grado. No habría sido correcto usar solo $2H$, que tiene grado cuatro y valor 2 en cero.

Ejercicio 058. Factorizar una suma positiva. **Enunciado.** El polinomio x^4+4 es positivo en $\mathbb{R}$. Encuentra una factorización no trivial con coeficientes racionales y decide si sus factores son irreducibles racionales y reales.

Solución. Completamos un cuadrado: $x^4+4 = (x^2+2)^2-(2x)^2$. La diferencia de cuadrados produce $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. Cada factor es un cuadrático mónico con discriminante $4-8 = -4 < 0$, por lo que es irreducible en $\mathbb{R}[x]$; al no tener raíces racionales también es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. La factorización es no trivial en ambos cuerpos, y el producto se comprueba como $(x^2+2)^2 - 4x^2 = x^4+4$. La positividad excluye raíces reales y factores lineales reales; no excluye factores cuadráticos.

Ejercicio 059. Cuánto informa una tabla de valores. **Enunciado.** Una tabla contiene $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(2) = 8$, $P(3) = 27$. Determina P bajo la condición $\deg P \leq 3$, y describe todos los polinomios de grado a lo sumo 4 que cumplen la tabla.

Solución. El polinomio x^3 cumple los cuatro valores. Cualquier otro de grado a lo sumo tres tendría diferencia de grado a lo sumo tres con cuatro raíces distintas, y esa diferencia sería cero. Por tanto $P = x^3$. Para la cota cuatro, $P - x^3$ se anula en $0, 1, 2, 3$, así que es divisible por $H = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Si la diferencia no es cero, el grado permite solo un cociente constante. Incluyendo también la diferencia cero, todas las soluciones son $P = x^3 + cH$, con $c \in \mathbb{R}$ (o $c \in \mathbb{Q}$ si se exigen coeficientes racionales). La sustitución en los cuatro puntos verifica la familia. Para $c = 0$ tiene grado tres; para $c \neq 0$, grado cuatro. Sin una cota de grado, el cociente podría ser cualquier polinomio del cuerpo elegido.

Ejercicio 060. Una condición que aumenta la multiplicidad. **Enunciado.** Describe los polinomios reales mónicos de grado cuatro con raíz 0 exactamente doble y raíz 1 exactamente simple. Decide si alguno cumple $P(2) = 8$, y si alguno cumple $P(2) = 12$.

Solución. La divisibilidad impone $P = x^2(x-1)(x+b)$, pues el residual es lineal mónico. En cero, el residual $(x-1)(x+b)$ vale $-b$; la multiplicidad es exactamente dos si y solo si $b \neq 0$. En uno, el residual $x^2(x+b)$ vale $1+b$; la multiplicidad es exactamente uno si y solo si $b \neq -1$. La familia buscada corresponde a $b \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Ahora $P(2) = 4(2+b)$. El valor 8 obliga a $b = 0$, excluido: produce $x^3(x-1)$ y multiplicidad tres en cero. El valor 12 obliga a $b = 1$, admisible: la única solución es $x^2(x-1)(x+1)$. Sus residuales en cero y uno son -1 y 2, respectivamente, y su valor en dos es 12.

F. Integración universitaria.

Ejercicio 061. Certificar un cuártico por extracción. **Enunciado.** Factoriza $P = 6x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 4$ en irreducibles racionales y reales. Determina todas sus raíces reales y sus multiplicidades.

Solución. Como el término independiente es no nulo, una raíz racional reducida p/q debe satisfacer $p \mid 4$ y $q \mid 6$. Probamos $-1/2$, que da $3/8 + 7/8 + 11/4 - 4 = 0$, y extraemos $2x+1$. La división da $P = (2x+1)(3x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$. El cociente se anula en $2/3$: $8/9 - 20/9 +$

$16/3 - 4 = 0$. Extraer $3x - 2$ deja $x^2 - x + 2$. Obtenemos $P = (2x + 1)(3x - 2)(x^2 - x + 2)$. La expansión de $(6x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)$ confirma todos los coeficientes. El cuadrático tiene discriminante $1 - 8 = -7 < 0$, por lo que es irreducible en ambos cuerpos y no aporta raíces reales. Las únicas raíces son $-1/2$ y $2/3$, ambas simples: los otros dos factores no se anulan en ellas. En normalización mónica la factorización es $6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})(x^2 - x + 2)$. No es necesario evaluar todos los candidatos una vez que el residual queda certificado.

Ejercicio 062. Una raíz que reaparece en el cociente. **Enunciado.** Resuelve $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$ en $\mathbb{R}$, indicando multiplicidades y una factorización irreducible racional. Justifica que no quedan raíces pendientes.

Solución. Agrupamos como $(x - 1)(x^4 - 5x^2 + 4)$. Para el cuártico, la sustitución $y = x^2$ da $y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4)$. Así el polinomio es $(x - 1)(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 2)(x + 2)$. La expansión de la primera agrupación reproduce el enunciado. Todos los lineales son mónicos e irreducibles racionales y reales. La raíz 1 es doble: su residual $(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ vale $-6 \neq 0$ allí. En $-1, 2, -2$, cada residual es producto de factores lineales no nulos, por lo que esas tres raíces son simples. Ningún otro real anula el producto. La suma $2 + 1 + 1 + 1 = 5$ coincide con el grado; contar una sola vez la raíz 1 tras la primera extracción habría perdido su segunda aparición.

Ejercicio 063. Una familia con una raíz doble impuesta. **Enunciado.** Para $P_{a,b} = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$, determina cuándo -1 tiene multiplicidad al menos dos. En esa familia, clasifica todas las raíces reales y sus multiplicidades según a.

Solución. La condición de raíz en -1 es $2 - 2a + b = 0$, es decir, $b = 2a - 2$. Para ese valor se verifica por expansión $P_{a,2a-2} = (x + 1)^2[x^2 + (a - 2)x + 1]$. Por tanto la sola condición de raíz ya fuerza multiplicidad al menos dos, y también demuestra la suficiencia. El residual R_a vale $4 - a$ en -1 y tiene discriminante $a(a - 4)$. Si $0 < a < 4$, ese discriminante es negativo: la única raíz real es -1, doble. Si $a < 0$ o $a > 4$, R_a tiene dos raíces reales distintas $[2 - a \pm \sqrt{a(a - 4)}]/2$, diferentes de -1 porque $a \neq 4$; ambas son simples y -1 es doble. Si $a = 0$, $R_a = (x - 1)^2$, así que $P = (x + 1)^2(x - 1)^2$: las dos raíces son dobles. Si $a = 4$, $R_a = (x + 1)^2$ y $P = (x + 1)^4$: solo -1, de multiplicidad cuatro. Estos casos cubren todos los parámetros; no se necesita derivar para verificar la raíz repetida.

Ejercicio 064. Dos cuerpos y una potencia par. **Enunciado.** Factoriza $x^4 - 9$ en irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$. Explica por qué una factorización completa en el primer cuerpo puede seguir descomponiéndose en el segundo.

Solución. La diferencia de cuadrados da $x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$. El segundo cuadrático tiene discriminante -12, por lo que es irreducible real y racional. Para el primero, una raíz racional sería un entero divisor de 3; los candidatos $\pm 1, \pm 3$ dan -2 u 6, nunca cero. Así $x^2 - 3$ es irreducible racional y la expresión inicial es una factorización en irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$. En $\mathbb{R}[x]$, $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, y la factorización completa es $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$. Sus únicas raíces reales son $\pm\sqrt{3}$, simples: son distintas y $x^2 + 3$ vale $6 \neq 0$ allí. Irreducibilidad significa imposibilidad de factorización dentro del cuerpo especificado; al ampliar el cuerpo aparecen coeficientes antes no disponibles.

Ejercicio 065. Reconstrucción con control de una desigualdad. **Enunciado.** Busca un polinomio real de grado a lo sumo cuatro que tenga multiplicidad al menos dos en 1, raíz -2, $P(0) = 4$ y $P(2) = 0$. Decide si es único y determina sus multiplicidades.

Solución. Como $P(0) = 4$, el polinomio es no nulo. La condición $P(2) = 0$ añade una raíz distinta de 1 y -2. El producto $H = (x - 1)^2(x + 2)(x - 2)$, de grado cuatro, divide a P. La cota de grado obliga a $P = cH$. En cero, $H(0) = -4$, así que $c = -1$. La única solución es $P = -(x - 1)^2(x + 2)(x - 2) = -(x - 1)^2(x^2 - 4)$. Los residuales son no nulos: en 1, $-(1^2 - 4) = 3$; en -2, $-(-2 - 1)^2(-2 - 2) = 36$; en 2, $-(2 - 1)^2(2 + 2) = -4$. Por tanto las multiplicidades son dos, uno y uno, respectivamente, y no hay más raíces reales. Los datos consumen el grado máximo; aumentar alguna multiplicidad sería incompatible con esa cota y con $P \neq 0$.

Ejercicio 066. Interpolación con un resto conocido. **Enunciado.** Determina el polinomio de grado a lo sumo tres que cumple $P(-1) = 3$, $P(0) = 2$, $P(1) = 3$ y deja resto 12 al dividir por $x - 2$. Factoriza el resultado en irreducibles racionales y reales.

Solución. El resto al dividir por $x - 2$ es $P(2)$, así que el cuarto dato es $P(2) = 12$. El polinomio $Q = x^2 + 2$ satisface los tres primeros datos. Por divisibilidad de la diferencia en puntos distintos, todo candidato de grado a lo sumo tres es $P = Q + c(x+1)x(x-1)$. Evaluar en dos da $12 = 6 + 6c$, por lo que $c = 1$. Así $P = x^3 + x^2 - x + 2$. Sus valores en los cuatro puntos son $3, 2, 3, 12$, y la cota de raíces asegura unicidad. Para factorizar, observamos que $P(-2) = -8 + 4 + 2 + 2 = 0$; la división da $P = (x + 2)(x^2 - x + 1)$. Expandir confirma la identidad. El discriminante del residual es $1 - 4 = -3 < 0$, de modo que es irreducible real y racional; el lineal también es irreducible en ambos cuerpos. La única raíz real es -2, simple porque el residual allí vale $7 \neq 0$.

Ejercicio 067. Traslado y repetición de un factor. **Enunciado.** Factoriza $P = [(x - 3)^2 - 2]^2(x - 2)$ en irreducibles racionales y reales. Determina todas sus raíces reales y multiplicidades.

Solución. El cuadrático $A = (x-3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7$ es un traslado de $x^2 - 2$, irreducible racional. En efecto, $x^2 - 2$ no tiene raíces racionales (los candidatos enteros $\pm 1, \pm 2$ fallan), y una factorización no trivial de su traslado, al sustituir $x + 3$, daría una del original. Así $P = (x^2 - 6x + 7)^2(x - 2)$ ya está factorizado en irreducibles racionales mónicos. Sobre $\mathbb{R}$, $A = (x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))$, por lo que los dos lineales aparecen al cuadrado en P. Las raíces $3 \pm \sqrt{2}$ son distintas y no son 2: si alguna lo fuera, tendríamos $\sqrt{2} = 1$ o -1, imposible. Por tanto tienen multiplicidad dos. La raíz 2 es simple porque $A(2)^2 = (-1)^2 = 1 \neq 0$. Estas tres raíces agotan el producto; la suma de multiplicidades es $2 + 2 + 1 = 5 = \deg P$.

Ejercicio 068. Encontrar un divisor común con multiplicidades. **Enunciado.** En $\mathbb{Q}[x]$, sean $P = (x - 1)^3(x + 2)(x^2 + 1)$ y $Q = (x - 1)^2(x + 2)^2(x^2 + 2)$. Determina su máximo común divisor mónico y justifica que ningún factor falta.

Solución. Los lineales son irreducibles racionales; $x^2 + 1$ y $x^2 + 2$ son irreducibles por no tener raíces reales, en particular racionales. Son mónicos distintos, de modo que no son asociados, y ninguno es asociado a un lineal por su grado. Por unicidad de la factorización de §25.15, un divisor común solo puede usar irreducibles presentes en ambos productos, con exponentes no mayores que los de cada uno. Los mínimos son dos para $x - 1$ y uno para $x + 2$. Así $D = (x - 1)^2(x + 2)$ divide a ambos: $P/D = (x - 1)(x^2 + 1)$ y $Q/D = (x + 2)(x^2 + 2)$. Cualquier divisor común divide a D por esos límites de exponentes, lo que prueba la propiedad de máximo común divisor. La normalización mónica elimina la libertad de multiplicar por una constante no nula. En $\mathbb{R}[x]$ los dos cuadráticos también permanecen irreducibles, por lo que el mismo D sigue sirviendo.

Ejercicio 069. Irreducibilidad y un certificado de Bézout. **Enunciado.** Para $P = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, prueba irreducibilidad racional y construye una identidad de Bézout entre P y $x - 1$. Deduce que si $P \mid (x - 1)R$ para $R \in \mathbb{Q}[x]$, entonces $P \mid R$.

Solución. Como P es mónico entero y su término independiente es 1, sus únicos candidatos racionales son 1 y -1. Pero $P(1) = -1$ y $P(-1) = 3$. No tiene raíz racional, y el criterio de grado tres da irreducibilidad en $\mathbb{Q}[x]$. La división por $x - 1$ produce $P = (x-1)(x^2 + x - 2) - 1$. Reordenando, $(x^2 + x - 2)(x - 1) - P = 1$, una identidad de Bézout explícita. Multiplicamos por R y obtenemos $R = (x^2 + x - 2)(x - 1)R - PR$. Si P divide a $(x - 1)R$, divide a los dos términos del lado derecho y, por tanto, a R. Esta última conclusión está certificada directamente por la identidad, sin suponer factorización única ni cancelar divisibilidad de manera informal. No se infiere irreducibilidad real de la ausencia de raíces racionales.

Ejercicio 070. Eliminar denominadores y normalizar. **Enunciado.** Sea $P = \frac{1}{12}(3x - 2)^2(2x + 1)(x^2 + 2)$. Da su grado y coeficiente principal, determina sus raíces reales y multiplicidades, y escribe la factorización en irreducibles mónicos de $\mathbb{Q}[x]$ con la unidad correspondiente. Explica qué cambia al pasar a $12P$.

Solución. Los grados suman $2+1+2=5$ y el coeficiente principal es $(1/12)\cdot 9\cdot 2 = 3/2$. Sacar los coeficientes principales de los lineales da $P=\frac{3}{2}(x-\frac{2}{3})^2(x+\frac{1}{2})(x^2+2)$. El cuadrático tiene discriminante -8 y es irreducible racional y real; los lineales son irreducibles. Las únicas raíces reales son $2/3$ y $-1/2$, de multiplicidades dos y uno respectivamente: el otro lineal no se anula en cada punto y $x^2+2>0$. La unidad de la normalización es $3/2$. Multiplicar por 12 elimina denominadores, conserva raíces y multiplicidades, pero multiplica todos los valores por 12 y cambia el coeficiente principal a 18. Por ejemplo, $P(0)=2/3$ y $(12P)(0)=8$. El residual cuadrático explica por qué la suma de multiplicidades reales es tres aunque el grado sea cinco.

Ejercicio 071. Una identidad determinada por cinco datos. **Enunciado.** Sean $P,Q\in\mathbb{R}[x]$ de grado a lo sumo cuatro. Supón que coinciden en $-2,-1,0,1$ y que $P(2)-Q(2)=24$. Determina $P-Q$ y decide si puede tener una raíz adicional a los cuatro puntos de coincidencia.

Solución. La diferencia $R=P-Q$ es divisible por $H=(x+2)(x+1)x(x-1)$, debido a las cuatro raíces distintas. Como $R(2)=24\neq 0$, no es cero; la cota de grado fuerza $R=cH$, con c constante. En dos, $H(2)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$, así que $c=1$ y $R=H$. La expansión da $R=x^4+2x^3-x^2-2x$, y la evaluación en los cinco puntos confirma los datos. Sus cuatro raíces son simples, porque en cada una el producto de los otros tres factores es no nulo. No hay ninguna raíz real adicional: un producto de los cuatro lineales solo puede anularse en sus cuatro puntos, o bien la cota excluiría una quinta raíz para este polinomio no nulo de grado cuatro. Los datos fijan la diferencia, no fijan P y Q individualmente.

Ejercicio 072. Cuántas raíces certifica una forma mixta. **Enunciado.** Para $P=(x^2-2)^2(x^2+1)(x-1)\in\mathbb{Q}[x]$, determina grado, raíces racionales, raíces reales y multiplicidades. Da las factorizaciones en irreducibles racionales y reales y explica qué parte del grado no aparece en el conteo de raíces reales.

Solución. El grado es $4+2+1=7$ y el polinomio es mónico. En $\mathbb{Q}[x]$, x^2-2 es irreducible porque los candidatos racionales enteros $\pm1,\pm2$ no se anulan; x^2+1 es irreducible porque no tiene raíces reales. Por tanto la forma dada es la factorización en irreducibles racionales. Su única raíz racional es 1, simple: el residual allí vale $(1-2)^2(1+1)=2\neq 0$. En $\mathbb{R}[x]$ se obtiene $P=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2(x^2+1)(x-1)$. Las raíces $\sqrt{2},-\sqrt{2},1$ son distintas; las dos primeras son dobles y la tercera simple, pues sus residuales no se anulan. No hay más raíces reales por la positividad de x^2+1 y la propiedad de un producto. La suma de multiplicidades reales es cinco; los dos grados restantes corresponden al factor cuadrático sin raíces reales. No se atribuyen esas dos unidades de grado a raíces que no han sido introducidas en el capítulo.

G. Síntesis avanzada.

Ejercicio 073. Reconstrucción y libertad residual. **Enunciado.** Determina todos los polinomios reales mónicos de grado cinco con raíz 0 exactamente doble, raíz 1 exactamente simple y $P(-1)=4$. Para cada solución, certifica cuántas raíces reales distintas tiene y sus multiplicidades. Decide además si el dato $P(2)=12$ selecciona una única solución.

Solución. Las multiplicidades mínimas fuerzan $P=x^2(x-1)Q$; el grado y la normalización exigen $Q=x^2+ux+v$. En -1, el factor inicial vale -2, por lo que $-2(1-u+v)=4$, es decir, $v=u-3$. Así los candidatos son $P_u=x^2(x-1)(x^2+ux+u-3)$. La multiplicidad en cero es exactamente dos si $Q(0)=u-3\neq 0$; en uno es exactamente uno si $Q(1)=2u-2\neq 0$. La familia buscada corresponde, por tanto, a $u\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$, y cada miembro cumple también el valor en -1.

El discriminante de Q es $u^2-4(u-3)=(u-2)^2+8>0$, de modo que añade dos raíces reales distintas $r_\pm=[-u\pm\sqrt{(u-2)^2+8}]/2$. Las exclusiones de u aseguran que ninguna coincide con cero o uno. Cada una es simple porque el otro lineal de Q, así como $x^2(x-1)$, tiene allí valor no nulo. Hay cuatro raíces reales distintas: cero doble y las otras tres simples; la suma de multiplicidades es cinco.

Finalmente, $P_u(2) = 4(4 + 2u + u - 3) = 4(1 + 3u)$. El valor 12 exige $u = 2/3$, que no está excluido. Selecciona la única solución $x^2(x-1)(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{7}{3})$. Las verificaciones anteriores demuestran que el nuevo dato no altera las multiplicidades exigidas.

Ejercicio 074. Parámetros y coincidencia de raíces. **Enunciado.** Para $t \in \mathbb{R}$, clasifica todas las raíces reales de $P_t = (x^2 - t)(x^2 - 2tx + 1)$ y sus multiplicidades. Justifica exhaustivamente los valores del parámetro en que raíces de los dos factores pueden coincidir.

Solución. Analizamos primero cada cuadrático. El factor $A_t = x^2 - t$ no tiene raíces reales si $t < 0$, tiene cero doble si $t = 0$, y raíces simples $\pm\sqrt{t}$ si $t > 0$. El factor $B_t = x^2 - 2tx + 1$ tiene discriminante $4(t^2 - 1)$: sin raíces si $|t| < 1$, raíz doble -1 si $t = -1$, raíz doble 1 si $t = 1$, y dos raíces simples $t \pm \sqrt{t^2 - 1}$ si $|t| > 1$.

Solo con $t > 0$ es posible una coincidencia real entre factores, pues $B_0(0) = 1$. Si r es común, $r^2 = t$ y $r^2 - 2tr + 1 = 0$, de donde $r = (t + 1)/(2t)$. Al elevar al cuadrado se obtiene $4t^3 = (t + 1)^2$, o bien $(t - 1)(4t^2 + 3t + 1) = 0$. El segundo factor es $4(t + 3/8)^2 + 7/16 > 0$, así que necesariamente $t = 1$. Para ese valor, $r = 1$ sí es común. Esta sustitución comprueba la suficiencia, pues elevar al cuadrado por sí solo no la garantiza.

La clasificación completa es la siguiente. Si $t < -1$, las únicas raíces son $t \pm \sqrt{t^2 - 1}$, simples. Si $t = -1$, solo -1, doble. Si $-1 < t < 0$, no hay raíces reales. Si $t = 0$, solo cero, doble. Si $0 < t < 1$, las únicas raíces son $\pm\sqrt{t}$, simples. Si $t = 1$, $P_1 = (x - 1)^3(x + 1)$: uno triple y menos uno simple. Si $t > 1$, las cuatro raíces $\pm\sqrt{t}$ y $t \pm \sqrt{t^2 - 1}$ son distintas y simples por la exclusión de coincidencias. En los casos sin coincidencia, el otro factor es no nulo en cada raíz, de modo que no cambia su multiplicidad. Anular el producto exige anular un factor, lo que certifica que ninguna raíz real falta.

Ejercicio 075. Irreducibilidad de una cuártica por coeficientes. **Enunciado.** Decide si $P = x^4 + 2x^2 + 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$. Justifica cada conclusión y da una factorización real en irreducibles si existe.

Solución. Como $P = (x^2 + 1)^2 + 1 > 0$ para todo real, no tiene raíces reales ni racionales. Esto excluye factores lineales, pero todavía permite una descomposición de grados dos y dos. Si fuera reducible racional, podemos absorber las unidades y tomar ambos cuadráticos mónicos, pues P es mónico. El coeficiente cúbico cero obliga a una expresión $(x^2 + ux + v)(x^2 - ux + w)$ con $u, v, w \in \mathbb{Q}$. Comparar coeficientes da $v + w - u^2 = 2$, $u(w - v) = 0$ y $vw = 2$.

Si $u = 0$, se exige $v + w = 2$ y $vw = 2$, de modo que v, w serían raíces reales de $z^2 - 2z + 2$, imposible porque su discriminante es -4. Si $u \neq 0$, entonces $w = v$ y $v^2 = 2$. Esta última ecuación no tiene solución racional: el polinomio mónico entero $z^2 - 2$ solo admite como candidatos racionales $\pm 1, \pm 2$, y ninguno es raíz. Quedan excluidas todas las factorizaciones racionales no triviales; P es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

En $\mathbb{R}[x]$ tomamos $v = w = \sqrt{2}$ y $u = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$, que existe y es positivo porque $\sqrt{2} > 1$. Entonces

$$P = (x^2 + ux + \sqrt{2})(x^2 - ux + \sqrt{2}).$$

El producto tiene coeficiente cuadrático $2\sqrt{2} - u^2 = 2$, término constante 2 y términos impares cero. Cada cuadrático tiene discriminante $u^2 - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2} - 2 < 0$, así que es irreducible real. La expresión demuestra reducibilidad real y proporciona la factorización en irreducibles, sin suponer un teorema general sobre grados de irreducibles reales.

Ejercicio 076. Identidad con información parcial. **Enunciado.** Sean $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ de grado a lo sumo cinco, que coinciden en $-1, 0, 1$. Supón además que $P - Q$ tiene multiplicidad al menos dos en cero y que $(P - Q)(2) = 12$, $(P - Q)(-2) = -12$. Describe todas las diferencias posibles y decide si la información obliga a $P = Q$.

Solución. Escribimos $R = P - Q$. Los dos valores no nulos aseguran $R \neq 0$. Las condiciones de raíces y multiplicidad hacen que $H = x^2(x - 1)(x + 1) = x^2(x^2 - 1)$ divida a R. Como H tiene grado cuatro y R grado a lo sumo cinco, escribimos $R = H(ax + b)$; se incluye un

cociente constante mediante $a = 0$. En ambos puntos 2 y -2, H vale 12, por lo que $2a + b = 1$ y $-2a + b = -1$. Restar da $4a = 2$, así que $a = 1/2$ y $b = 0$. La única diferencia posible es $R = \frac{1}{2}x^3(x^2 - 1)$.

Este polinomio cumple las tres coincidencias, tiene multiplicidad exactamente tres en cero y toma los valores prescritos en ± 2. Por tanto los datos son compatibles con «al menos dos», pero no con «exactamente dos». No obligan a $P = Q$: de hecho lo excluyen, ya que $R(2) \neq 0$. Para mostrar existencia de pares, basta escoger cualquier Q de grado a lo sumo cinco y poner $P = Q + R$, que mantiene esa cota. Los datos fijan la diferencia, pero dejan libre el polinomio común que se añade a ambos.

Ejercicio 077. Interpolación y una condición de multiplicidad. **Enunciado.** Determina todos los polinomios reales de grado a lo sumo cinco con valores $P(-2) = 9$, $P(-1) = 0$, $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(2) = 9$. Entre ellos, decide cuáles tienen multiplicidad al menos dos en 1 y determina sus raíces reales.

Solución. El polinomio $S = (x^2 - 1)^2$ cumple los cinco valores, como se comprueba sustituyendo: en ± 2 vale 9, en ± 1 vale cero y en cero vale uno. Si P es otro candidato, $P - S$ se anula en los cinco nodos distintos, así que es divisible por $H = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$. La cota de grado obliga a $P = S + cH$, con $c \in \mathbb{R}$, incluida la diferencia cero. Recíprocamente, cada miembro de esta familia satisface los cinco datos. Si se exigiera grado a lo sumo cuatro, la cota de raíces daría unicidad de S.

Para estudiar la multiplicidad en uno, dividimos por $x - 1$:

$$\frac{P}{x-1} = (x-1)(x+1)^2 + c\,x(x+1)(x^2-4).$$

El cociente vale $-6c$ en uno. Por el teorema del factor, 1 tiene multiplicidad al menos dos si y solo si $c = 0$. Por tanto la única solución con ese requisito adicional es $P = S = (x-1)^2(x+1)^2$. Sus raíces reales son ± 1, ambas exactamente dobles, porque los residuales en esos puntos valen $4 \neq 0$. No tiene ninguna otra raíz. La condición de multiplicidad elimina la libertad que cinco valores dejan bajo la cota cinco; no basta tratarla como otro dato de evaluación idéntico al ya conocido $P(1) = 0$.

Ejercicio 078. Grado residual y ausencia de nuevas raíces. **Enunciado.** Describe todos los polinomios reales de grado siete, coeficiente principal 2, cuyas únicas raíces reales sean -2 de multiplicidad tres y 1 de multiplicidad dos, y que satisfagan $P(0) = 16$. Justifica tanto la necesidad como la suficiencia de las condiciones sobre tus parámetros.

Solución. Las multiplicidades dan $P = 2(x+2)^3(x-1)^2Q$, donde Q es un cuadrático mónico real, por el grado y el coeficiente principal. Escribimos $Q = x^2 + bx + c$. En cero, $P(0) = 2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot c = 16c$, por lo que $c = 1$. Para no aumentar las multiplicidades ni añadir otras raíces reales, Q debe carecer de raíces reales: si tuviera alguna, coincidiría con una raíz prescrita o sería una adicional, y ambas opciones infringen el enunciado. En grado dos esta ausencia equivale a discriminante negativo. Aquí $b^2 - 4 < 0$, esto es, $-2 < b < 2$.

Así la familia completa es $P_b = 2(x+2)^3(x-1)^2(x^2 + bx + 1)$, con $b \in (-2, 2)$. Para cada parámetro permitido, $Q = (x + b/2)^2 + 1 - b^2/4 > 0$ en todo real. Por ello los residuales en -2 y uno no se anulan, las multiplicidades son exactamente tres y dos, y no existen raíces adicionales. Grado, coeficiente principal y valor en cero se comprueban en el producto. Los extremos no se admiten: $b = -2$ produce $(x-1)^2$ y aumenta la multiplicidad en uno; $b = 2$ produce $(x+1)^2$ y añade la raíz -1. La suma de multiplicidades prescritas es cinco y los dos grados residuales se conservan en un factor irreducible real, sin aportar raíces.

Ejercicio 079. Divisibilidad certificada por Bézout. **Enunciado.** En $\mathbb{Q}[x]$, sean $A = x^2 + 1$, $B = x^2 + 2$ y $P = A^2B$. Determina todos los polinomios R que cumplen simultáneamente $A \mid R$ y $P \mid BR$. Da un certificado de Bézout que justifique tu conclusión y explica qué información adicional aporta la segunda condición.

Solución. La diferencia $B - A = 1$ da coprimalidad entre A y B. Para aplicar Bézout al exponente requerido, buscamos un certificado entre A^2 y B. Como $A = B - 1$, $A^2 = (B-1)^2 = B(B-2) + 1$; por tanto

$$A^2 - (B-2)B = 1.$$

Si $P = A^2B$ divide a BR, existe S con $BR = A^2BS$. El polinomio B es no nulo, y $K[x]$ no tiene divisores de cero, así que cancelar esta igualdad ya da $R = A^2S$. También podemos certificarlo sin esa cancelación: la hipótesis implica $A^2 \mid BR$, y multiplicar la identidad de Bézout por R produce $R = A^2R - (B-2)BR$, cuyos dos términos son divisibles por A^2; de nuevo $A^2 \mid R$.

Recíprocamente, si $R = A^2S$ para cualquier $S \in \mathbb{Q}[x]$, entonces $A \mid R$ y $BR = A^2BS = PS$, por lo que ambas condiciones se cumplen. Todas las soluciones son, pues, $R = (x^2+1)^2S$, incluido $R = 0$. La segunda condición exige una segunda copia del irreducible A, no solo la divisibilidad por una copia. De hecho hace redundante la primera. Los factores A y B son irreducibles racionales por sus discriminantes negativos; la factorización única confirma que el exponente de A requerido es dos, aunque el argumento de Bézout no la necesitó.

Ejercicio 080. Comparar certificados en dos cuerpos. **Enunciado.** Para $P = (x^4+4)(x^2-2)^2(x-1)$, determina las factorizaciones en irreducibles mónicos de $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$, las raíces reales y sus multiplicidades. Justifica la exhaustividad y explica por qué ni buscar solo raíces racionales ni contar el grado basta para obtener la respuesta.

Solución. Primero usamos la identidad $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$, comprobada como $(x^2+2)^2 - 4x^2$. Ambos cuadráticos tienen discriminante -4, de modo que son irreducibles reales y racionales. El factor $x^2 - 2$ es irreducible racional: por ser mónico entero solo podría tener raíces racionales entre $\pm 1, \pm 2$, que no lo anulan. Por tanto la factorización irreducible racional mónica es

$$P = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2)^2(x - 1).$$

La unidad es uno. En $\mathbb{R}[x]$ se descompone el tercer factor y queda

$$P = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)(x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x - 1).$$

Los cuadráticos continúan siendo irreducibles reales y los lineales lo son por su grado. Así hemos justificado cada factor dentro del cuerpo correspondiente, sin usar una clasificación general de irreducibles reales.

Las únicas raíces reales son $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, distintas. En uno, el residual vale $(1^4+4)(1^2-2)^2 = 5 \neq 0$, así que es simple. En cada una de $\pm\sqrt{2}$, el factor $x^2 - 2$ tiene una raíz simple porque sus dos raíces son distintas; al elevarlo al cuadrado, la multiplicidad pasa a dos. Los factores restantes no se anulan allí: $x^4 + 4 > 0$ y esos puntos no son uno. Por tanto ambas raíces son exactamente dobles. No hay más raíces reales porque todo cero del producto debe anular algún factor y los dos cuadráticos no tienen raíces reales.

El grado es $4 + 4 + 1 = 9$, mientras que la suma de multiplicidades reales es $1 + 2 + 2 = 5$. Los cuatro grados restantes están en los dos cuadráticos sin raíces reales. Una búsqueda solo racional detecta la raíz uno pero omite las dos irracionales; contar nueve grados tampoco da nueve raíces reales. La factorización racional completa y la real completa son certificados distintos, cada uno con su dominio explícito.

H. Profundización y reconstrucción. Intente el enunciado antes de leer la solución que lo acompaña. Las tareas mantienen separados dominio, certificado y cobertura.

Ejercicio 081. Construcción mínima y dato incompatible. Dados $k \in \mathbb{R}$, busque un polinomio de grado mínimo con raíz 1 de multiplicidad exactamente tres, raíz -1 de multiplicidad exactamente dos y $P(0) = k$. Clasifique la existencia y la unicidad mínima.

Solución 081. Todo candidato es divisible por $F = (x-1)^3(x+1)^2$, de grado cinco. En el grado mínimo debe ser $P = cF$, con $c \neq 0$. Como $F(0) = -1$, el dato exige $c = -k$. Si $k \neq 0$, $P = -kF$ es el único candidato de grado cinco y sus multiplicidades son exactas porque los factores residuales no se anulan en las raíces opuestas. Si $k = 0$, el grado cinco es imposible, pero el grado seis se alcanza con $P = cxF$, cualquier $c \neq 0$: cero no coincide con las dos raíces impuestas. Así existe una familia mínima de grado seis, sin unicidad.

Ejercicio 082. Un dato adicional que fuerza multiplicidad mayor. Busque todos los $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado a lo sumo cuatro que tengan 1 como raíz de multiplicidad al menos dos, -1 como raíz y satisfagan $P(0) = 2$, $P(2) = m$. Determine cuándo las multiplicidades impuestas son exactas.

Solución 082. Escribimos $P = (x-1)^2(x+1)(ax+b)$ por divisibilidad y la cota de grado. El dato en cero fuerza $b = 2$; en dos, $3(2a+2) = m$, luego $a = (m-6)/6$. Esta fórmula construye un único P para cada m. La multiplicidad en 1 es exactamente dos si $a + 2 \neq 0$, es decir $m \neq -6$; en -1 es exactamente uno si $2 - a \neq 0$, es decir $m \neq 18$. En esos dos valores excepcionales, el residual lineal añade respectivamente un factor en la misma raíz. Las evaluaciones comprueban todos los datos.

Ejercicio 083. Colisión y normalización de una familia construida. Para $t \in \mathbb{R}$, construya el polinomio mónico de menor grado divisible por $(x-t)^2$ y $(x+t)^3$. Compare $t = 0$ con $t \neq 0$ y certifique sus multiplicidades.

Solución 083. Si $t \neq 0$, los dos factores corresponden a raíces distintas; su producto divide a cualquier candidato. El mínimo mónico es $P = (x-t)^2(x+t)^3$, de grado cinco. Sus residuales en t y $-t$ son $(2t)^3$ y $(-2t)^2$, no nulos, así las multiplicidades son dos y tres. Si $t = 0$, los requisitos son divisibilidad por x^2 y por x^3, equivalentes a la segunda; el mínimo mónico es x^3, no x^5. La suma de multiplicidades solo correspondía a raíces distintas, no a dos requisitos sobre la misma raíz.

Ejercicio 084. Cambiar el cuerpo y mantener el certificado. Sea $d > 0$ racional que no sea cuadrado de ningún racional. Compare la irreducibilidad de $x^2 - d$ sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Solución 084. Una raíz racional r cumpliría $r^2 = d$, contra la hipótesis. Como el grado es dos, la ausencia de raíces racionales prueba irreducibilidad sobre $\mathbb{Q}$. En los reales existe $\sqrt{d}$ y $(x-\sqrt{d})(x+\sqrt{d}) = x^2 - d$ es una factorización en dos lineales, luego es reducible. Expandir certifica la identidad. La hipótesis no afirma ausencia de raíces reales; especifica justamente qué coeficientes faltan en el cuerpo pequeño.

Ejercicio 085. Construir una familia positiva reducible. Para $c > 0$ racional, construya todos los $u \in \mathbb{Q}$ que permitan $x^4 + 4c^4 = (x^2 + ux + 2c^2)(x^2 - ux + 2c^2)$. Pruebe que los factores son irreducibles reales y que el producto no tiene raíces reales.

Solución 085. La expansión da $x^4 + (4c^2 - u^2)x^2 + 4c^4$. La identidad exige $u^2 = 4c^2$, luego todos los valores son $u = \pm 2c$, racionales. Para cualquiera, los factores son $(x \pm c)^2 + c^2$, estrictamente positivos e irreducibles cuadráticos sobre los reales. El producto es reducible racional, pero positivo en toda la recta. La construcción determina los coeficientes de la descomposición y certifica una familia entera; no deduce irreducibilidad de la ausencia de raíces del cuártico.

Ejercicio 086. Separar raíces y factores en dos cuerpos. Dé factorizaciones irreducibles de $P = x^4 - x^2 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, indicando sus raíces en cada cuerpo.

Solución 086. La sustitución $u = x^2$ da $P = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$. En $\mathbb{Q}$, el primero no tiene raíces racionales porque $\sqrt{2}$ es irracional, y el segundo no tiene raíces reales; ambos son irreducibles cuadráticos. Por tanto P no tiene raíces racionales aunque es reducible allí. En $\mathbb{R}$, se obtiene $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$, con los dos lineales irreducibles y el cuadrático positivo irreducible. Sus raíces reales son exactamente $\pm\sqrt{2}$. Expandir el producto original recupera el cuártico.

Ejercicio 087. Una familia entera de contraejemplos. Para $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pruebe que $(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)$ es reducible sobre $\mathbb{R}$ y carece de raíces reales. Clasifique la repetición de sus factores mónicos.

Solución 087. Ambos factores son cuadráticos de grado positivo, así el producto es reducible. Para todo real x, cada factor es estrictamente positivo, de modo que el producto nunca es cero. Cada cuadrático es irreducible real por la ausencia de raíces. Coinciden exactamente si $a^2 = b^2$, es decir $a = b$ o $a = -b$; entonces el producto es el cuadrado de un irreducible. Si no coinciden, son dos factores irreducibles mónicos distintos. La clasificación evita confundir repetición de factores con existencia de raíces reales.

Ejercicio 088. Dos factores irreducibles y ninguna raíz. Factorice $x^4 + x^2 + 1$ sobre $\mathbb{R}$ y explique por qué un criterio basado solo en raíces no basta.

Solución 088. Es $(x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Cada factor es $(x \pm 1/2)^2 + 3/4 > 0$, de modo que no tiene raíces reales y es irreducible de grado dos. El cuártico es reducible porque tiene esa descomposición no constante, pese a no tener raíces reales. Expandir da $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$. La partición $2 + 2$ del grado permite exactamente este fenómeno.

Ejercicio 089. Ausencia de raíces y una prueba adicional necesaria. Pruebe que $x^4 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ pero reducible sobre $\mathbb{R}$, sin usar «no tiene raíces» como prueba suficiente de la primera afirmación.

Solución 089. No hay raíces racionales por positividad; si fuera reducible racional, habría dos factores cuadráticos, normalizados como $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + d)$. Comparar da $bd = 1$, $a(d - b) = 0$, $b + d - a^2 = 0$. Si $a = 0$, $d = -b$ y $bd = -b^2 = 1$, imposible en reales. Si $a \neq 0$, $d = b$ y $b^2 = 1$. Para $b = -1$, $a^2 = -2$, imposible; para $b = 1$, $a^2 = 2$, imposible racional. Se agotaron las particiones sin lineales, probando irreducibilidad racional. En reales sí existe $\sqrt{2}$, y $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$. La expansión verifica el cambio de cuerpo.

Ejercicio 090. Cuántos datos certifican un resto. Sean $D = x^2 + 1$ y R, S de grado menor que dos o cero. Pruebe que $R(0) = S(0)$ y $R(2) = S(2)$ fuerzan $R = S$. ¿Basta un solo dato?

Solución 090. La diferencia $R - S$ tiene grado a lo sumo uno o es cero. Si no fuera cero, no podría tener dos raíces distintas por la cota de raíces de C25. Los dos datos la anulan en cero y dos, luego es cero. Un solo dato no basta: $R = 0$ y $S = x$ coinciden en cero, ambos son restos de grado permitido y son distintos. La cota de grado es esencial; $x(x - 2)$ también se anula en esos dos puntos pero no es un resto permitido para D.

Ejercicio 091. Datos independientes para un polinomio par. Sean P, Q polinomios pares de grado a lo sumo $2n$, admitiendo cero. Pruebe que $n + 1$ coincidencias en puntos con cuadrados distintos fuerzan $P = Q$. Construya un contraejemplo si solo se dan n de esos puntos, para $n \geq 1$.

Solución 091. Escribimos $P(x) = U(x^2)$, $Q(x) = V(x^2)$, con U, V de grado a lo sumo n. Las coincidencias en a_j dan raíces a_j^2 distintas de $U - V$, así $n + 1$ de ellas fuerzan diferencia cero por la cota. Con solo n puntos, tome $P = 0$ y $Q = \prod_{j=1}^{n}(x^2 - a_j^2)$, mónico par de grado $2n$, que coincide con cero en todos los datos pero no es idéntico. Los valores en a y $-a$ no aportan datos independientes para polinomios pares; la condición sobre cuadrados evita contarlos dos veces.

Ejercicio 092. Valores que dejan una libertad residual. Dados reales distintos a, b, c y valores u, v, w, describa todos los polinomios reales que toman esos valores en a, b, c; indique cuándo son únicos.

Solución 092. Construimos $L = u\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + v\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + w\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$. Los denominadores son no nulos y evaluar comprueba los tres valores. Cualquier otro P tiene $P - L$ anulado en los tres puntos, luego es divisible por $(x - a)(x - b)(x - c)$. Así todos son $P = L + (x - a)(x - b)(x - c)T$, $T \in \mathbb{R}[x]$. En grado a lo sumo dos, esa diferencia debe ser cero, de modo que L es único. Sin la cota hay infinitos candidatos.

Capítulo 26

Números complejos y el horizonte de las ecuaciones

Una ecuación puede tener raíces en un sistema numérico y carecer de ellas en otro. En el capítulo anterior, $x^2 - 2$ mostró esa diferencia entre los racionales y los reales. Para estudiar ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$ necesitamos examinar qué operaciones queremos conservar al ampliar el conjunto de números. Esa exigencia orientará la construcción de los complejos.

26.1. Extender el dominio de una ecuación

La misma expresión en distintos conjuntos. La ecuación $2x = 1$ tiene una única solución racional, $x = 1/2$, porque dividir por 2 es una transformación reversible en $\mathbb{Q}$. En los enteros carece de solución: para todo entero x, el número $2x$ es par, mientras que 1 es impar. La comprobación $2(1/2) = 1$ sigue siendo válida en $\mathbb{R}$, donde $1/2$ conserva sus operaciones habituales.

Este ejemplo distingue dos decisiones que intervienen al resolver una ecuación. Primero se fija el conjunto en el que puede variar la incógnita; después se utilizan las operaciones y propiedades válidas en ese conjunto. Si el problema exige una solución entera, presentar $1/2$ cambia el problema. Si permite una solución racional, la misma fracción lo resuelve.

Para registrar esa diferencia, sea P un polinomio cuyos coeficientes pueden interpretarse en un sistema numérico D. Su **conjunto de soluciones en** D es $S_D(P) = \{a \in D : P(a) = 0\}$. La evaluación se efectúa con las operaciones de D. Así, para $P(x) = 2x - 1$, tenemos $S_{\mathbb{Z}}(P) = \varnothing$ y $S_{\mathbb{Q}}(P) = S_{\mathbb{R}}(P) = \{1/2\}$.

La notación separa el polinomio del lugar donde buscamos sus raíces. Un polinomio de coeficientes enteros puede evaluarse en racionales o reales, porque allí esos coeficientes siguen representando los mismos números. En C24 se construyeron los polinomios como objetos determinados por sus coeficientes; cambiar el conjunto de evaluación no cambia por sí solo esa lista.

Qué se conserva al ampliar el sistema. La ecuación $x^2 = 2$ exige una ampliación diferente. En $\mathbb{R}$ sus soluciones son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, y ambas son irracionales, como se justificó en §25.1. La factorización $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ certifica que son todas las soluciones reales: un producto de dos reales es cero sólo si uno de sus factores lo es. Por tanto, $S_{\mathbb{Q}}(x^2 - 2) = \varnothing$ y $S_{\mathbb{R}}(x^2 - 2) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

La comparación se organiza en la siguiente tabla. Cada fila mantiene la ecuación y cambia únicamente el conjunto de búsqueda.

Ecuación	Soluciones en $\mathbb{Z}$	Soluciones en $\mathbb{Q}$	Soluciones en $\mathbb{R}$
$2x = 1$	$\varnothing$	$\{1/2\}$	$\{1/2\}$
$x^2 = 2$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
$x^2 = 4$	$\{-2, 2\}$	$\{-2, 2\}$	$\{-2, 2\}$
$x^2 = -1$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

La tercera fila impide interpretar una ampliación como una máquina que necesariamente añade raíces a cada ecuación. La cuarta exige un argumento distinto del que excluyó las raíces racionales de $x^2 = 2$: para cualquier real x, se cumple $x^2 \geq 0$, de modo que $x^2 = -1$ es imposible en $\mathbb{R}$.

Las soluciones antiguas se conservarán cuando los números y sus operaciones se conserven. Podemos expresar ese mecanismo sin depender de un ejemplo particular.

Proposición. Sean $D \subseteq E$ dos sistemas numéricos tales que la suma y el producto de elementos de D efectuados en E coincidan con sus operaciones en D, y que ambos sistemas compartan los mismos cero y uno. Si P tiene coeficientes en D, entonces $S_D(P) = S_E(P) \cap D$. En particular, $S_D(P) \subseteq S_E(P)$.

Demostración. Para un elemento $a \in D$, cada potencia de a y cada producto de esa potencia por un coeficiente de P dan el mismo resultado en ambos sistemas. Lo mismo ocurre al sumar los términos. En consecuencia, la evaluación de P en a coincide en D y en E, y es cero en uno de ellos si y sólo si es cero en el otro.

Así, pertenecer a $S_D(P)$ equivale a pertenecer a D y a $S_E(P)$ a la vez. Esa equivalencia demuestra la igualdad con la intersección; de ella se deduce la inclusión. □

La hipótesis sobre las operaciones permite conservar toda la evaluación, paso a paso. La pertenencia $D \subseteq E$ aislada no describe cómo se opera. Para construir una ampliación algebraica debemos especificar ambas cosas.

Control 26.1.a — Lectura de la inclusión. Si una ecuación polinomial con coeficientes racionales carece de soluciones reales, ¿puede tener una solución racional? Si carece de soluciones racionales, ¿puede tener una solución real? Justifica ambas respuestas.

Solución. Toda raíz racional sería también real por la inclusión demostrada para $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Por eso la ausencia de raíces reales excluye las racionales. La segunda posibilidad sí ocurre: $x^2 = 2$ tiene las dos raíces reales indicadas y ninguna racional. La inclusión transmite una solución hacia el conjunto mayor; no obliga a que una raíz del conjunto mayor pertenezca al menor.

La necesidad de un número cuyo cuadrado sea negativo. Para resolver $x^2 + 1 = 0$ fuera de $\mathbb{R}$, el nuevo sistema deberá contener un elemento cuyo cuadrado sea -1. La letra i servirá para nombrarlo. La condición $i^2 = -1$ expresa lo que queremos conseguir; todavía falta construir un conjunto, definir sus operaciones y verificar que esa condición sea compatible con las leyes algebraicas que necesitamos.

En particular, i deberá ser distinto de todos los reales. Si fuera un real, su cuadrado sería no negativo y no podría valer -1. Deberemos conservar las igualdades reales como $(-1)(-1) = 1$, aunque ya no podremos aplicar a todos los elementos nuevos el argumento real «todo cuadrado es no negativo».

Podemos anticipar una consecuencia con su dependencia explícita. **Si** se construye un sistema que contiene a $\mathbb{R}$, conserva sus operaciones, cumple las leyes habituales de suma y producto y tiene $i^2 = -1$, entonces i y $-i$ serán dos soluciones distintas de $x^2 + 1 = 0$. En efecto, $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ y $(-i)^2 = i^2 = -1$. Además, si $i = -i$, al sumar i y multiplicar por el inverso real de 2 resultaría $i = 0$, lo cual contradice $i^2 = -1$ y $0^2 = 0$.

La afirmación anterior es condicional. Las secciones siguientes construirán el sistema y probarán sus leyes. Tampoco hemos demostrado aquí que esas dos soluciones sean las únicas en el sistema nuevo: ese paso necesitará una propiedad del producto que aún debe verificarse.

Control 26.1.b — Dos tareas diferentes. Un estudiante propone: «Escribo $i^2 = -1$; por tanto, ya existe un nuevo sistema numérico y cualquier polinomio tiene una raíz en él». Localiza las dos conclusiones que su argumento no justifica.

Solución. La igualdad propuesta fija una condición para un elemento, pero no especifica cuáles son los demás elementos, cómo se suman o multiplican ni si las operaciones satisfacen las leyes requeridas. La existencia del sistema necesita una construcción y verificaciones. Incluso después de construirlo y comprobar que i resuelve $x^2 + 1 = 0$, esa evaluación sólo certifica una raíz de ese polinomio. Una afirmación sobre todos los polinomios no constantes exige un resultado general. El teorema fundamental del álgebra, cuyo estatuto se precisará

en §26.15, responde a esa cuestión para los complejos; la introducción de una letra no lo demuestra.

Ampliar sin perder las restricciones. Conservar la suma y el producto permite transportar evaluaciones polinomiales. Cuando una expresión contiene cocientes, también hay que verificar que sus denominadores sean distintos de cero en cada candidato. La restricción forma parte del conjunto de soluciones y permanece al pasar a un sistema mayor.

Control 26.1.c — Un candidato excluido. Resuelve $(x^2-1)/(x-1)=0$ en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$. Explica por qué ampliar el conjunto de búsqueda no autoriza a incorporar $x=1$.

Solución. La expresión exige $x\neq 1$. En ese dominio, $x^2-1=(x-1)(x+1)$ y la fracción es igual a $x+1$. La ecuación se reduce a $x+1=0$, cuya única solución es $x=-1$. El candidato cumple la restricción y la comprobación en la expresión original da $((-1)^2-1)/(-1-1)=0/(-2)=0$. En ambos conjuntos la respuesta es $\{-1\}$. El valor $x=1$ anula el denominador original, tanto en $\mathbb{Q}$ como en $\mathbb{R}$, y por eso queda excluido. La cancelación es válida precisamente en el dominio que ya habíamos restringido.

Hay obstáculos que ninguna ampliación con las mismas leyes resolverá. En cualquier sistema con las leyes usuales de suma y distributividad, $0\cdot a=0$: de $(0+0)a=0a+0a$ y $(0+0)a=0a$, cancelar $0a$ da esa igualdad. Si además $0\neq 1$, la ecuación $0x=1$ carece de soluciones. Esta imposibilidad depende de las leyes que queremos conservar, no del tamaño del conjunto de números.

Control 26.1.d — Alcance de la ampliación. Compara los obstáculos de $x^2=-1$ y $0x=1$. ¿Cuál permite buscar una solución nueva conservando las leyes usuales de suma y producto y la distinción entre cero y uno?

Solución. Para $x^2=-1$, la imposibilidad real se obtuvo usando el orden de $\mathbb{R}$ y la no negatividad de sus cuadrados. Podemos intentar conservar las leyes de suma y producto en un sistema más amplio, sin exigir ese orden para todos sus elementos; la construcción pendiente verificará que el intento funciona. En cambio, para $0x=1$ las propias leyes de suma y distributividad obligan a que el lado izquierdo sea cero. Resolverla exigiría abandonar alguna de esas condiciones o identificar cero y uno.

La construcción que necesitamos debe alojar a los reales, conservar sus cálculos e incorporar un elemento con cuadrado -1. Los pares de números reales proporcionan un conjunto concreto donde definir esas operaciones; allí podrá comprobarse cada una de las exigencias.

26.2. Construcción mediante pares y forma cartesiana

Un conjunto donde alojar la nueva unidad. Un par ordenado (a,b) de números reales permite conservar dos datos independientes. La igualdad de pares, recuperada de C7, se define coordenada por coordenada: $(a,b)=(c,d)$ si y sólo si $a=c$ y $b=d$. El conjunto $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ya está disponible; para convertirlo en el sistema numérico que buscamos necesitamos darle operaciones.

La primera coordenada servirá para representar los reales mediante los pares $(a,0)$. El par $(0,1)$ será el candidato a unidad imaginaria. Queremos que su cuadrado sea $(-1,0)$, y por eso el producto coordenada por coordenada no sirve: esa regla produciría $(0,1)(0,1)=(0,1)$.

La notación provisional $a+bi$ sugiere una regla distinta. Si la distributividad fuera válida y $i^2=-1$, el desarrollo de $(a+bi)(c+di)$ produciría una parte $ac-bd$ y otra parte $(ad+bc)i$. Este cálculo orienta la elección del producto. A continuación lo definiremos directamente sobre pares; las leyes del nuevo producto se probarán a partir de esa definición, sin usar el cálculo provisional como demostración.

Definición. El conjunto de los **números complejos** es $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, dotado de la suma y el producto siguientes:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\qquad (a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Los cálculos del lado derecho son operaciones reales.

Ambas reglas producen un par de reales para cualquier elección de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; por tanto, la suma y el producto son operaciones internas en $\mathbb{C}$. La igualdad de complejos sigue siendo la igualdad de pares. Las operaciones no cambian qué significa que dos elementos sean iguales.

Por ejemplo, $(2,1)+(-3,4)=(-1,5)$ y $(2,1)(-3,4)=(-10,5)$, porque las coordenadas del producto son $2(-3)-1(4)=-10$ y $2(4)+1(-3)=5$. Los signos de las dos coordenadas se controlan con reglas reales conocidas. Todavía no necesitamos una fórmula de división compleja.

Cómo se conservan los reales. Los reales se representan mediante la función $j:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por $j(a)=(a,0)$. Esta representación es inyectiva: si $j(a)=j(c)$, la igualdad de pares obliga a que $a=c$. Así, dos reales distintos no se identifican al representarlos dentro de $\mathbb{C}$.

Además, para cualesquiera reales a, c, la definición de las operaciones da $j(a)+j(c)=(a+c,0)=j(a+c)$ y $j(a)j(c)=(ac,0)=j(ac)$. La suma y el producto de los representantes reproducen exactamente la suma y el producto reales. También $j(0)=(0,0)$ y $j(1)=(1,0)$.

Los dos últimos pares actúan como neutros para todos los complejos. Para $z=(a,b)$ se comprueba $z+(0,0)=(a,b)$ y $z(1,0)=(a,b)$; en el otro orden, $(0,0)+z=(a,b)$ y $(1,0)z=(a,b)$. El opuesto de (a,b) es $(-a,-b)$, porque la suma de esos pares, en cualquiera de los dos órdenes, es $(0,0)$.

En adelante identificaremos el real a con su representante $(a,0)$ y escribiremos 0 y 1 para los neutros correspondientes. Esta identificación abrevia una función que ya hemos comprobado; el par $(a,0)$ es el objeto de la construcción que representa a a. Cuando haga falta distinguir las dos capas, podremos volver a escribir $j(a)$.

La unidad imaginaria y la forma cartesiana. Definición. La **unidad imaginaria** es el complejo $i=(0,1)$.

Su cuadrado se calcula con el producto que acabamos de definir: $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$. Aquí la última igualdad usa la identificación de los reales. El objetivo que motivó la ampliación se cumple para un elemento concreto.

El complejo i no representa ningún real. Si se tuviera $(0,1)=(a,0)$ para algún $a\in\mathbb{R}$, la segunda coordenada obligaría a que $1=0$ en $\mathbb{R}$, lo cual es falso. La construcción permite comprobar esa diferencia sin recurrir a un orden entre complejos.

Cada par puede escribirse utilizando los reales identificados y la unidad imaginaria. En efecto, para $b\in\mathbb{R}$ tenemos $bi=(b,0)(0,1)=(0,b)$, y de aquí $a+bi=(a,0)+(0,b)=(a,b)$. También $ib=(0,1)(b,0)=(0,b)$, por lo que estas dos escrituras del segundo término coinciden.

Proposición. Todo complejo se expresa de manera única como $a+bi$, con $a, b\in\mathbb{R}$.

Demostración. Si $z=(a,b)$, los cálculos anteriores muestran que $z=a+bi$, lo cual prueba la existencia de la expresión. Para la unicidad, supongamos $a+bi=c+di$, con a, b, c, d reales. Al traducir ambas expresiones a pares resulta $(a,b)=(c,d)$; por igualdad de coordenadas, $a=c$ y $b=d$. $\square$

La expresión $a+bi$ se llama **forma cartesiana** de z. El número real a es su **parte real**, escrita $\operatorname{Re}(z)$, y el número real b es su **parte imaginaria**, escrita $\operatorname{Im}(z)$. Ambas partes son números reales. En particular, $\operatorname{Im}(2-3i)=-3$; el término $-3i$ es la parte imaginaria multiplicada por la unidad i.

La igualdad de complejos tiene ahora una forma que permitirá resolver ecuaciones: $z=w$ si y sólo si $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Re}(w)$ y $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(w)$. La unicidad garantiza que esos dos datos no dependen de cómo hayamos escrito inicialmente la expresión.

Control 26.2.a — Comparar las coordenadas. Encuentra todos los reales u, v tales que $(u+1)+(2v-3)i=4-5i$. Verifica el resultado.

Solución. Como los coeficientes de la unidad imaginaria y los términos restantes son reales, la igualdad equivale a $u + 1 = 4$ y $2v - 3 = -5$. La primera ecuación da $u = 3$ y la segunda da $v = -1$. Al sustituir resulta $(3 + 1) + (2(-1) - 3)i = 4 - 5i$. Las dos ecuaciones reales tienen solución única, así que no existen otros pares reales u, v que cumplan la igualdad. La hipótesis de que las incógnitas son reales permite usarlas como coordenadas cartesianas.

Operar desde la definición. Las reglas de pares se traducen a la forma cartesiana sin una nueva elección de operaciones: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ y $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Su justificación es la definición de suma y producto y la correspondencia $(a, b) = a + bi$ ya probada. La verificación de asociatividad, distributividad e inversos se desarrollará en §26.3.

Por ejemplo, $(2 + i)(-3 + 4i) = -10 + 5i$, según el cálculo de pares anterior. Al multiplicar sólo reales, $b = d = 0$ y la fórmula se reduce a ac; cuando ambos factores tienen una componente imaginaria, aparece el término real $-bd$. Éste es el cambio que hace posible $i^2 = -1$.

Control 26.2.b — Diagnóstico de un producto. Un estudiante propone $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ y afirma que esa operación también cumple el objetivo de la construcción. Comprueba su afirmación usando $i = (0, 1)$ y el representante de 1.

Solución. Con la operación propuesta se obtiene $(0, 1)(0, 1) = (0, 1)$, de modo que el cuadrado de i sería i en vez de $(-1, 0)$. Además, $(a, b)(1, 0) = (a, 0)$: para $b \neq 0$ ese resultado es distinto de (a, b), y el representante de 1 dejaría de ser neutro para todos los pares. La propuesta falla en dos exigencias concretas. Con nuestro producto, en cambio, $i^2 = (-1, 0)$ y $(a, b)(1, 0) = (a, b)$, como ya se verificó.

Podemos determinar las soluciones de la ecuación que inició la ampliación usando sólo coordenadas reales.

Control 26.2.c — Todas las soluciones de $z^2 = -1$. Resuelve la ecuación en $\mathbb{C}$ a partir de la definición del producto, sin usar una regla de factorización compleja todavía no demostrada.

Solución. Escribe $z = (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. La ecuación equivale a $(a^2 - b^2, 2ab) = (-1, 0)$, y por tanto a $a^2 - b^2 = -1$ y $2ab = 0$. La segunda igualdad es real; como $2 \neq 0$, implica $ab = 0$. En $\mathbb{R}$ esto obliga a $a = 0$ o $b = 0$.

Si $b = 0$, la primera igualdad exigiría $a^2 = -1$, imposible para un real. Si $a = 0$, resulta $b^2 = 1$, cuyas soluciones reales son $b = 1$ y $b = -1$. Los únicos candidatos complejos son, por tanto, $(0, 1) = i$ y $(0, -1) = -i$. Sus cuadrados son $(-1, 0)$ por la fórmula del producto, y sus segundas coordenadas son distintas. Hemos comprobado que ambos resuelven la ecuación y que todo complejo que la resuelva pertenece a esa lista.

El paso de un producto nulo a una alternativa se efectuó entre los números reales a, b. La solución no presupuso esa propiedad para productos de complejos.

Coordenadas y representación en el plano. La identificación $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ permite representar $a + bi$ mediante el punto de coordenadas (a, b). El eje horizontal se llama **eje real** y el vertical **eje imaginario**. La palabra «imaginario» nombra una coordenada y una unidad algebraica precisas; el punto $(0, 1)$ está tan determinado como cualquier otro par.

Complejo	Par	Parte real	Parte imaginaria
3	$(3, 0)$	3	0
$-2i$	$(0, -2)$	0	-2
$1 + i$	$(1, 1)$	1	1
0	$(0, 0)$	0	0

Un complejo representa un real si y sólo si su parte imaginaria es cero, porque los representantes reales son exactamente los pares $(a, 0)$. Llamaremos **imaginario puro** a un

complejo bi con $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$. Con esta convención, el cero es real y no es imaginario puro, aunque pertenece a ambos ejes como punto del plano.

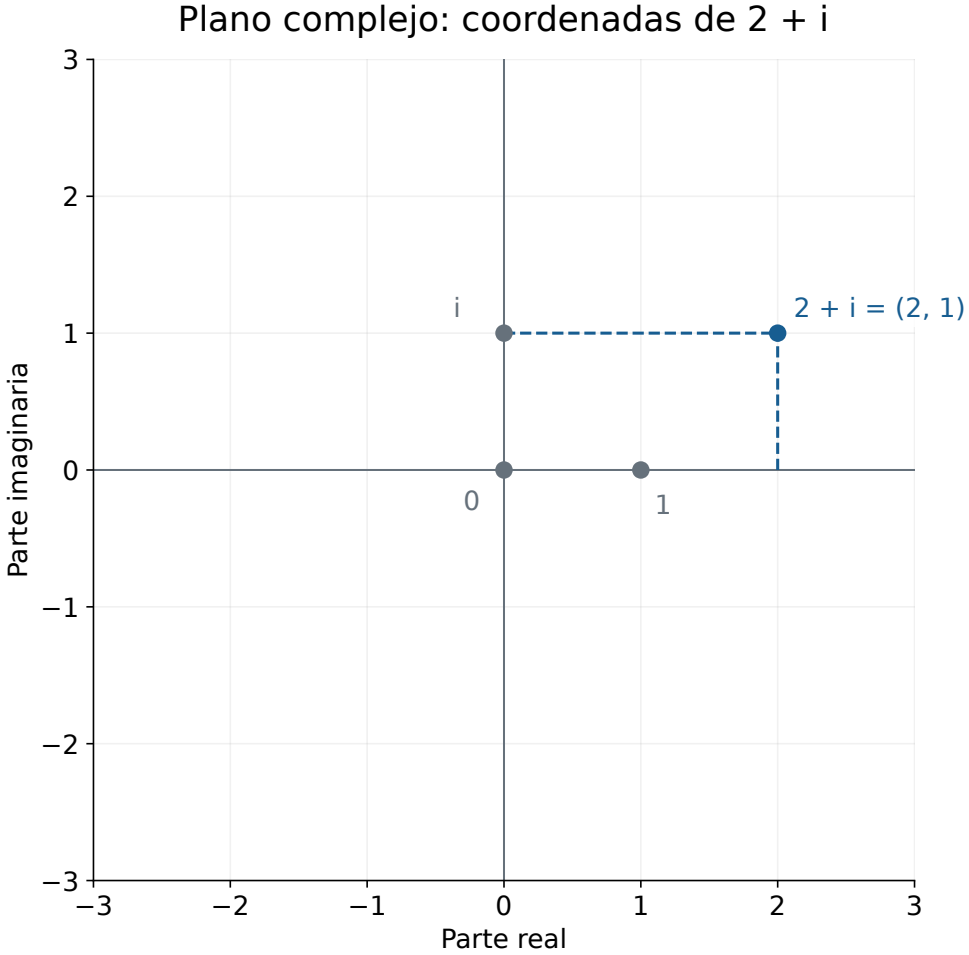


Figura 26.1. El punto $2 + i$ tiene coordenadas $(2, 1)$. Las líneas discontinuas permiten leer cada componente sobre su eje. La unidad de longitud es la misma en ambos ejes; la coordenada vertical es el real 1, mientras que el punto del eje vertical se escribe i.

Control 26.2.d — Parte imaginaria y pertenencia. Para $z = 5 - 2i$, ¿cuáles son $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z)$? ¿Es z un imaginario puro? Explica también si un número real pertenece a $\mathbb{C}$ bajo la identificación adoptada.

Solución. La forma cartesiana da $\mathrm{Re}(z) = 5$ y $\mathrm{Im}(z) = -2$. La parte imaginaria es el real -2, y no el complejo $-2i$. Como la parte real de z es distinta de cero, z no es imaginario puro; como su parte imaginaria es distinta de cero, tampoco representa un real. Todo real r sí se representa en $\mathbb{C}$ mediante $(r, 0) = r + 0i$. Por eso «real» y «complejo» no designan aquí dos clases excluyentes: los reales están incluidos mediante esa representación.

El conjunto, las operaciones y la igualdad ya están definidos. La siguiente comprobación consistirá en demostrar que esas operaciones satisfacen las leyes necesarias para calcular con varios factores y dividir por un complejo no nulo.

26.3. Leyes algebraicas y división legítima

Las operaciones de §26.2 están definidas para todos los pares de reales. Para transformar expresiones con varios complejos necesitamos saber, además, qué leyes cumplen. Por ejemplo, escribir $z(uw) = (zu)w$ permite cambiar una agrupación; cancelar un factor requiere una justificación diferente. Probaremos primero las leyes del cálculo y después construiremos el inverso de cada complejo no nulo.

Las leyes se comprueban en las coordenadas reales. Proposición. Para cualesquiera $z, u, w \in \mathbb{C}$, la suma y el producto son conmutativos y asociativos, y el producto distribuye sobre la suma:

$$z+u = u+z, \qquad zu = uz,$$
$$(z+u)+w = z+(u+w), \qquad (zu)w = z(uw),$$
$$z(u+w) = zu + zw.$$

También $(u+w)z = uz + wz$.

Demostración. Escribamos $z=(a,b)$, $u=(c,d)$ y $w=(e,f)$, con todas las coordenadas reales. La suma de los dos primeros pares es $(a+c, b+d)$. La conmutatividad real de cada coordenada muestra que coincide con $(c+a, d+b) = u+z$.

Para el producto, $zu = (ac-bd, ad+bc)$ y $uz = (ca-db, cb+da)$. La conmutatividad de los productos reales y de la suma real hace iguales las coordenadas correspondientes, por lo que $zu = uz$.

La asociatividad de la suma se obtiene comparando $((a+c)+e, (b+d)+f)$ con $(a+(c+e), b+(d+f))$. Cada igualdad de coordenadas es una instancia de la asociatividad real.

La asociatividad del producto exige desarrollar ambas agrupaciones. Con la definición de multiplicación de pares se obtiene:

$$\begin{aligned}(zu)w &= \big((ac-bd)e-(ad+bc)f,\ (ac-bd)f+(ad+bc)e\big)\\ &= \big(ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce\big),\\ z(uw) &= \big(a(ce-df)-b(cf+de),\ a(cf+de)+b(ce-df)\big)\\ &= \big(ace-adf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf\big).\end{aligned}$$

Las expresiones de cada coordenada tienen los mismos términos. Reordenarlos mediante las leyes reales demuestra la igualdad de los pares. En estos desarrollos, un producto como ace es un producto de números reales, cuya agrupación ya puede omitirse.

Para la distributividad, $u+w = (c+e, d+f)$, y por tanto

$$\begin{aligned}z(u+w) &= \big(a(c+e)-b(d+f),\ a(d+f)+b(c+e)\big)\\ &= \big(ac-bd+ae-bf,\ ad+bc+af+be\big)\\ &= zu+zw.\end{aligned}$$

La última igualdad utiliza la definición de suma de pares. Finalmente, la conmutatividad del producto ya demostrada permite escribir $(u+w)z = z(u+w) = zu+zw = uz+wz$. $\square$

Los neutros $0=(0,0)$ y $1=(1,0)$, y el opuesto $-z=(-a,-b)$, se verificaron en §26.2. La igualdad $0 \neq 1$ se sigue de sus primeras coordenadas. Con estas propiedades podemos sumar un opuesto a ambos miembros de una igualdad y reagrupar: de $z+u = z+w$ resulta $u=w$. Ésta es la cancelación aditiva.

La resta $z-u$ significa $z+(-u)$. La distributividad justifica las expansiones en forma cartesiana que motivaron la construcción. También $z0 = 0$ para todo complejo: el cálculo directo $(a,b)(0,0) = (0,0)$ lo comprueba sin ninguna división.

Control 26.3.a — Qué ley autoriza una transformación. Un estudiante escribe $z(uw) = (zu)w$ y dice que ha usado la conmutatividad. Identifica la ley pertinente y explica cómo obtener $z(uw) = u(zw)$.

Solución. En la primera igualdad sólo cambia la agrupación de los factores; la ley pertinente es la asociatividad. Para la segunda transformación podemos escribir $z(uw) = (zu)w = (uz)w = u(zw)$. La primera y la tercera igualdades usan asociatividad, y la segunda usa conmutatividad para intercambiar z y u. Distinguir esas funciones permite justificar cada paso incluso cuando una expresión contiene varios factores.

Construir el inverso sin dividir por un complejo. Sea $z = (a, b) \neq 0$. La condición $z \neq (0, 0)$ significa que al menos una coordenada es distinta de cero. Como a, b son reales, sus cuadrados son no negativos y al menos uno es positivo; de ahí $a^2 + b^2 > 0$.

Ese número real proporciona un denominador legítimo. El par $(a, -b)$ tiene la propiedad $z(a, -b) = (a^2 + b^2, 0)$, porque la segunda coordenada es $-ab + ba = 0$. Al dividir sus coordenadas por $a^2 + b^2$ obtenemos un candidato a inverso.

Proposición. Todo complejo $z = a + bi \neq 0$ tiene un único inverso multiplicativo, dado por

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Demostración. El denominador es un real positivo por el argumento anterior, así que las dos coordenadas definen un complejo v. El producto de pares da $zv = (1, 0)$: su primera coordenada es $(a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) = 1$ y la segunda es $(-ab + ba)/(a^2 + b^2) = 0$. Por conmutatividad, también $vz = 1$.

Para la unicidad, si otro complejo t cumple $zt = 1$, entonces $t = 1t = (vz)t = v(zt) = v1 = v$. La reagrupación central utiliza la asociatividad que acabamos de probar. □

El cero no tiene inverso, pues $0v = 0$ para todo v y $0 \neq 1$. El procedimiento anterior utiliza divisiones reales ya conocidas; construir un inverso complejo no ha requerido suponer de antemano que se pueda dividir por un complejo.

Si $z = a$ es un real no nulo, la fórmula se reduce a $(a/a^2, 0) = (1/a, 0)$. Por tanto, el inverso construido conserva también la división real.

Las propiedades verificadas —suma con neutro y opuestos, producto con neutro, conmutatividad, asociatividad, distributividad e inversos para los elementos no nulos— constituyen las leyes de un **cuerpo**. En este sentido $\mathbb{C}$ es un cuerpo. Esa palabra resume las propiedades probadas; cada cálculo posterior deberá usar la propiedad que corresponda.

Definir y comprobar un cociente. Para $u, z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, definimos el **cociente** $u/z = uz^{-1}$. Se trata de la única solución de $zt = u$. En efecto, $z(uz^{-1}) = u(zz^{-1}) = u$, por asociatividad y conmutatividad. Si $zt = u$, multiplicar por z^{-1} y reagrupar da $t = z^{-1}u = uz^{-1}$.

Control 26.3.b — División y comprobación original. Calcula $(3 + 2i)/(1 - i)$ y comprueba el resultado multiplicándolo por el denominador.

Solución. El denominador corresponde al par $(1, -1)$ y no es cero. Su inverso, por la fórmula anterior, es $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Multiplicar por el numerador da $(3 + 2i)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$: la parte real es $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ y la parte imaginaria es $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$. Para comprobarlo, $(1 - i)(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i) = 3 + 2i$, ya que las partes resultan $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$ y $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$. La comprobación reconstruye el numerador, como exige la definición del cociente.

Si $z = 0$, la ecuación $zt = u$ no define un cociente: para $u \neq 0$ no tiene solución y para $u = 0$ la satisface todo t. En ninguno de esos casos determina una solución única. Por eso tampoco se define $0/0$.

Cancelación y producto nulo. Corolario. Si $z \neq 0$ y $zu = zw$, entonces $u = w$.

Demostración. Multiplicamos ambos miembros por z^{-1}. La asociatividad permite escribir $(z^{-1}z)u = (z^{-1}z)w$, es decir, $1u = 1w$. Los neutros dan $u = w$. □

La condición $z \neq 0$ es indispensable. Con $z = 0$, la igualdad $zu = zw$ se cumple para cualesquiera u, w, incluso si son distintos.

Proposición. Para $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple $zw = 0$ si y sólo si $z = 0$ o $w = 0$.

Demostración. Si uno de los factores es cero, el producto es cero por la propiedad ya comprobada. Recíprocamente, supongamos $zw = 0$. Si $z = 0$, la alternativa requerida se cumple. Si $z \neq 0$, tenemos $zw = z0$ y podemos cancelar z mediante el corolario: resulta $w = 0$. Los dos casos cubren todas las posibilidades. □

Esta proposición permite usar en $\mathbb{C}$ el método de resolver una ecuación factorizada por sus factores. La conservación de las leyes reales, por sí sola, no había demostrado aún esa propiedad para los elementos nuevos; el inverso es la herramienta que la justifica.

Control 26.3.c — Una raíz perdida por cancelación. Resuelve $z(z-1)=0$ en $\mathbb{C}$ y diagnostica el paso «cancelar z para obtener $z-1=0$».

Solución. El producto nulo implica $z=0$ o $z-1=0$. En el segundo caso, sumar 1 da $z=1$. Ambos candidatos verifican la ecuación: $0(0-1)=0$ y $1(1-1)=0$. El conjunto solución es $\{0,1\}$. Cancelar z sólo es legítimo después de separar el caso $z=0$; si se cancela sin esa condición se elimina precisamente una solución. En el caso $z\neq 0$, el miembro derecho puede escribirse $z0$ y la cancelación sí da $z-1=0$.

Control 26.3.d — Coeficiente cero o no nulo. Dados $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, clasifica todas las soluciones de $\alpha z=\beta$, incluyendo los casos en que algún dato sea cero.

Solución. Si $\alpha\neq 0$, el inverso de α existe y la solución única es $z=\alpha^{-1}\beta$. La comprobación $\alpha(\alpha^{-1}\beta)=(\alpha\alpha^{-1})\beta=\beta$ prueba existencia; si hubiera otra solución, multiplicar por α^{-1} daría la misma expresión, lo cual prueba unicidad. Este caso incluye $\beta=0$, para el cual la solución es $z=0$.

Si $\alpha=0$, el miembro izquierdo es cero para todo z. Con $\beta\neq 0$ no hay soluciones; con $\beta=0$ todos los complejos son soluciones. Separar el coeficiente cero antes de intentar dividir evita tanto una operación indefinida como una conclusión falsa de unicidad.

Ya podemos reagrupar, desarrollar productos y resolver ecuaciones mediante transformaciones reversibles con sus condiciones expresas. En §26.4 estas leyes servirán para elegir entre cálculo cartesiano, comparación de partes y simplificación antes de efectuar operaciones largas.

26.4. Cálculo cartesiano y ecuaciones

La forma cartesiana permite operar reduciendo cada resultado a dos coeficientes reales. Las leyes demostradas en §26.3 autorizan a desarrollar productos, reagrupar factores y usar inversos con sus restricciones. La elección de una forma de cálculo puede ahorrar operaciones y facilitar la comprobación.

Elegir una forma antes de desarrollar. Para sumar o restar, conviene reunir por separado los términos reales y los coeficientes de i. Así, $(3-2i)-(1+4i)=2-6i$. En un producto se utiliza la distributividad y se sustituye i^2 por -1; por ejemplo, $(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=5+5i$.

En un cociente podemos aplicar directamente el inverso de §26.3. Una forma equivalente consiste en multiplicar numerador y denominador por el factor que cambia el signo del coeficiente de i en el denominador. Si éste es $c+di\neq 0$, el factor $c-di$ también es no nulo: la igualdad $c-di=0$ obligaría a $c=d=0$. Además, $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$, un real positivo. Por tanto,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,\qquad c+di\neq 0.$$

La primera igualdad usa que multiplicar numerador y denominador por un mismo factor no nulo conserva el cociente. En un cuerpo, esto se verifica porque $(wv)^{-1}=w^{-1}v^{-1}$ para w, $v\neq 0$: el producto de wv por $w^{-1}v^{-1}$ es 1 por asociatividad y conmutatividad, y el inverso es único. Así, $(uv)/(wv)=u/w$.

Para calcular $(4+i)/(2-i)$ elegimos el factor $2+i$. El denominador se convierte en 5 y el numerador en $(4+i)(2+i)=7+6i$. El resultado es $\frac{7}{5}+\frac{6}{5}i$. Multiplicarlo por $2-i$ devuelve $4+i$, lo que comprueba tanto la parte real como la imaginaria.

Cuando aparecen factores iguales o potencias, una identidad puede ser más útil que la expansión completa. Las leyes de cuerpo justifican $(1+i)^2 = 2i$ y, al volver a elevar al cuadrado, $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. Reagrupar en cuadrados ha reducido el cálculo a dos pasos.

Control 26.4.a — Simplificar por una identidad. Calcula $(1+i)^4/(1-i)^2$ y comprueba el resultado sin expandir una cuarta potencia término por término.

Solución. El numerador vale -4, por el cálculo anterior. En el denominador, $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$, que no es cero. Por tanto, el cociente es $2/i$. Como $i(-i) = 1$, el inverso de i es $-i$, y el resultado es $-2i$. La comprobación consiste en multiplicar por el denominador: $(-2i)(-2i) = 4i^2 = -4$, exactamente el numerador. El uso de un inverso se hizo sólo después de verificar que el denominador no se anula.

Potencias de la unidad imaginaria. Para $z \in \mathbb{C}$, las potencias con exponente natural se definen por $z^0 = 1$ y $z^{n+1} = z^n z$. Como en C18, el exponente cero es una convención para productos vacíos, no una afirmación sobre un límite. Para $z \neq 0$ y $n > 0$, definimos $z^{-n} = (z^{-1})^n$. La condición no nula permite usar el inverso.

La asociatividad justifica concatenar los productos que representan potencias naturales. Para exponentes negativos, cada pareja zz^{-1} se reduce a 1; las mismas reglas de exponentes enteros siguen de esa cancelación y de la conmutatividad. En particular, $z^{m+n} = z^m z^n$ para $m, n \in \mathbb{Z}$ si $z \neq 0$. No se está extendiendo aquí la definición de potencias a exponentes reales o complejos.

Para i tenemos $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$. La regla de exponentes da $i^{k+4} = i^k$ para todo entero k. Al dividir cualquier entero n por 4, obtenemos $n = 4q + r$ con $q \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{0, 1, 2, 3\}$; entonces $i^n = (i^4)^q i^r = i^r$. La división euclidiana recuperada de C17 organiza el ciclo:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ i, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 4, \\ -i, & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Por ejemplo, $2026 \equiv 2 \pmod 4$ y $-2027 \equiv 1 \pmod 4$, de modo que $i^{2026} + i^{-2027} = -1 + i$. En la segunda congruencia el exponente es negativo, pero el resto sigue perteneciendo a $\{0, 1, 2, 3\}$: $-2027 = 4(-507) + 1$. El cálculo usa el inverso de un complejo no nulo y un argumento de aritmética entera ya conocido.

Comparar partes cuando las incógnitas son reales. Si queremos resolver $(2-i)z = 5$ con $z \in \mathbb{C}$, podemos dividir por $2 - i \neq 0$. El inverso es $(2+i)/5$ y la solución única es $z = 2 + i$. También podemos escribir $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$; el miembro izquierdo se convierte en $(2x + y) + (2y - x)i$. Comparar con $5 + 0i$ produce el sistema $2x + y = 5$, $2y - x = 0$. De la segunda igualdad, $x = 2y$; sustituir en la primera da $5y = 5$, luego $y = 1$ y $x = 2$.

Los dos procedimientos verifican la misma solución, $(2-i)(2+i) = 5$. Dividir es más breve cuando ya conocemos un coeficiente no nulo. Comparar partes será especialmente útil cuando una condición se refiera a ser real o imaginario puro, o cuando intervengan parámetros reales.

Control 26.4.b — Un parámetro y dos condiciones. Sea $t \in \mathbb{R}$. Determina cuándo $(2 + ti)(1 - i)$ es real y cuándo es imaginario puro.

Solución. El producto es $(2 + t) + (t - 2)i$. Como t es real, estos dos coeficientes son las partes cartesianas. El resultado es real si y sólo si $t - 2 = 0$, es decir, $t = 2$; en ese caso vale 4.

Para que sea imaginario puro según la convención de §26.2, se necesita $2 + t = 0$ y $t - 2 \neq 0$. La primera condición da $t = -2$, y la segunda queda verificada porque $t - 2 = -4$. El resultado es $-4i$. Anular la parte real no bastaría por sí solo para clasificar un cero como imaginario puro; aquí se verificó también la parte imaginaria no nula.

Ecuaciones racionales y candidatos excluidos. En una ecuación con cocientes, los denominadores se examinan antes de efectuar cancelaciones. Multiplicar por ellos conserva la equivalencia sólo en el conjunto donde son no nulos. Después de resolver la ecuación transformada, los candidatos deben satisfacer ese dominio y la ecuación original.

Control 26.4.c — Una raíz fuera del dominio. Resuelve $(z^2+1)/(z-i)=0$ en $\mathbb{C}$ y explica por qué las dos raíces del numerador no dan dos soluciones de la ecuación.

Solución. La expresión exige $z \neq i$. En ese dominio, la igualdad con cero equivale a $z^2+1=0$, porque multiplicar por $z-i$ es reversible. El control 26.2.c demostró que las únicas raíces son i y $-i$. El candidato i está excluido por el denominador, y $-i$ sí está en el dominio, pues $-i-i=-2i\neq 0$. La comprobación original da $((-i)^2+1)/(-i-i)=0/(-2i)=0$. La solución es, por tanto, $\{-i\}$.

También se puede usar $z^2+1=(z-i)(z+i)$, identidad autorizada por la distributividad y $i^2=-1$. Cancelar $z-i$ convierte la fracción en $z+i$ únicamente para $z\neq i$. La identidad sirve como segundo método sin ampliar el dominio original.

La misma disciplina se aplica a parámetros que puedan anular un coeficiente. Antes de dividir por una expresión del parámetro hay que localizar los valores excepcionales.

Control 26.4.d — Dividir por un coeficiente variable. Para $t\in\mathbb{R}$, clasifica todas las soluciones complejas de $(t-1)z=(t^2-1)(1+i)$.

Solución. El coeficiente $t-1$ es cero precisamente cuando $t=1$. Para $t\neq 1$, factorizar $t^2-1=(t-1)(t+1)$ permite escribir $(t-1)z=(t-1)(t+1)(1+i)$ y cancelar el factor no nulo. La solución única es $z=(t+1)(1+i)$. Al sustituirla se recupera la igualdad original por la identidad de diferencia de cuadrados. Este caso incluye $t=-1$, para el cual la solución única es $z=0$.

Para $t=1$, la ecuación original es $0z=0$, que cumplen todos los complejos. La expresión $z=(t+1)(1+i)$ daría sólo $2+2i$ al sustituir ese valor; es una solución entre muchas y no describe el conjunto completo. La separación de casos debe preceder a la cancelación.

El factor $c-di$ que volvió real un denominador aparecerá repetidamente en estos cálculos. En §26.5 se estudiará como una operación sobre el complejo $c+di$, con propiedades que permiten reorganizar cálculos y reconocer partes reales e imaginarias.

26.5. Conjugación y partes real e imaginaria

El factor que convirtió un denominador complejo en real en §26.4 merece un nombre. Cambiar el signo de la parte imaginaria deja fija la parte real y produce una operación que permite reconocer reales, recuperar coordenadas y simplificar cocientes. Sus propiedades se deducen de la construcción cartesiana.

Una operación que refleja la parte imaginaria. Para $z=a+bi$, con $a,b\in\mathbb{R}$, definimos su **conjugado** por $\overline{z}=a-bi$. La unicidad de la forma cartesiana garantiza que la definición no depende de una elección de escritura. Por ejemplo, el conjugado de $3-2i$ es $3+2i$; el de i es $-i$; y el de un real a es el mismo a.

En el plano de pares, (a,b) pasa a $(a,-b)$: la conjugación es la reflexión respecto del eje real. El opuesto, en cambio, es $-z=-a-bi$ y corresponde a cambiar ambos signos. Para $z=3-2i$, el conjugado es $3+2i$ mientras el opuesto es $-3+2i$. Sólo coinciden cuando la parte real se anula.

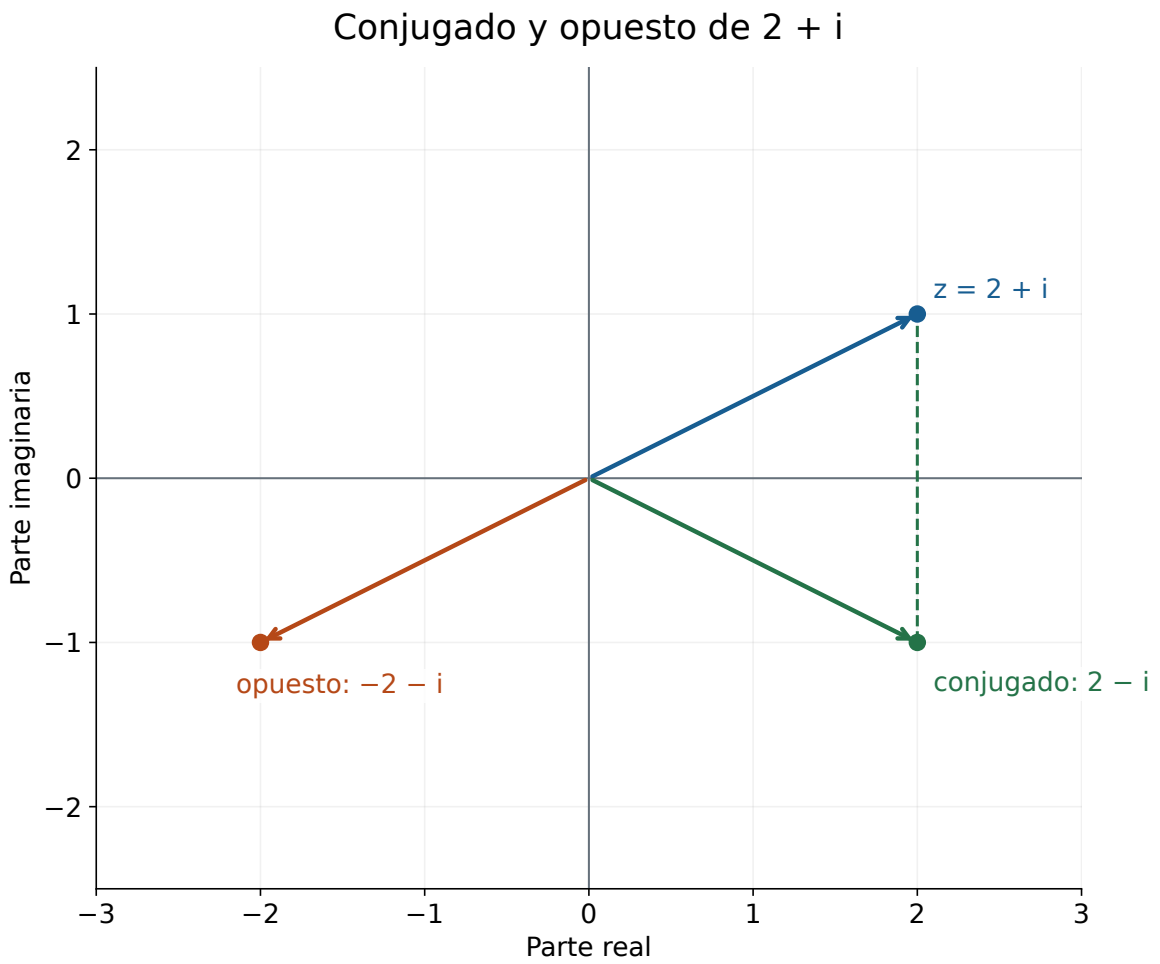


Figura 26.2. Para $z = 2 + i$, el conjugado $2 - i$ conserva la coordenada horizontal y cambia la vertical. El opuesto $-2 - i$ cambia ambas. La reflexión respecto del eje real y la simetría respecto del origen dan puntos diferentes porque $\operatorname{Re}(z) \neq 0$.

Conjugar dos veces devuelve el número inicial, pues $\overline{\overline{z}} = a - (-b)i = a + bi = z$. Una operación con esta propiedad se llama **involución**. En particular, conjugar una igualdad conserva la igualdad y permite recuperarla conjugando otra vez.

Comparar $a + bi$ con $a - bi$ da $z = \overline{z}$ si y sólo si $b = -b$, es decir, $b = 0$. Por tanto, los complejos que la conjugación deja fijos son exactamente los reales. Del mismo modo, $z = -\overline{z}$ equivale a $a = -a$, luego a $a = 0$. Esta segunda igualdad caracteriza el eje imaginario, incluido el cero; para hablar de un imaginario puro según §26.2 se añade $z \neq 0$.

Control 26.5.a — Tres expresiones diferentes. Para $z = -2 + 3i$, calcula $\overline{z}$, $-z$ e $i \operatorname{Im}(z)$. ¿Satisface $z = -\overline{z}$?

Solución. Se obtiene $\overline{z} = -2 - 3i$, $-z = 2 - 3i$ e $i \operatorname{Im}(z) = 3i$, porque $\operatorname{Im}(z) = 3$ es un real. Además, $-\overline{z} = 2 + 3i$ no es z. La parte real de z es -2, de modo que no pertenece al eje imaginario. El cálculo distingue la operación de conjugación, el inverso aditivo y el término imaginario de la forma cartesiana.

Cómo actúa sobre las operaciones. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, con todas las coordenadas reales. La suma tiene conjugado $(a + c) - (b + d)i$, que coincide con $(a - bi) + (c - di)$. Por tanto, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Para el producto conviene comparar las coordenadas completas. Como $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, resulta

$$\overline{zw} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Así, la conjugación conserva suma y producto, aunque no deja fijo cada complejo. La distinción importa: conservar una operación significa que conjugar el resultado equivale a operar con los conjugados.

También $\overline{-z} = -\overline{z}$, como se comprueba cambiando los signos de las coordenadas; en consecuencia, $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$. Un factor real r satisface $\overline{r} = r$, y la ley del producto da $\overline{rz} = r\overline{z}$. Para un factor complejo general debe conjugarse también ese factor: $\overline{iz} = -i\overline{z}$.

Si $w \neq 0$, entonces $\overline{w} \neq 0$; de lo contrario, la involución daría $w = 0$. Conjugar $ww^{-1} = 1$ y usar la ley del producto produce $\overline{w}\,\overline{w^{-1}} = 1$. Por unicidad del inverso, $\overline{w^{-1}} = (\overline{w})^{-1}$. Finalmente,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{zw^{-1}} = \overline{z}\,(\overline{w})^{-1} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \qquad w \neq 0.$$

La condición del denominador se conserva bajo conjugación. Por ejemplo, el cociente de §26.4, $(4+i)/(2-i) = \frac{7}{5} + \frac{6}{5}i$, se transforma en $(4-i)/(2+i) = \frac{7}{5} - \frac{6}{5}i$.

Recuperar las partes sin introducir nuevas incógnitas. Sumar z y su conjugado cancela el término imaginario; restarlos cancela el término real. Si $z = a + bi$, tenemos $z + \overline{z} = 2a$ y $z - \overline{z} = 2bi$. Dividir por los factores no nulos 2 y $2i$ da

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Ambas expresiones representan números reales, aunque estén escritas mediante operaciones complejas. En cambio, $(z-\overline{z})/2 = bi = i\operatorname{Im}(z)$ es el término imaginario completo. Omitir el factor i del denominador cambia lo que se recupera.

Las fórmulas permiten descomponer cualquier complejo como $z = (z+\overline{z})/2 + (z-\overline{z})/2$, suma de un real y de un elemento del eje imaginario. La primera parte queda fija al conjugar; la segunda cambia de signo.

Control 26.5.b — Una ecuación con conjugado. Resuelve $z + 2\overline{z} = 3 + 4i$ y comprueba la solución.

Solución. Escribimos $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces $z + 2\overline{z} = (x+yi) + 2(x-yi) = 3x - yi$. La igualdad de partes exige $3x = 3$ y $-y = 4$, luego $x = 1$ e $y = -4$. La única candidata es $z = 1 - 4i$. Su conjugado es $1 + 4i$ y la sustitución da $(1-4i) + 2(1+4i) = 3 + 4i$, de modo que la candidata es solución. La comparación de coordenadas demuestra también que no hay otra.

Las partes real e imaginaria conservan sumas, pero no conservan productos por separado. Para $z = a + bi$ y $w = c + di$, la multiplicación cartesiana exige mezclar ambas coordenadas:

$$\operatorname{Re}(zw) = ac - bd, \qquad \operatorname{Im}(zw) = ad + bc.$$

Estas identidades explican por qué una operación sobre complejos no siempre puede aplicarse independientemente a cada parte.

Control 26.5.c — Diagnosticar una falsa regla. Se afirma que $\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)$ para todos los complejos. Encuentra un contraejemplo y escribe la regla correcta mediante partes reales e imaginarias.

Solución. Tomemos $z = w = i$. El producto es -1, por lo que su parte imaginaria es 0; el producto de las partes imaginarias es $1 \cdot 1 = 1$. La afirmación es falsa. La fórmula cartesiana anterior proporciona la regla correcta: $\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(w)$. En el ejemplo, ambos sumandos son cero. El contraejemplo refuta la regla propuesta y la expansión justifica su reemplazo para todos los complejos.

Reconocer un real mediante conjugación. La caracterización $u \in \mathbb{R}$ si y sólo si $u = \overline{u}$ transforma una condición sobre partes en una igualdad algebraica. Puede ahorrar una división cartesiana larga, siempre que se conserve el dominio del cociente.

Control 26.5.d — Un cociente real. Determina todos los $z \neq 0$ para los que $z/\overline{z}$ es real.

Solución. El dominio asegura $\overline{z} \neq 0$. Por la ley del cociente y la involución, el conjugado de $z/\overline{z}$ es $\overline{z}/z$. Así, el cociente es real si y sólo si $z/\overline{z} = \overline{z}/z$. Multiplicar por $z\overline{z} \neq 0$ es reversible y da $z^2 = \overline{z}^{\,2}$. La diferencia de cuadrados produce $(z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 0$.

La ley del producto nulo de §26.3 obliga a $z = \overline{z}$ o $z = -\overline{z}$. El primer caso comprende los reales no nulos y da cociente 1. El segundo comprende los imaginarios puros y da cociente -1, pues $\overline{z} = -z$. En ambos casos el cociente es real, lo que prueba la suficiencia. El conjunto buscado son los dos ejes cartesianos con el origen excluido. El origen no se reincorpora al final porque la expresión original no está definida allí.

Por último, $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ es un real no negativo, y sólo se anula cuando $z = 0$. Esta identidad explica el denominador que apareció al construir el inverso. En §26.6 su raíz cuadrada real no negativa definirá el módulo y permitirá relacionar las operaciones complejas con una medida de tamaño.

26.6. Módulo y sus leyes

La forma cartesiana describe un complejo mediante dos números reales. Para medir su tamaño en el plano necesitamos combinar esas coordenadas en un único real no negativo. La identidad $z\overline{z} = a^2 + b^2$ obtenida en §26.5 proporciona esa medida y permite demostrar cómo se comporta con la multiplicación y la división.

Definición y primeros casos. Para $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, definimos su **módulo** por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. La raíz es la raíz cuadrada real no negativa estudiada en C18. Existe porque $a^2 + b^2 \geq 0$, y la unicidad de las coordenadas garantiza que el módulo está bien definido.

En el plano, $|z|$ es la distancia euclídea del punto (a, b) al origen: la expresión procede del teorema de Pitágoras aplicado a los desplazamientos de longitudes $|a|$ y $|b|$. La definición algebraica sigue siendo válida si una coordenada es cero, caso en que la distancia se mide sobre un eje.

Por definición, $|z| \geq 0$ y $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}$. Además, $|z| = 0$ equivale a $a^2 + b^2 = 0$. Como ambos sumandos son reales no negativos, esa igualdad obliga a $a = b = 0$. Hemos probado que $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$; en particular, $z \neq 0$ implica $|z| > 0$.

Si $z = a$ es real, la definición da $|a| = \sqrt{a^2}$, que coincide con su valor absoluto real. La coincidencia incluye los reales negativos: $\sqrt{(-3)^2} = 3$, no -3. La misma notación prolonga, por tanto, el valor absoluto ya conocido. Para un imaginario bi, se obtiene $|bi| = |b|$; en particular, $|i| = 1$.

Cambiar el signo de una o de ambas coordenadas no cambia sus cuadrados. Así, $|\overline{z}| = |z|$ y $|-z| = |z|$. El módulo mide una longitud y pierde información sobre la posición: $3 + 4i$, $3 - 4i$ y $-3 - 4i$ tienen todos módulo 5.

Control 26.6.a — Un real obtenido de un complejo. Calcula $|-3|$, $|-3i|$ y $|-3 + 4i|$. ¿Puede el módulo de un complejo no real ser real?

Solución. Los valores son 3, 3 y $\sqrt{9 + 16} = 5$, respectivamente. Todo módulo es real no negativo por definición, con independencia de que el complejo original sea real. Por ejemplo, $-3 + 4i$ no es real, pero su módulo es el real 5. No debe confundirse el tipo de número al que pertenece el argumento con el tipo de número que produce esta operación.

Demostrar la ley del producto. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Para evitar desarrollar cuatro cuadrados, utilizamos la conjugación, que conserva productos. Las leyes de cuerpo permiten reagrupar:

$$|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = (zw)(\overline{z}\,\overline{w}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2.$$

Tanto $|zw|$ como $|z||w|$ son reales no negativos. La unicidad de la raíz cuadrada real no negativa permite concluir $|zw| = |z||w|$. La elección del signo se justifica con esa no negatividad; una igualdad de cuadrados entre reales cualesquiera no bastaría para igualarlos.

La prueba incluye $z = 0$ o $w = 0$, sin necesidad de dividir. Como consecuencia, para $r \in \mathbb{R}$ tenemos $|rz| = |r||z|$. Si $r < 0$, sustituir $|r|$ por r daría una cantidad negativa para $z \neq 0$ y destruiría la igualdad.

La inducción y la ley del producto dan $|z^n| = |z|^n$ para todo entero $n \geq 0$, con la convención de potencia cero de §26.4. Para exponentes negativos se necesita $z \neq 0$ y la ley del inverso que probaremos a continuación.

Inversos y cocientes con su dominio. Si $w \neq 0$, la igualdad $ww^{-1} = 1$ y la ley del producto dan $|w||w^{-1}| = |1| = 1$. Como $|w| > 0$, podemos dividir entre ese real y obtener $|w^{-1}| = 1/|w|$. Aplicándola a $z/w = zw^{-1}$ resulta

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \qquad w \neq 0.$$

El numerador puede ser cero. El denominador no puede serlo, y la condición $w \neq 0$ equivale a $|w| > 0$. También se obtiene $|z^n| = |z|^n$ para todos los enteros n cuando $z \neq 0$, usando la definición de potencias negativas.

La fórmula del inverso admite ahora una escritura breve: $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$ para $z \neq 0$. En efecto, $z\overline{z} = |z|^2 > 0$, por lo que multiplicar z por esa expresión da 1. Dividir por el módulo solo una vez produce otro objeto: $u = z/|z|$ tiene módulo 1, pero en general no es el inverso de z.

Control 26.6.b — Calcular el tamaño antes del cociente. Determina el módulo de $(3 - 4i)/(1 + i)$ sin desarrollar la división cartesiana. Compruébalo después mediante las coordenadas.

Solución. El denominador es no nulo y tiene módulo $\sqrt{2}$; el numerador tiene módulo 5. La ley del cociente da $5/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}/2$. Para comprobarlo, multiplicamos numerador y denominador por $1 - i$. El numerador es $(3 - 4i)(1 - i) = -1 - 7i$ y el denominador es 2. El cociente vale $-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$, cuyo módulo es $\sqrt{1/4 + 49/4} = \sqrt{50}/2 = 5\sqrt{2}/2$. Ambos métodos conservan la restricción inicial.

Cotas de las componentes y lo que el módulo no determina. Si $z = a + bi$, entonces $a^2 \leq a^2 + b^2$ y $b^2 \leq a^2 + b^2$. Como $|a|$, $|b|$ y $|z|$ son no negativos, comparar sus cuadrados da

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \qquad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

La primera cota es una igualdad exactamente cuando $b = 0$, es decir, cuando z es real. La segunda es una igualdad exactamente cuando $a = 0$, es decir, en el eje imaginario, incluido cero. Las dos igualdades simultáneas sólo se dan para $z = 0$.

Aquí el orden compara números reales: módulos y valores absolutos de componentes. Estas desigualdades no definen un orden entre los complejos. Tampoco la igualdad $|z| = |w|$ obliga a $z = w$, porque muchos puntos tienen la misma distancia al origen.

Control 26.6.c — Recuperar una coordenada y todas las posibilidades. Encuentra todos los complejos z que satisfacen $|z| = 5$ y $\operatorname{Re}(z) = 3$.

Solución. La condición real permite escribir $z = 3 + bi$ con $b \in \mathbb{R}$. Entonces $|z| = 5$ equivale a $\sqrt{9 + b^2} = 5$. Ambos miembros son no negativos, de modo que elevar al cuadrado es reversible: $9 + b^2 = 25$, luego $b^2 = 16$. Las dos posibilidades son $b = 4$ y $b = -4$. Se obtienen $3 + 4i$ y $3 - 4i$, ambos de módulo 5 y parte real 3. La ecuación real para b prueba que la lista es exhaustiva. Los dos resultados son conjugados, y el dato del módulo no elige entre ellos.

Control 26.6.d — Una igualdad que exige controlar el signo. Clasifica los z para los que $|z| = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$.

Solución. Escribimos $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. La ecuación es $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, por lo que exige $a + b \geq 0$. Con esa restricción, elevar al cuadrado es reversible y da $a^2 + b^2 = (a + b)^2$, equivalente a $2ab = 0$. Así, $a = 0$ o $b = 0$.

Si $a = 0$, la restricción exige $b \geq 0$; si $b = 0$, exige $a \geq 0$. Recíprocamente, un real no negativo a satisface $|a| = a$, y un imaginario bi con $b \geq 0$ satisface $|bi| = b$. El conjunto buscado es la unión del semieje real no negativo y del semieje imaginario no negativo, con el origen incluido. Si se hubiera omitido la restricción de signo, aparecerían candidatos falsos como $z = -1$: tiene módulo 1, pero la suma de sus partes es -1.

Para el producto y el cociente, el módulo tiene leyes exactas. La suma requiere otra relación: por ejemplo, $|1 + (-1)| = 0$ mientras $|1| + |-1| = 2$, por lo que no hay una ley aditiva general. En §26.7 estudiaremos la desigualdad que la sustituye y utilizaremos $|z - w|$ para medir la distancia entre dos complejos.

26.7. Distancia, lugares geométricos y desigualdad triangular

El módulo mide la distancia al origen. Para comparar dos puntos basta trasladar uno de ellos al origen: si $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos $d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$. Es la distancia euclídea entre sus pares cartesianos. Por las leyes del módulo, es no negativa, se anula exactamente cuando $z = w$ y satisface $d(z, w) = d(w, z)$. Falta demostrar que pasar por un tercer punto no acorta el camino directo.

La desigualdad triangular por operaciones algebraicas. De §26.6 sabemos que $|\operatorname{Re}(u)| \leq |u|$ para todo complejo u. Por tanto, $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$. La igualdad en esta última cota ocurre exactamente cuando u es real no negativo: la igualdad de módulos obliga a que la parte imaginaria sea cero, y el signo debe ser no negativo.

Al desarrollar el producto de $z + w$ por su conjugado, los términos cruzados forman un complejo y su conjugado. Esto permite escribir

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.$$

Se usaron $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}|$ y $|z\overline{w}| = |z||w|$. Como ambos miembros que queremos comparar son reales no negativos, la desigualdad entre cuadrados da la **desigualdad triangular** $|z + w| \leq |z| + |w|$. La prueba no divide y vale también cuando alguno de los sumandos es cero.

Para distancias, tomemos $z - w = (z - v) + (v - w)$. La desigualdad anterior produce $d(z, w) \leq d(z, v) + d(v, w)$. El cálculo justifica la interpretación de camino directo y camino que pasa por v sin necesitar una figura como prueba.

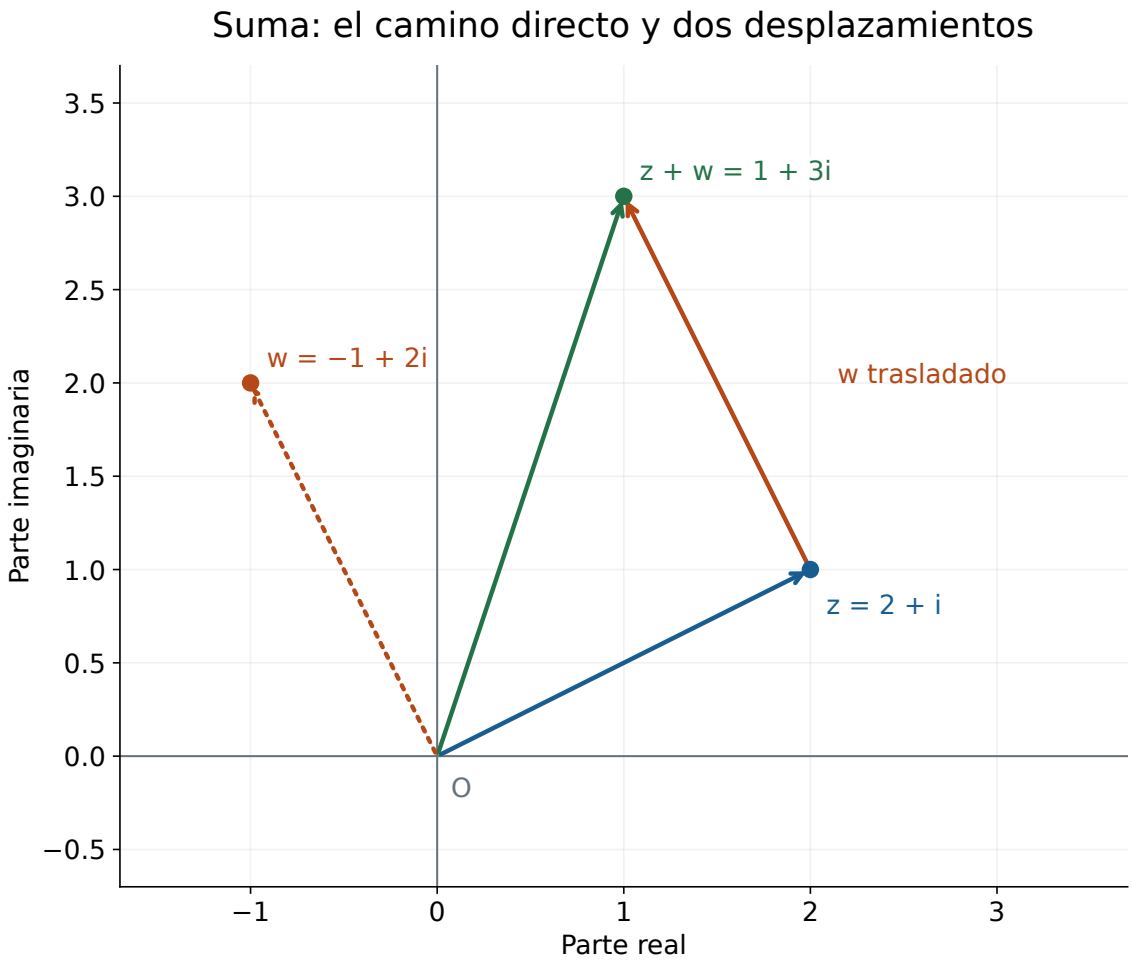


Figura 26.3. Con $z = 2 + i$ y $w = -1 + 2i$, la suma es $1 + 3i$. La flecha de w trasladada conserva sus componentes $(-1, 2)$. El camino de dos desplazamientos mide $|z| + |w| = 2\sqrt{5}$, mientras que el directo mide $|z + w| = \sqrt{10} < 2\sqrt{5}$. La figura ilustra un caso estricto; el argumento anterior demuestra la cota para cualquier pareja.

Cuándo se alcanza la igualdad. La única desigualdad utilizada en el desarrollo fue la cota de la parte real. Por ello, $|z + w| = |z| + |w|$ equivale a que $z\overline{w}$ sea real no negativo. Si $z = 0$ o $w = 0$, la igualdad se cumple.

Supongamos ahora que ambos son no nulos. Entonces $z\overline{w} \neq 0$ y la condición equivale a que sea real positivo. Como $z/w = z\overline{w}/|w|^2$, el cociente es un real positivo t, y $z = tw$. Recíprocamente, si $z = tw$ con $t > 0$, entonces $|z + w| = |(t + 1)w| = (t + 1)|w| = |z| + |w|$. Para dos sumandos no nulos, la igualdad significa que apuntan en la misma dirección desde el origen. Que pertenezcan a una misma recta no basta: un factor real negativo puede producir cancelación.

Control 26.7.a — Alineación y signo. Compara la desigualdad triangular para $z = 1 + i$, primero con $w = 2 + 2i$ y después con $w = -2 - 2i$.

Solución. En el primer caso, $w = 2z$, de modo que los sumandos tienen la misma dirección. Sus módulos son $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$, y la suma $3 + 3i$ tiene módulo $3\sqrt{2}$: hay igualdad. En el segundo caso, la suma es $-1 - i$, de módulo $\sqrt{2}$, mientras que la suma de módulos sigue siendo $3\sqrt{2}$. La desigualdad es estricta. Los puntos están en la misma recta en ambos casos, pero sólo el factor positivo proporciona igualdad.

La desigualdad inversa. Aplicar la triangular a $z = (z - w) + w$ da $|z| - |w| \le |z - w|$. Intercambiar z y w da $|w| - |z| \le |z - w|$. Reunir las dos cotas equivale a

$$\big||z| - |w|\big| \le |z - w|.$$

El valor absoluto exterior corresponde al real $|z|-|w|$. Esta **desigualdad triangular inversa** dice que la diferencia de distancias al origen no supera la distancia entre los puntos.

Control 26.7.b — Acotar sin conocer las coordenadas. Si $|z| = 5$ y $|w| = 2$, encuentra cotas para $|z - w|$ y determina si ambos extremos pueden alcanzarse.

Solución. La inversa da $3 \le |z - w|$, y la triangular aplicada a $z + (-w)$ da $|z - w| \le 7$. Las cotas son alcanzables: $z = 5, w = 2$ da distancia 3; $z = 5, w = -2$ da distancia 7. Todos estos valores son complejos reales permitidos. Conocer sólo los módulos no determina una única distancia, pero sí el intervalo de posibilidades acotado por 3 y 7.

Leer lugares geométricos y conservar dominios. Una condición sobre distancias describe un conjunto de puntos, llamado **lugar geométrico**. Para un centro $c = \alpha + \beta i$ y un real $R > 0$, la igualdad $|z - c| = R$ equivale a $(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 = R^2$, una circunferencia. Si $R = 0$, el conjunto es sólo $\{c\}$; si $R < 0$, es vacío. Las condiciones $|z - c| < R$ y $|z - c| \le R$, para $R > 0$, describen el disco abierto y el disco cerrado, respectivamente.

La igualdad de distancias a dos puntos distintos describe su mediatriz. Por ejemplo, $|z-1| = |z + 1|$ se convierte, al cuadrar miembros no negativos, en $(a - 1)^2 + b^2 = (a + 1)^2 + b^2$. Se reduce a $a = 0$, el eje imaginario.

Control 26.7.c — Traducir una circunferencia. Describe el conjunto $|z - (1 - 2i)| = 3$ en coordenadas y encuentra sus intersecciones con los ejes.

Solución. Escribimos $z = a + bi$ y obtenemos $(a - 1)^2 + (b + 2)^2 = 9$: centro $(1, -2)$ y radio 3. En el eje real, $b = 0$ y $(a - 1)^2 = 5$, de donde $z = 1 + \sqrt{5}$ o $z = 1 - \sqrt{5}$. En el eje imaginario, $a = 0$ y $(b + 2)^2 = 8$, de donde $z = (-2 + 2\sqrt{2})i$ o $z = (-2 - 2\sqrt{2})i$. Sustituir estas coordenadas devuelve 9 en la ecuación. Cada ecuación cuadrática real aporta todas las intersecciones de su eje.

Las transformaciones con cocientes añaden una obligación: examinar el dominio antes de traducir el lugar. Una ecuación sin denominadores puede describir candidatos que la expresión original excluye.

Control 26.7.d — Distancias dentro de un cociente. Describe el conjunto de soluciones de $|(z - 1)/(z + 1)| = 1$.

Solución. Primero exigimos $z \neq -1$. En ese dominio, la ley del cociente da $|z - 1|/|z + 1| = 1$, equivalente a $|z - 1| = |z + 1|$ porque $|z + 1| > 0$. El desarrollo anterior identifica el eje imaginario. Ningún punto de ese eje es -1, así que no hay que retirar un punto adicional: las soluciones son todos los $z = bi$ con $b \in \mathbb{R}$. Para comprobar suficiencia, las dos distancias tienen cuadrado $1 + b^2$ y el denominador es no nulo. La comprobación del punto excluido sigue siendo necesaria aunque aquí la mediatriz no lo contenga.

Las ecuaciones de distancias se resuelven usando cuadrados reales y restricciones de signo. Para una ecuación como $z^2 = w$ necesitamos otra comparación: la de las dos coordenadas del cuadrado complejo.

26.8. Raíces cuadradas y cuadráticas complejas

Una raíz cuadrada de $w \in \mathbb{C}$ es un complejo z que satisface $z^2 = w$. Buscaremos todas las soluciones. La raíz cuadrada real no negativa continuará siendo una herramienta sobre reales no negativos; todavía no hemos definido una función que elija una sola raíz de cada complejo.

Traducir el problema a dos ecuaciones reales. Sea $w = a + bi$ y escribamos la incógnita como $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Desarrollar el cuadrado y comparar partes da

$$z^2 = w \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = a, \qquad 2xy = b.$$

Además, si $r = |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$, la ley del producto da $|z|^2 = |z^2| = r$. Como $|z|^2 = x^2 + y^2$, toda solución cumple $x^2 + y^2 = r$. Sumar y restar esta igualdad con $x^2 - y^2 = a$ produce

$$x^2 = \frac{r + a}{2}, \qquad y^2 = \frac{r - a}{2}.$$

Los miembros derechos son no negativos porque $r \geq |a|$. Estas dos fórmulas determinan tamaños, pero la condición $2xy = b$ todavía debe fijar cómo se combinan los signos.

Separar los casos que permiten dividir. Si $w = 0$, la ley del producto nulo aplicada a $z^2 = 0$ obliga a $z = 0$. Hay una sola raíz distinta.

Supongamos que $b \neq 0$. Entonces $r > |a|$, porque $r^2 = a^2 + b^2 > a^2$. En particular, $r + a > 0$. Elegimos el real positivo $x = \sqrt{(r + a)/2}$ y definimos $y = b/(2x)$. El denominador no se anula, y $2xy = b$ por construcción. También

$$y^2 = \frac{b^2}{4x^2} = \frac{b^2}{2(r + a)} = \frac{r - a}{2},$$

donde se usó $b^2 = r^2 - a^2 = (r - a)(r + a)$. Por tanto, $x^2 - y^2 = a$ y $x + yi$ es raíz. Su opuesto también lo es.

Para demostrar que no falta ninguna, sea $x' + y'i$ otra raíz. La igualdad para x'^2 obliga a $x' = x$ o $x' = -x$, pues $x > 0$. La condición $2x'y' = b$ fija entonces $y' = y$ o $y' = -y$, respectivamente. Las únicas raíces son $x + yi$ y $-x - yi$. Son distintas porque $x > 0$. Si $b > 0$, las partes de la raíz elegida tienen el mismo signo; si $b < 0$, tienen signos contrarios.

Queda el caso $b = 0$, es decir, $w = a$ real. La ecuación $2xy = 0$ obliga a que alguna coordenada sea cero. Si $a > 0$, no puede ser $x = 0$, porque daría $-y^2 = a > 0$; así, $y = 0$ y las raíces son $\pm\sqrt{a}$. Si $a < 0$, no puede ser $y = 0$; entonces $x = 0$ y las raíces son $\pm i\sqrt{-a}$. El caso $a = 0$ ya se trató.

Hemos probado existencia y exhaustividad: todo complejo no nulo tiene exactamente dos raíces cuadradas distintas y opuestas; el cero tiene sólo una. El argumento no utiliza el teorema fundamental del álgebra ni una forma polar.

Control 26.8.a — Cero y un real negativo. Resuelve $z^2 = 0$ y $z^2 = -9$, indicando cuántas raíces distintas tiene cada ecuación.

Solución. La primera tiene únicamente $z = 0$ por la ley del producto nulo. En la segunda, el caso real negativo da $z = 3i$ y $z = -3i$. Ambos cuadrados son -9, y son distintos. La clasificación por coordenadas prueba que no hay otros. El signo $\pm$ no significa dos raíces distintas cuando ambas expresiones coinciden en cero.

Control 26.8.b — Signos coordinados. Encuentra todas las raíces cuadradas de $-7 + 24i$ y compruébalas.

Solución. Aquí $r = \sqrt{49 + 576} = 25$. La fórmula da $x^2 = (25 - 7)/2 = 9$ e $y^2 = (25 + 7)/2 = 16$. Elegimos $x = 3$ y calculamos $y = 24/(2 \cdot 3) = 4$. Las raíces son $3 + 4i$ y $-3 - 4i$. El cuadrado de la primera es $9 - 16 + 24i = -7 + 24i$; el opuesto tiene el mismo cuadrado. Las combinaciones $3 - 4i$ y $-3 + 4i$ producirían parte imaginaria -24, de modo que elegir los signos independientemente daría candidatos falsos.

La fórmula cuadrática con una raíz elegida y su opuesta. Consideremos $Az^2 + Bz + C = 0$ con $A, B, C \in \mathbb{C}$ y $A \neq 0$. Completar el cuadrado puede hacerse sin ordenar los coeficientes:

$$(2Az + B)^2 - (B^2 - 4AC) = 4A(Az^2 + Bz + C).$$

Como $4A \neq 0$, la ecuación original equivale a $(2Az + B)^2 = \Delta$, donde $\Delta = B^2 - 4AC$ es el **discriminante**. El apartado anterior garantiza una raíz s de Δ. Todas las soluciones son

$$z = \frac{-B + s}{2A} \quad \text{o} \quad z = \frac{-B - s}{2A}, \qquad s^2 = \Delta.$$

La transformación $z \mapsto 2Az + B$ es reversible, porque $2A \neq 0$. Esto prueba que la fórmula proporciona todas las soluciones. Elegir $-s$ en lugar de s sólo intercambia los resultados.

Si $\Delta \neq 0$, entonces $s \neq 0$ y las dos soluciones son distintas: su diferencia es $s/A \neq 0$. Si $\Delta = 0$, coinciden en $-B/(2A)$; además, el polinomio es $A(z + B/(2A))^2$, por lo que la raíz es doble. Por ejemplo, $z^2 - 2iz - 1 = (z - i)^2$ tiene una sola raíz distinta, i, de multiplicidad dos.

La condición $A \neq 0$ distingue una cuadrática de una ecuación de grado menor. Si $A = 0$, se resuelve $Bz + C = 0$: para $B \neq 0$ hay una solución $-C/B$; para $B = 0, C = 0$ todos los complejos son soluciones; para $B = 0, C \neq 0$ no hay ninguna.

Control 26.8.c — Usar el discriminante sin imponer una rama. Resuelve $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ mediante la fórmula cuadrática y verifica los resultados por factorización.

Solución. Tenemos $A = 1$, $B = -(1 + i)$ y $C = i$. El discriminante es $(1 + i)^2 - 4i = -2i$. Una raíz es $s = 1 - i$, porque $(1 - i)^2 = -2i$. La fórmula da $((1 + i) + (1 - i))/2 = 1$ y $((1 + i) - (1 - i))/2 = i$. La factorización $(z - 1)(z - i) = z^2 - (1 + i)z + i$ comprueba ambas soluciones. Son distintas y exhaustivas por el discriminante no nulo y la equivalencia demostrada. Elegir $s = -1 + i$ invertiría el orden de la lista.

Control 26.8.d — Un parámetro que cambia el caso cero. Para $t \in \mathbb{R}$, determina todas las soluciones de $z^2 = ti$.

Solución. Si $t = 0$, sólo aparece $z = 0$. Si $t > 0$, las fórmulas dan $x^2 = y^2 = t/2$, y el producto $2xy = t$ exige signos iguales. Las raíces son $\pm\sqrt{t/2}(1 + i)$; al cuadrar, se obtiene $(t/2)\, 2i = ti$.

Si $t < 0$, se tiene $|ti| = -t$ y $x^2 = y^2 = -t/2$. Ahora los signos son contrarios. Las raíces son $\pm\sqrt{-t/2}(1 - i)$, cuyo cuadrado es $(-t/2)(-2i) = ti$. Para los valores no nulos hay exactamente dos raíces distintas, mientras que en cero ambas se reúnen en una sola. La separación por el signo de t mantiene reales no negativos los radicandos utilizados.

Las raíces cuadradas ya pueden calcularse por coordenadas. Para potencias y raíces de orden mayor, seguir expandiendo suele ocultar la organización de los resultados. El siguiente bloque construirá los ángulos y la forma polar que permiten verla, sin dar por supuesta una trigonometría aún no presentada.

26.9. Ángulos, radianes y círculo unitario

Para describir la dirección de un complejo necesitamos una medida de giro. Introduciremos aquí la geometría y las identidades trigonométricas que se usarán después; no se presupone un curso de trigonometría.

Medir un giro y conservar las vueltas. Tomamos como dirección inicial el semieje real positivo. Un giro antihorario tiene signo positivo y uno horario tiene signo negativo. Una vuelta completa devuelve la dirección inicial, pero el giro realizado puede registrar una o varias vueltas.

Un **radián** es el ángulo que, en un círculo de radio $R > 0$, recorre un arco de longitud R. En general, la medida en radianes es la longitud orientada del arco dividida por el radio. Usamos la geometría euclídea del círculo: su circunferencia es $2\pi R$, y por ello una vuelta mide 2π radianes. Media vuelta mide π; un cuarto de vuelta, $\pi/2$. En grados, una vuelta mide $360°$, así que θ grados equivalen a $\theta\pi/180$ radianes.

Dos giros terminan en la misma dirección exactamente cuando difieren en un número entero de vueltas: $\alpha - \beta = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Escribiremos $\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$ para esta relación. Aquí no se afirma que los ángulos sean enteros: la notación indica que su diferencia es un múltiplo entero del periodo real 2π.

Control 26.9.a — Giro y dirección final. Convierte $-450°$ a radianes y encuentra la dirección equivalente entre 0 y 2π, sin incluir 2π.

Solución. La medida es $-450\pi/180 = -5\pi/2$. Sumando dos vueltas, es decir 4π, se obtiene $3\pi/2$. El giro original es horario y contiene más de una vuelta; su dirección final coincide con la del giro antihorario $3\pi/2$. La equivalencia de direcciones no elimina esa diferencia entre los recorridos.

Seno y coseno como coordenadas. En el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, partimos de $(1, 0)$ y giramos un ángulo θ. Definimos **coseno** y **seno** como las coordenadas del punto final:

$$P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Cada dirección determina un único punto de ese círculo, y cada punto determina una dirección módulo vueltas completas. Por tanto, $P_\alpha = P_\beta$ si y sólo si $\alpha \equiv \beta$ (mód 2π). En particular, seno y coseno tienen periodo 2π.

Los cuatro puntos sobre los ejes dan $P_0 = (1, 0)$, $P_{\pi/2} = (0, 1)$, $P_\pi = (-1, 0)$ y $P_{3\pi/2} = (0, -1)$. Reflejar respecto del eje horizontal invierte el giro: $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

Los cuadrantes I, II, III y IV tienen respectivamente signos $(+,+)$, $(-,+)$, $(-,-)$ y $(+,-)$ para las coordenadas. Sobre los ejes hay una coordenada cero, de modo que los signos de cuadrante sólo se aplican a sus interiores.

Un triángulo rectángulo isósceles da $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Al dividir un triángulo equilátero de lado 2 por su altura, obtenemos un triángulo rectángulo con hipotenusa 2, catetos 1 y $\sqrt{3}$, y ángulos $\pi/6$ y $\pi/3$. En consecuencia, $(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ y $(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)) = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Las reflexiones permiten trasladar estos valores a los otros cuadrantes.

Control 26.9.b — Valor y signo. Determina $P_{5\pi/6}$.

Solución. El ángulo $5\pi/6 = \pi - \pi/6$ está en el segundo cuadrante. Su punto es la reflexión horizontal del correspondiente a $\pi/6$: cambia el signo de la coordenada real y conserva la vertical. Así, $P_{5\pi/6} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$. El cuadrado de sus coordenadas suma $3/4 + 1/4 = 1$, como exige el círculo unitario.

Justificar las fórmulas de adición por un giro. Sea R_α el giro geométrico de ángulo α alrededor del origen. El vector horizontal unitario pasa a $e = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. El vertical unitario pasa a $f = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$: es perpendicular a e, de longitud uno, y está un cuarto de vuelta por delante. Sus coordenadas se obtienen intercambiando las coordenadas de e y cambiando el signo de la primera; esto conserva la longitud y da el perpendicular con la orientación requerida.

Para hallar la imagen de (x, y), descomponemos el desplazamiento en uno horizontal de longitud orientada x y otro vertical de longitud orientada y. Un giro rígido conserva longitudes, paralelismo y la construcción del paralelogramo de esos desplazamientos. Por ello, sus imágenes son xe e yf, y la diagonal resultante es su suma. Los signos negativos invierten el sentido del lado correspondiente. Así,

$$R_\alpha(x, y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

Este argumento es geométrico y cartesiano; no utiliza multiplicación polar ni De Moivre. Girar P_β un ángulo α lleva al punto de ángulo $\alpha + \beta$, porque los recorridos orientados de giro se suman. Sustituir sus coordenadas en la fórmula anterior demuestra

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

La interpretación por giros incluye ángulos negativos y vueltas completas. Sustituir $-\beta$ y usar las reflexiones da también las fórmulas de diferencia.

Control 26.9.c — Un valor obtenido por adición. Calcula el seno y el coseno de $5\pi/12$.

Solución. Escribimos $5\pi/12 = \pi/4 + \pi/6$. La fórmula del coseno da $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. La del seno da $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.

Ambos son positivos porque el ángulo está en el primer cuadrante. Sus cuadrados suman $((8-4\sqrt{3})+(8+4\sqrt{3}))/16=1$.

Control 26.9.d — Girar un punto fuera del círculo. Aplica un giro de $\pi/2$ a $(2,-1)$ y comprueba su distancia al origen.

Solución. Como $\cos(\pi/2)=0$ y $\sin(\pi/2)=1$, la fórmula da $R_{\pi/2}(2,-1)=(1,2)$. Antes y después, el cuadrado de la distancia es 5. La fórmula del giro no exige que el punto esté en el círculo unitario; éste se utilizó para definir sus coeficientes.

26.10. Forma polar y argumentos

Las coordenadas cartesianas dicen cuánto avanzar sobre cada eje. La descripción polar separa la distancia al origen y la dirección. La separación exige excluir el origen cuando se asigna una dirección.

Existencia y elección de un argumento. Sea $z=a+bi\neq 0$ y sea $r=|z|>0$. El punto $(a/r,b/r)$ pertenece al círculo unitario porque $(a/r)^2+(b/r)^2=1$. La parametrización geométrica de §26.9 garantiza un ángulo θ con $\cos\theta=a/r$ y $\sin\theta=b/r$. Así,

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Esta es la **forma polar**. Definimos la abreviatura $\operatorname{cis}\theta=\cos\theta+i\sin\theta$, de modo que $z=r\operatorname{cis}\theta$. Su módulo es r, porque $\operatorname{cis}\theta$ tiene módulo uno. El radio polar se toma positivo para los complejos no nulos.

Todo ángulo que produce esa dirección se llama **argumento** de z. Si θ es uno, todos son $\theta+2\pi k$, con $k\in\mathbb{Z}$, y no hay otros: la igualdad de puntos del círculo se caracteriza exactamente por vueltas completas.

Fijamos el **argumento principal** $\operatorname{Arg}(z)$ como el único argumento en $[0,2\pi)$. Para obtenerlo se añaden o restan vueltas hasta entrar en ese intervalo; la elección existe y es única porque los intervalos consecutivos de longitud 2π cubren la recta sin compartir sus extremos derechos. En esta convención, un punto sobre el eje real positivo tiene argumento principal 0, no 2π.

El cero no tiene argumento. Aunque $0\operatorname{cis}\theta=0$ para cualquier θ, esa igualdad no selecciona ninguna dirección, y la normalización por $|z|$ no está definida. No se asignará $\operatorname{Arg}(0)$.

Control 26.10.a — Leer el cuadrante antes de elegir el ángulo. Escribe $-\sqrt{3}+i$ en forma polar e indica todos sus argumentos.

Solución. El módulo es $\sqrt{3+1}=2$. Las coordenadas normalizadas son $(-\sqrt{3}/2,1/2)$, que corresponden a $5\pi/6$. Por tanto, $z=2\operatorname{cis}(5\pi/6)$, su argumento principal es $5\pi/6$ y sus argumentos son $5\pi/6+2\pi k$. Recuperar las coordenadas multiplicando por 2 comprueba la forma polar.

Cuadrantes, equivalencias y radios positivos. Los signos de a y b determinan el cuadrante del argumento principal, con los ejes tratados aparte. Si las coordenadas no corresponden a un valor angular conocido, se puede especificar el ángulo como el único del cuadrante que tiene coseno a/r y seno b/r. La forma polar no requiere fingir un valor exacto sencillo ni introducir una función trigonométrica inversa sin definirla.

Para $r,s>0$, la igualdad $r\operatorname{cis}\alpha=s\operatorname{cis}\beta$ equivale a $r=s$ y $\alpha-\beta\in 2\pi\mathbb{Z}$. La necesidad del primer dato se obtiene tomando módulos; después, dividir por el radio reduce al círculo unitario. La suficiencia sigue de la periodicidad.

Control 26.10.b — Argumento negativo y rama fijada. Un cálculo describe $-1-i$ mediante el ángulo $-\pi/4$. Diagnostica el resultado y proporciona un argumento correcto negativo y el principal.

Solución. El ángulo $-\pi/4$ tiene coseno positivo y seno negativo, por lo que pertenece al cuarto cuadrante y no describe $-1-i$. El módulo buscado es $\sqrt{2}$. Un argumento correcto

negativo es $-3\pi/4$, cuyas dos coordenadas son $-\sqrt{2}/2$. Sumando 2π se obtiene el principal $5\pi/4$. Así, $-1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(-3\pi/4)=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(5\pi/4)$.

Control 26.10.c — Reparar un radio negativo. Convierte $-2\,\mathrm{cis}(\pi/3)$ a una forma polar con radio positivo y verifica sus coordenadas.

Solución. Las coordenadas iniciales son $-1-\sqrt{3}i$. Cambiar ambos signos equivale a añadir media vuelta: la fórmula de adición con π da $\mathrm{cis}(\theta+\pi)=-\mathrm{cis}\,\theta$. Por tanto, la forma requerida es $2\,\mathrm{cis}(4\pi/3)$. Su radio es 2 y su argumento principal $4\pi/3$; sus coordenadas son $2(-1/2,-\sqrt{3}/2)=(-1,-\sqrt{3})$. Mantener el ángulo $\pi/3$ y cambiar solamente el radio a 2 habría producido el opuesto del número original.

La conjugación refleja la dirección: de las identidades para ángulos negativos resulta $\overline{r\,\mathrm{cis}\,\theta}=r\,\mathrm{cis}(-\theta)$. El opuesto añade π. Cuando se pide el argumento principal, hay que reducir esos ángulos al intervalo fijado.

Control 26.10.d — Conjugado y opuesto en la misma rama. Para $z=-1+i$, encuentra los argumentos principales de z, $\overline{z}$ y $-z$.

Solución. El módulo común es $\sqrt{2}$. El número z está en el segundo cuadrante con argumento principal $3\pi/4$. El conjugado tiene argumento $-3\pi/4$, que se reduce a $5\pi/4$; el opuesto tiene argumento $3\pi/4+\pi=7\pi/4$. Los resultados concuerdan con $\overline{z}=-1-i$ y $-z=1-i$. Reflejar y tomar el opuesto son operaciones diferentes también sobre los ángulos.

Una dirección, muchos argumentos y una elección de rama. Para un complejo no nulo, la dirección queda determinada, pero sus argumentos difieren en vueltas completas. Elegir Arg en $[0,2\pi)$ es una convención adicional; no cambia el número. **Control resuelto:** dos factores de argumento principal $3\pi/2$ tienen producto de argumento 3π, equivalente a π. Su argumento principal es π, no la suma sin reducir. En cambio, la suma cartesiana requiere sumar coordenadas: no se obtiene sumando argumentos. El cero puede resultar de una suma y entonces no tiene dirección. Separar radio, dirección y representante angular permite decidir qué regla se está usando y evita tratar la rama principal como si respetara todas las operaciones sin reducción.

26.11. Producto polar y fórmula de De Moivre

Las fórmulas de adición ya están disponibles por un argumento geométrico. Ahora podemos combinarlas con la multiplicación cartesiana para ver qué hace un producto a módulos y direcciones.

Multiplicar suma giros. Desarrollar por distributividad y agrupar partes da

$$\mathrm{cis}\,\alpha\;\mathrm{cis}\,\beta=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\mathrm{cis}(\alpha+\beta).$$

En consecuencia, si $z=r\,\mathrm{cis}\,\alpha$ y $w=s\,\mathrm{cis}\,\beta$, con $r,s>0$, entonces $zw=rs\,\mathrm{cis}(\alpha+\beta)$. Cambiar cualquiera de los argumentos por una vuelta entera cambia la suma por otra vuelta entera, sin cambiar el producto.

Multiplicar un punto por $r\,\mathrm{cis}\,\alpha$ equivale a girarlo α y multiplicar su distancia al origen por r: la expansión cartesiana coincide con $rR_\alpha(x,y)$ de §26.9. El origen permanece fijo. Multiplicar por cero envía todos los puntos al origen; en ese caso no se atribuye un giro al factor.

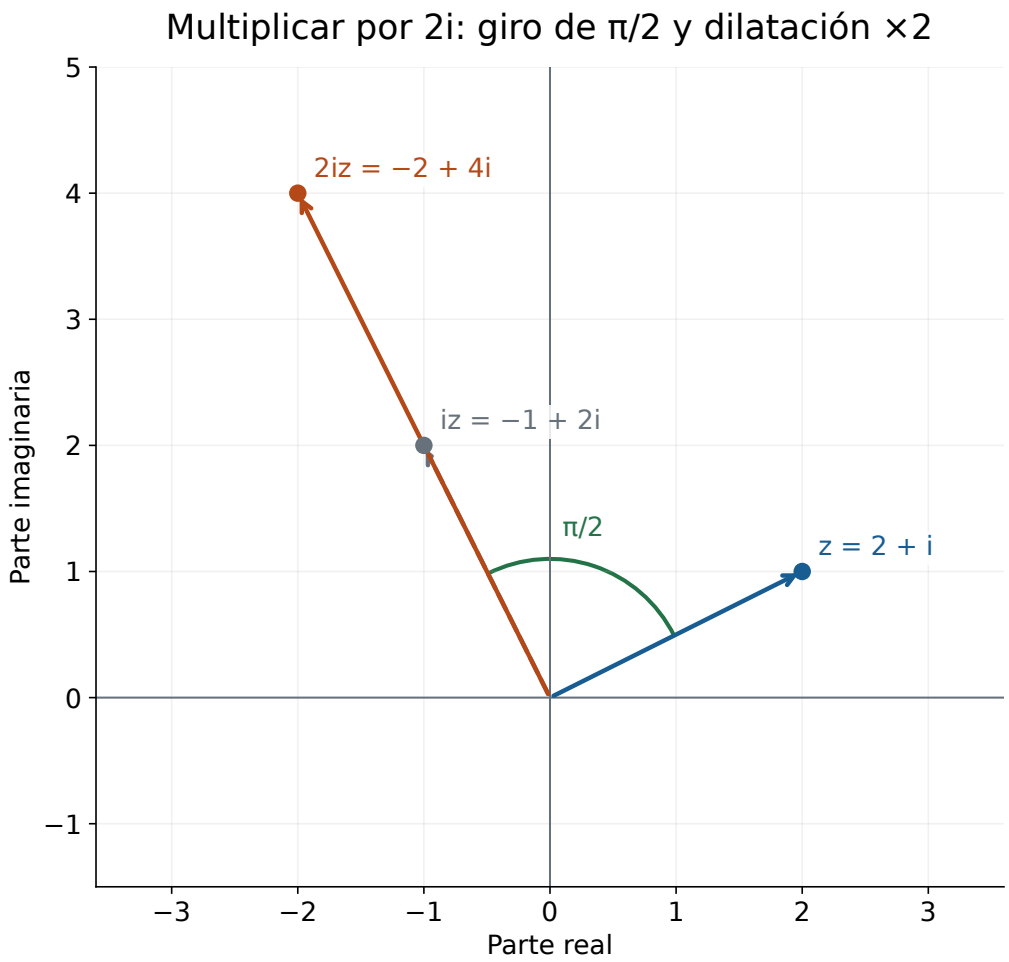


Figura 26.4. La multiplicación por $2i$ se puede efectuar en dos pasos: $iz = -1 + 2i$ y $2iz = -2 + 4i$. El giro antihorario de $\pi/2$ conserva el módulo $\sqrt{5}$; la dilatación posterior lo duplica a $2\sqrt{5}$. El arco indica el giro, y las flechas radiales permiten comparar las distancias.

Control 26.11.a — Producto y reducción de vueltas. Calcula $(2\,\mathrm{cis}(5\pi/6))(3\,\mathrm{cis}(\pi/2))$ en forma polar principal y cartesiana.

Solución. El radio del producto es 6 y la suma angular es $5\pi/6 + \pi/2 = 4\pi/3$, que ya pertenece al intervalo principal. Así, el producto es $6\,\mathrm{cis}(4\pi/3) = -3 - 3\sqrt{3}i$. Una comprobación cartesiana usa el primer factor $-\sqrt{3} + i$ y el segundo $3i$: su producto es $-3 - 3\sqrt{3}i$.

Como $\mathrm{cis}\,\theta\ \mathrm{cis}(-\theta) = 1$, el inverso de $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ es $r^{-1}\,\mathrm{cis}(-\theta)$. Para un cociente con denominador no nulo se dividen radios y se restan argumentos:

$$\frac{r\,\mathrm{cis}\,\alpha}{s\,\mathrm{cis}\,\beta} = \frac{r}{s}\,\mathrm{cis}(\alpha - \beta), \qquad r, s > 0.$$

Si el numerador es cero, el cociente es cero y se trata sin asignarle argumento.

Potencias enteras mediante inducción e inverso. La **fórmula de De Moivre** afirma que $(\mathrm{cis}\,\theta)^n = \mathrm{cis}(n\theta)$ para todo entero n. Para $n = 0$, ambos miembros son 1. Si vale para un natural n, la ley del producto demuestra $(\mathrm{cis}\,\theta)^{n+1} = \mathrm{cis}(n\theta)\,\mathrm{cis}\,\theta = \mathrm{cis}((n+1)\theta)$. Esto prueba los exponentes naturales por inducción. Para $n = -m$ con $m > 0$, el inverso es $\mathrm{cis}(-\theta)$, y aplicar el caso natural a ese inverso da $\mathrm{cis}(-m\theta)$.

Por tanto, para $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta \neq 0$,

$$z^n = r^n\,\mathrm{cis}(n\theta), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

El radio r^n sigue siendo positivo, incluso para exponentes negativos. Las potencias de cero con exponente positivo se calculan aparte; para exponente cero se conserva la convención de §26.4, y los negativos no están definidos en cero.

Control 26.11.b — Una potencia que vuelve al eje real. Calcula $(1+i)^8$ mediante De Moivre y comprueba el resultado cartesiano.

Solución. Escribimos $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\pi/4)$. La octava potencia es $(\sqrt{2})^8\,\mathrm{cis}(2\pi)=16$. Por coordenadas, $(1+i)^2=2i$, la cuarta potencia es -4 y la octava es 16. Ambos cálculos coinciden; el giro de una vuelta completa devuelve la dirección real positiva.

La suma de argumentos principales exige reducción. La ley angular del producto es una congruencia: para factores no nulos, $\mathrm{Arg}(zw)\equiv\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(w)\pmod{2\pi}$. No siempre es una igualdad literal de reales en el intervalo principal. También en potencias hay que reducir $n\,\mathrm{Arg}(z)$ para obtener $\mathrm{Arg}(z^n)$.

Control 26.11.c — Corregir una falsa aditividad. Se afirma que $\mathrm{Arg}(zw)=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(w)$ sin reducción. Examina $z=w=-1$.

Solución. Cada factor tiene argumento principal π, pero el producto es 1, de argumento principal 0. La suma 2π no pertenece a $[0,2\pi)$ y debe reducirse a 0. La igualdad propuesta es falsa, mientras que la congruencia módulo 2π se cumple. El ejemplo depende de la rama principal declarada; no cambia la ley del producto polar.

Control 26.11.d — Una potencia negativa. Calcula $(1-i)^{-3}$ y comprueba que multiplicarlo por $(1-i)^3$ da 1.

Solución. Una forma polar es $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(-\pi/4)$. La potencia pedida es $(\sqrt{2})^{-3}\,\mathrm{cis}(3\pi/4)=(1/(2\sqrt{2}))(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)=(-1+i)/4$. Por coordenadas, $(1-i)^2=-2i$ y $(1-i)^3=-2-2i$. El producto $((-1+i)/4)(-2-2i)=1$ comprueba el inverso. La base es no nula, condición necesaria para el exponente negativo.

Este desarrollo utiliza potencias enteras y funciones trigonométricas definidas geométricamente. No construye una exponencial compleja ni una potencia de exponente real o complejo. Con la ley de potencias disponible, podremos determinar todas las raíces de orden mayor y probar tanto su distinción como su exhaustividad.

26.12. Todas las raíces de un complejo

De Moivre permite comprobar raíces de una potencia. Para resolver una ecuación debemos además demostrar que los candidatos son distintos y que no falta ninguno.

Construir la lista y probar que es completa. Fijemos un entero $n\geq 1$ y un complejo $w=r\,\mathrm{cis}\,\theta\neq 0$, con $r>0$. Sea $\rho=r^{1/n}$ la raíz real positiva de r, disponible por C18. Definimos

$$z_k=\rho\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right),\qquad k=0,1,\dots,n-1.$$

De Moivre da $z_k^n=r\,\mathrm{cis}(\theta+2\pi k)=w$. Así, cada candidato es solución.

Si $z_j=z_k$, la igualdad polar con radios positivos exige $(2\pi(j-k))/n\in 2\pi\mathbb{Z}$, luego n divide $j-k$. Como $|j-k|<n$ para los índices de la lista, se tiene $j=k$. Hay exactamente n candidatos distintos.

Sea ahora $z=s\,\mathrm{cis}\,\varphi$ cualquier solución. No es cero porque $w\neq 0$. Comparar módulos da $s^n=r$, de donde $s=\rho$ por unicidad de la raíz real positiva. Comparar direcciones da $n\varphi=\theta+2\pi m$ para algún entero m. La división euclidiana escribe $m=nq+k$ con $0\leq k<n$. Así, $\varphi=(\theta+2\pi k)/n+2\pi q$, y $z=z_k$. Esta prueba de exhaustividad completa la resolución.

Elegir otro argumento $\theta+2\pi h$ de w sustituye el índice k por $k+h$ módulo n. Como sumar h permuta las clases de índices, el conjunto de raíces no cambia; sólo cambia cómo lo enumeramos.

Cero, orden uno y disposición geométrica. Para $w = 0$, la ecuación $z^n = 0$ tiene sólo la raíz cero. Si z fuera no nulo, su potencia sería no nula por las leyes del inverso, contradicción. En el polinomio x^n, esa raíz tiene multiplicidad n, aunque sea una sola raíz distinta. Para $n = 1$, cualquier w tiene una sola solución, $z = w$, incluida la situación $w = 0$.

Cuando $w \neq 0$, todas las raíces tienen radio ρ y las direcciones consecutivas difieren en $2\pi/n$. Para $n \geq 3$ son los vértices de un polígono regular centrado en el origen; para $n = 2$ son puntos opuestos; para $n = 1$ hay un punto. La simetría describe una lista cuya distinción y exhaustividad ya están probadas.

Control 26.12.a — Tres raíces de un real. Resuelve $z^3 = 8$.

Solución. Tomamos $r = 8$, $\theta = 0$ y $\rho = 2$. Los ángulos son 0, $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Las soluciones son 2, $-1 + \sqrt{3}i$ y $-1 - \sqrt{3}i$. Cada cubo es 8 por De Moivre. La diferencia de índices prueba que son distintas y la demostración general prueba que no hay otras. La raíz real positiva es sólo una de las tres raíces complejas.

Control 26.12.b — Una vuelta cambia la enumeración. Calcula las raíces de $z^4 = -16$ y explica qué ocurre si usas 3π en vez de π como argumento del miembro derecho.

Solución. El radio de las raíces es 2 y sus ángulos con $\theta = \pi$ son $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$. Las coordenadas son $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ y $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$. La cuarta potencia tiene radio 16 y dirección π en los cuatro casos. Con $\theta = 3\pi$, los ángulos empiezan en $3\pi/4$ y terminan en $9\pi/4$, equivalente a $\pi/4$: se recorre la misma lista comenzando en otro punto.

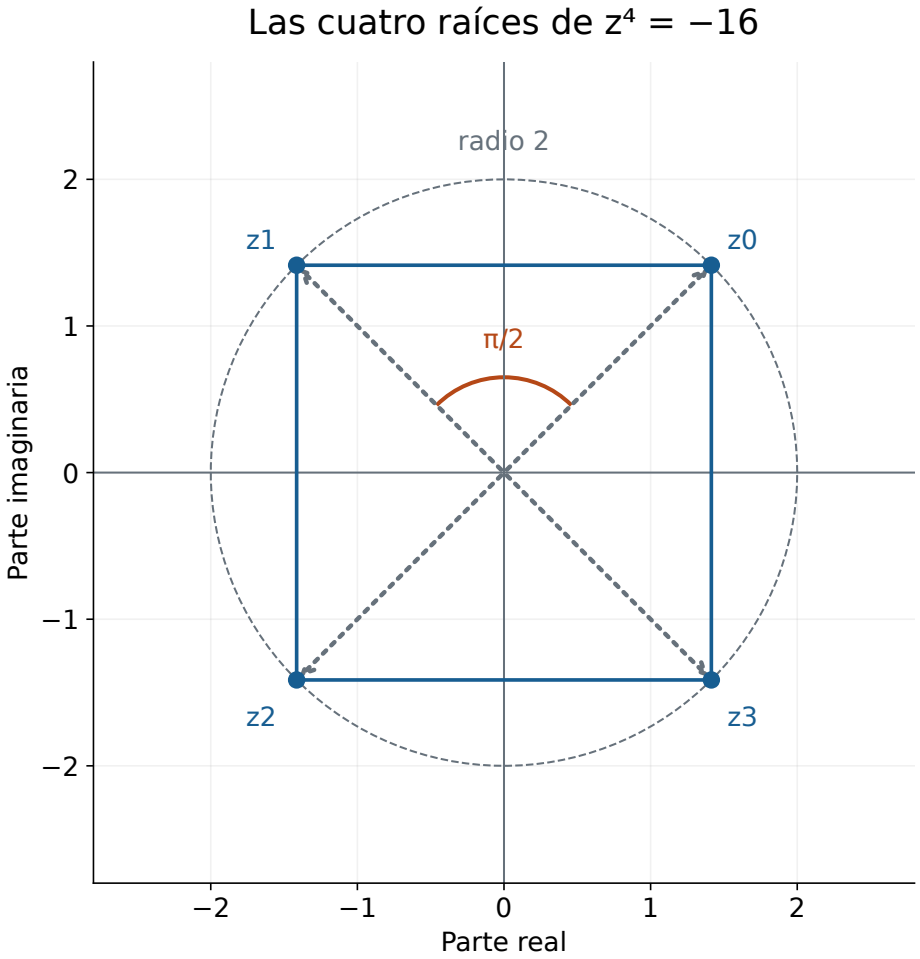


Figura 26.5. Las raíces de $z^4 = -16$ del control anterior tienen módulo 2 y argumentos $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$. Se enumeran en sentido antihorario desde $z_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$. La separación angular es $\pi/2$ y los cuatro puntos forman un cuadrado. La igualdad de escalas conserva esa forma; la exhaustividad proviene de la prueba de §26.12.

Control 26.12.c — Distinción y multiplicidad. Compara $z^5 = 0$ con $z^5 = 1$.

Solución. La primera tiene sólo $z = 0$, de multiplicidad cinco en x^5. La segunda tiene cinco raíces distintas $\operatorname{cis}(2\pi k/5)$, con $0 \le k < 5$. No se puede trasladar al caso cero la afirmación de cinco raíces distintas: su prueba utilizó un radio positivo y la igualdad de direcciones de puntos no nulos.

Control 26.12.d — Por qué no basta dividir un argumento. Se propone que la única solución de $z^2 = i$ es $\operatorname{cis}(\pi/4)$. Repara la resolución y compárala con el método cartesiano.

Solución. Los argumentos de i son $\pi/2 + 2\pi m$. Al dividirlos por dos aparecen dos clases: $\pi/4$ y $5\pi/4$. Las raíces son $\pm(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)$. Sus cuadrados tienen parte real cero e imaginaria uno. El método cartesiano de §26.8 da $x^2 = y^2 = 1/2$ y $2xy = 1$, por lo que los signos deben coincidir. Ambos métodos producen las dos raíces; dividir únicamente el argumento principal había omitido la opuesta.

26.13. Raíces de la unidad y simetrías

Las raíces de $z^n = 1$ organizan también las raíces de cualquier complejo no nulo. Su aritmética combina giros con congruencias enteras.

Un generador y sus índices. Sea $\zeta = \operatorname{cis}(2\pi/n)$ para $n \ge 1$. Las raíces de la unidad de orden n son $1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}$. Para cualquier entero k, De Moivre y la coincidencia de direcciones dan $\zeta^k = 1$ si y sólo si n divide k. En particular, los índices pueden reducirse módulo n al multiplicar o invertir estas raíces.

Si α es una raíz de $w \neq 0$, todas las raíces de $z^n = w$ son $\alpha\zeta^k$. Sus potencias son w, son distintas por cancelación de $\alpha \neq 0$, y coinciden con la lista polar de §26.12. Multiplicar por ζ permuta cíclicamente los puntos.

El **orden** de ζ^j es el menor entero positivo m para el que $(\zeta^j)^m = 1$. La condición equivale a $n \mid jm$. Sea $d = \gcd(n, j)$; escribimos $n = dn'$ y $j = dj'$ con $\gcd(n', j') = 1$. Entonces $n \mid jm$ equivale a $n' \mid j'm$, y el lema de divisibilidad de C16 equivale esto a $n' \mid m$. El menor valor positivo es

$$\operatorname{ord}(\zeta^j) = \frac{n}{\gcd(n, j)}.$$

Una raíz es **primitiva** de orden n si su orden es n, lo que equivale a $\gcd(n, j) = 1$. Para $n = 1$, la única raíz es 1, de orden uno; para $j = 0$ se usa $\gcd(n, 0) = n$, y el orden vuelve a ser uno.

Control 26.13.a — Orden menor que el de la lista. Para $n = 12$, calcula los órdenes de ζ^8 y ζ^5.

Solución. Como $\gcd(12, 8) = 4$, el primer orden es $12/4 = 3$; efectivamente, $12 \mid 8 \cdot 3$, pero no divide 8 ni 16. Como $\gcd(12, 5) = 1$, el segundo orden es 12. Sólo ζ^5 es primitiva de orden doce. Pertenecer a la lista de raíces de $x^{12} - 1$ no obliga a tener orden doce.

Una suma que cancela por simetría algebraica. Para $n \ge 2$, $\zeta \neq 1$. La identidad de suma geométrica, obtenida por distributividad, da

$$(\zeta - 1)(1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1}) = \zeta^n - 1 = 0.$$

Cancelar el factor no nulo demuestra que la suma de todas las raíces es cero. Para $n = 1$, la suma es 1 y ese argumento no se aplica. La misma cancelación da suma cero para todas las raíces de $w \neq 0$ cuando $n \ge 2$, al multiplicar por α.

Control 26.13.b — La excepción de una sola raíz. Encuentra la suma de las raíces de $z^4 = 16$ y compárala con la de $z = 16$.

Solución. Las cuatro raíces son 2, $2i$, -2 y $-2i$, cuya suma es cero. La ecuación de orden uno tiene sólo la raíz 16 y su suma es 16. La ley de suma cero necesita al menos dos raíces de un miembro derecho no nulo.

Factorizar antes del teorema fundamental. Podemos usar los argumentos polinómicos de C24–C25 sobre $\mathbb{C}$: sus pasos requieren distributividad, inversos de coeficientes no nulos y ausencia de divisores de cero, leyes ya demostradas en §26.3. En particular, la división por $x - a$ deja el resto constante $P(a)$; por tanto, una raíz permite extraer ese factor.

También sigue por inducción la cota de raíces: un polinomio no nulo de grado d tiene a lo sumo d raíces distintas. Si tiene una raíz a, escribimos $P = (x - a)Q$; cualquier otra raíz es raíz de Q por producto nulo, y su grado es $d - 1$. El grado cero inicia la inducción.

Los polinomios mónicos $x^n - 1$ y $\prod_{k=0}^{n-1}(x - \zeta^k)$ tienen grado n y se anulan en las mismas n raíces. Su diferencia tiene grado a lo sumo $n - 1$. Si no fuera cero, violaría la cota de raíces. Luego

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \zeta^k).$$

No se invocó el TFA: las raíces fueron construidas y contadas explícitamente.

Control 26.13.c — Certificado para orden cuatro. Factoriza $x^4 - 1$ sobre $\mathbb{C}$ y agrupa factores reales.

Solución. Las raíces son $1, i, -1, -i$, de modo que $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$. El par no real produce $x^2 + 1$, por lo que la agrupación real es $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. Multiplicar da $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$. Este producto verifica la factorización independientemente de cómo se enumeraron las raíces.

Control 26.13.d — Raíces comunes y MCD. Encuentra todos los complejos que satisfacen simultáneamente $z^6 = 1$ y $z^4 = 1$.

Solución. Ninguna solución es cero. Al dividir las dos igualdades obtenemos $z^2 = 1$, así que $z = 1$ o $z = -1$. Ambos cumplen las dos ecuaciones porque los exponentes son pares. No hay otros por la deducción reversible hacia la condición necesaria y la comprobación final. El resultado corresponde al MCD de los exponentes, $\gcd(6, 4) = 2$.

26.14. Conjugación y factorización de polinomios reales

Al resolver una ecuación real en los complejos aparecen raíces no reales, pero no aparecen de manera independiente: la conjugación obliga a emparejarlas.

Qué se conserva al pasar a coeficientes complejos. Un polinomio complejo es una suma finita $P(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$ con $a_j \in \mathbb{C}$. El producto sigue las mismas reglas distributivas de C24. Para polinomios no nulos, el coeficiente principal del producto es el producto de los principales y no se anula; así, los grados se suman.

La división por un polinomio no nulo funciona eliminando sucesivamente términos principales. Se puede dividir entre su coeficiente principal porque es complejo no nulo, y cada paso baja el grado del resto. La unicidad sigue de comparar grados en dos divisiones, como en C24. Esto habilita sobre $\mathbb{C}$ evaluación, resto, factor, multiplicidad y la cota de raíces utilizada en §26.13. La mera disponibilidad de estas herramientas no garantiza todavía que todo polinomio no constante tenga una raíz.

Conjugar coeficientes y evaluar. Definimos $P^*(x) = \sum_{j=0}^{d} \overline{a_j} x^j$. Conjugar sumas y productos finitos, incluida cada potencia, demuestra $P^*(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. También $(PQ)^* = P^* Q^*$, porque la conjugación conserva cada suma de productos de coeficientes. Si P tiene coeficientes reales, $P^* = P$ y obtenemos

$$P(\overline{z}) = \overline{P(z)}.$$

En consecuencia, si $P(z) = 0$, entonces $P(\overline{z}) = 0$. La hipótesis real es esencial.

La igualdad de multiplicidades exige más que la igualdad de raíces. Supongamos $P = (x-z)^m Q$ con $Q(z) \neq 0$, donde m es la multiplicidad de z en el polinomio real no nulo P. Conjugar coeficientes da

$$P = (x-\overline{z})^m Q^*, \qquad Q^*(\overline{z}) = \overline{Q(z)} \neq 0.$$

Por la definición de multiplicidad, $\overline{z}$ tiene exactamente la misma multiplicidad m.

Para $z = a + bi$ no real, $b \neq 0$, el producto del par de factores es

$$(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) = (x-a)^2 + b^2.$$

Este cuadrático tiene coeficientes reales y no se anula para ningún x real, pues $b^2 > 0$. Es irreducible sobre $\mathbb{R}$: una factorización no trivial de grado dos tendría factores lineales y produciría una raíz real. Sobre $\mathbb{C}$ ya exhibimos sus dos factores.

Control 26.14.a — Detectar la hipótesis que falta. ¿Es cierto que toda raíz de un polinomio complejo viene con su conjugada?

Solución. No. El polinomio $P(x) = x - i$ tiene raíz i, pero $P(-i) = -2i \neq 0$. Sus coeficientes no son todos reales. La identidad válida es $P^*(\overline{z}) = \overline{P(z)}$: aquí $P^*(x) = x + i$ tiene raíz $-i$. Para concluir que ambos son raíces del mismo polinomio se necesita $P^* = P$.

Control 26.14.b — Reconstruir con multiplicidad. Encuentra el polinomio real mónico de menor grado que tiene $2 + i$ como raíz de multiplicidad dos.

Solución. La raíz $2 - i$ debe tener también multiplicidad dos. Por tanto, el grado es al menos cuatro y el candidato mínimo es $((x-(2+i))(x-(2-i)))^2 = (x^2-4x+5)^2$. Es real, mónico y de grado cuatro. Cada raíz tiene multiplicidad exactamente dos porque el otro factor lineal no se anula en ella. Cualquier otro polinomio mónico de ese grado con la condición tendría esos mismos cuatro factores y sería igual al candidato.

Control 26.14.c — Del par a una factorización real. Factoriza $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ sabiendo que $1 + i$ es raíz.

Solución. También es raíz $1 - i$, y el par produce $x^2 - 2x + 2$. Multiplicar $(x-1)(x^2-2x+2)$ da el polinomio indicado. Sus raíces son 1, $1+i$ y $1-i$, distintas. El cuadrático es irreducible real porque vale $(x-1)^2 + 1$ en los reales, pero se divide en dos factores sobre $\mathbb{C}$. El producto explícito certifica que no queda un factor pendiente.

Control 26.14.d — Una multiplicidad que restringe el grado. ¿Puede un polinomio real de grado cinco tener una raíz no real de multiplicidad tres?

Solución. No. Su conjugada sería otra raíz, distinta por no ser real, también de multiplicidad tres. Los factores asociados exigirían grado al menos seis. Para justificar la extracción conjunta, al retirar los factores de una raíz el factor retirado no se anula en la otra, de modo que no cambia su multiplicidad. La suma de grados contradice el grado cinco.

26.15. El horizonte del teorema fundamental del álgebra

Hemos resuelto binomios, cuadráticas y polinomios con factores certificados. Falta una afirmación general de existencia que esos ejemplos no demuestran.

Un resultado admitido y sus consecuencias. El **teorema fundamental del álgebra (TFA)** afirma que todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz compleja. En este tomo se admite como resultado externo; su demostración queda fuera de las herramientas desarrolladas. Construir $\mathbb{C}$, resolver $z^n = w$ o comprobar muchas ecuaciones no constituye una demostración del teorema.

A partir del TFA sí podemos demostrar la factorización completa. Sea P de grado $d \geq 1$, con coeficiente principal $a_d \neq 0$. El teorema proporciona una raíz z_1 y el teorema del factor

da $P = (x - z_1)Q$, con grado $d - 1$. Si ese grado es positivo, aplicamos otra vez el TFA a Q. La inducción termina en un constante y produce

$$P(x) = a_d \prod_{j=1}^{d} (x - z_j).$$

Las raíces pueden repetirse. Reunir los factores de cada raíz distinta da $P = a_d \prod_{\ell=1}^{s} (x-u_\ell)^{m_\ell}$ con $\sum_{\ell=1}^{s} m_\ell = d$. El producto nulo asegura que no hay raíces fuera de la lista. Por ello, todo polinomio de grado d tiene exactamente d raíces contadas con multiplicidad, aunque pueda tener menos raíces distintas.

Los polinomios constantes no nulos tienen cero raíces; el polinomio cero se anula en todos los complejos y no tiene un grado finito que permita aplicar ese conteo. Estas excepciones conservan las restricciones de C25.

Control 26.15.a — Qué garantiza la existencia. ¿Qué permite concluir el TFA para $x^5 - x - 1$ y qué información no entrega por sí solo?

Solución. Garantiza al menos una raíz compleja y, combinado con extracción de factores e inducción, cinco raíces contadas con multiplicidad. El enunciado de existencia no proporciona sus valores, no afirma que sean todas reales ni que sean distintas, y no entrega una expresión por radicales. Para verificar un valor propuesto se necesita evaluar o exhibir un factor; la garantía de existencia no reemplaza esa comprobación.

Factores irreducibles sobre los reales. Para un polinomio real no constante, la factorización compleja completa se puede agrupar en factores lineales correspondientes a raíces reales y en pares conjugados no reales con multiplicidades iguales. Cada par da el cuadrático real irreducible de §26.14. Así, admitido el TFA, todo polinomio real no constante es producto de factores reales de grados uno y dos.

Esto demuestra que los irreducibles reales no constantes tienen grado uno o dos. Los de grado uno son irreducibles por suma de grados; un cuadrático real es irreducible exactamente cuando no tiene raíces reales. Los de grado mayor que dos no son irreducibles porque la agrupación proporciona una factorización no trivial. Esta conclusión general depende del TFA; la irreducibilidad de un cuadrático concreto puede probarse directamente sin él.

Control 26.15.b — Distintas y contadas. Para $P = (x - 1)^3(x^2 + 1)^2$, cuenta las raíces distintas y sus multiplicidades en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

Solución. En $\mathbb{R}$ sólo aparece 1, de multiplicidad tres. En $\mathbb{C}$, $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, así que las raíces distintas son $1, i, -i$, con multiplicidades $3, 2, 2$. La suma compleja es siete, igual al grado. La suma real es tres porque las otras raíces no pertenecen a ese dominio. La factorización explícita prueba estos datos sin necesitar el TFA como mecanismo de descubrimiento.

Control 26.15.c — Un certificado explícito de grado cuatro. Factoriza $x^4 + 1$ en irreducibles reales e identifica dónde se necesita el TFA.

Solución. La identidad $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = x^4 + 1$ da la factorización. Cada factor vale $(x \pm 1/\sqrt{2})^2 + 1/2$ y es positivo en $\mathbb{R}$, por lo que ambos cuadráticos son irreducibles reales. El certificado concreto y su irreducibilidad no necesitan el TFA. El teorema se necesita para la afirmación universal de que todos los polinomios reales se descomponen en grados uno y dos.

Control 26.15.d — No aplicar el conteo al polinomio cero. Se dice que $P(x) = 0$ tiene exactamente cero raíces porque no se ve ningún término de grado positivo. Diagnostica el argumento.

Solución. El polinomio cero se anula para todo x, así que todos los complejos son raíces. No es un constante no nulo ni un polinomio de grado cero en el sentido usado para el conteo. La afirmación de exactamente d raíces con multiplicidad se aplica a polinomios no nulos de grado $d \geq 1$; no admite asignar artificialmente grado cero al polinomio cero.

26.16. Síntesis y cierre conceptual del Tomo I

El recorrido del tomo ha unido lenguaje, demostración, aritmética y cálculo algebraico. Los complejos permiten volver a la pregunta inicial sobre las ecuaciones con un sistema construido, leyes demostradas y una separación precisa entre resultados propios y resultados admitidos.

Dominio, existencia y certificado. El dominio fija dónde puede variar la incógnita y qué divisiones están permitidas. La existencia afirma que alguna solución pertenece a ese dominio. Un certificado concreto puede ser una sustitución, una identidad de factores o una demostración que enumera exhaustivamente las soluciones. Cada uno responde a una pregunta distinta.

Por ejemplo, x^2-2 es irreducible sobre $\mathbb{Q}$, pero se factoriza sobre $\mathbb{R}$ como $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. El polinomio x^2+1 carece de raíces reales, pero se factoriza sobre $\mathbb{C}$ como $(x-i)(x+i)$. Cambiar el sistema no cambia la identidad que verificamos; cambia qué coeficientes y candidatos están disponibles.

Ampliar el sistema conserva suma, producto y división por no nulos, pero no conserva todas las estructuras reales. No hay un orden total de cuerpo en $\mathbb{C}$ que haga compatibles suma, producto y positividad. En un cuerpo ordenado, todo cuadrado no nulo es positivo: si el número es negativo, su opuesto es positivo y tiene el mismo cuadrado. Por ello $1=1^2>0$ e $i^2>0$, mientras $i^2=-1<0$, contradicción. El orden que usamos en módulos, radicandos y coordenadas sigue siendo orden real.

Integrar las herramientas sin perder casos. Control 26.16.a — Potencia y conjugación. Resuelve $z^3=\overline{z}$.

Solución. El cero es solución. Si $z\neq 0$, tomar módulos da $|z|^3=|z|$; dividir por $|z|>0$ da $|z|^2=1$, luego $|z|=1$. Escribimos $z=\operatorname{cis}\theta$. La ecuación equivale a $\operatorname{cis}(3\theta)=\operatorname{cis}(-\theta)$, es decir $4\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$. Hay cuatro direcciones, $0,\pi/2,\pi,3\pi/2$. Las soluciones no nulas son $1,i,-1,-i$. Sus cubos son sus conjugados, y junto con cero forman la lista completa. Dividir antes de separar el cero habría perdido una solución.

Control 26.16.b — Un factor que el dominio excluye. Resuelve $(z^3-1)/(z-1)=0$.

Solución. El dominio exige $z\neq 1$. Allí la ecuación equivale a $z^3=1$, cuyas raíces son 1 y $\operatorname{cis}(2\pi/3),\operatorname{cis}(4\pi/3)$. Se excluye la primera; las otras son $-1/2+\sqrt{3}i/2$ y $-1/2-\sqrt{3}i/2$. Sus numeradores se anulan y sus denominadores no, lo que comprueba ambas. La identidad $(z^3-1)/(z-1)=z^2+z+1$ vale sólo en el dominio original y no permite recuperarlo después como si no hubiera restricción.

Control 26.16.c — Comparar factorizaciones entre dominios. Compara x^2-2 y x^2+1 sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Solución. En $\mathbb{Q}$, ambos son irreducibles: el primero no tiene raíz racional por la irracionalidad de $\sqrt{2}$, y el segundo no tiene raíz racional porque tampoco tiene raíz real. En grado dos, carecer de raíces equivale a irreducibilidad. En $\mathbb{R}$, x^2-2 se divide en los dos factores lineales indicados; x^2+1 sigue irreducible. En $\mathbb{C}$, ambos se dividen en factores lineales, con raíces $\pm\sqrt{2}$ y $\pm i$, respectivamente. Cada afirmación de irreducibilidad lleva el dominio en el que es válida.

Control 26.16.d — Evaluar una prueba de exhaustividad. Una lista de seis números distintos satisface $z^6=1$. ¿Cómo certificar que no falta ninguna solución sin usar el TFA?

Solución. Basta aplicar la cota de raíces al polinomio no nulo x^6-1, de grado seis: una séptima raíz distinta sería imposible. También puede usarse la demostración polar de §26.12, que obliga a que cualquier solución tenga módulo uno y argumento $2\pi k/6$ módulo vueltas. Verificar seis potencias sólo prueba que son soluciones; verificar además distinción y utilizar uno de estos argumentos completa el certificado. Ninguno requiere el TFA.

La pregunta que abre el siguiente recorrido. Las raíces de un binomio forman una configuración que un giro permuta; las de un polinomio real se emparejan por conjugación, con sus multiplicidades. Estas transformaciones conservan relaciones concretas entre soluciones. El paso posterior será estudiar sistemáticamente qué operaciones, conjuntos y transformaciones preservan una estructura algebraica.

Ese horizonte se apoya en lo aprendido: definir antes de operar, localizar los inversos permitidos, conservar el dominio y distinguir una conjetura de una prueba. La factorización completa de polinomios complejos queda disponible con su dependencia explícita del TFA. El cierre conceptual del tomo deja planteado cómo se relacionan el sistema donde viven las raíces y las simetrías que las enlazan.

Qué certificado sobrevive al ampliar el sistema. Una identidad con coeficientes racionales conserva su validez en reales y complejos; la lista de factores disponibles puede crecer. Una inequación real no se traslada a los complejos como orden de cuerpo. **Control resuelto:** $x^2+1>0$ certifica ausencia de raíces reales, pero no excluye i y $-i$, que son raíces complejas. La identidad $x^2+1=(x-i)(x+i)$ certifica esas raíces y, por el producto nulo, su exhaustividad. Si añadimos el dominio $x\neq i$ a una ecuación racional, solo queda $-i$ y la lista deja de ser estable por conjugación. El certificado polinómico, el dominio de la ecuación y la estructura de orden responden a preguntas diferentes; conservarlos explícitos permite integrar las herramientas del tomo.

Ejercicios y soluciones

Intente resolver cada ejercicio antes de leer la solución que lo acompaña. Cuando se pida una lista completa, justifique también que no faltan soluciones y conserve las restricciones del dominio.

A. Lectura y reconocimiento.

Ejercicio 001. Coordenadas y operaciones. **Enunciado.** Para $z=-4+7i$, determine $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\overline{z}$, $-z$ y $|z|$. Distinga la parte imaginaria del término imaginario.

Solución. La unicidad cartesiana da $\operatorname{Re}(z)=-4$ y $\operatorname{Im}(z)=7$; esta última es real, mientras que el término imaginario es $7i$. Cambiar sólo el signo imaginario da $\overline{z}=-4-7i$; cambiar ambos da $-z=4-7i$. El módulo es $\sqrt{(-4)^2+7^2}=\sqrt{65}$, real no negativo. Conjugado y opuesto conservan ese módulo porque no cambian los cuadrados de las coordenadas.

Ejercicio 002. Igualdad cartesiana. **Enunciado.** Encuentre $a,b\in\mathbb{R}$ si $(2a-1)+(b+3)i=5-2i$.

Solución. Las coordenadas de dos complejos iguales coinciden. Por ello, $2a-1=5$ y $b+3=-2$, de donde $a=3$ y $b=-5$. Al sustituir, las partes quedan 5 y -2, como exige el miembro derecho. Ambas ecuaciones reales tienen solución única, así que la pareja encontrada también es única.

Ejercicio 003. Real e imaginario puro. **Enunciado.** Clasifique $0,-5,2i,1-i$ como reales, imaginarios puros o complejos con ambas partes no nulas, usando la convención del capítulo.

Solución. Los números 0 y -5 son reales porque su parte imaginaria es cero. El número $2i$ es imaginario puro: su parte real es cero y no es el número cero. El número $1-i$ tiene ambas partes no nulas. Aunque cero pertenece también al eje imaginario, la convención de imaginario puro lo excluye; las etiquetas no deben confundirse con pertenencia a los ejes.

Ejercicio 004. Suma y diferencia. **Enunciado.** Para $z=-2+i$ y $w=3-4i$, calcule $z+w$ y $z-w$. Compruebe la diferencia sumándole w.

Solución. Agrupar coordenadas da $z+w=1-3i$. Para restar se cambian los dos signos de w: $z-w=(-2-3)+(1+4)i=-5+5i$. La comprobación $(-5+5i)+(3-4i)=-2+i=z$ recupera el minuendo. Cambiar únicamente el signo imaginario de w habría producido una operación de conjugación, no una resta.

Ejercicio 005. Producto por el conjugado. **Enunciado.** Calcule $(2+i)(2-i)$ e interprete el resultado mediante el módulo.

Solución. La distributividad da $4 - i^2 = 5$, porque los términos cruzados se cancelan e $i^2 = -1$. El segundo factor es el conjugado del primero; por tanto, el resultado también es $|2+i|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$. El producto es real positivo aunque cada factor sea no real.

Ejercicio 006. Dominio antes del valor. **Enunciado.** Indique el dominio de $1/(z-2i)$ y calcule su valor en $z = 0$.

Solución. El denominador sólo se anula en $z = 2i$, así que el dominio es $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Cero pertenece al dominio porque $-2i \neq 0$. Allí el valor es $1/(-2i) = i/2$: multiplicar $-2i$ por $i/2$ da $-i^2 = 1$. Que el argumento sea cero no impide un cociente; importa si es cero el denominador.

Ejercicio 007. Reducir un argumento. **Enunciado.** Encuentre el argumento principal de $\operatorname{cis}(7\pi/3)$ y sus coordenadas.

Solución. Restamos una vuelta: $7\pi/3 - 2\pi = \pi/3$, que está en $[0, 2\pi)$. El argumento principal es $\pi/3$ y las coordenadas son $1/2 + \sqrt{3}i/2$. El ángulo inicial sigue siendo un argumento correcto; simplemente no es el representante principal. El módulo es uno por la identidad de seno y coseno.

Ejercicio 008. Número de raíces. **Enunciado.** Indique cuántas raíces distintas tienen $z^3 = 0$ y $z^3 = -1$, y dé una lista polar en el segundo caso.

Solución. La primera ecuación tiene únicamente cero: una potencia de un no nulo no puede anularse. La segunda tiene tres raíces distintas, de radio uno y ángulos $\pi/3, \pi, 5\pi/3$. Son $\operatorname{cis}(\pi/3), -1, \operatorname{cis}(5\pi/3)$. Sus cubos tienen dirección π; la distinción y exhaustividad siguen de §26.12. El conteo de tres raíces distintas requiere el miembro derecho no nulo.

Ejercicio 009. Lo que dice el TFA. **Enunciado.** ¿Obliga el TFA a que un polinomio de grado cuatro tenga cuatro raíces distintas? Dé un ejemplo que justifique su respuesta.

Solución. No. Con la factorización completa, el TFA garantiza cuatro raíces contadas con multiplicidad. El polinomio $(x-2)^4$ sólo se anula en 2, y esa raíz tiene multiplicidad cuatro porque el residual es el constante uno. Hay una raíz distinta y cuatro contadas. El ejemplo satisface el teorema y refuta el cambio de significado del conteo.

Ejercicio 010. Consecuencia de una raíz no real. **Enunciado.** Si un polinomio real tiene raíz $2 - i$, ¿qué otra raíz y qué factor cuadrático real quedan garantizados?

Solución. La conjugación de evaluación garantiza la raíz $2 + i$. Son distintas y los factores lineales asociados se agrupan en $(x-(2-i))(x-(2+i)) = x^2 - 4x + 5$. Ese cuadrático divide al polinomio: al extraer el primer factor, la segunda raíz sigue anulando el residual porque el factor extraído no se anula allí. Si la multiplicidad inicial fuera m, ambas multiplicidades serían m; no puede asignarse un valor concreto sin otro dato.

B. Cálculo y técnica.

Ejercicio 011. Cociente cartesiano. **Enunciado.** Calcule $(5+2i)/(1-2i)$ y compruebe el resultado.

Solución. El denominador es no nulo. Multiplicamos numerador y denominador por $1 + 2i$. El numerador vale $5 + 10i + 2i + 4i^2 = 1 + 12i$ y el denominador 5, así que el cociente es $1/5 + 12i/5$. La comprobación $(1 + 12i)(1 - 2i)/5 = (25 + 10i)/5 = 5 + 2i$ devuelve el numerador original.

Ejercicio 012. Potencias con exponente negativo. **Enunciado.** Calcule $i^{205} + i^{-103}$ utilizando restos módulo cuatro.

Solución. Tenemos $205 = 4 \cdot 51 + 1$ y $-103 = 4(-26) + 1$. Ambos exponentes tienen resto uno, por lo que las potencias son i y la suma es $2i$. El ciclo es válido para exponentes negativos porque i tiene inverso. Usar el valor absoluto del exponente negativo habría cambiado su resto y su potencia.

Ejercicio 013. Una ecuación lineal compleja. **Enunciado.** Resuelva $(3+i)z = 4-2i$.

Solución. El coeficiente $3+i$ no es cero, así que dividir por él es reversible y asegura unicidad. Multiplicamos por su conjugado: $z = (4-2i)(3-i)/10 = (10-10i)/10 = 1-i$. La sustitución $(3+i)(1-i) = 4-2i$ comprueba la solución. No hay otras porque multiplicar por un no nulo es inyectivo.

Ejercicio 014. Incógnita y conjugado. **Enunciado.** Resuelva $z + 3\overline{z} = 8-6i$.

Solución. Escribimos $z = x+yi$ con coordenadas reales. El miembro izquierdo es $4x-2yi$, por lo que $4x = 8$ y $-2y = -6$. Resulta $z = 2+3i$. Su conjugado es $2-3i$ y la sustitución da $(2+3i)+3(2-3i) = 8-6i$. Las dos ecuaciones de coordenadas son equivalentes al enunciado y tienen solución única.

Ejercicio 015. Un parámetro real. **Enunciado.** Para $t \in \mathbb{R}$, determine cuándo $(t+i)(2-i)$ es real y cuándo es imaginario puro.

Solución. El producto es $(2t+1)+(2-t)i$. Es real exactamente cuando $2-t=0$, es decir, $t=2$, y entonces vale 5. Es imaginario puro cuando $2t+1=0$ y $2-t\neq 0$. Esto da $t = -1/2$, con parte imaginaria $5/2$, no nula: el valor es $5i/2$. La realidad del parámetro permite interpretar estos coeficientes como las partes cartesianas.

Ejercicio 016. Distancia con una coordenada fijada. **Enunciado.** Encuentre todos los z con $|z-(2+i)| = \sqrt{5}$ y $\operatorname{Re}(z) = 1$.

Solución. La parte real fijada permite escribir $z = 1+bi$. La ecuación de distancia da $1+(b-1)^2 = 5$, luego $(b-1)^2 = 4$ y $b = 3$ o $b = -1$. Las soluciones son $1+3i$ y $1-i$. En ambos casos, la diferencia con $2+i$ tiene coordenadas $(-1, \pm 2)$ y módulo $\sqrt{5}$. Cuadrar fue reversible porque ambos miembros originales son no negativos.

Ejercicio 017. Raíces cuadradas no reales. **Enunciado.** Encuentre todas las raíces cuadradas de $5-12i$.

Solución. El módulo del miembro derecho es 13. Las fórmulas cartesianas dan $x^2 = (13+5)/2 = 9$ e $y^2 = (13-5)/2 = 4$. Como $2xy = -12$, los signos son opuestos. Elegimos $x = 3$, $y = -2$; las raíces son $3-2i$ y $-3+2i$. El primer cuadrado es $9-4-12i = 5-12i$ y el opuesto tiene el mismo cuadrado. Las condiciones sobre tamaños y producto excluyen las otras combinaciones.

Ejercicio 018. Cuadrática con coeficientes reales. **Enunciado.** Resuelva $z^2 - 4z + 13 = 0$ en $\mathbb{C}$.

Solución. Completar el cuadrado da $(z-2)^2 = -9$. Las únicas raíces de -9 son $\pm 3i$, por lo que $z = 2 \pm 3i$. La identidad $(z-(2+3i))(z-(2-3i)) = (z-2)^2+9$ comprueba ambos resultados y la exhaustividad por producto nulo. El discriminante es -36, coherente con dos soluciones no reales distintas.

Ejercicio 019. Una potencia por forma polar. **Enunciado.** Calcule $(\sqrt{3}-i)^6$ en forma cartesiana.

Solución. La base tiene módulo 2 y argumento $-\pi/6$, pues sus coordenadas normalizadas son $(\sqrt{3}/2, -1/2)$. De Moivre da $2^6 \operatorname{cis}(-\pi) = -64$. Para comprobarlo, el cuadrado es $2-2\sqrt{3}i$ y el cubo es $-8i$; elevar este último al cuadrado vuelve a dar -64. La forma polar reduce el cálculo sin cambiar las reglas enteras de potencia.

Ejercicio 020. Dos métodos para un cociente. **Enunciado.** Calcule $(1+i)/(1-i)$ por forma polar y por coordenadas.

Solución. Los radios de numerador y denominador son $\sqrt{2}$ y sus argumentos pueden elegirse $\pi/4$ y $-\pi/4$. El cociente tiene radio uno y argumento $\pi/2$, por lo que es i. Por coordenadas, multiplicar arriba y abajo por $1+i$ da $(1+i)^2/2 = 2i/2 = i$. El denominador no se anula, y $i(1-i) = 1+i$ verifica el cociente.

Ejercicio 021. Raíces cúbicas. **Enunciado.** Resuelva $z^3 = -27$ y presente todas las raíces en coordenadas.

Solución. El radio de las raíces es 3 y podemos usar argumento π del miembro derecho. Los ángulos son $\pi/3, \pi, 5\pi/3$, que dan $3/2 + 3\sqrt{3}i/2$, -3 y $3/2 - 3\sqrt{3}i/2$. De Moivre verifica los cubos y el teorema de §26.12 prueba distinción y exhaustividad. Elegir sólo la raíz real -3 no resuelve la ecuación en todo $\mathbb{C}$.

Ejercicio 022. Raíces cuartas en forma polar. **Enunciado.** Determine todas las raíces de $z^4 = 16i$ en forma polar.

Solución. El módulo del miembro derecho es 16 y un argumento es $\pi/2$. El radio buscado es 2 y los ángulos son $\pi/8 + k\pi/2$ para $k = 0, 1, 2, 3$. La lista es $2\,\mathrm{cis}(\pi/8 + k\pi/2)$. La cuarta potencia tiene radio 16 y ángulo $\pi/2 + 2\pi k$, por lo que vale $16i$. Los cuatro índices producen puntos distintos y toda solución tiene uno de esos ángulos.

Ejercicio 023. Un lugar racional circular. **Enunciado.** Describa el lugar $|(z-2)/(z+2)| = 2$, conservando su dominio.

Solución. Primero exigimos $z \neq -2$. Para $z = a + bi$, la ley del cociente y la positividad del denominador transforman la igualdad en $|z-2| = 2|z+2|$. Cuadrar es reversible y da $(a-2)^2 + b^2 = 4((a+2)^2 + b^2)$. Simplificar y completar cuadrados produce $(a + 10/3)^2 + b^2 = 64/9$. Es una circunferencia de centro $(-10/3, 0)$ y radio $8/3$. El punto excluido -2 no pertenece a ella: su distancia al centro es $4/3$. Por ello, toda la circunferencia, sin exclusiones adicionales, satisface la expresión original.

Ejercicio 024. Órdenes y primitivas. **Enunciado.** Sea $\zeta = \mathrm{cis}(2\pi/15)$. Halle los órdenes de ζ^6 y ζ^4, y enumere los índices primitivos entre 0 y 14.

Solución. La fórmula del orden da $15/\gcd(15,6) = 5$ y $15/\gcd(15,4) = 15$. Un índice es primitivo si es coprimo con 15, es decir, si no es divisible por 3 ni por 5. En el intervalo dado son $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$. El criterio de divisibilidad prueba que no falta ningún índice. Sólo la segunda de las dos raíces consultadas es primitiva de orden quince.

Ejercicio 025. Reconstrucción mínima real. **Enunciado.** Encuentre el polinomio real mónico de menor grado que tiene raíces -1 y $2 + i$.

Solución. La raíz no real obliga a incluir $2 - i$. Son tres raíces distintas, así que el grado es al menos tres. El producto $(x+1)(x-(2+i))(x-(2-i)) = (x+1)(x^2-4x+5) = x^3 - 3x^2 + x + 5$ tiene los coeficientes y raíces pedidos. Su grado es tres, así que alcanza el mínimo. La condición mónica fija el constante multiplicativo y asegura unicidad en ese grado.

Ejercicio 026. Una raíz excluida en una ecuación racional. **Enunciado.** Resuelva $(z^2 + 4)/(z + 2i) = 0$.

Solución. La expresión exige $z \neq -2i$. En ese dominio, la igualdad equivale a $z^2 = -4$, cuyas únicas raíces son $2i$ y $-2i$. Se descarta la segunda y queda $z = 2i$. Su denominador es $4i \neq 0$ y su numerador cero, así que cumple la ecuación original. Cancelar usando $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ también da $z - 2i = 0$, pero sólo en el dominio indicado.

C. Demostración.

Ejercicio 027. Identidad del paralelogramo. **Enunciado.** Demuestre que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ para todos los complejos.

Solución. Usamos el cuadrado del módulo como producto por conjugado. Al desarrollar, $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w$, mientras $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - z\overline{w} - \overline{z}w$. Sumar cancela exactamente los términos cruzados y produce la identidad. No hubo división ni elección de argumentos, por lo que incluye cualquier caso cero. La estrategia de sumar las dos expansiones aprovecha sus signos opuestos y evita calcular coordenadas individuales.

Ejercicio 028. Igualdad en una cota. **Enunciado.** Caracterice todos los pares (z, w) que satisfacen $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z||w|$.

Solución. El producto tiene módulo $|z||w|$. La cota $\mathrm{Re}(u) \leq |u|$ se vuelve igualdad exactamente cuando u es real no negativo. Si algún factor es cero, la igualdad se cumple. Si

ambos son no nulos, $z\overline{w}$ debe ser real positivo; dividirlo por $|w|^2 > 0$ muestra que $z/w = t > 0$, luego $z = tw$. Recíprocamente, para $z = tw$ con $t > 0$ tenemos $z\overline{w} = t|w|^2 = |z||w|$. La caracterización completa es: un factor cero o proporción real positiva entre factores no nulos.

Ejercicio 029. Una cota que garantiza un denominador. **Enunciado.** Demuestre que si $|z| < 1$, entonces $1 - z \neq 0$ y $|1/(1 - z)| \leq 1/(1 - |z|)$.

Solución. La triangular inversa da $|1 - z| \geq ||1| - |z|| = 1 - |z| > 0$. Esto prueba primero que $1 - z$ es no nulo, habilitando el cociente. Para reales positivos, tomar recíprocos invierte la desigualdad, de modo que $1/|1 - z| \leq 1/(1 - |z|)$. La ley del módulo del inverso convierte el miembro izquierdo en $|1/(1 - z)|$. La restricción estricta es esencial para que la cota tenga denominador positivo.

Ejercicio 030. Inverso y conjugado en el círculo. **Enunciado.** Para $z \neq 0$, demuestre que $z^{-1} = \overline{z}$ si y sólo si $|z| = 1$.

Solución. Si el inverso es el conjugado, multiplicar por z da $z\overline{z} = 1$, es decir $|z|^2 = 1$. Como el módulo es no negativo, resulta $|z| = 1$. Recíprocamente, esa condición da $z\overline{z} = 1$, por lo que la unicidad del inverso identifica $\overline{z}$ con z^{-1}. La condición no nula habilita el inverso; en la dirección inversa también se deduce de módulo uno.

Ejercicio 031. Transportar un conjunto de raíces. **Enunciado.** Sea $\alpha^n = w \neq 0$, con $n \geq 1$. Demuestre que multiplicar por α establece una correspondencia biyectiva entre las raíces de $v^n = 1$ y las de $z^n = w$.

Solución. La hipótesis implica $\alpha \neq 0$. Si $v^n = 1$, las leyes de potencias dan $(\alpha v)^n = \alpha^n v^n = w$, así que la multiplicación envía raíces al conjunto buscado. Si $z^n = w$, el número $v = z/\alpha$ cumple $v^n = z^n/\alpha^n = 1$ y recupera $z = \alpha v$. Este cociente es la transformación inversa, lo que prueba simultáneamente inyectividad y sobreyectividad. El argumento vale para $n = 1$ y no utiliza el TFA.

Ejercicio 032. Una permutación por índices coprimos. **Enunciado.** Sean $n \geq 1$ un entero y $j \in \mathbb{Z}$ con $\gcd(j, n) = 1$, y sea $\zeta = \operatorname{cis}(2\pi/n)$. Demuestre que $1, \zeta^j, \zeta^{2j}, \ldots, \zeta^{(n-1)j}$ enumera todas las raíces de $x^n - 1$ sin repetición.

Solución. Cada elemento tiene potencia n igual a uno. Si $\zeta^{aj} = \zeta^{bj}$, entonces $n \mid j(a - b)$. La coprimalidad permite cancelar j en la divisibilidad: $n \mid a - b$. Para $0 \leq a, b < n$, esto obliga a $a = b$. Se obtienen n raíces distintas dentro de un conjunto que tiene exactamente n por §26.12, de modo que la lista es completa. Así se justifica que una raíz primitiva puede actuar como otro generador, sin introducir teoría de grupos.

Ejercicio 033. Sumas de potencias de raíces de la unidad. **Enunciado.** Para $\zeta = \operatorname{cis}(2\pi/n)$, $n \geq 1$ y $m \in \mathbb{Z}$, demuestre que $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{mk}$ vale n si $n \mid m$ y cero en otro caso.

Solución. Si $n \mid m$, entonces $\zeta^m = 1$ y cada uno de los n sumandos vale uno. Si $n \nmid m$, ponemos $q = \zeta^m \neq 1$. La identidad geométrica da $(q - 1)\sum_{k=0}^{n-1} q^k = q^n - 1 = 0$, porque $q^n = (\zeta^n)^m = 1$. Cancelar $q - 1 \neq 0$ da suma cero. Las potencias negativas están definidas porque ζ no es cero. Para $n = 1$, todo entero es divisible por n y sólo aparece el primer caso.

Ejercicio 034. Divisibilidad de binomios. **Enunciado.** Para enteros $m, n \geq 1$, demuestre que $x^n - 1$ divide a $x^m - 1$ en $\mathbb{C}[x]$ si y sólo si n divide a m.

Solución. Si $m = nq$, con $q \geq 1$, la identidad geométrica proporciona $x^m - 1 = (x^n - 1)(1 + x^n + \cdots + x^{n(q-1)})$, que certifica divisibilidad. Para la necesidad, supongamos que existe tal división y evaluemos en $\zeta = \operatorname{cis}(2\pi/n)$. El factor $x^n - 1$ se anula, así que $\zeta^m = 1$. El criterio de orden de §26.13 obliga a $n \mid m$. Incluye $n = 1$ y muestra cómo evaluar en una raíz especial convierte una divisibilidad polinómica en una divisibilidad entera.

Ejercicio 035. Conjugación y multiplicidad en dos polinomios. **Enunciado.** Sea P un polinomio complejo no nulo y P^* el obtenido conjugando sus coeficientes. Demuestre que si a tiene multiplicidad r en P, entonces $\overline{a}$ tiene multiplicidad r en P^*.

Solución. La definición de multiplicidad permite escribir $P = (x - a)^r Q$ con $Q(a) \neq 0$. Conjugar los coeficientes conserva productos y da $P^* = (x - \overline{a})^r Q^*$. Además, $Q^*(\overline{a}) =$

$\overline{Q(a)} \neq 0$, pues la conjugación sólo envía cero a cero. El factor residual no nulo prueba que la multiplicidad es exactamente r, no meramente al menos r. No se exigieron coeficientes reales; esa hipótesis sólo sería necesaria para identificar P^* con P.

Ejercicio 036. Grado impar y una raíz real. **Enunciado.** Usando el TFA admitido y la conjugación, demuestre que todo polinomio real de grado impar tiene una raíz real.

Solución. El TFA y la extracción de factores dan una lista completa de raíces complejas, cuya suma de multiplicidades es el grado. Si no hubiera raíces reales, todas quedarían agrupadas en pares no reales conjugados. Cada par tiene multiplicidades iguales y contribuye un número par al total. La suma de esos números sería par, contradiciendo el grado impar. Por tanto, existe una raíz real. El argumento utiliza explícitamente el TFA; no presupone continuidad ni el teorema del valor intermedio.

Ejercicio 037. Un cuadrático irreducible real. **Enunciado.** Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, demuestre que $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$ y reducible sobre $\mathbb{C}$.

Solución. Sobre los reales, el polinomio vale $(x-a)^2 + b^2 > 0$, por lo que no tiene raíces reales. Una factorización no trivial de grado dos tendría dos factores lineales, y el cero real de cualquiera sería raíz del producto; esto es imposible. Sobre los complejos, la identidad $(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = (x-a)^2 + b^2$ exhibe dos factores lineales distintos porque $b \neq 0$. Así, la misma expresión tiene distinta irreducibilidad según el dominio, sin necesitar el TFA para este ejemplo.

Ejercicio 038. Raíces simples sin derivadas. **Enunciado.** Para $w \neq 0$ y $n \geq 1$, demuestre sin derivadas ni TFA que todas las raíces de $x^n - w$ tienen multiplicidad uno.

Solución. §26.12 construye n raíces distintas $a_0, \dots, a_{n-1}$. El polinomio mónico $\prod_{k=0}^{n-1}(x - a_k)$ y $x^n - w$ tienen grado n y se anulan en esos puntos. Su diferencia tiene grado a lo sumo $n-1$ y n raíces; la cota de raíces obliga a que sea cero. Al retirar $x - a_j$, el residual evaluado en a_j es $\prod_{k \neq j}(a_j - a_k)$, no nulo por distinción. Esto prueba multiplicidad uno. Para $n = 1$, el residual es el producto vacío uno, y la conclusión sigue siendo válida.

D. Diagnóstico y reparación de argumentos.

Ejercicio 039. Conjugar no es tomar el opuesto. **Enunciado.** Se afirma que $\overline{z} = -z$ para todo complejo. Refute la afirmación y determine exactamente cuándo vale.

Solución. Para $z = 1 + i$, el conjugado es $1 - i$ y el opuesto $-1 - i$, por lo que la afirmación general es falsa. Si $z = a + bi$, la igualdad $a - bi = -a - bi$ equivale a $a = 0$. Por tanto, vale exactamente en el eje imaginario, incluido cero. La condición no equivale a ser imaginario puro porque esa categoría excluye cero.

Ejercicio 040. La parte imaginaria es real. **Enunciado.** Un cálculo da $\operatorname{Im}(2 - 5i) = -5i$. Corríjalo y explique qué recuperan $(z - \overline{z})/2$ y $(z - \overline{z})/(2i)$.

Solución. La parte imaginaria es el coeficiente real -5, no el término $-5i$. Para $z = 2 - 5i$, la resta con el conjugado es $-10i$. Dividir por 2 produce $-5i$, el término imaginario; dividir por $2i$ produce -5, la coordenada imaginaria. Para cualquier $a + bi$, las mismas operaciones dan bi y b, respectivamente. El factor i del denominador distingue ambas extracciones.

Ejercicio 041. Sumar módulos como si fueran aditivos. **Enunciado.** Se usa $|z + w| = |z| + |w|$ sin hipótesis. Dé un contraejemplo no real y formule el criterio correcto de igualdad.

Solución. Tomemos $z = i$, $w = -i$. La suma tiene módulo cero, pero la suma de módulos es dos. Siempre vale la desigualdad triangular. Hay igualdad si algún sumando es cero o, cuando ambos son no nulos, si uno es un múltiplo real positivo del otro. El contraejemplo tiene factores sobre una misma recta, pero en direcciones opuestas; alineación sola no basta.

Ejercicio 042. Cuadrar y perder el signo. **Enunciado.** Al resolver $|z| = -\operatorname{Re}(z)$ se concluye que todos los reales son soluciones. Diagnostique el paso y encuentre el conjunto correcto.

Solución. Para $z = a + bi$, la ecuación exige primero $-a \geq 0$, es decir $a \leq 0$. Cuadrar da $a^2 + b^2 = a^2$, luego $b = 0$. Conservar ambas condiciones deja los reales no positivos.

Recíprocamente, si $a \leq 0$, $|a| = -a$ y la igualdad se cumple. Los reales positivos aparecieron como candidatos espurios porque la ecuación cuadrada omitió el signo del miembro derecho.

Ejercicio 043. Un argumento principal fuera de la rama. **Enunciado.** Se escribe $\operatorname{Arg}(i^3) = 3\operatorname{Arg}(i) = 3\pi/2$ y se generaliza la igualdad literal a toda potencia. Determine si el ejemplo justifica la generalización y pruebe con i^4.

Solución. Para la tercera potencia, $3\pi/2$ pertenece a la rama y es correcto. Eso no justifica una ley literal general. Para $i^4 = 1$, el argumento principal es cero, mientras que $4\operatorname{Arg}(i) = 2\pi$. La regla correcta es congruencia módulo 2π, seguida de reducción a $[0, 2\pi)$. Un caso en que no se cruza el extremo de la rama no elimina esa obligación.

Ejercicio 044. Una raíz principal no es toda la lista. **Enunciado.** Se resuelve $z^2 = -4$ dando sólo $z = 2i$. Repare la solución y precise si se ha definido aquí un radical complejo monovaluado.

Solución. La factorización $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ muestra dos raíces: $2i$ y $-2i$. Ambas tienen cuadrado -4, y el producto nulo prueba exhaustividad. En el capítulo se buscan todas las raíces; no se ha impuesto una función que elija una sola de ellas. Una elección particular, incluso si se llamara principal bajo otra convención, no resolvería el problema de enumerarlas todas.

Ejercicio 045. Cuatro signos para dos raíces. **Enunciado.** Para $z^2 = 8 + 6i$ se obtienen $x^2 = 9$ e $y^2 = 1$ y se aceptan las cuatro combinaciones de signos. Corrija la lista.

Solución. El módulo de $8 + 6i$ es 10, así que los cuadrados de coordenadas indicados son correctos. Falta imponer $2xy = 6$. Con $x = \pm 3$ e $y = \pm 1$, esa condición obliga a signos iguales. Las raíces son $3 + i$ y $-3 - i$. Los signos opuestos darían $8 - 6i$. Las fórmulas de tamaños no sustituyen la ecuación que coordina los signos.

Ejercicio 046. Contar raíces distintas como multiplicidades. **Enunciado.** Se dice que $(x^2 + 1)^3$ tiene seis raíces distintas. Dé el conteo correcto sobre $\mathbb{C}$ y sobre $\mathbb{R}$.

Solución. Sobre $\mathbb{C}$, la identidad $(x^2 + 1)^3 = (x - i)^3(x + i)^3$ da dos raíces distintas, i y $-i$, ambas de multiplicidad tres. La suma de multiplicidades es seis, igual al grado. Sobre $\mathbb{R}$ no hay raíces, porque $x^2 + 1 > 0$ para todo real. La palabra «distintas» y el dominio son parte del conteo, no precisiones opcionales.

Ejercicio 047. Una cancelación que elimina soluciones. **Enunciado.** Para resolver $z(z - i) = 0$ se divide por z y se obtiene sólo i. Diagnostique la pérdida y dé la solución completa.

Solución. Dividir por z presupone que $z \neq 0$, restricción que el enunciado no contiene. La ley del producto nulo da directamente $z = 0$ o $z = i$. Ambos cumplen la ecuación. Si se quiere dividir, hay que separar primero el caso cero y resolver después el caso no nulo. Ese reparto conserva la solución que una división automática habría eliminado.

Ejercicio 048. Una supuesta demostración del TFA. **Enunciado.** Se argumenta: «De Moivre resuelve $z^n = w$; por tanto, todo polinomio complejo tiene una raíz». Explique el salto lógico.

Solución. De Moivre permite resolver binomios de la forma $x^n - w$, pero un polinomio general puede contener varios términos de grados intermedios. No se ha demostrado una transformación que convierta cualquier polinomio en ese binomio conservando sus raíces. La conclusión cuantifica sobre una clase mayor que la tratada por la premisa. En el capítulo, el TFA es un resultado externo admitido; sus consecuencias se deducen después, sin presentar el cálculo de binomios como prueba.

Ejercicio 049. Ordenar complejos como reales. **Enunciado.** Se propone un orden total de cuerpo en $\mathbb{C}$. Muestre la contradicción usando cuadrados no nulos.

Solución. En un cuerpo ordenado, para cada $u \neq 0$ uno de u o $-u$ es positivo, y el producto de positivos es positivo. Por tanto, $u^2 > 0$. En particular, $1 = 1^2 > 0$, luego $-1 < 0$. Pero $i \neq 0$ exigiría $i^2 > 0$, mientras que $i^2 = -1$. Esta contradicción impide tal orden

compatible. No prohíbe ordenar las coordenadas y módulos reales, que es lo utilizado en las desigualdades.

Ejercicio 050. Un lugar sin el origen del cociente. **Enunciado.** Se resuelve $|z/z| = 1$ y se incluye $z = 0$ porque la ecuación simplificada es $1 = 1$. Repare el dominio y la conclusión.

Solución. El cociente original exige $z \neq 0$. En ese dominio, $z/z = 1$ y la igualdad se cumple para todos los puntos. El conjunto es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La expresión simplificada tiene un dominio mayor, pero la identidad entre ambas sólo vale bajo la restricción inicial. Incluir cero no sería comprobar una solución adicional: sería evaluar una expresión que no está definida.

E. Transferencia y elección de método.

Ejercicio 051. Reconstruir un complejo. **Enunciado.** Determine todos los z tales que $z + \overline{z} = 6$ y $|z| = 5$.

Solución. La suma con el conjugado recupera el doble de la parte real, así que escribimos $z = 3+bi$ con b real. El módulo exige $9+b^2 = 25$, luego $b = \pm 4$. Resultan $3+4i$ y $3-4i$. Ambos tienen suma con su conjugado igual a seis y módulo cinco. La comparación de coordenadas y la ecuación real para b prueban exhaustividad; el módulo no decide entre puntos reflejados.

Ejercicio 052. Clasificar una ecuación con parámetro. **Enunciado.** Para $t \in \mathbb{R}$, determine todas las soluciones de $(t + 2)z = (t^2 - 4)i$.

Solución. El coeficiente se anula en $t = -2$, que debe tratarse antes de dividir. Para ese valor la ecuación es $0 = 0$, así que todo complejo es solución. Para $t \neq -2$, factorizar $t^2 - 4 = (t + 2)(t - 2)$ y cancelar el factor no nulo da la solución única $z = (t - 2)i$. Incluye $t = 2$, donde la solución única es cero. Sustituir la expresión en la igualdad original verifica el caso ordinario; una fórmula particular en $t = -2$ no representaría sus infinitas soluciones.

Ejercicio 053. Dos distancias que fijan dos puntos. **Enunciado.** Resuelva $|z| = 2$ y $|z - 2| = 2$, y explique la simetría entre las soluciones.

Solución. Escribimos $z = a + bi$. Las ecuaciones dan $a^2 + b^2 = 4$ y $(a - 2)^2 + b^2 = 4$. Restar elimina los cuadrados comunes y da $-4a + 4 = 0$, luego $a = 1$. Entonces $b^2 = 3$ y las soluciones son $1 \pm \sqrt{3}i$. Ambas distancias se comprueban con cuadrados $1 + 3 = 4$. Son conjugadas, reflejadas en la recta que une los centros reales; la ecuación para b demuestra que no falta otro punto.

Ejercicio 054. Un producto y su conjugado. **Enunciado.** Encuentre todos los z que cumplen $z^2 = z\overline{z}$.

Solución. Reunir los términos da $z(z - \overline{z}) = 0$. La ley del producto nulo implica $z = 0$ o $z = \overline{z}$. La segunda condición caracteriza los reales y ya incluye cero, por lo que el conjunto buscado es $\mathbb{R}$. Recíprocamente, cualquier real coincide con su conjugado y cumple la ecuación. La factorización evita una expansión cartesiana y también evita dividir por un candidato que podría ser cero.

Ejercicio 055. Una raíz por coordenadas y por ángulos. **Enunciado.** Resuelva $z^2 = 2i$ por dos métodos y explique por qué producen el mismo conjunto.

Solución. Por coordenadas, el módulo del miembro derecho es dos; $x^2 = y^2 = 1$ y $2xy = 2$, así que los signos coinciden y las raíces son $1 + i$ y $-1 - i$. Por forma polar, el radio es $\sqrt{2}$ y los ángulos son $\pi/4$ y $5\pi/4$, que producen esas mismas coordenadas. En ambos métodos, la elección de signos o de clases angulares demuestra exhaustividad. Sus cuadrados son $2i$.

Ejercicio 056. Una dirección que anula una parte. **Enunciado.** Describa todos los z de módulo uno para los que z^2 es real no negativo.

Solución. Escribimos $z = \operatorname{cis}\theta$. Su cuadrado tiene módulo uno, así que ser real no negativo lo obliga a ser exactamente uno. La condición angular es $2\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, de donde θ es múltiplo entero de π. Por tanto, $z = 1$ o $z = -1$. Ambos cumplen. No se aceptan $\pm i$, porque sus cuadrados son reales pero negativos; la condición de signo altera la lista.

Ejercicio 057. Un lugar determinado por conjugación. **Enunciado.** Determine el lugar de $z - \overline{z} = 4i$ e indique si contiene puntos reales.

Solución. Para $z = a + bi$, la resta con el conjugado es $2bi$. La ecuación equivale a $b = 2$, mientras que a puede ser cualquier real. El lugar es la recta horizontal $\{a + 2i : a \in \mathbb{R}\}$. No contiene puntos reales porque su parte imaginaria no se anula. Cada punto de esa forma verifica la igualdad, lo que establece suficiencia además de la condición necesaria.

Ejercicio 058. Conjugación de un cociente. **Enunciado.** Para $z \neq 1$, caracterice cuándo $(z + 1)/(z - 1)$ es real.

Solución. Un complejo es real si coincide con su conjugado. La ley del cociente transforma la condición en $(z + 1)/(z - 1) = (\overline{z} + 1)/(\overline{z} - 1)$. Ambos denominadores son no nulos. Multiplicar cruzado y desarrollar cancela $z\overline{z}$ y los constantes, dejando $2(\overline{z} - z) = 0$. Así, z debe ser real. Recíprocamente, cualquier real distinto de uno produce un cociente real. El conjunto es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ejercicio 059. Raíces comunes sin construir dos listas. **Enunciado.** Encuentre todas las soluciones comunes de $z^{10} = 1$ y $z^{15} = 1$.

Solución. Las soluciones no son cero. Dividir las igualdades da $z^5 = 1$, por lo que toda solución común es una quinta raíz de la unidad. Recíprocamente, si $z^5 = 1$, elevar al cuadrado y al cubo verifica las dos ecuaciones. El conjunto completo es $\operatorname{cis}(2\pi k/5)$, $0 \leq k < 5$. Trabajar con exponentes evita enumerar veinticinco candidatos de dos listas; la comprobación recíproca asegura que la condición obtenida es suficiente.

Ejercicio 060. Una ecuación recíproca. **Enunciado.** Resuelva $z + 1/z = 1$, conservando el dominio y dando todas las soluciones.

Solución. La expresión exige $z \neq 0$. Multiplicar por z en ese dominio da $z^2 - z + 1 = 0$. El discriminante es -3 y las soluciones son $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$. Ambas son no nulas y tienen módulo uno, de modo que su inverso es su conjugado; la suma de cada una con su inverso es uno. Esto verifica la expresión original. La equivalencia con la cuadrática y su resolución completa excluyen otras soluciones.

F. Integración de herramientas.

Ejercicio 061. Evaluación y divisibilidad con cuatro direcciones. **Enunciado.** Para enteros $a, b, c, d \geq 0$, demuestre que $x^3 + x^2 + x + 1$ divide a $x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$.

Solución. El divisor tiene como raíces $i, -1, -i$, las cuartas raíces de unidad distintas de uno. En cada una, reducir exponentes módulo cuatro convierte la evaluación del dividendo en $1 + u + u^2 + u^3 = 0$. Los tres factores lineales distintos asociados dividen conjuntamente al dividendo: al retirar uno, los otros puntos siguen siendo raíces porque el factor retirado no se anula allí. Su producto mónico es $x^3 + x^2 + x + 1$, por la identidad de raíces de unidad. Esto prueba la división sin expandir exponentes grandes. El caso $a = b = c = d = 0$ produce exactamente el divisor.

Ejercicio 062. Una suma ponderada. **Enunciado.** Sea $\zeta = \operatorname{cis}(2\pi/n)$ con $n \geq 2$. Calcule $S = \sum_{k=0}^{n-1} k\zeta^k$ sin usar derivadas.

Solución. Restamos ζS de S. En las potencias de uno a $n-1$, las diferencias de coeficientes son uno; en la potencia n, aparece $-(n-1)\zeta^n = -(n-1)$. Por tanto, $(1-\zeta)S = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta^k - (n-1) = -1 - (n-1) = -n$. Como $\zeta \neq 1$, resulta $S = -n/(1-\zeta)$. La suma no ponderada se anulaba, pero los coeficientes k impiden esa cancelación directa. Para $n = 2$, $\zeta = -1$ y la fórmula da -1, que coincide con la suma.

Ejercicio 063. Una potencia frente a un conjugado cuadrado. **Enunciado.** Resuelva $z^4 = \overline{z}^{\,2}$.

Solución. El cero es solución. Para $z \neq 0$, tomar módulos da $|z|^4 = |z|^2$, y dividir por $|z|^2 > 0$ obliga a $|z| = 1$. Con $z = \operatorname{cis}\theta$, la ecuación se convierte en $\operatorname{cis}(4\theta) = \operatorname{cis}(-2\theta)$, luego $6\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Las soluciones no nulas son las seis raíces de unidad $\operatorname{cis}(2\pi k/6)$, $0 \leq k < 6$. Cada

una verifica la ecuación angular y son distintas; junto con cero hay siete soluciones. Separar el cero antes de cancelar evita perderlo.

Ejercicio 064. Mediatriz y circunferencia. **Enunciado.** Resuelva $|z-1| = |z+1|$ y $|z-i| = \sqrt{2}$.

Solución. La primera igualdad es la mediatriz del segmento entre -1 y 1; por coordenadas obliga a $\operatorname{Re}(z) = 0$. Escribimos $z = bi$. La segunda condición da $|b-1| = \sqrt{2}$, de donde $b = 1+\sqrt{2}$ o $b = 1-\sqrt{2}$. Ambos puntos tienen distancias iguales a ± 1 y distancia $\sqrt{2}$ a i. La reducción a una ecuación de valor absoluto real demuestra exhaustividad. No hay denominadores ni puntos que excluir.

Ejercicio 065. La ecuación lineal pierde rango. **Enunciado.** Para $t \in \mathbb{R}$, clasifique las soluciones de $z + t\overline{z} = 2 + i$.

Solución. Para $z = x + yi$, la ecuación equivale a $(1+t)x = 2$ y $(1-t)y = 1$. Si $t \neq \pm 1$, tiene solución única $z = 2/(1+t) + i/(1-t)$, verificada por sustitución. Para $t = 1$, la segunda igualdad sería $0 = 1$, imposible. Para $t = -1$, la primera sería $0 = 2$, también imposible. No se puede sustituir esos valores en la fórmula porque sus denominadores se anulan; examinarlos en el sistema original da la clasificación completa.

Ejercicio 066. Reconstrucción y grado forzado. **Enunciado.** Un polinomio real mónico de grado seis tiene $1 + 2i$ como raíz doble y -1 como raíz doble. Determine el polinomio y todas sus raíces con multiplicidad.

Solución. La raíz conjugada $1 - 2i$ debe ser también doble. Esas tres raíces distintas ya aportan multiplicidad total seis, igual al grado, así que no queda factor no constante. La condición mónica fija $P = (x+1)^2((x-(1+2i))(x-(1-2i)))^2 = (x+1)^2(x^2-2x+5)^2$. Las raíces y multiplicidades son $-1, 1+2i, 1-2i$, cada una doble. Los residuales no se anulan en sus respectivas raíces, lo que verifica el carácter exacto de las multiplicidades. La reconstrucción está forzada por los datos y los grados.

Ejercicio 067. Una división y un residual sin raíz real. **Enunciado.** Factorice sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ el polinomio $(x-3)(x+1)(x^2+4x+8)$ e indique todas sus raíces.

Solución. El cuadrático vale $(x+2)^2 + 4$ y no tiene raíz real, así que la expresión dada ya es una factorización en irreducibles reales. En $\mathbb{C}$, resolver $(z+2)^2 = -4$ da $z = -2 \pm 2i$. La factorización compleja es $(x-3)(x+1)(x-(-2+2i))(x-(-2-2i))$. Sus cuatro raíces son distintas y simples: cada residual es producto de diferencias no nulas. El producto explícito garantiza exhaustividad sin TFA.

Ejercicio 068. Una restricción de módulo y producto. **Enunciado.** Si $|z| = |w| = 1$ y $z + w = 0$, determine $z\overline{w}$ y $|z - w|$.

Solución. La suma obliga a $w = -z$. Entonces $z\overline{w} = z(-\overline{z}) = -|z|^2 = -1$. Además, $z - w = 2z$ y su módulo es $2|z| = 2$. Ambas conclusiones valen para cualquier dirección de z en el círculo; el dato no selecciona un punto concreto. El producto negativo muestra por qué la triangular aplicada a la suma es estricta aquí.

Ejercicio 069. Restos y evaluación. **Enunciado.** Sea $P(x) = x^{20} + 2x^{13} - x^6 + 3$. Encuentre su resto al dividir por $x^2 + 1$ y evalúe $P(i)$ y $P(-i)$.

Solución. Módulo $x^2 + 1$ se tiene $x^2 \equiv -1$. Así, $x^{20} \equiv 1$, $x^{13} \equiv x$ y $x^6 \equiv -1$. El resto es $1 + 2x + 1 + 3 = 5 + 2x$, de grado menor que dos. Evaluar en las raíces del divisor da $P(i) = 5 + 2i$ y $P(-i) = 5 - 2i$. Son conjugados porque los coeficientes son reales. Un resto no nulo prueba además que el divisor no divide a P.

Ejercicio 070. Raíces de un polinomio compuesto. **Enunciado.** Encuentre todas las raíces de $x^6 - 8x^3 + 16$ y sus multiplicidades.

Solución. La expresión es $(x^3 - 4)^2$. Las raíces de $z^3 = 4$ son $\rho\,\mathrm{cis}(2\pi k/3)$, $k = 0, 1, 2$, con $\rho = 4^{1/3} > 0$. Son tres raíces distintas y simples de $x^3 - 4$ por la prueba sin derivadas del ejercicio 038. Al elevar la factorización al cuadrado, cada una adquiere multiplicidad dos. La

suma es seis y la identidad garantiza que no hay otra raíz. No deben contarse seis puntos distintos ni añadir raíces de una ecuación diferente, como $z^3 = -4$.

Ejercicio 071. Del eje real al círculo y vuelta. **Enunciado.** Para $T(z) = (z - i)/(z + i)$, demuestre que T establece una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{R}$ y el círculo $|u| = 1$ privado de $u = 1$. Dé la inversa.

Solución. Para z real, $z + i \neq 0$ y los módulos de $z - i$ y $z + i$ coinciden, así que $|T(z)| = 1$. La igualdad $T(z) = 1$ implicaría $-i = i$, imposible. Resolver $u(z + i) = z - i$ para $u \neq 1$ da $z = i(1 + u)/(1 - u)$. Si $|u| = 1$, entonces $\overline{u} = 1/u$ y conjugar esta expresión devuelve la misma: $-i(1 + \overline{u})/(1 - \overline{u}) = i(1 + u)/(1 - u)$. Por tanto, z es real. Sustituir en T recupera u, y despejar desde $T(z)$ recupera z. Las dos transformaciones son inversas con sus dominios declarados.

Ejercicio 072. Una raíz y un parámetro libre. **Enunciado.** Determine todos los $t \in \mathbb{R}$ para que $2 + i$ sea raíz de $P_t(x) = x^4 - 4x^3 + (t + 5)x^2 - 4tx + 5t$. Para cada valor que cumpla la condición, factorice sobre $\mathbb{R}$.

Solución. Agrupar coeficientes muestra $P_t = (x^2 - 4x + 5)(x^2 + t)$. El primer factor se anula en $2 + i$, independientemente de t, así que todos los reales t cumplen la condición. Para factorizar en irreducibles reales se separa el segundo factor: si $t > 0$, $x^2 + t$ es irreducible real; si $t = 0$, es x^2; si $t < 0$, se divide como $(x - \sqrt{-t})(x + \sqrt{-t})$. El primer cuadrático es siempre irreducible real. La condición de una raíz no necesariamente determina un único parámetro: la identidad explica por qué aquí no lo hace.

G. Síntesis avanzada.

Ejercicio 073. Dos binomios y un MCD. **Enunciado.** Para enteros $m, n \geq 1$ y $a, b \in \mathbb{C}$, clasifique las soluciones simultáneas de $z^m = a$ y $z^n = b$. En el caso no nulo, exprese la compatibilidad y las soluciones mediante $d = \gcd(m, n)$ y Bézout.

Solución. Si exactamente uno de a, b es cero, no hay solución: la ecuación con miembro cero obligaría a $z = 0$, incompatible con la otra. Si ambos son cero, sólo hay $z = 0$.

Supongamos $a, b \neq 0$. Escribimos $m = dm'$ y $n = dn'$ con $\gcd(m', n') = 1$. Toda solución obliga a $a^{n'} = b^{m'}$, pues ambas potencias son $z^{dm'n'}$. Esta condición también es suficiente. Elijamos enteros u, v con $um' + vn' = 1$ y pongamos $c = a^u b^v$, usando inversos para exponentes negativos. La compatibilidad da $c^{m'} = a^{um'} b^{vm'} = a^{um'+vn'} = a$ y análogamente $c^{n'} = b$.

Así, las d raíces de $z^d = c$ cumplen ambas ecuaciones. Recíprocamente, para cualquier solución, $y = z^d$ satisface $y^{m'} = a$ e $y^{n'} = b$, luego $y = a^u b^v = c$. Son exactamente esas d raíces distintas. Cambiar los coeficientes de Bézout no cambia c: otra pareja tiene diferencias $u' - u = hn'$, $v' - v = -hm'$, y el cociente de las expresiones es $(a^{n'}/b^{m'})^h = 1$. La compatibilidad, construcción y exhaustividad quedan demostradas sin TFA.

Ejercicio 074. Coeficientes agrupados por residuos. **Enunciado.** Sea $P(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j x^{e_j}$, con $N \geq 1$ entero, exponentes enteros $e_j \geq 0$ y $c_j \in \mathbb{C}$, y sea $n \geq 2$ un entero. Dé criterios por sumas de coeficientes para que $x^n - 1$ y para que $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ dividan a P. Justifique también el segundo criterio mediante raíces de unidad.

Solución. Para cada resto r, definimos $C_r = \sum_{e_j \equiv r \pmod{n}} c_j$, con suma cero si no hay índices. Como $x^{e_j} \equiv x^r$ módulo $x^n - 1$, el resto de P es $R = \sum_{r=0}^{n-1} C_r x^r$. Así, $x^n - 1$ divide a P exactamente cuando todos los C_r son cero.

Sea $Q = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$. Puesto que Q divide a $x^n - 1$, se tiene $Q \mid P$ si y sólo si $Q \mid R$. Si $R = 0$, es divisible por Q y tiene la forma $R = 0Q$. Si $R \neq 0$, la cota $\deg R \leq n - 1 = \deg Q$ obliga a que cualquier cociente sea constante. En ambos casos, la divisibilidad equivale a $R = cQ$ para un constante, incluido cero. Por tanto, el segundo criterio es $C_0 = C_1 = \cdots = C_{n-1}$.

También puede verse por raíces: Q tiene las $n - 1$ raíces de unidad distintas de uno. Si todas anulan R, sus factores lineales distintos dividen conjuntamente a R, y el grado obliga a que sea un múltiplo constante de Q. Recíprocamente, coeficientes iguales hacen $R = cQ$ y

esas evaluaciones se anulan. La raíz 1 distingue los dos criterios: $R(1) = nc$, que sólo se anula si $c = 0$.

Ejercicio 075. Reconstrucción con dos simetrías. **Enunciado.** Encuentre el polinomio real mónico de menor grado que tiene $1 + i$ como raíz doble, $\operatorname{cis}(2\pi/3)$ como raíz simple y 3 como raíz doble. Calcule sus valores en 0 y 2, y pruebe que las multiplicidades pedidas son exactas.

Solución. La conjugación exige también $1 - i$ doble y $\operatorname{cis}(4\pi/3)$ simple. Los cinco puntos distintos aportan multiplicidades $2 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8$, así que el grado mínimo es ocho. Los pares conjugados dan $P = ((x - 1)^2 + 1)^2(x^2 + x + 1)(x - 3)^2$. Es mónico, real y tiene ese grado.

Cada factor lineal complejo aparece con la potencia prescrita. Los restantes factores no se anulan en esa raíz porque los cinco puntos son distintos; por tanto, las multiplicidades son exactas. Cualquier polinomio mónico del grado mínimo con los datos contiene esos ocho factores y coincide con P. Evaluar la expresión agrupada da $P(0) = 2^2 \cdot 1 \cdot 9 = 36$ y $P(2) = 2^2 \cdot 7 \cdot 1 = 28$. Mantener los pares agrupados facilita el cálculo sin expandir un polinomio de grado ocho.

Ejercicio 076. Una familia de lugares con valores excepcionales. **Enunciado.** Clasifique para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el lugar $|(z - 1)/(z + 1)| = \lambda$. Dé centros y radios cuando sea circular y conserve las exclusiones originales.

Solución. El dominio es $z \neq -1$, y el módulo no puede ser negativo. Para $\lambda < 0$, el conjunto es vacío; para $\lambda = 0$, sólo aparece $z = 1$, permitido.

Para $\lambda > 0$, la condición equivale a $|z - 1| = \lambda|z + 1|$. Con $z = a + bi$, cuadrar miembros no negativos da $(1 - \lambda^2)(a^2 + b^2 + 1) - 2(1 + \lambda^2)a = 0$. Si $\lambda = 1$, resulta $a = 0$, el eje imaginario. Si $\lambda \neq 1$, completar cuadrados da centro real $h = (1 + \lambda^2)/(1 - \lambda^2)$ y radio $R = 2\lambda/|1 - \lambda^2|$, pues $h^2 - 1 = 4\lambda^2/(1 - \lambda^2)^2$. El lugar es $(a - h)^2 + b^2 = R^2$.

El punto excluido -1 no pertenece a ninguno de los lugares obtenidos: en la igualdad de distancias daría $2 = \lambda \cdot 0$. La ecuación cuadrada y su raíz no negativa son equivalentes para $\lambda > 0$, por lo que todos los puntos descritos cumplen la original. Separar $\lambda = 1$ antes de dividir evita convertir la recta en una fórmula circular indefinida.

Ejercicio 077. Cuadráticas, signo y módulo con parámetro. **Enunciado.** Para $t \in \mathbb{R}$, clasifique todas las raíces de $z^2 - 2tz + t = 0$: realidad, distinción y signos cuando sean reales. Determine además sus módulos cuando no sean reales.

Solución. Completar el cuadrado da $(z - t)^2 = t(t - 1)$. Si $t < 0$ o $t > 1$, el miembro derecho es positivo y hay dos raíces reales distintas $t \pm \sqrt{t(t - 1)}$. Para $t < 0$, su producto es $t < 0$, por lo que tienen signos opuestos. Para $t > 1$, el producto es positivo y la suma $2t$ positiva, por lo que ambas son positivas.

Para $0 < t < 1$, las raíces son $t \pm i\sqrt{t(1 - t)}$, distintas y conjugadas. Su módulo al cuadrado es $t^2 + t(1 - t) = t$, así que ambas tienen módulo $\sqrt{t}$. En $t = 0$, el polinomio es z^2 y tiene cero como raíz doble; en $t = 1$, es $(z - 1)^2$ y tiene uno doble. Estas listas son exhaustivas por la resolución de la ecuación cuadrada. El parámetro controla tanto la colisión de raíces como su paso al dominio no real.

Ejercicio 078. Binomio y sumas trigonométricas. **Enunciado.** Para un entero $n \geq 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$, calcule $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ y $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$. Incluya los ángulos para los que $\cos(\theta/2) = 0$ y no use exponencial compleja.

Solución. Reunimos las dos sumas como partes de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\operatorname{cis}\theta)^k = (1 + \operatorname{cis}\theta)^n$. Las fórmulas de adición dan la identidad $1 + \operatorname{cis}\theta = 2\cos(\theta/2)\operatorname{cis}(\theta/2)$. Por ejemplo, sus partes son $2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos\theta$ y $2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) = \sin\theta$.

Elevar al entero n y usar De Moivre produce $(2\cos(\theta/2))^n \operatorname{cis}(n\theta/2)$. Por tanto, las sumas son respectivamente $(2\cos(\theta/2))^n \cos(n\theta/2)$ y $(2\cos(\theta/2))^n \sin(n\theta/2)$. El factor real puede ser negativo; aquí se usa una identidad algebraica, no un radio polar negativo. Si el coseno de

medio ángulo es cero, $1 + \operatorname{cis}\theta = 0$ y ambas sumas son cero porque $n \geq 1$. No hubo división por ese factor, así que la fórmula incluye esos ángulos.

Ejercicio 079. Dos polinomios y tres dominios. **Enunciado.** Factorice $x^4 + 4$ y $x^4 - 4$ en irreducibles sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Justifique las afirmaciones de irreducibilidad y enumere las raíces complejas.

Solución. Para el primero, la diferencia de cuadrados da $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$. Cada cuadrático es $(x \mp 1)^2 + 1$, sin raíz real. Son irreducibles sobre $\mathbb{R}$ y, por tanto, también sobre $\mathbb{Q}$: una factorización racional sería una real. En $\mathbb{C}$ se dividen en factores lineales con raíces $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$, todas distintas.

Para el segundo, $x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$. Sobre $\mathbb{Q}$, ambos cuadráticos son irreducibles: el primero no tiene raíz racional por la irracionalidad de $\sqrt{2}$; el segundo no tiene siquiera raíz real. Sobre $\mathbb{R}$, la factorización irreducible es $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$. Sobre $\mathbb{C}$, las cuatro raíces son $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ y dan los cuatro factores lineales.

Los productos escritos verifican todas las factorizaciones. La ausencia de raíces se usó sólo para factores de grado dos; no se aplicó indebidamente como criterio de irreducibilidad a los cuárticos.

Ejercicio 080. Un certificado completo y un dominio que rompe la simetría. **Enunciado.** Encuentre el polinomio real mónico de menor grado que se anula en todas las soluciones de $z^3 = i$. Determine después todas las soluciones de $P(z)/(z - i) = 0$ y explique si siguen agrupadas en pares conjugados.

Solución. Las tres raíces de $z^3 = i$ tienen módulo uno y ángulos $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$. Su conjugación produce las tres raíces de $z^3 = -i$. Los conjuntos son disjuntos porque un mismo cubo no puede valer i y $-i$. Un polinomio real con los datos debe tener al menos esas seis raíces distintas, por lo que su grado es al menos seis.

El producto $(x^3 - i)(x^3 + i) = x^6 + 1$ es real, mónico y alcanza el mínimo. Es único en ese grado: la diferencia con otro candidato mónico tendría grado menor que seis y seis raíces. No se necesita TFA, porque ambas listas fueron construidas por De Moivre.

Las seis raíces de P tienen ángulos $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$. La ecuación racional exige $z \neq i$, así que se elimina el ángulo $\pi/2$ y quedan las otras cinco raíces. Cada numerador se anula y cada denominador es no nulo. El conjunto ya no está cerrado bajo conjugación: conserva $-i$ pero excluye i. No contradice el teorema de pares conjugados, que se refiere a las raíces del polinomio real; aquí se añadió una restricción de dominio a una expresión racional.

H. Profundización y reconstrucción. Intente el enunciado antes de leer la solución que lo acompaña. Las tareas mantienen separados dominio, certificado y cobertura.

Ejercicio 081. Elegir coordenadas para una ecuación con conjugado. Para $w = u + vi$, u, $v \in \mathbb{R}$, resuelva $z + 2\overline{z} = w$. Explique por qué la forma cartesiana es adecuada.

Solución 081. Escribimos $z = a + bi$ y $\overline{z} = a - bi$. La ecuación queda $3a - bi = u + vi$, equivalente a $3a = u$ y $-b = v$. Hay una única solución $z = u/3 - vi$. Sustituir da $u/3 - vi + 2(u/3 + vi) = u + vi$. La conjugación actúa separadamente sobre las coordenadas; la forma polar introduciría ángulos sin facilitar este sistema lineal. No se divide por una expresión compleja dependiente de la incógnita.

Ejercicio 082. Elegir polar para una potencia y certificar por módulo. Resuelva $z^6 = -64$ y pruebe que su lista tiene exactamente seis elementos.

Solución 082. Todo candidato tiene módulo $|z|^6 = 64$, luego $|z| = 2$. Como $-64 = 64\operatorname{cis}\pi$, De Moivre da $z_k = 2\operatorname{cis}((\pi + 2\pi k)/6)$, $k = 0, \ldots, 5$. Elevar cada uno a seis da $64\operatorname{cis}(\pi + 2\pi k) = -64$. Dos índices de esa lista producen ángulos cuya diferencia es $2\pi(k - l)/6$, no una vuelta completa salvo $k = l$. Toda solución tiene un argumento de esa forma, reducido a uno de los seis residuos. No se necesita TFA para esta enumeración construida.

Ejercicio 083. La operación duplica direcciones pero conserva un círculo. Para $w \neq 0$, estudie $T(w) = w/\overline{w}$. Determine su imagen y todos los w que producen un punto dado $\operatorname{cis}\phi$ del círculo unitario. Compare coordenadas y forma polar.

Solución 083. Con $w = r\operatorname{cis}\theta$, $r > 0$, se obtiene $T(w) = \operatorname{cis}(2\theta)$, así la imagen está en el círculo unitario y lo cubre tomando $\theta = \phi/2$. La preimagen completa es $w = r\operatorname{cis}(\phi/2 + \pi k)$, $r > 0$, $k = 0, 1$: duplicar el ángulo identifica direcciones opuestas y el radio es libre. En coordenadas $w = a + bi$, el cociente es $[(a^2 - b^2) + 2abi]/(a^2 + b^2)$, cuyo módulo es uno porque $(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$. El origen queda excluido. Las dos representaciones certifican imagen y preimágenes, no solo un valor.

Ejercicio 084. Una familia de lugares que cambia de tipo. Para $\lambda > 0$, determine el lugar $|z - 1| = \lambda|z + 1|$. Clasifique $\lambda = 1$ y dé centro y radio en los demás casos.

Solución 084. Con $z = x + yi$, cuadrar es reversible por no negatividad. Se obtiene $(1 - \lambda^2)(x^2 + y^2) - 2(1 + \lambda^2)x + (1 - \lambda^2) = 0$. Si $\lambda = 1$, queda $x = 0$, la mediatriz. Si $\lambda \neq 1$, completar cuadrado da centro real $h = (1 + \lambda^2)/(1 - \lambda^2)$ y radio $r = 2\lambda/|1 - \lambda^2|$, porque $h^2 - 1 = 4\lambda^2/(1 - \lambda^2)^2$. Todos los puntos del círculo satisfacen la ecuación original por la equivalencia de cuadrados. La familia cambia de circunferencia a recta, por lo que no se puede sustituir uno en la fórmula genérica del centro.

Ejercicio 085. Una condición racional produce un círculo perforado. Determine los z para los que $(z - 1)/(z + 1)$ es puramente imaginario, admitiendo cero como tal. Conserve el dominio.

Solución 085. Se exige $z \neq -1$. Para $z = x + yi$, multiplicar por el conjugado del denominador da parte real $(x^2 + y^2 - 1)/[(x + 1)^2 + y^2]$. El denominador es positivo en el dominio, así la condición es $x^2 + y^2 = 1$. El lugar es el círculo unitario sin el punto -1. En $z = 1$ el cociente es cero y se admite según la convención del enunciado. Cada punto restante tiene parte real cero y denominador no nulo, lo que certifica el lugar completo.

Ejercicio 086. Un lugar lineal leído mediante conjugación. Para $c \in \mathbb{R}$, determine todos los complejos z que satisfacen $z - \overline{z} = 2ci$ y $|z - 1| = 2$.

Solución 086. Con $z = x + yi$, la primera ecuación fuerza $y = c$. La segunda da $(x - 1)^2 + c^2 = 4$. Si $|c| > 2$, no hay soluciones. Si $|c| = 2$, hay una, $1 + ci$. Si $|c| < 2$, hay dos, $1 \pm \sqrt{4 - c^2} + ci$. Sustituir comprueba las dos condiciones. La clasificación corresponde a intersecar una recta horizontal con una circunferencia; el signo $\pm$ modifica solo la coordenada real, no el valor fijado de la imaginaria.

Ejercicio 087. Una restricción rompe la conjugación de las soluciones. Para real t, resuelva $(z^2 + 1)/(z - ti) = 0$ y determine cuándo su conjunto solución es estable por conjugación.

Solución 087. El dominio es $z \neq ti$. El numerador tiene exactamente las raíces $i, -i$, por $(z - i)(z + i)$. Si $t = 1$, queda solo $-i$; si $t = -1$, solo i; para los otros valores quedan ambas. Las dos listas de un elemento no son estables por conjugación, y la lista de dos sí. La verificación exige denominador no nulo en cada candidato. No contradice el emparejamiento de raíces de un polinomio real: la restricción proviene de la expresión racional, cuyo conjunto solución es otro objeto.

Ejercicio 088. Un círculo de raíces y una exclusión paramétrica. Para $a \in \mathbb{C}$, resuelva $(z^4 - 1)/(z - a) = 0$ y clasifique el número de soluciones distintas.

Solución 088. El dominio excluye a. De Moivre o la factorización $(z^2 - 1)(z^2 + 1)$ da las cuatro raíces distintas $U = \{1, -1, i, -i\}$. El conjunto solución es $U \setminus \{a\}$. Tiene tres elementos si $a \in U$ y cuatro si $a \notin U$. Cada elemento conservado anula el numerador y no el denominador, y el producto nulo prueba exhaustividad. La simetría por giros del polinomio puede perderse al quitar un punto; la ecuación racional no hereda automáticamente todas sus simetrías.

Ejercicio 089. Dos listas construidas fuerzan un polinomio real mínimo. Construya el polinomio real mónico de menor grado que se anula en todas las soluciones de $z^3 = i$ y de $z^2 = i$. Resuelva después $P(z)/(z - i) = 0$ y examine la conjugación.

Solución 089. Las raíces cúbicas de i y sus conjugadas forman las seis raíces de $x^6 + 1$; las cuadradas de i y sus conjugadas forman las cuatro raíces de $x^4 + 1$. Las listas son disjuntas: si $z^6 = z^4 = -1$, dividir da $z^2 = 1$ y por tanto $z^4 = 1$, contradicción. Un polinomio real necesita las diez raíces, así el grado mínimo es diez y lo alcanza $P = (x^6 + 1)(x^4 + 1)$. Es único mónico de ese grado por la cota de raíces de su diferencia con otro. Como $i^6 = -1$, i es una de las diez; la ecuación racional excluye solo esa raíz y conserva nueve, entre ellas $-i$. Por eso el conjunto solución no es estable por conjugación. Las listas y el certificado se construyeron sin TFA.

Ejercicio 090. Una familia resuelta sin TFA y sus multiplicidades. Para $n \geq 1$ y $t \in \mathbb{C}$, enumere todas las raíces de $P_t(z) = z^n - t$. Certifique sus multiplicidades sin derivadas y explique el alcance frente al TFA.

Solución 090. Si $t = 0$, solo hay raíz cero, de multiplicidad n. Si $t \neq 0$, escriba $t = r \operatorname{cis} \theta$: las raíces son $a_k = r^{1/n} \operatorname{cis}((\theta + 2\pi k)/n)$, $0 \leq k < n$. De Moivre comprueba cada una y demuestra que la lista es distinta y exhaustiva. En la identidad $z^n - a_k^n = (z - a_k) \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} a_k^j$, el residual evaluado en a_k es $n a_k^{n-1} \neq 0$, así cada raíz es simple. Se resolvió toda esta familia binómica, incluidos multiplicidades y degeneración; no se ha demostrado existencia de raíces para todos los polinomios, que es el alcance más amplio del TFA admitido.

Ejercicio 091. Una existencia sin fórmula y una cota con multiplicidades. Sea $R \in \mathbb{R}[x]$ mónico de grado cinco, con raíz 2 de multiplicidad exactamente dos y sin ninguna otra raíz real conocida. Suponiendo el TFA, pruebe que tiene al menos otra raíz real. Explique qué puede afirmarse sin inventar fórmulas para ella.

Solución 091. Dividimos $R = (x - 2)^2 S$, con S real mónico de grado tres y $S(2) \neq 0$. Por TFA, S tiene tres raíces complejas contadas con multiplicidad. Sus raíces no reales se emparejan con conjugadas de igual multiplicidad; esas contribuciones suman un número par. Como tres es impar, alguna raíz debe ser real y, por $S(2) \neq 0$, distinta de dos. Esto certifica existencia de otra raíz real, sin identificarla ni afirmar que sea única. No se supuso una lista explícita ni se aplicó De Moivre a un cúbico general.

Ejercicio 092. Separar una prueba algebraica de una existencia admitida. Pruebe que $x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1)$ para $n \geq 1$, enumere sus raíces complejas sin TFA y compare con una factorización de un polinomio general.

Solución 092. La identidad es una diferencia de cuadrados y se verifica distribuyendo. Las raíces son $\operatorname{cis}(\pi k/n)$, $k = 0, \ldots, 2n - 1$, porque elevar a $2n$ da uno; la comparación de ángulos prueba que son distintas y exhaustivas. Los índices pares satisfacen $z^n = 1$ y los impares $z^n = -1$, certificando las dos listas de factores. Esta construcción usa De Moivre, no TFA. Para un polinomio general sin una reducción explícita a binomios, la existencia de una factorización lineal completa se apoya en el TFA admitido; verificar un producto propuesto sigue siendo una comprobación algebraica independiente.

GNU Free Documentation License

GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc. `https://www.fsf.org`

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document free in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under

this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ascii without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "publisher" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
D. Preserve all the copyright notices of the Document.
E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
H. Include an unaltered copy of this License.
I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
Ñ. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements."

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly

and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See https://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. RELICENSING

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

ADDENDUM: How to use this License for your documents. To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (C) year your name. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no

Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with... Texts." line with this:

```
with the Invariant Sections being list their titles, with
the Front-Cover Texts being list, and with the Back-Cover Texts
being list.
```

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.