Física

para matemáticos

Tomo I

Fundamentos y mecánica

A. Peña

TEORÍA, EJERCICIOS Y PERSPECTIVA

Matemática²biertA

MATEMATICAABIERTA.CL

Índice general

Capítulo 1. Teorías físicas: fenómenos, modelos y leyes 1

Capítulo 2. Magnitudes, unidades y análisis dimensional 141

Capítulo 3. Medición, incertidumbre, estimación y órdenes de magnitud 293

Capítulo 4. Espacio euclídeo, vectores y marcos de referencia 407

Capítulo 5. Tiempo, movimiento y curvas 549

Capítulo 6. Modelos, aproximaciones, escalas y linealización 661

Capítulo 7. Cinemática en una dimensión 689

Capítulo 8. Cinemática en varias dimensiones 725

Capítulo 9. Leyes de Newton y estructura de la dinámica 753

Capítulo 10. Fuerzas elementales y diagramas de cuerpo libre 781

Capítulo 11. Restricciones elementales y grados de libertad 811

Capítulo 12. Trabajo, potencia y energía cinética 839

Capítulo 13. Energía potencial, fuerzas conservativas y estabilidad 865

Capítulo 14. Momento lineal, impulso y centro de masa 891

Capítulo 15. Momento angular y torque 917

Capítulo 16. Gravitación newtoniana 939

Capítulo 17. Problema de dos cuerpos y fuerzas centrales 959

Capítulo 18. Órbitas de Kepler 977

Capítulo 19. Dispersión clásica y reducción efectiva 995

Capítulo 20. Movimiento en marcos no inerciales 1013

Capítulo 21. Cuerpo rígido: cinemática, rotaciones y tensor de inercia 1031

Capítulo 22. Cuerpo rígido: dinámica 1049

Capítulo 23. Oscilaciones lineales 1067

Capítulo 24. Oscilaciones acopladas y modos normales 1085

Capítulo 25. Configuración, trabajo virtual y principios variacionales 1103

Capítulo 26. Mecánica lagrangiana 1121

Capítulo 27. Simetrías, teorema de Noether y leyes de conservación 1139

Capítulo 28. Mecánica hamiltoniana 1157

Capítulo 29. Corchetes de Poisson y estructura simpléctica elemental 1175

Capítulo 30. Sistemas dinámicos, estabilidad y caos 1193

Capítulo 1

Teorías físicas: fenómenos, modelos y leyes

1. Una pregunta física no es todavía una ecuación

El primer problema. Supongamos que frente a nosotros cuelga una pequeña esfera metálica de un hilo. La apartamos de la vertical y la soltamos. La esfera va hacia un lado, regresa, atraviesa la posición central, sube por el otro lado, vuelve otra vez y continúa oscilando.

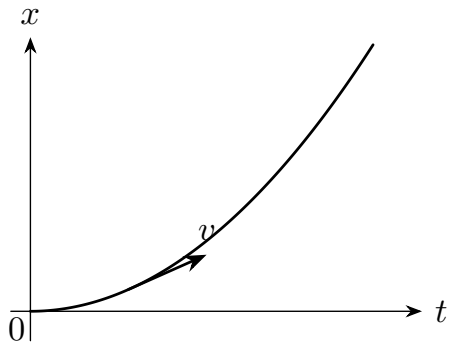


Figura 1.1. Una curva de posición contiene una historia cinemática. La tangente expresa velocidad; para explicar por qué cambia hacen falta interacciones y un modelo dinámico. El ejemplo usa $x = t^2/4{,}5$ en unidades normalizadas. Véase §1.

La pregunta parece inmediata:

¿Cómo se mueve el péndulo?

Para quien ya ha estudiado algo de física, la tentación es casi automática: buscar una fórmula conocida. Quizá recuerde una ecuación para el péndulo, una expresión para su período o una aproximación válida cuando el ángulo es pequeño. Pero en este libro queremos detenernos **antes** de ese paso.

La pregunta «¿cómo se mueve el péndulo?» todavía no es una pregunta matemática bien determinada. Ni siquiera es aún una pregunta física suficientemente precisa.

¿Qué llamamos *el péndulo*?

¿La esfera? ¿La esfera y el hilo? ¿Incluimos el soporte? ¿Incluimos la Tierra, cuya atracción influye en el movimiento? ¿Incluimos el aire, que frena lentamente la oscilación? ¿Incluimos la rotación terrestre? ¿La elasticidad del hilo? ¿La temperatura, que puede cambiar mínimamente sus dimensiones? ¿El aparato con que medimos? ¿La persona que lo soltó?

Y, aun si acordamos qué sistema estudiaremos, queda otra cuestión: ¿qué significa exactamente «cómo se mueve»?

Podríamos querer conocer:

- cuánto tarda en ir y volver;
- la posición de la esfera en distintos instantes;
- la amplitud de cada oscilación;
- cuánto disminuye esa amplitud con el tiempo;
- cómo cambia el comportamiento si modificamos la longitud del hilo;
- si dos péndulos aparentemente iguales se comportan de manera indistinguible;
- cuánto cambia el movimiento si lo llevamos a otro lugar de la Tierra;
- qué aspectos del movimiento permanecen iguales aunque cambiemos el tamaño del aparato.

Cada una de estas preguntas selecciona aspectos distintos del mismo objeto físico.

Este será nuestro punto de partida:

Principio 1.1 — La modelización comienza antes de la primera fórmula Antes de escribir una ecuación física ya hemos tomado decisiones acerca de qué sistema consideramos, qué pregunta formulamos, qué propiedades describiremos y qué efectos trataremos como relevantes o irrelevantes.

No se trata de una precaución filosófica externa a la física. Es una parte del trabajo físico mismo.

El objeto real contiene más física que nuestro primer modelo. Observemos con mayor cuidado el péndulo que tenemos delante. La esfera no es un punto: posee radio, densidad, rugosidad y distribución de masa. El hilo tampoco es una línea geométrica: tiene masa, grosor, elasticidad y puede torcerse. El punto de suspensión puede ceder o vibrar. El aire ejerce fuerzas sobre el conjunto. La Tierra gira. El campo gravitatorio no es perfectamente uniforme. El laboratorio vibra. La esfera intercambia calor con el ambiente. El dispositivo utilizado para medir el tiempo tiene resolución finita.

Nada de eso es imaginario. Todos son aspectos físicos reales.

Sin embargo, si intentáramos incluir desde el comienzo todos los detalles que pudieran tener alguna influencia, probablemente no avanzaríamos. Un modelo físico no pretende copiar el mundo en miniatura. Su tarea es más selectiva:

un modelo conserva ciertos rasgos del sistema y omite otros

de acuerdo con una pregunta.

La palabra importante es **de acuerdo con una pregunta**. La masa del hilo puede ser irrelevante si solo queremos una primera descripción aproximada de la oscilación de una esfera pesada sostenida por un hilo muy ligero. Pero esa misma masa puede ser decisiva si estudiamos vibraciones del hilo. La deformación del soporte puede ser despreciable en una experiencia de aula y esencial en un experimento de precisión. La resistencia del aire puede no importar durante dos oscilaciones y volverse evidente después de cientos.

No existen, por tanto, detalles «irrelevantes en sí mismos». Hay detalles irrelevantes **para una pregunta y dentro de una precisión determinada**.

Una escalera de representaciones. Podemos ordenar varias descripciones posibles del mismo dispositivo.

Nivel A — El péndulo real. Tenemos un cuerpo extendido suspendido de un hilo real, dentro de aire, unido a un soporte real, en un laboratorio situado sobre una Tierra real. Esta descripción es físicamente rica, pero todavía demasiado abierta para calcular o predecir algo concreto.

Nivel B — Selección del sistema. Decidimos estudiar principalmente:

- el cuerpo suspendido;
- el hilo;
- la interacción con la Tierra.

Tratamos el resto como **entorno**.

Todavía no hemos convertido el sistema en un objeto matemático. Solo hemos trazado una primera frontera conceptual.

Nivel C — Idealización geométrica. Representamos la esfera por un punto y el hilo por un segmento de longitud fija.

Aquí ya hemos hecho dos operaciones fuertes:

1. ignoramos el tamaño y la forma del cuerpo;
2. ignoramos las deformaciones del hilo.

El objeto matemático que aparece no existe literalmente en el laboratorio. No hay masas puntuales ni segmentos materiales de grosor cero. Son **idealizaciones**.

Nivel D — Omisión de disipación. Decidimos ignorar, en una primera descripción, la pérdida de energía asociada al aire y a la fricción del soporte.

No estamos diciendo que esas pérdidas sean cero en el mundo. Estamos diciendo:

«Para la pregunta actual, construiremos un modelo en el que no aparezcan.»

Nivel E — Modelo ulterior de pequeñas oscilaciones. En un capítulo posterior podremos hacer una aproximación adicional válida bajo condiciones específicas para simplificar todavía más el modelo. Pero no debemos saltar a ella ahora. Primero tendremos que aprender qué significa justificar una aproximación y cómo se especifica su régimen de validez.

La secuencia conceptual es, por tanto,

$$\begin{array}{c} \text{objeto real} \longrightarrow \text{sistema seleccionado} \\ \Downarrow \\ \text{idealización} \longrightarrow \text{modelo} \\ \Downarrow \\ \text{aproximaciones adicionales.} \end{array}$$

No todos estos pasos son matemáticos. Algunos son decisiones físicas acerca de qué aspectos del mundo vamos a representar.

Primera distinción fundamental: sistema real y objeto matemático. Consideremos una esfera de acero que cuelga de un hilo. La esfera que tocamos pertenece al mundo físico. Podemos pesarla, calentarla, rayarla o reemplazarla.

Un punto geométrico no tiene esas propiedades. Carece de volumen y de estructura interna. Sin embargo, para ciertas preguntas podemos representar la esfera mediante un punto cuya posición simboliza la posición del cuerpo.

Es importante no confundir ambas cosas.

Definición operativa 1.1 — Sistema físico (primera formulación) Llamaremos **sistema físico** a la porción o colección de aspectos del mundo que elegimos como objeto principal de estudio para una pregunta determinada.

La expresión «elegimos» es deliberada. La frontera de un sistema no siempre viene impuesta por la naturaleza.

Definición operativa 1.2 — Representación matemática Una **representación matemática** asigna a aspectos seleccionados de un sistema físico objetos matemáticos —números, puntos, vectores, funciones, espacios, operadores, probabilidades u otras estructuras— junto con una interpretación que indica qué significan físicamente.

La representación no es simplemente una traducción de palabras a símbolos. Implica una correspondencia. Si escribimos un símbolo x, todavía no hemos hecho física. Necesitamos saber **qué representa** x y mediante qué procedimiento podría relacionarse con una observación.

El problema del mapa. Hay una manera útil de pensar la relación entre realidad y modelo. Un mapa de una ciudad no reproduce la ciudad. No contiene los mismos edificios, personas, sonidos, temperaturas ni materiales. Contiene líneas, nombres, símbolos y escalas.

Un buen mapa omite casi todo. Y precisamente por omitir casi todo puede ser útil. Un plano del metro y un mapa topográfico del mismo territorio pueden ser excelentes aunque sean muy diferentes. El primero representa conexiones entre estaciones y simplifica distancias y direcciones; el segundo conserva información geométrica que el plano del metro descarta.

Preguntar cuál de los dos es «el mapa verdadero» sería formular mal la cuestión. Debemos preguntar:

¿verdadero o adecuado para qué tarea?

Algo semejante ocurre con los modelos físicos.

La Tierra puede ser representada como:

- un plano, para ciertos problemas locales;
- una esfera, para una primera descripción global;
- un geoide, para geodesia;
- un cuerpo rígido en rotación, para ciertos problemas dinámicos;
- una masa puntual, para ciertas cuestiones orbitales;
- una distribución continua de materia, para estudiar su campo interior.

Ninguna de esas representaciones agota lo que la Tierra es. El modelo adecuado depende de la pregunta, de la escala y de la precisión exigida.

¿Podemos incluir todo? Podría parecer que la solución más rigurosa consiste simplemente en introducir un modelo cada vez más detallado hasta incluir «todo lo importante». Pero esta idea contiene varios problemas.

No sabemos de antemano qué es «todo lo importante». Precisamente uno de los objetivos de un experimento puede ser descubrir que un efecto considerado insignificante no lo era.

Un modelo más complejo no es automáticamente mejor. Añadir parámetros y mecanismos puede permitir describir más detalles, pero también puede:

- dificultar la interpretación;
- introducir cantidades que no sabemos medir;
- ocultar regularidades simples;
- volver inestable una inferencia;
- hacer imposible distinguir qué mecanismo produce qué efecto.

La pregunta puede no necesitar esa complejidad. Si queremos saber aproximadamente cuánto tarda un péndulo en completar una oscilación, modelar el intercambio térmico de la esfera con el aire puede aportar una precisión completamente irrelevante.

Un ejemplo extremo: la esfera perfectamente rígida. Imaginemos que en un modelo llamamos «rígida» a una esfera.

Dentro del modelo, «rígida» puede significar que las distancias entre sus puntos no cambian. Esta hipótesis puede simplificar enormemente el problema. Pero ninguna esfera material es perfectamente rígida. Todos los cuerpos reales se deforman en alguna medida.

¿Significa esto que el modelo de cuerpo rígido es falso y debe abandonarse?

No.

La pregunta correcta es:

> **¿Son las deformaciones suficientemente pequeñas para que ignorarlas no cambie las conclusiones que nos interesan?**

La física trabaja continuamente con objetos que no existen literalmente:

- partículas puntuales;
- cuerpos perfectamente rígidos;
- hilos sin masa;
- superficies sin rozamiento;
- gases ideales;
- campos uniformes;
- lentes delgadas;
- medios continuos.

Su utilidad no depende de que existan exactamente, sino de que exista un **régimen** en el cual proporcionen una representación adecuada para determinadas preguntas. Más adelante aprenderemos a expresar cuantitativamente algunos de esos regímenes.

Preguntas diferentes, modelos diferentes. Volvamos al péndulo.

Pregunta 1. **¿El cuerpo vuelve aproximadamente al mismo lugar después de ir hacia un lado y hacia el otro?**

Tal vez baste una descripción geométrica muy elemental.

Pregunta 2. **¿Cuánto tarda en completar una oscilación?**

Necesitaremos representar el tiempo y ciertas propiedades del sistema.

Pregunta 3. **¿Disminuye la amplitud?**

Ya no podemos ignorar indefinidamente los mecanismos de disipación.

Pregunta 4. **¿El plano de oscilación cambia lentamente durante muchas horas?**

La rotación terrestre, irrelevante para una pregunta elemental, puede volverse central.

Pregunta 5. **¿Cómo cambia el comportamiento si el soporte se mueve?**

La frontera misma del sistema puede requerir una reformulación. La lección no es que «todo sea relativo» en un sentido impreciso. Es exactamente lo contrario: debemos hacer explícita la dependencia del modelo respecto de la pregunta.

Principio 1.2 — Adecuación relativa a una pregunta Un modelo físico debe evaluarse en relación con las preguntas que pretende responder, las escalas relevantes y la precisión exigida.

Lo que una ecuación no nos dice por sí sola. Supongamos que más adelante encontramos una expresión matemática

$$F(a, b, c) = 0.$$

La ecuación, considerada únicamente como objeto matemático, no nos informa:

- qué representan a, b, c;

- cómo se miden;
- qué unidades poseen;
- si $F = 0$ es una definición, una ley empírica o una consecuencia;
- qué hipótesis físicas se utilizaron;
- si la relación es exacta dentro del modelo o aproximada;
- para qué sistemas se propone;
- bajo qué condiciones deja de ser adecuada.

Por eso, durante este libro, una ecuación física nunca será tratada como una fórmula autosuficiente.

Preguntaremos siempre:

1. **¿Qué objetos físicos están representados?**
2. **¿Qué significan los símbolos?**
3. **¿Cuál es el estatus de la relación?**
4. **¿Qué hipótesis la acompañan?**
5. **¿Qué observación permitiría ponerla a prueba?**
6. **¿Cuál es su dominio de validez?**

Más adelante introduciremos una notación editorial para distinguir definiciones, leyes, postulados, hipótesis de modelo, aproximaciones, condiciones y consecuencias matemáticas.

Un entrenamiento especialmente importante para matemáticos. Quien estudia matemáticas aprende, con razón, a exigir definiciones claras, hipótesis explícitas y demostraciones correctas. En una proposición matemática, una vez fijados los objetos y las hipótesis, la tarea central es determinar qué se deduce lógicamente de ellos.

En física aparece una tarea adicional:

> **decidir qué objetos e hipótesis son apropiados para representar un fenómeno.**

Esta tarea no es una demostración. No se demuestra, a partir de axiomas puramente matemáticos, que un cuerpo pueda tratarse como punto material, que cierto rozamiento sea despreciable o que un modelo continuo sea adecuado. Estas afirmaciones requieren argumentos físicos: comparación de escalas, observaciones, experimentos, simetrías, experiencias anteriores y análisis de sensibilidad.

La secuencia completa posee entonces dos tipos de razonamiento:

$$\text{mundo físico} \longrightarrow \boxed{\text{elección del modelo}} \longrightarrow \text{matemática} \longrightarrow \boxed{\text{interpretación y contraste}}.$$

Los recuadros indican los pasos que no pueden reemplazarse simplemente por manipulación formal.

Este será uno de los hábitos centrales de *Física para matemáticos*.

Ejemplo desarrollado 1 — ¿Qué debemos ignorar? Consideremos este problema:

> Una pequeña esfera cuelga de un hilo de un metro. Se la aparta ligeramente y se la suelta. Queremos comparar el tiempo de una oscilación hoy y mañana.

Antes de calcular nada, clasifiquemos posibles aspectos del sistema.

Aspecto	¿Podría influir físicamente?	¿Lo incluimos de inmediato?	Motivo
longitud del hilo	sí	sí	define geométricamente el dispositivo
masa de la esfera	sí, en general	registrar	todavía no sabemos qué dependerá de ella
tamaño de la esfera	sí	quizá	puede afectar resistencia del aire
masa del hilo	sí	quizá no	puede ser pequeña frente a la esfera
resistencia del aire	sí	quizá no al inicio	el efecto puede ser pequeño en pocas oscilaciones
temperatura	sí	registrar si buscamos alta precisión	puede cambiar dimensiones
rotación terrestre	sí	probablemente no para esta pregunta elemental	efecto acumulativo pequeño en pocos ciclos
color de la esfera	puede correlacionarse con material/temperatura	no por sí mismo	no hay aún mecanismo relevante propuesto

La columna importante es la segunda: **no debemos confundir «lo ignoro en este modelo» con «no puede tener ningún efecto».**

Paso 1 — Formulamos la pregunta. Queremos comparar tiempos de oscilación.

Paso 2 — Elegimos variables observables. Necesitamos, como mínimo, un procedimiento para identificar comienzo y final de una oscilación y un procedimiento para medir tiempo.

Paso 3 — Elegimos una primera representación. Tratamos provisionalmente el cuerpo como concentrado en una posición y el hilo como de longitud fija.

Paso 4 — Registramos omisiones. Aire, deformación del soporte, masa del hilo y otros efectos quedan fuera de la primera descripción.

Paso 5 — Dejamos abierta la revisión. Si las observaciones no concuerdan con la precisión buscada, las omisiones se convierten en candidatas a revisión.

Este es el patrón que repetiremos muchas veces:

$$\boxed{\text{pregunta} \to \text{selección} \to \text{modelo} \to \text{predicción} \to \text{contraste} \to \text{revisión}}$$

Ejemplo desarrollado 2 — La Tierra no tiene un único modelo. La afirmación «modelaremos la Tierra» está incompleta.

Caso A — Una cancha de fútbol. Si queremos describir posiciones sobre una cancha, podemos usar un plano. La curvatura terrestre no tiene relevancia práctica para esa tarea.

Caso B — Una ruta aérea transcontinental. Ahora la geometría global importa. Un modelo plano puede distorsionar distancias y trayectorias.

Caso C — El movimiento de un satélite lejano. Para ciertos cálculos iniciales, la Tierra puede representarse aproximadamente por una masa concentrada en un punto.

Caso D — Distribución de gravedad en la superficie. La forma real, la rotación y la distribución de masa pueden importar.

La secuencia enseña algo general:

$$\boxed{\text{mismo objeto físico} \not\Rightarrow \text{mismo modelo para toda pregunta}}$$

Primer protocolo de lectura. Desde este momento, ante cualquier problema físico, comenzaremos con cinco preguntas.

Protocolo FPM de premodelización — versión inicial 1. ¿Cuál es la pregunta física concreta? 2. ¿Qué tomaremos como sistema? 3. ¿Qué propiedades necesitamos representar? 4. ¿Qué efectos estamos omitiendo o idealizando? 5. ¿Qué observación permitiría decidir si el modelo sirve para la pregunta?

Todavía faltan elementos —unidades, escalas, parámetros, condiciones y dominio de validez cuantitativo— que añadiremos en capítulos posteriores.

Ejercicios de §1. Ejercicio 1.1 — Un vaso de agua.

Queremos estudiar un vaso con agua. Propón **tres preguntas físicas distintas** para las cuales convenga utilizar modelos diferentes. Para cada una, indica al menos dos aspectos que incluirías y dos que probablemente omitirías en una primera aproximación.

Solución.

Una posible respuesta es:

Pregunta A: ¿cuánta agua contiene el vaso?

- incluir: volumen interior, nivel del agua;
- omitir inicialmente: viscosidad, rotación terrestre.

Pregunta B: ¿cómo oscila la superficie si movemos el vaso lateralmente?

- incluir: geometría del recipiente, movimiento del agua, gravedad;
- omitir inicialmente: evaporación, composición isotópica del agua.

Pregunta C: ¿cuánto tarda el agua caliente en enfriarse?

- incluir: temperatura, intercambio térmico con el ambiente, material del vaso;
- omitir inicialmente: movimiento de la Tierra alrededor del Sol, pequeñas irregularidades geométricas que no afecten apreciablemente al intercambio térmico.

La enseñanza no está en que estas elecciones sean únicas. Deben justificarse respecto de cada pregunta. **Ejercicio 1.2 — Modelo más detallado.**

Un estudiante afirma:

> «Entre dos modelos, siempre es físicamente mejor el que incluye más detalles.»

Explica por qué la afirmación es falsa. Da un ejemplo.

Solución.

Más detalle no garantiza mayor adecuación para una pregunta concreta. Un modelo puede introducir parámetros desconocidos, ocultar la estructura relevante o resolver con gran precisión efectos que son insignificantes frente a la precisión requerida. Ejemplo: para estimar la distancia recorrida por una persona al caminar cien metros por una calle, un modelo que incorpore la curvatura del espacio-tiempo terrestre es muchísimo más detallado que un modelo euclídeo local, pero esa complejidad no mejora de manera útil la respuesta.

La comparación correcta no es «más detalles frente a menos detalles», sino:

adecuación para la pregunta y precisión buscada.

Ejercicio 1.3 — ¿Qué significa «sin rozamiento»?.

En un problema se dice que un bloque se mueve sobre una superficie «sin rozamiento».

¿Es esto una afirmación acerca de una superficie real o una hipótesis de modelo? Explica qué información adicional necesitaríamos para decidir si esa idealización es adecuada.

Solución.

«Sin rozamiento» funciona aquí como una **hipótesis de modelo**. No implica que exista una superficie material con rozamiento exactamente cero.

Para evaluar su adecuación necesitamos saber, entre otras cosas:

- qué magnitud queremos predecir;
- durante cuánto tiempo o distancia;
- qué precisión exigimos;
- qué tan pequeño es el efecto del rozamiento en comparación con los efectos conservados en el modelo.

La idealización puede ser excelente para una pregunta y mala para otra. **Ejercicio 1.4 — Una fotografía no es una trayectoria.**

Se toma una única fotografía de una pelota en el aire.

¿Basta esa imagen para responder «cómo se mueve la pelota»? Enumera información que falta.

Solución.

No. Una fotografía registra, como máximo, cierta información espacial en un instante y bajo una proyección particular.

Faltan, por ejemplo:

- una escala espacial;
- el instante o una referencia temporal;
- información sobre posiciones en otros instantes;
- información sobre profundidad si la imagen es bidimensional;
- identificación del sistema de referencia;
- procedimiento que conecte píxeles con posiciones físicas;
- datos sobre el entorno y el mecanismo que produjo el movimiento.

Incluso el significado de «posición» requiere una regla de reconstrucción a partir de la imagen.

Cierre de la sección. Todavía no hemos escrito la ecuación de un péndulo.

Eso no significa que aún no hayamos hecho física.

Ya hemos aprendido que antes de una ecuación debemos:

- formular una pregunta;
- seleccionar un sistema;
- elegir qué propiedades representar;
- idealizar;
- registrar omisiones;
- decidir qué observaciones serían relevantes.

En la sección siguiente examinaremos precisamente el último punto.

¿Qué cuenta como observación física?

Ver que «el péndulo se mueve» no es lo mismo que producir un dato que pueda compararse con una predicción. Pasaremos, por tanto, de

¿qué queremos representar?

a

¿cómo se conecta esa representación con una observación?

2. Fenómeno, observación y experimento

Ver no es todavía medir. Volvamos al péndulo.

Lo apartamos y lo soltamos. Podemos decir:

«Oscila.»

Esta frase registra algo real. Pero si queremos confrontar un modelo con el mundo necesitamos avanzar.

Podríamos preguntar:

- ¿cuánto dura una oscilación?;
- ¿hasta qué altura llega?;
- ¿la amplitud disminuye?;
- ¿dos oscilaciones sucesivas duran lo mismo?;
- ¿cambia el resultado si usamos otra esfera?;
- ¿cambia si repetimos el experimento mañana?

Responder estas preguntas exige algo más que mirar.

Debemos especificar **qué observaremos y cómo**.

Esta es la segunda idea rectora del capítulo:

Principio 1.3 — Una observación física requiere una regla de conexión Para comparar una teoría o un modelo con el mundo necesitamos un procedimiento que conecte algún objeto de la representación matemática con un resultado observable.

No basta con que aparezca un número en una ecuación. Debemos saber qué procedimiento físico produciría el número correspondiente.

Fenómeno. Usaremos la palabra **fenómeno** de manera amplia pero operativa.

Definición operativa 1.3 — Fenómeno Un **fenómeno físico** es un proceso, comportamiento o regularidad del mundo físico que seleccionamos para describir, comparar, predecir o explicar.

Ejemplos:

- la oscilación de un péndulo;
- la caída de un cuerpo;
- la expansión de un gas al calentarse;
- la desviación de la luz al atravesar ciertos medios;
- una corriente eléctrica;
- la interferencia de ondas;
- la desintegración de una partícula.

Un fenómeno no tiene por qué ser un «objeto». La oscilación no es la esfera; es un comportamiento del sistema.

Tampoco es necesario que sea un acontecimiento único. Podemos estudiar regularidades:

cuerpos soltados de manera semejante muestran ciertos patrones de caída;

o transiciones:

cierta sustancia cambia de fase bajo determinadas condiciones.

La selección del fenómeno ya contiene una pregunta implícita: de todo lo que ocurre, decidimos prestar atención a cierta estructura.

Observación. Consideremos dos afirmaciones:

1. «La esfera pasó por el centro.»
2. «La esfera cruzó la marca central cuando el reloj indicaba 12.4 s.»

La segunda contiene una especificación mayor. Pero incluso ella deja preguntas:

- ¿qué marca se considera «el centro»?;
- ¿qué instante asociamos al cruce si la esfera tiene tamaño finito?;
- ¿qué reloj utilizamos?;
- ¿quién leyó el reloj?;
- ¿cómo se sincronizó el comienzo?;
- ¿qué resolución posee el aparato?

No resolveremos todavía todos estos problemas. El objetivo del capítulo 3 será precisamente desarrollar medición e incertidumbre. Por ahora necesitamos una definición de trabajo.

Definición operativa 1.4 — Observación Una **observación física** es un registro obtenido mediante un procedimiento especificado que asigna al sistema una descripción, clasificación o valor susceptible de comparación.

La expresión **mediante un procedimiento especificado** es esencial. Una observación física no es únicamente una sensación privada. Debe existir alguna regla suficientemente clara para que podamos preguntar si dos procedimientos registran lo mismo o si producen resultados comparables.

Del fenómeno al dato. Supongamos que queremos medir el tiempo de una oscilación.

Necesitamos definir al menos:

1. **evento inicial**;
2. **evento final**;
3. **procedimiento temporal**.

Por ejemplo:

- inicio: primer cruce de una marca central en una dirección determinada;
- final: siguiente cruce de la misma marca en la misma dirección;
- tiempo: diferencia entre dos lecturas de un reloj.

Esta descripción ya convierte una pregunta vaga en una operación más precisa.

Podemos simbolizar las lecturas como

$$t_{\mathrm{i}}, \qquad t_{\mathrm{f}},$$

y definir

$$T := t_{\mathrm{f}} - t_{\mathrm{i}}.$$

Aquí debemos leer cuidadosamente el estatus de cada relación.

$$[\mathrm{DEF}] \qquad T := t_{\mathrm{f}} - t_{\mathrm{i}}.$$

Esta ecuación no es una ley de la naturaleza. Es una **definición** de la cantidad T a partir de las lecturas especificadas.

Aún no hemos afirmado que T sea constante, que dependa de la longitud o que obedezca alguna ley. Esto muestra por qué dos ecuaciones algebraicamente similares pueden tener papeles físicos muy distintos.

Observable y procedimiento. En física se habla con frecuencia de **observables**. La noción adquirirá significados técnicos diferentes en teorías posteriores, especialmente en mecánica cuántica. Aquí necesitamos solamente una versión inicial.

Definición operativa 1.5 — Observable Un **observable**, en este nivel, es una propiedad del sistema que el modelo conecta con un procedimiento de observación o medición.

Ejemplos elementales pueden ser:

- una posición respecto de referencias definidas;
- un intervalo temporal;
- una masa determinada por un procedimiento de pesaje;
- una temperatura indicada por un instrumento calibrado;
- el número de eventos detectados en cierto intervalo.

La palabra «conecta» evita una simplificación importante.

No siempre «leemos directamente» una propiedad de la naturaleza. Muchas veces inferimos una cantidad mediante una cadena:

$$\text{sistema} \to \text{interacción con instrumento} \to \text{señal} \to \text{procesamiento} \to \text{valor registrado}.$$

Por ejemplo, una cámara digital no entrega «posición» en metros. Produce datos en una matriz de detectores. Para convertirlos en posiciones físicas necesitamos calibración, geometría y convenciones.

Microcaso: una pelota que cae. Queremos estudiar la caída de una pelota.

Parece obvio qué observar: «la altura». Pero debemos construirla.

Opción A — Marcas sobre una pared. Colocamos referencias de altura y registramos visualmente la posición.

Opción B — Video. Filmamos la caída y relacionamos píxeles con una escala física.

Opción C — Barreras ópticas. Colocamos sensores a alturas determinadas y registramos los instantes de paso.

Cada método produce datos de forma diferente.

Esto tiene consecuencias:

- los procedimientos pueden tener resoluciones distintas;
- pueden perturbar el sistema de manera diferente;
- requieren distintas calibraciones;
- pueden definir de manera ligeramente distinta el evento «la pelota está a altura h».

La variable matemática «altura» no llega al experimento sin mediación.

¿Qué observar en la caída? Imaginemos ahora que soltamos dos hojas de papel, una extendida y otra arrugada.

Podemos registrar:

- tiempo de caída;
- orientación;
- forma;
- velocidad del aire;
- trayectoria lateral;

- rotación.

Si solo registramos el instante en que tocan el suelo, quizá concluyamos que una cae más rápido. Pero esa conclusión no nos dice por sí sola **por qué**.

Podrían importar:

- la resistencia del aire;
- la geometría;
- las corrientes;
- el procedimiento de liberación.

El experimento necesita entonces distinguir hipótesis.

Esto nos lleva a una idea más fuerte que la mera observación.

Experimento. Definición operativa 1.6 — Experimento Un **experimento** es una disposición o intervención controlada diseñada para producir observaciones que permitan estimar cantidades, comparar comportamientos o discriminar entre hipótesis.

La palabra «controlada» no significa que absolutamente todo esté bajo control.

Significa que intentamos:

- fijar ciertas condiciones;
- variar otras;
- registrar qué se hizo;
- establecer qué diferencias entre resultados pueden atribuirse razonablemente a los cambios introducidos.

Un experimento no es simplemente «hacer algo y mirar qué ocurre».

Ejemplo desarrollado 3 — Diseñar una comparación. Pregunta:

> ¿Influye de manera apreciable la amplitud inicial en el tiempo de oscilación de nuestro péndulo?

No responderemos todavía con una fórmula. Diseñaremos el razonamiento experimental.

Paso 1 — Identificar lo que variaremos. Variamos la posición inicial del cuerpo.

Paso 2 — Identificar lo que intentaremos mantener fijo.

- mismo péndulo;
- mismo punto de suspensión;
- misma definición de período;
- mismo procedimiento temporal;
- condiciones ambientales tan semejantes como sea razonable.

Paso 3 — Definir grupos de observaciones. Realizamos varias mediciones para distintas amplitudes iniciales.

Paso 4 — Evitar una conclusión prematura. Si obtenemos valores diferentes, todavía debemos preguntar:

- ¿las diferencias son mayores que la variación propia del procedimiento?;
- ¿cambiamos inadvertidamente otra condición?;
- ¿el modo de soltar el péndulo introduce perturbaciones?;
- ¿el instrumento permite distinguir la diferencia?

Estas preguntas pertenecen a la estructura experimental, no a la solución matemática de una ecuación.

Observación y teoría no son mundos aislados. Podría parecer que primero existen «datos puros» y después una teoría se limita a explicarlos. La situación real es más sutil.

Para producir un dato ya utilizamos conceptos:

- elegimos qué cuenta como evento;
- decidimos qué magnitud registrar;
- elegimos un instrumento;
- aplicamos una calibración;
- organizamos señales según un procedimiento.

Esto no significa que los datos sean arbitrarios o que una teoría pueda imponer cualquier resultado. Significa que la conexión entre mundo y representación posee estructura.

En este libro la indicaremos con la etiqueta:

[OBS]

para relaciones que especifican cómo una cantidad del modelo se conecta con un procedimiento de observación.

Por ejemplo:

[OBS]

«La coordenada registrada de la esfera se obtiene convirtiendo la posición de su centro en la imagen mediante una calibración espacial previamente fijada.»

No es todavía una ecuación universal; es una **regla de conexión** entre aparato y modelo.

Repetición: ¿por qué medir más de una vez? Si repetimos un procedimiento aparentemente idéntico, rara vez obtenemos resultados numéricamente idénticos con precisión ilimitada.

Puede haber diferencias debidas a:

- resolución del instrumento;
- variaciones del ambiente;
- pequeñas diferencias en las condiciones iniciales;
- ruido;
- fluctuaciones físicas;
- intervención humana;
- cambios del propio sistema.

Todavía no clasificaremos formalmente estas variaciones. Ese trabajo corresponde al capítulo 3.

Pero sí fijaremos una norma:

Principio 1.4 — Una observación aislada no caracteriza por sí sola la estabilidad de un procedimiento Cuando la pregunta exige comparar o estimar una magnitud, debemos considerar si el resultado persiste al repetir el procedimiento bajo condiciones declaradas.

Repetibilidad y reproducibilidad: primera aproximación. Usaremos dos palabras de manera preliminar.

Repetibilidad. Preguntamos si un procedimiento produce resultados compatibles cuando se repite bajo condiciones tan semejantes como sea posible.

Reproducibilidad. Preguntamos si el resultado se mantiene cuando cambia razonablemente el realizador, el instrumento, el laboratorio o alguna parte del procedimiento, según el tipo de afirmación que se quiere sostener.

No fijaremos todavía definiciones metrológicas internacionales precisas. Nos basta comprender la diferencia conceptual:

- repetir es volver a hacer algo en condiciones cercanas;

- reproducir pone a prueba si el resultado sobrevive a cambios controlados del contexto experimental.

Un dato necesita contexto. Supongamos que encontramos escrito:

$$T = 2.01.$$

¿Es un dato físico?

No todavía.

Falta saber:

- qué representa T;
- en qué unidades está expresado;
- cómo se obtuvo;
- qué sistema se midió;
- bajo qué condiciones;
- con qué procedimiento;
- con qué precisión.

Un número descontextualizado no es un resultado experimental completo.

Incluso

$$T = 2.01 \text{ s}$$

sigue siendo insuficiente para muchas preguntas.

La física no opera con números desnudos, sino con resultados insertos en procedimientos y modelos.

El papel del instrumento. Un instrumento físico es también un sistema físico. Un reloj puede atrasarse. Una regla se expande térmicamente. Un sensor tiene umbral. Una cámara posee distorsión. Un detector puede dejar de registrar ciertos eventos.

Por eso, cuando conectamos una variable teórica con una observación, incorporamos indirectamente un modelo del instrumento. No siempre necesitaremos describir ese modelo con detalle. Pero debemos recordar que existe.

Esta idea será crucial mucho más adelante. En mecánica cuántica, por ejemplo, el problema de la medición no podrá tratarse como un simple detalle administrativo.

Aquí solo sembramos el hábito:

> **¿Qué interacción física convierte la propiedad que quiero conocer en la señal que efectivamente registro?**

Ejemplo desarrollado 4 — Medir el período sin cronómetro perfecto. Imaginemos que nuestro cronómetro tiene una resolución limitada. En vez de medir una sola oscilación, podemos medir el tiempo de diez oscilaciones y luego dividir por diez. Si el tiempo total registrado es T_{10}, definimos

$$[\text{DEF}] \qquad \overline{T} := \frac{T_{10}}{10}.$$

¿Por qué podría ayudar?

Porque ciertos errores asociados al inicio y al final de la medición pueden representar una fracción menor del tiempo total cuando observamos muchas oscilaciones. No cuantificaremos aún esta mejora; eso corresponde al capítulo de incertidumbre.

Lo importante ahora es metodológico:

> el diseño del procedimiento de observación puede cambiar la calidad de la información obtenida.

La medición no es una ventana transparente e indiferente.

Experimentos que discriminan hipótesis. Supongamos que dos explicaciones predicen lo mismo para todas las situaciones que hemos observado.

Entonces los datos disponibles no permiten distinguirlas.

Necesitamos una situación en la que sus predicciones difieran.

Esta es una función fundamental del experimento:

diseñar condiciones en las que hipótesis rivales produzcan consecuencias distinguibles

No siempre es posible. Algunas hipótesis pueden ser empíricamente indistinguibles dentro del régimen accesible.

Pero cuando sí es posible, el buen experimento no se limita a acumular datos: **busca información que discrimine**.

Ejemplo desarrollado 5 — Dos hipótesis sobre hojas de papel. Consideremos:

- **Hipótesis A:** el tiempo de caída depende principalmente de la masa.
- **Hipótesis B:** para hojas de masa semejante, la forma y la interacción con el aire pueden modificar fuertemente el tiempo de caída.

Diseñemos comparaciones.

Experimento 1. Una hoja extendida frente a la misma hoja arrugada. La masa prácticamente no cambia; la forma sí. Si los tiempos cambian mucho, la comparación proporciona evidencia contra una explicación puramente basada en la masa.

Experimento 2. Dos objetos de distinta masa pero formas muy semejantes. Ahora variamos masa manteniendo aproximadamente la geometría.

Experimento 3. Repetir en un entorno con mucho menos aire. La diferencia entre ciertos comportamientos puede reducirse. No estamos derivando todavía una teoría de la caída. Estamos aprendiendo a **separar variables mediante diseño experimental**.

Control y comparación. La palabra «control» tiene varios usos en ciencia. Aquí la utilizaremos informalmente para cualquier disposición que nos ayude a atribuir diferencias observadas a un cambio específico. Si modificamos simultáneamente diez aspectos de un experimento y el resultado cambia, será difícil saber cuál produjo el efecto.

La comparación más informativa suele intentar:

cambiar lo que queremos estudiar y mantener el resto suficientemente controlado.

En la práctica nunca se mantiene «todo lo demás exactamente igual». Lo que hacemos es justificar que las variaciones restantes no dominan el efecto investigado.

Esta frase —**no dominan el efecto**— anticipa el lenguaje de escalas que aprenderemos después.

Una observación negativa también necesita procedimiento. Supongamos que afirmamos:

> «No observamos desviación.»

La frase puede significar muchas cosas.

¿No hubo desviación exactamente? ¿O fue menor que la capacidad del instrumento para detectarla?

Una afirmación negativa debería leerse como:

> «Bajo este procedimiento y dentro de su sensibilidad, no se registró una desviación distinguible.»

Esta forma de hablar evita convertir limitaciones instrumentales en afirmaciones ontológicas. El principio será importante en toda la física experimental.

Predicción observable y predicción matemática. Imaginemos que un modelo produce exactamente el número

$$1.003847261\ldots$$

para cierta cantidad.

El instrumento solo distingue cambios del orden de una centésima.

Entonces muchas cifras de la predicción matemática no tienen contraparte experimental accesible en ese montaje.

Aquí reaparece nuestra distinción central:

$$\text{precisión matemática} \not\Rightarrow \text{precisión experimental}.$$

Y también su recíproca:

un experimento muy preciso puede revelar que un modelo matemáticamente elegante es físicamente insuficiente.

El péndulo como experimento. Construyamos una ficha experimental mínima.

Sistema. Esfera suspendida por un hilo de un soporte.

Fenómeno. Oscilación después de separar la esfera de su posición de equilibrio aparente.

Pregunta. ¿Cómo varía el tiempo de oscilación al modificar una condición determinada?

Observable principal. Intervalo temporal asociado a una oscilación según un procedimiento definido.

Procedimiento.

1. fijar una marca de referencia;
2. definir un evento de inicio;
3. definir el evento final correspondiente;
4. registrar tiempo;
5. repetir.

Variables que podemos modificar.

- longitud;
- amplitud inicial;
- masa;
- geometría del cuerpo;
- medio circundante.

Condiciones que intentamos controlar.

- soporte;
- procedimiento de liberación;
- instrumento temporal;
- localización;
- definición de una oscilación.

Todavía no sabemos qué variables **deben** aparecer en la ley. Precisamente el experimento puede ayudarnos a descubrirlo.

De la observación al modelo y del modelo a la observación. La relación entre teoría y experimento no es una flecha única.

No hacemos simplemente:

$$\text{observación} \to \text{teoría}.$$

Tampoco:

$$\text{teoría} \to \text{observación}.$$

El trabajo real forma un ciclo:

$$\boxed{\text{observación} \to \text{modelo} \to \text{predicción} \to \text{nuevo experimento} \to \text{revisión del modelo}}$$

Cada vuelta puede modificar:

- qué variables consideramos;
- qué precisión necesitamos;
- qué experimento es informativo;
- qué idealización aceptamos.

Este ciclo será más importante que cualquier fórmula aislada del libro.

Ejercicios de §2. Ejercicio 1.5 — Definir una oscilación.

Propón dos definiciones experimentales distintas de «una oscilación completa» de un péndulo. Explica por qué ambas pueden ser válidas si se usan consistentemente.

Solución.

Definición A: intervalo entre dos cruces sucesivos del centro en la misma dirección.

Definición B: intervalo entre dos máximos sucesivos alcanzados en el mismo lado.

Ambas intentan identificar dos estados equivalentes dentro del ciclo. Pueden producir estimaciones compatibles si el movimiento es suficientemente regular y el procedimiento está bien definido.

La lección es que una magnitud experimental necesita una regla de identificación de eventos. No basta el nombre «período». **Ejercicio 1.6 — Video y calibración.**

Una cámara registra una pelota que cae. El centro de la pelota aparece en la fila 420 de la imagen. Explica por qué el número 420 no es todavía una altura física.

Solución.

El número 420 es una coordenada en la matriz de imagen. Para transformarla en una altura física necesitamos, como mínimo:

- conocer la geometría de la cámara;
- establecer una escala mediante objetos de longitud conocida;
- fijar un origen;
- conocer la orientación de la imagen;

- decidir qué punto de la pelota representa su posición;
- controlar o corregir distorsiones relevantes.

Solo después puede construirse una relación `[OBS]` entre coordenada de imagen y altura. **Ejercicio 1.7 — Un experimento poco discriminante.**

Queremos decidir si el color de una esfera afecta el período de un péndulo. Un estudiante reemplaza una esfera pequeña de acero pintada de rojo por una esfera grande de madera azul y encuentra una diferencia.

¿Por qué el experimento no discrimina adecuadamente la hipótesis «el color importa»?

Solución.

Se modificaron simultáneamente muchas propiedades:

- color;
- material;
- masa;
- tamaño;
- geometría superficial;
- posiblemente distribución de masa.

Por tanto, aunque aparezca una diferencia, el experimento no permite atribuirla específicamente al color.

Un diseño mejor cambiaría el color manteniendo tanto como sea posible las demás propiedades relevantes, por ejemplo usando el mismo cuerpo antes y después de aplicar una capa de pintura cuyo efecto adicional se evalúe. **Ejercicio 1.8 — «No vimos ningún efecto».**

Un detector puede registrar desplazamientos mayores que 1 mm. En un experimento no registra ningún cambio.

¿Cuál de las siguientes conclusiones está justificada?

1. El desplazamiento es exactamente cero.
2. El desplazamiento, si existe, no fue distinguible con ese procedimiento.
3. La teoría que predice desplazamiento es necesariamente falsa.

Solución.

La conclusión justificada es **2**. El resultado experimental informa sobre lo que el procedimiento puede distinguir.

No podemos inferir que el desplazamiento sea matemáticamente exactamente cero. Tampoco podemos rechazar automáticamente toda teoría que prediga un desplazamiento, porque esta podría predecir un valor inferior al umbral de detección o porque habría que revisar otros aspectos del experimento. **Ejercicio 1.9 — Repetición.**

Se mide cinco veces el tiempo asociado a un mismo procedimiento y se obtienen valores ligeramente distintos.

¿Por qué no es correcto escoger simplemente el valor que «parece más razonable» y descartar los otros?

Solución.

Las diferencias contienen información acerca del procedimiento y del sistema. Antes de descartar datos necesitamos criterios explícitos: fallo instrumental identificado, violación de una condición experimental, error de transcripción u otra causa justificable. Elegir el valor preferido porque coincide mejor con una expectativa introduce un sesgo.

En el capítulo 3 aprenderemos a resumir conjuntos de mediciones y tratar incertidumbres de forma cuantitativa. **Ejercicio 1.10 — Diseñar una prueba.**

Hipótesis:

> «El tiempo de oscilación de nuestro péndulo cambia apreciablemente si reemplazamos la esfera por otra de masa distinta, manteniendo lo demás igual.»

Diseña un experimento conceptual para poner a prueba la afirmación.

Solución.

Una estrategia:

1. utilizar el mismo hilo y soporte;
2. preparar varias esferas de geometría exterior lo más semejante posible pero masas distintas;
3. fijar un procedimiento de liberación;
4. definir una oscilación mediante eventos reproducibles;
5. utilizar el mismo método temporal;
6. medir varias veces para cada esfera;
7. alternar el orden de las mediciones para reducir efectos de deriva temporal;
8. comparar los resultados.

Todavía no podemos decidir aquí qué diferencia cuenta como «apreciable» en sentido metrológico riguroso; eso requerirá incertidumbre y escalas.

Síntesis de §1–§2. Ya podemos describir una primera parte del trabajo físico.

Comenzamos con un fenómeno:

$$\text{péndulo oscilando.}$$

Formulamos una pregunta:

$$\text{¿qué aspecto queremos explicar o predecir?}$$

Seleccionamos un sistema:

$$\text{¿qué incluimos y qué tratamos como entorno?}$$

Construimos una representación:

$$\text{¿qué objetos matemáticos simbolizarán propiedades físicas?}$$

Definimos observaciones:

$$\text{¿mediante qué procedimiento obtenemos datos comparables?}$$

Y diseñamos experimentos:

$$\text{¿qué debemos controlar o variar para obtener información discriminante?}$$

La cadena que empieza a formarse es

$$\boxed{\text{fenómeno} \to \text{pregunta} \to \text{sistema} \to \text{representación} \leftrightarrow \text{observación} \to \text{experimento}}.$$

Todavía falta algo decisivo.

¿Qué partes del sistema quedan dentro y cuáles fuera?

¿Cómo distinguimos **estado**, **parámetro** y **observable**?

Ése será el objeto de la sección siguiente (§3).

3. Sistema, entorno, estado y observables

Elegir el sistema es trazar una frontera. En las dos secciones anteriores hemos usado varias veces la palabra **sistema**. Ahora necesitamos precisar qué trabajo realiza ese concepto. Volvamos al péndulo.



Figura 1.2. La frontera selecciona las variables del sistema y los intercambios con su entorno; cambiarla cambia el balance que habrá que formular. Véase §3.

Frente a nosotros hay una esfera, un hilo, un soporte, aire, una mesa, un edificio y la Tierra. Todo ello forma parte de una única realidad física continua. Sin embargo, para construir un problema no intentamos describir simultáneamente el universo completo. Seleccionamos una parte.

Podemos decidir, por ejemplo, que nuestro sistema sea:

1. solo la esfera;
2. esfera + hilo;
3. esfera + hilo + soporte;
4. esfera + hilo + Tierra;
5. esfera + hilo + aire + Tierra.

Cada elección produce una frontera distinta entre aquello que describiremos **dentro** del modelo y aquello que trataremos como **entorno**.

Definición operativa 1.7 — Sistema físico (formulación refinada) Para una pregunta dada, llamaremos **sistema físico** al conjunto de objetos, componentes o procesos que elegimos describir explícitamente como objeto principal del modelo.

Definición operativa 1.8 — Entorno Llamaremos **entorno** a aquello que queda fuera de la frontera elegida del sistema pero que puede influir en él, recibir influencia de él o ser relevante para interpretar las observaciones.

La frontera puede coincidir con una superficie material, pero no tiene por qué hacerlo.

Si estudiamos la temperatura de una taza de café, podríamos tomar como sistema:

- solo el líquido;
- líquido + taza;
- líquido + taza + una capa de aire circundante.

La frontera del sistema es, en primer lugar, una **decisión de modelización**.

La frontera no separa «lo real» de «lo irreal». Cuando dejamos el aire fuera del sistema del péndulo, el aire no deja de existir. Cuando modelamos la Tierra como parte del entorno, la gravedad no desaparece. Esto parece obvio, pero evita un error frecuente: interpretar la frontera del modelo como una frontera ontológica.

El esquema correcto es:

$$\boxed{\text{fuera del sistema} \not\Rightarrow \text{sin efecto}}$$

Un efecto externo puede aparecer en el modelo mediante una cantidad prescrita, una condición o una interacción efectiva, aun cuando el mecanismo que la produce no sea descrito en detalle.

Más adelante, por ejemplo, podremos representar la influencia de un entorno mediante campos externos, fuerzas externas, condiciones de frontera, fuentes o depósitos. Todavía no necesitamos ese formalismo.

Por ahora basta distinguir dos operaciones:

- **incluir** un componente significa modelar explícitamente parte de su estado o dinámica;
- **externalizar** un componente significa no seguir todos sus detalles internos, aunque podamos representar algunos de sus efectos.

Tres fronteras para el mismo péndulo. Consideremos tres elecciones.

Modelo A — La esfera como sistema. El hilo, el soporte, el aire y la Tierra pertenecen al entorno. Este modelo puede ser útil si nuestro interés está concentrado en la trayectoria de la esfera y representamos los demás efectos de forma externa.

Modelo B — Esfera + hilo como sistema. Ahora la tensión, deformación o movimiento del hilo pueden convertirse en parte explícita de la descripción.

Modelo C — Esfera + hilo + Tierra como sistema. Esta elección puede ser útil si nos interesa contabilizar intercambios internos entre el cuerpo suspendido y la Tierra en una descripción más global. Las tres fronteras son legítimas. No existe una regla general según la cual «el sistema más grande sea el más correcto».

Principio 1.5 — La frontera del sistema se elige para la pregunta Una buena frontera incluye la estructura necesaria para responder la pregunta sin obligarnos a modelar detalles que no aportan información relevante en el régimen considerado.

Esta es una forma temprana del principio de **modelo mínimo suficiente** que usaremos repetidamente.

¿Qué significa conocer el estado de un sistema? Supongamos que vemos un péndulo en una fotografía. La esfera aparece a la derecha de la vertical.

¿Sabemos cómo continuará el movimiento?

No necesariamente.

Podría estar moviéndose hacia la derecha y acercándose a su punto de retorno. O podría estar moviéndose hacia la izquierda después de haberlo alcanzado. La misma posición visible puede corresponder a evoluciones posteriores diferentes.

La lección es fundamental:

$$\boxed{\text{describir dónde está algo} \neq \text{describir completamente su estado}}$$

En mecánica elemental aprenderemos que cierta información adicional —por ejemplo, información asociada al movimiento— resulta necesaria.

Pero queremos formular ahora una noción suficientemente general para que sobreviva a teorías posteriores.

Definición operativa 1.9 — Estado Dado un modelo físico, un **estado** es una especificación matemática de la condición del sistema que contiene la información que ese modelo considera suficiente para formular sus predicciones, una vez fijados los parámetros, las leyes y las influencias externas pertinentes.

Hay dos palabras que no debemos omitir:

dado un modelo

La noción de estado no se define independientemente de la teoría.

El estado es relativo al nivel de descripción. Consideremos un gas dentro de un recipiente.

Podríamos construir una descripción microscópica en la que intentamos seguir una enorme cantidad de información sobre sus constituyentes. También podemos construir una descripción macroscópica mediante unas pocas magnitudes globales. Ambas pueden hablar de «estado», pero no contienen la misma información.

Más adelante distinguiremos con precisión **microestado** y **macroestado**. Aquí basta extraer la regla:

qué cuenta como estado depende de qué estructura conserva el modelo

Lo mismo ocurre con un cuerpo extenso.

En un modelo de partícula puntual, su orientación puede no formar parte del estado. En un modelo de cuerpo rígido, la orientación puede ser esencial. En un modelo que además permite deformaciones, necesitaremos todavía más información.

Por tanto, preguntar simplemente «¿cuál es el estado real del objeto?» sin especificar una teoría o nivel de descripción puede ser demasiado ambiguo para nuestro propósito.

Espacio de estados: primera aparición. El lector matemático reconocerá inmediatamente una estructura útil. Si llamamos $\mathcal{S}$ al conjunto de todos los estados admitidos por un modelo, podemos escribir

$$s \in \mathcal{S}.$$

Definición operativa 1.10 — Espacio de estados El **espacio de estados** de un modelo es el conjunto —dotado más adelante de la estructura matemática que corresponda— cuyos elementos representan los estados admitidos por ese modelo.

Por ahora, la palabra «espacio» no presupone topología, métrica, estructura vectorial ni variedad diferenciable.

Solo estamos diciendo:

$$\mathcal{S} = \{\text{estados permitidos por el modelo}\}.$$

En capítulos posteriores veremos ejemplos muy distintos:

- espacios de configuraciones;
- espacios de fases;
- espacios de estados termodinámicos;
- espacios de Hilbert.

No debemos confundirlos de antemano.

Variable: una palabra demasiado amplia. En física usamos constantemente la palabra **variable**.

Puede referirse a:

- una coordenada que cambia con el estado;
- una magnitud que registramos;
- una cantidad que controlamos experimentalmente;

- un parámetro que variamos de un experimento a otro;
- incluso una variable matemática auxiliar.

Por eso necesitamos distinguir funciones.

Definición operativa 1.11 — Variable de estado Una **variable de estado** es una cantidad utilizada por el modelo para describir o distinguir estados del sistema.

Si dos estados pueden diferir en una cantidad q, podemos representarla esquemáticamente mediante

$$q : \mathcal{S} \to V,$$

donde V es el conjunto de valores posibles.

Esta escritura no afirma todavía que toda variable física sea una función ordinaria en todas las teorías. Es una plantilla apropiada para los modelos clásicos elementales que comenzaremos a estudiar.

Parámetro: fijo dentro del problema, variable entre modelos o realizaciones. Consideremos un péndulo idealizado de longitud ℓ. En un experimento concreto podemos fijar $\ell = 1\,\mathrm{m}$ y estudiar cómo cambia el estado del péndulo con el tiempo. Entonces ℓ funciona como un **parámetro** del modelo, no como una variable que necesitemos actualizar para describir cada instante.

Definición operativa 1.12 — Parámetro Un **parámetro** es una cantidad que caracteriza al sistema o al modelo y que se trata como fija al describir una realización determinada, aunque pueda tomar otros valores al comparar sistemas, experimentos o miembros de una familia de modelos.

Podemos escribir una familia de modelos como

$$\mathcal{M}_\theta,$$

donde θ representa uno o varios parámetros.

La distinción importante no es:

$$\text{variable} = \text{cambia realmente}, \qquad \text{parámetro} = \text{no cambia realmente}.$$

Es una distinción de **papel dentro del modelo**.

La longitud de una barra puede tratarse como parámetro en un problema y convertirse en variable de estado en otro problema donde estudiamos su dilatación.

La misma magnitud puede cambiar de papel. Este punto merece un ejemplo explícito.

Problema A — Péndulo de longitud fija. La longitud ℓ se mide antes del experimento y se mantiene fija.

Rol: ℓ parámetro.

Problema B — Hilo elástico. Ahora la longitud puede cambiar durante el movimiento.

Rol: ℓ variable de estado.

Problema C — Calibración de una regla. La longitud del objeto puede ser precisamente la cantidad que queremos inferir de una observación.

Rol:

$$\ell \quad \text{cantidad observada o estimada.}$$

La magnitud física no lleva escrita una etiqueta eterna.

Principio 1.6 — Los roles pertenecen al modelo «Variable», «parámetro», «observable» y «dato de control» describen el papel que una cantidad cumple dentro de una modelización o experimento; una misma magnitud puede desempeñar papeles distintos en problemas diferentes.

Observable: ahora podemos precisar la definición. En §2 dijimos que un observable es una propiedad que el modelo conecta con un procedimiento de observación o medición. Ahora podemos expresarlo matemáticamente en el caso clásico elemental. Si el sistema está en un estado $s \in \mathcal{S}$, un observable puede representarse por una función

$$O : \mathcal{S} \to \mathcal{V},$$

de modo que

$$O(s)$$

sea el valor que el modelo asocia al estado.

Pero todavía falta la física. La función matemática por sí sola no nos dice cómo obtener un dato.

Necesitamos una regla `[OBS]` que conecte:

$$O(s) \quad \longleftrightarrow \quad \text{procedimiento experimental.}$$

Por tanto, un observable físico posee dos caras:

$$\boxed{\text{estructura matemática} + \text{interpretación operacional}}.$$

En mecánica cuántica esta descripción mediante funciones ordinarias sobre estados dejará de ser adecuada y la noción de observable adquirirá una estructura distinta. No adelantaremos esa teoría, pero evitaremos construir una definición que después debamos deshacer.

Estado y observable tampoco son lo mismo. Supongamos que un modelo necesita dos variables para especificar el estado:

$$s = (q_1, q_2).$$

Podemos medir solamente una combinación

$$O(s) = q_1 + q_2.$$

Dos estados diferentes pueden producir el mismo valor observable:

$$(q_1, q_2) = (1, 2)$$

y

$$(q_1, q_2) = (2, 1)$$

dan en ambos casos

$$O = 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{un valor observable no tiene por qué determinar el estado}}.$$

Este ejemplo algebraico elemental anticipa un problema muy general: **reconstruir estados a partir de observaciones**.

Más adelante aparecerá bajo formas mucho más sofisticadas.

Ejemplo desarrollado 6 — La Tierra bajo cinco preguntas. La Tierra ofrece un excelente laboratorio conceptual porque el mismo objeto admite modelos radicalmente distintos.

Pregunta A — ¿Dónde está una persona dentro de una habitación? Podemos tratar el suelo local como un plano. La curvatura global de la Tierra queda fuera del modelo.

Pregunta B — ¿Cuál es una ruta aproximada entre ciudades lejanas? La geometría esférica se vuelve relevante.

Pregunta C — ¿Cuál es la forma de referencia necesaria para geodesia precisa? Una esfera perfecta puede no bastar; entran modelos más refinados como el geoide y el elipsoide de referencia.

Pregunta D — ¿Cómo describimos ciertos efectos de la rotación terrestre? La Tierra debe poseer orientación y movimiento de rotación; un simple punto deja de contener la información necesaria.

Pregunta E — ¿Cómo aproximamos su influencia gravitatoria sobre un objeto muy lejano? En ciertas circunstancias puede bastar un modelo de masa concentrada.

Podemos resumir:

Pregunta	Modelo de Tierra	Información retenida
habitación	plano local	geometría local
navegación global	esfera	curvatura global aproximada
geodesia	geoide/elipsoide	forma refinada
rotación	cuerpo extenso en rotación	orientación y rotación
interacción lejana	masa puntual aproximada	masa y posición

El cambio de modelo cambia también qué entendemos por **estado** de la Tierra. Una masa puntual necesita mucha menos información que un cuerpo extenso en rotación.

Ejemplo desarrollado 7 — Una habitación y su temperatura. Consideremos la pregunta:

¿Cómo cambia la temperatura de una habitación cuando encendemos un calefactor?

Podemos elegir varios sistemas.

Sistema 1 — El aire de la habitación. Paredes, ventanas, calefactor y exterior pertenecen al entorno.

Sistema 2 — Aire + paredes + muebles. Ahora parte del almacenamiento de energía térmica queda dentro de la frontera.

Sistema 3 — Habitación + calefactor. El mecanismo de producción y transferencia de energía puede representarse con mayor detalle. Una variable que en un modelo era externa puede convertirse en variable interna al ampliar el sistema. La frontera reorganiza la descripción.

Ejemplo desarrollado 8 — ¿Parámetro u observable? Supongamos un bloque cuya masa m ha sido medida antes de comenzar un experimento.

Durante una serie de movimientos tratamos

$$m = 0.50\,\mathrm{kg}$$

como valor fijo.

En el modelo dinámico:

$$m \quad \text{es parámetro.}$$

Pero para obtener ese valor realizamos previamente una medición.

En el experimento de calibración:

$$m \quad \text{fue una cantidad inferida observacionalmente.}$$

No hay contradicción.

Debemos distinguir:

- **estatus epistemológico:** ¿cómo conocemos el valor?;
- **rol matemático dentro del modelo:** ¿se actualiza con el estado o se mantiene fijo?;
- **rol experimental:** ¿es control, entrada o resultado?

Esta triple distinción será útil en todo el libro.

Una ficha mínima de sistema. Desde ahora podremos construir una ficha preliminar:

Ficha FPM de sistema — versión 1 - **Pregunta:** ¿qué queremos explicar, calcular o comparar? - **Sistema:** ¿qué queda dentro? - **Entorno:** ¿qué queda fuera y puede influir? - **Estado:** ¿qué información considera suficiente el modelo? - **Variables de estado:** ¿qué cantidades distinguen estados? - **Parámetros:** ¿qué cantidades se mantienen fijas dentro de una realización? - **Observables:** ¿qué propiedades se conectan con procedimientos de medida? - **Controles experimentales:** ¿qué fijamos deliberadamente? - **Omisiones:** ¿qué estructura real no estamos representando?

En capítulos posteriores añadiremos:

- unidades;
- escalas;
- incertidumbres;
- condiciones iniciales y de frontera;
- leyes;
- simetrías;
- aproximaciones;
- dominios de validez.

Ejercicios de §3. Ejercicio 1.11 — Tres fronteras para un péndulo.

Construye tres elecciones distintas de sistema para estudiar un péndulo:

1. una en la que el sistema sea mínimo;
2. una en la que el hilo forme parte explícita del sistema;
3. una en la que también la Tierra quede dentro de la frontera.

Para cada elección, indica qué elementos pasan al entorno y qué preguntas podrían justificar esa frontera.

Solución.

Modelo A: esfera únicamente.

Entorno: hilo, soporte, aire, Tierra.

Puede ser adecuado para una primera descripción de la posición de la esfera cuando los efectos del hilo y de la Tierra se representan de manera externa.

Modelo B: esfera + hilo.

Entorno: soporte, aire, Tierra.

Puede ser necesario si nos interesa la masa, elasticidad o vibración del hilo.

Modelo C: esfera + hilo + Tierra.

Entorno: aire, soporte y resto del universo, según el problema.

Puede ser útil si queremos tratar la interacción esfera–Tierra como interna al sistema, por ejemplo en una contabilidad global de intercambios.

No hay una frontera universalmente correcta. La justificación depende de la pregunta. **Ejercicio 1.12 — Cinco Tierras.**

Elige entre los modelos **plano local**, **esfera**, **geoide/elipsoide**, **cuerpo extenso en rotación** y **masa puntual** para las siguientes preguntas:

a) posiciones dentro de una cancha;

b) navegación intercontinental;

c) geodesia de alta precisión;

d) efectos asociados a la rotación terrestre;

e) primera aproximación a la interacción gravitatoria con un objeto muy lejano.

Justifica cada elección.

Solución.

a) **Plano local.** La curvatura es irrelevante para la precisión ordinaria de una cancha.
b) **Esfera.** La curvatura global afecta distancias y rutas.
c) **Geoide/elipsoide.** La forma real necesita mayor precisión que una esfera.
d) **Cuerpo extenso en rotación.** Debemos conservar orientación y rotación.
e) **Masa puntual**, bajo un régimen en el que la estructura interna y el tamaño sean despreciables para la pregunta.

La solución muestra que el mismo objeto físico puede exigir distintos espacios de estados y parámetros según el modelo. **Ejercicio 1.13 — Estado, parámetro u observable.**

En cada caso clasifica la cantidad por su **rol principal dentro del modelo indicado**.

1. La longitud fija ℓ de un péndulo ideal durante una serie de oscilaciones.
2. La posición instantánea de la esfera.
3. La lectura temporal obtenida por un sensor.
4. La longitud de un hilo elástico cuando precisamente estudiamos su estiramiento.
5. La masa de una esfera medida antes del experimento y tratada después como fija.

Solución.

1. **Parámetro.** Se fija para esa realización.
2. **Variable de estado.** Ayuda a distinguir estados.
3. **Dato asociado a un observable.** Es un resultado del procedimiento de medición.
4. **Variable de estado** en ese modelo, porque cambia durante el proceso estudiado.
5. **Parámetro** dentro del modelo dinámico, aunque su valor haya sido obtenido mediante una observación previa.

La pregunta se refiere al rol en el modelo, no a una naturaleza absoluta de la magnitud. **Ejercicio 1.14 — Una observación no determina el estado.**

Sea un modelo con estados

$$s = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$$

y un observable

$$O(s) = q_1 + q_2.$$

a) Encuentra dos estados distintos con el mismo valor $O = 5$.
b) Explica qué demuestra este ejemplo acerca de la reconstrucción de un estado a partir de una sola observación.

Solución.

a) Por ejemplo,

$$s_1 = (2, 3), \qquad s_2 = (1, 4).$$

Son estados distintos porque

$$s_1 \neq s_2,$$

pero

$$O(s_1) = 2 + 3 = 5,$$

y

$$O(s_2) = 1 + 4 = 5.$$

b) La aplicación O no es inyectiva. Por tanto, conocer un único valor observable no permite distinguir todos los estados del modelo.

Físicamente:

$$\boxed{\text{mismo dato observable} \nRightarrow \text{mismo estado}}$$

a menos que tengamos información adicional que garantice una correspondencia unívoca.

Síntesis. La frontera de un sistema, su estado y sus observables no vienen determinados por el objeto material considerado aisladamente. Dependen de la pregunta y del modelo. Hemos construido ahora la cadena

$$\boxed{\text{pregunta} \to \text{sistema/entorno} \to \text{estado} \to \text{variables y parámetros} \to \text{observables} \to \text{datos}}.$$

También hemos aprendido cuatro distinciones que reaparecerán continuamente:

$$\boxed{\text{sistema} \neq \text{entorno}}$$

$$\boxed{\text{estado} \neq \text{observación individual}}$$

$$\boxed{\text{variable de estado} \neq \text{parámetro}}$$

y

$$\boxed{\text{observable} \neq \text{dato.}}$$

La siguiente pregunta es inevitable.

Para obtener un modelo manejable hemos omitido estructura real, sustituido objetos por representaciones simplificadas y, en ocasiones, reemplazaremos relaciones exactas por otras más simples. Pero esas operaciones no son todas iguales.

La sección siguiente distinguirá cuidadosamente:

$$\boxed{\text{abstracción} \neq \text{idealización} \neq \text{aproximación.}}$$

4. Idealización, abstracción y aproximación

Tres operaciones que no debemos confundir. En las secciones anteriores hemos construido modelos seleccionando sistemas, variables, parámetros y observables. Para hacerlo hemos simplificado. Pero **simplificar** no nombra una sola operación.

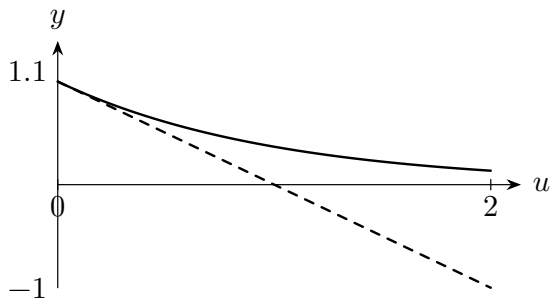


Figura 1.3. Las expresiones normalizadas e^{-u} y $1-u$ comparten valor y derivada en $u=0$. La segunda sirve localmente y se vuelve negativa para $u>1$; esa extrapolación puede contrariar el significado físico de una cantidad positiva. Véase §4.

Cuando decimos que una esfera se representa mediante un punto, que ignoramos el color de una pelota o que reemplazamos una expresión por otra numéricamente cercana, estamos haciendo cosas conceptualmente distintas.

En este libro distinguiremos tres operaciones:

$$\boxed{\text{abstracción} \neq \text{idealización} \neq \text{aproximación.}}$$

La separación será importante porque cada una exige una pregunta de control diferente.

- Ante una **abstracción** preguntaremos:
  ¿qué estructura conservamos y qué particularidades dejamos fuera?
- Ante una **idealización** preguntaremos:
  ¿qué propiedad imposible o límite estamos suponiendo exactamente?
- Ante una **aproximación** preguntaremos:
  ¿qué diferencia estamos despreciando, comparada con qué, y en qué régimen?

  Estas tres preguntas reaparecerán durante los cuatro tomos.

Abstracción: conservar estructura y olvidar particulares. Consideremos tres objetos:

- una esfera metálica;
- una pelota de goma;
- una piedra redondeada.

Para una pregunta acerca de su color, debemos distinguirlos. Para una pregunta acerca de su volumen, quizá debamos conservar forma y tamaño. Para una primera pregunta sobre la trayectoria de sus centros, podríamos representar los tres mediante posiciones en el espacio y olvidar temporalmente color, textura y composición.

Definición operativa 1.13 — Abstracción Una **abstracción** es la operación mediante la cual seleccionamos ciertas relaciones, propiedades o estructuras como relevantes para una pregunta y dejamos de representar explícitamente otras particularidades del sistema.

Abstraer no significa afirmar que las propiedades omitidas sean nulas. Si en un problema representamos una pelota únicamente por su posición, no estamos afirmando que no tenga color o temperatura. Estamos diciendo que esas propiedades **no forman parte de la descripción actual**.

En forma esquemática:

$$\text{sistema concreto} \longrightarrow \text{estructura seleccionada}.$$

La flecha pierde información deliberadamente.

Abstracción no significa falsificación. Un mapa vial omite la composición química del asfalto. Esa omisión no convierte al mapa en falso. Una lista de temperaturas de una ciudad omite la forma de cada edificio. Tampoco por ello es falsa.

El criterio es funcional:

> ¿la estructura conservada es la que necesitamos para responder la pregunta?

Podemos llamar a esta idea **pérdida controlada de información**.

No toda pérdida es aceptable. Si queremos estudiar cómo gira un cuerpo rígido, abstraer toda información acerca de su orientación destruiría precisamente la estructura que necesitamos.

Principio 1.7 — Una abstracción es adecuada si conserva las distinciones relevantes para la pregunta Omitir información es legítimo solo en la medida en que las distinciones eliminadas no sean necesarias para las predicciones, comparaciones o explicaciones que el modelo pretende realizar.

Idealización: introducir un objeto que no existe exactamente. La idealización hace algo más fuerte.

Pensemos en una **partícula puntual**. Un cuerpo material ocupa una región del espacio. Una partícula puntual, en cambio, se representa como si toda la estructura espacial relevante estuviera concentrada en un punto.

No hemos simplemente dejado de hablar del radio.

Hemos reemplazado el cuerpo por un objeto con una propiedad exacta que ningún cuerpo macroscópico posee literalmente: extensión espacial nula.

Definición operativa 1.14 — Idealización Una **idealización** sustituye un sistema o una de sus propiedades por un objeto, condición o comportamiento simplificado que se trata como exacto dentro del modelo, aunque no se realice exactamente en el sistema físico.

Ejemplos típicos:

- partícula puntual;
- hilo sin masa;
- cuerpo perfectamente rígido;
- superficie sin rozamiento;
- gas ideal;

- lente infinitamente delgada;
- campo exactamente uniforme;
- recipiente perfectamente aislado.

La marca conceptual es:

«exacto en el modelo» no significa «exacto en el mundo».

Una idealización puede ser excelente sin ser literalmente realizable. Supongamos que modelamos una esfera pequeña como partícula puntual. Si la pregunta concierne a una trayectoria cuya escala espacial es enorme comparada con el tamaño de la esfera, la estructura interna puede tener un efecto despreciable sobre la cantidad que queremos calcular.

Entonces la idealización puede ser extraordinariamente útil.

Pero si preguntamos por:

- su rotación;
- su deformación;
- el momento en que una parte de su superficie toca otra superficie;
- su resistencia aerodinámica;

la extensión espacial deja de ser irrelevante. La misma idealización puede pasar de buena a mala sin que el objeto físico haya cambiado. Ha cambiado la **pregunta**.

Idealización y abstracción: diferencia mediante un mismo cuerpo. Tomemos una pelota real.

Abstracción. Decidimos no registrar su color. La pelota del modelo todavía puede conservar tamaño, masa y forma.

No hemos afirmado:

$$\text{color} = 0.$$

Simplemente no hay una variable «color» en nuestra descripción.

Idealización. Representamos la pelota como un punto.

Ahora introducimos una condición exacta del modelo:

$$\text{extensión espacial} = 0.$$

Esta condición no describe literalmente la pelota.

Por tanto:

abstracción = no representar cierta información

mientras que

idealización = representar mediante una condición simplificada tratada como exacta.

La frontera entre ambas puede depender del formalismo, pero la distinción es metodológicamente útil.

Aproximación: reemplazar por algo cercano. Pasemos ahora a una operación diferente. Supongamos que una relación exacta dentro de un modelo es

$$Q = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Podemos decidir usar

$$Q \approx 1 - 2\varepsilon$$

cuando ε es suficientemente pequeño para la precisión que buscamos.

Aquí no hemos cambiado necesariamente el objeto físico ni la frontera del sistema.

Hemos reemplazado una expresión por otra que esperamos que sea **cercana** en cierto régimen.

Definición operativa 1.15 — Aproximación Una **aproximación** reemplaza una cantidad, relación o modelo por otro más simple cuya diferencia respecto del original se considera suficientemente pequeña para una pregunta y un régimen especificados.

La palabra decisiva es **diferencia**. Una aproximación exige, al menos conceptualmente, alguna manera de comparar.

Primera aproximación controlada sin cálculo. Consideremos la identidad exacta

$$(1 - \varepsilon)^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Supongamos que usamos

$$(1 - \varepsilon)^2 \approx 1 - 2\varepsilon.$$

¿Qué hemos hecho?

El término omitido es exactamente

$$\varepsilon^2.$$

Por tanto, el error algebraico introducido por esta sustitución es

$$E = \varepsilon^2.$$

Si queremos comparar el término omitido con el término lineal ε, para $\varepsilon \neq 0$,

$$\frac{|\varepsilon^2|}{|\varepsilon|} = |\varepsilon|.$$

Así, si

$$|\varepsilon| = 0.01,$$

entonces

$$\frac{|\varepsilon^2|}{|\varepsilon|} = 0.01.$$

El término cuadrático posee solo una centésima parte del tamaño de un término proporcional a ε.

No necesitamos todavía series de Taylor para comprender la idea.

Principio 1.8 — Una aproximación debe hacer visible qué se omite Siempre que sea posible, registraremos la cantidad o término despreciado y explicaremos por qué es pequeño respecto de la escala relevante.

«Pequeño» no es una propiedad absoluta. Supongamos que alguien afirma:

«Un centímetro es pequeño.»

La frase está incompleta. Un centímetro es pequeño comparado con el radio de la Tierra.

Puede ser enorme comparado con el grosor de una célula.

Puede ser decisivo en el ajuste de una pieza mecánica. Por eso, la palabra **pequeño** necesita una comparación.

Sin desarrollar todavía análisis dimensional, podemos formular la regla conceptual:

$$\boxed{\text{pequeño} = \text{pequeño respecto de una escala relevante.}}$$

Del mismo modo, decir que «el aire tiene poco efecto» exige preguntar:

¿poco efecto sobre qué magnitud, durante qué intervalo y con qué precisión?

Aproximación no significa simplemente redondeo. Si

$$\pi \approx 3.14,$$

hemos realizado una aproximación numérica.

Pero en física las aproximaciones importantes suelen ser estructurales.

Podemos:

- despreciar un término;
- reemplazar una geometría por otra;
- usar una ley límite;
- linealizar una relación;
- separar escalas;
- reemplazar una interacción compleja por una efectiva.

Algunas de estas operaciones se combinan con idealizaciones. Por eso debemos registrar el nivel exacto en que ocurre la simplificación.

El péndulo: una escalera de operaciones distintas. Volvamos a nuestro caso conductor.

Paso 1 — No registrar el color del cuerpo. **Tipo:** abstracción.

El color queda fuera de las variables del modelo.

Paso 2 — Representar el cuerpo como masa puntual. **Tipo:** idealización.

La extensión espacial se hace exactamente nula dentro del modelo.

Paso 3 — Representar el hilo como inextensible y sin masa. **Tipo:** idealización.

No estamos diciendo que el hilo real tenga literalmente esas propiedades.

Paso 4 — Ignorar la resistencia del aire. Puede formularse de dos maneras distintas:

- como **idealización**, si el modelo declara exactamente nula la disipación;
- como **aproximación**, si partimos de un modelo con disipación y mostramos que su contribución es pequeña en cierto régimen.

La misma frase coloquial —«despreciamos el aire»— puede esconder operaciones conceptuales diferentes.

Paso 5 — Reemplazar una relación angular por una relación más simple para ángulos pequeños. **Tipo:** aproximación.

No la utilizaremos todavía. La estudiaremos de manera controlada en el capítulo 6. Esta escalera muestra por qué no basta escribir «hacemos las aproximaciones usuales».

La etiqueta `[MOD]` y la etiqueta `[APPROX]`. El protocolo global de este libro distingue:

[MOD]

para una hipótesis de modelización o idealización, y

[APPROX]

para una aproximación.

Ejemplo:

[MOD] El hilo se considera inextensible.

Esto define una propiedad exacta **del modelo**.

En cambio:

[APPROX] $1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 - 2\varepsilon$ si $|\varepsilon|$ es suficientemente pequeño para la precisión requerida.

Aquí existe una diferencia explícita entre dos expresiones.

Una aproximación debe tener régimen. La expresión

$$1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 - 2\varepsilon$$

no es una identidad.

Para

$$\varepsilon = 0.01$$

el término omitido es

$$10^{-4}.$$

Para

$$\varepsilon = 1$$

el término omitido es

$$1.$$

La misma sustitución puede ser excelente en un caso y desastrosa en otro.

Por eso toda aproximación física seria viene acompañada, explícita o implícitamente, por un **régimen de validez**.

Definición operativa 1.16 — Régimen de validez de una aproximación El **régimen de validez** de una aproximación es el conjunto de condiciones bajo las cuales el error o los efectos omitidos permanecen suficientemente pequeños para el propósito declarado.

Todavía no sabemos formular regímenes de manera sistemática.

Eso será tarea del capítulo 6.

«Suficientemente pequeño» depende de la pregunta. Imaginemos dos usos de una misma predicción.

Uso A — Demostración de aula. Queremos distinguir si un tiempo es aproximadamente de uno o de diez segundos. Un error de unas pocas centésimas puede ser irrelevante.

Uso B — Instrumento de precisión. Queremos detectar una variación relativa de una parte en cien mil. El mismo error puede arruinar completamente el experimento.

Por tanto:

$$\boxed{\text{validez práctica} = \text{error} + \text{precisión requerida} + \text{pregunta}.}$$

No existe una tolerancia universal para todas las aplicaciones.

El peligro contrario: aproximar demasiado pronto. Las aproximaciones son útiles, pero pueden destruir precisamente el fenómeno que queremos estudiar.

Supongamos que dos términos pequeños casi se cancelan y el resultado observable depende de su diferencia. Si eliminamos uno de ellos por considerarlo «pequeño» de manera aislada, podemos cambiar por completo la respuesta. O supongamos que una cantidad pequeña actúa durante muchísimo tiempo y su efecto acumulado se vuelve importante.

Por tanto:

$$\boxed{\text{término pequeño} \not\Rightarrow \text{efecto siempre despreciable}.}$$

Necesitamos conocer cómo entra ese término en la estructura completa del problema.

Ejemplo: la rotación terrestre en un péndulo. Durante unas pocas oscilaciones ordinarias, ciertos efectos asociados con la rotación terrestre pueden resultar irrelevantes para una pregunta elemental sobre el período. Pero si preguntamos por una modificación lenta del plano de oscilación durante muchas horas, precisamente esos efectos pueden convertirse en el fenómeno central.

Lo que parecía una corrección pequeña deja de ser despreciable porque:

1. cambia la pregunta;
2. cambia la escala temporal;
3. cambia la precisión buscada.

Esta observación preparará nuestros estudios de sistemas no inerciales mucho más adelante.

Modelo mínimo suficiente. Podemos formular una regla de trabajo:

Principio 1.9 — Modelo mínimo suficiente Entre modelos que responden adecuadamente una pregunta con la precisión exigida, preferiremos inicialmente aquel que haga explícita la menor cantidad de estructura necesaria para comprender qué produce el resultado.

No es una ley universal de la ciencia. Es una estrategia pedagógica y metodológica. Un modelo más rico se justifica cuando el modelo mínimo deja de responder la pregunta o cuando buscamos fenómenos nuevos.

Ejemplo desarrollado 9 — Clasificar una simplificación. Consideremos cuatro frases.

A. «No registraremos el color del proyectil.»

Clasificación: abstracción.

No se introduce la afirmación «el proyectil carece de color». El color queda fuera del lenguaje del modelo.

B. «El proyectil se tratará como una partícula puntual.»

Clasificación: idealización.

Se sustituye el cuerpo extendido por un objeto de extensión nula.

C. «La resistencia del aire se toma exactamente igual a cero.»

Clasificación: idealización de modelo.

D. «La resistencia del aire produce una corrección menor que la precisión que buscamos y por eso omitiremos su contribución.»

Clasificación: aproximación, siempre que exista una comparación que justifique la afirmación.

Las frases C y D pueden conducir a ecuaciones semejantes, pero su **estatus epistemológico** es diferente.

Ejemplo desarrollado 10 — El término cuadrático. Sea

$$Q(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Queremos sustituirlo por

$$Q_1(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon.$$

Paso 1 — Diferencia exacta.

$$Q(\varepsilon) - Q_1(\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

Paso 2 — Comparación con el término lineal. Para $\varepsilon \neq 0$,

$$\frac{|\varepsilon^2|}{|2\varepsilon|} = \frac{|\varepsilon|}{2}.$$

Paso 3 — Casos. Si

$$|\varepsilon| = 10^{-2},$$

entonces

$$\frac{|\varepsilon^2|}{|2\varepsilon|} = 5 \times 10^{-3}.$$

Si

$$|\varepsilon| = 1,$$

entonces

$$\frac{|\varepsilon^2|}{|2\varepsilon|} = \frac{1}{2}.$$

La omisión que era pequeña en el primer caso ya no lo es en el segundo.

Conclusión. No existe «la aproximación» sin su régimen.

Ejercicios de §4. Ejercicio 1.15 — Idealización no es aproximación.

Clasifica cada operación como **abstracción**, **idealización** o **aproximación** y justifica.

a) No incluir el color de una esfera entre las variables del modelo.

b) Tratar la esfera como partícula puntual.

c) Reemplazar $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$ por $1 + \varepsilon$ para $|\varepsilon|$ pequeño.

d) Tratar una barra como perfectamente rígida.

e) No distinguir químicamente dos cuerpos porque la pregunta solo utiliza su masa y posición.

Solución.

a) **Abstracción.** El color queda fuera de la descripción; no se afirma que sea cero o inexistente.
b) **Idealización.** Un cuerpo extendido se sustituye por un punto.
c) **Aproximación.** Se reemplaza una expresión por otra cercana bajo una condición de pequeñez.
d) **Idealización.** La rigidez perfecta se trata como exacta en el modelo aunque ningún material real la posea exactamente.
e) **Abstracción.** Se conserva solo la estructura relevante para la pregunta y se omite la composición química.

La clave es preguntar qué operación se realiza sobre la representación. **Ejercicio 1.16 — Escalera del péndulo.**

Ordena conceptualmente los siguientes pasos y clasifica cada uno:

1. cuerpo real + hilo real + aire + Tierra;
2. no registrar el color de la esfera;
3. representar la esfera como masa puntual;
4. tratar el hilo como inextensible y sin masa;
5. tomar la disipación exactamente nula;
6. más adelante, reemplazar una relación exacta por otra válida para pequeñas oscilaciones.

Explica qué información o efecto se pierde en cada paso.

Solución.

Un orden razonable es:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6.$$

1 → 2: abstracción. Se elimina de la descripción una propiedad que no se considera relevante.

2 → 3: idealización. Se pierde tamaño, forma y estructura interna.

3 → 4: idealización. Se eliminan masa y extensibilidad del hilo.

4 → 5: idealización. El modelo declara exactamente ausente la disipación.

5 → 6: aproximación. Una relación del modelo se reemplaza por otra más simple dentro de un régimen que deberá justificarse.

El ejercicio muestra que varias simplificaciones pueden acumularse y que cada una tiene una justificación diferente. **Ejercicio 1.17 — Más complicado no es siempre mejor.**

Un equipo quiere estimar el tiempo aproximado que tarda una pelota en caer desde una altura moderada. El **Modelo A** utiliza pocas propiedades macroscópicas. El **Modelo B** añade cuarenta parámetros: composición microscópica, distribución térmica interna, rugosidad detallada, pequeñas vibraciones y muchas propiedades adicionales que el equipo no puede medir con precisión.

Explica por qué no se sigue que B sea mejor que A. Indica qué evidencia justificaría pasar de A a B o a un modelo intermedio.

Solución.

El número de detalles no establece por sí solo la calidad del modelo.

B puede resultar peor porque:

- contiene parámetros desconocidos;
- aumenta la incertidumbre de las entradas;
- dificulta identificar qué mecanismo controla el resultado;
- puede no mejorar la predicción a la escala requerida;
- puede ser imposible de contrastar con los datos disponibles.

A puede ser preferible si responde la pregunta dentro de la precisión necesaria.

Pasar a un modelo más rico se justificaría si observamos, por ejemplo:
1. discrepancias sistemáticas mayores que la precisión requerida;
2. dependencia del resultado respecto de una propiedad omitida;
3. un nuevo experimento que necesite explicar estructura que A no representa;
4. necesidad de mayor precisión.

El criterio es **suficiencia para la pregunta**, no cantidad de detalles.

Síntesis. Ahora podemos distinguir tres maneras de simplificar.

abstracción = seleccionar estructura y omitir particulares

idealización = tratar como exacta una condición simplificada del modelo

aproximación = reemplazar por algo cercano en un régimen controlado

Y podemos asociar una pregunta de auditoría a cada una:

operación	pregunta
abstracción	¿qué información se omite?
idealización	¿qué se declara exacto solo en el modelo?
aproximación	¿qué error se acepta y en qué régimen?

La siguiente sección dará un paso más.

Hasta ahora hemos hablado de sistemas, estados, variables y simplificaciones.

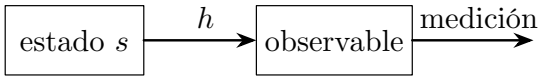
Debemos reunir todo eso en una plantilla matemática suficientemente precisa para leer un modelo sin confundir el formalismo con su interpretación.

Entraremos entonces en el §5.

5. De la representación física al objeto matemático

El símbolo no trae consigo su significado físico. Supongamos que encontramos escrita la ecuación $x^2 + y^2 = L^2$.

Como objeto matemático, podemos estudiarla sin saber nada de física. Podemos preguntar por sus soluciones, despejar una variable o reconocer una estructura geométrica. Pero ninguna de esas operaciones nos dice por sí sola qué representan x, y y L.



$$s \mapsto h(s)$$

Figura 1.4. La aplicación de observación vincula el estado matemático con una cantidad medible. Un mismo observable puede tomar igual valor en estados distintos. Véase §5.

La misma ecuación podría aparecer para describir una restricción geométrica, una trayectoria idealizada, dos componentes de una cantidad, una relación entre magnitudes reescaladas o un problema puramente matemático sin interpretación física. La sintaxis no determina la semántica.

expresión matemática + interpretación física = enunciado físico modelado

Este es el punto de partida de la sección. Un matemático puede manipular correctamente una expresión y, sin embargo, no saber todavía qué pregunta física está respondiendo.

Dos tareas diferentes. Cuando construimos un modelo físico realizamos al menos dos tareas.

Tarea matemática. Elegimos objetos como conjuntos, números, funciones, relaciones, espacios, ecuaciones y parámetros.

Tarea física. Decidimos qué sistema representa cada objeto, qué magnitud corresponde a cada símbolo, qué procedimientos conectan ciertos símbolos con observaciones, qué hipótesis permiten usar esas relaciones y en qué régimen esperamos que el modelo sea adecuado. Estas tareas se necesitan mutuamente, pero no son idénticas.

La matemática organiza la estructura. La física asigna significado y la conecta con el mundo.

Principio 1.10 — Ningún símbolo físico se interpreta a sí mismo El significado físico de un objeto matemático debe declararse mediante el modelo, una definición, una regla de observación o una convención explícita; no puede deducirse únicamente de la forma del símbolo o de la ecuación en la que aparece.

El diccionario de interpretación. Usaremos la expresión **diccionario de interpretación** para referirnos al conjunto de correspondencias que explican cómo leer físicamente el formalismo.

Por ejemplo, un modelo podría declarar:

$$x \longleftrightarrow \text{posición de una marca del sistema respecto de un origen especificado.}$$

Esto todavía no dice cómo se mide x.

Una regla adicional podría especificar:

$$[\text{OBS}] \qquad x \longleftrightarrow \text{valor obtenido al convertir una coordenada de imagen mediante una calibración}.$$

La primera correspondencia otorga significado físico al símbolo. La segunda lo conecta con un procedimiento de observación.

Definición operativa 1.17 — Diccionario de interpretación El **diccionario de interpretación** de un modelo es el conjunto de correspondencias, convenciones y reglas que asignan significado físico a sus objetos matemáticos y, cuando corresponde, los conectan con procedimientos de observación.

No debemos imaginar necesariamente este diccionario como una única función matemática bien definida. Es una estructura semántica que puede incluir definiciones, convenciones, calibraciones, identificaciones, reglas experimentales y elecciones de sistema de referencia.

Representar no significa copiar. Una representación matemática no es una réplica del sistema físico. El número

$$2.3$$

no posee masa, temperatura ni ubicación espacial. Una función no «es» una cuerda. Un punto no «es» una partícula material. Lo que hacemos es establecer una correspondencia útil entre aspectos del sistema y estructuras matemáticas.

Por eso conviene evitar frases como:

> «La partícula es el punto P.»

Es más preciso decir:

> «En este modelo, la posición de la partícula se representa mediante el punto P.»

La diferencia verbal protege una diferencia conceptual:

$$\boxed{\text{objeto físico} \neq \text{objeto matemático que lo representa.}}$$

Una representación puede perder información. En §4 vimos que toda abstracción puede omitir estructura. La representación matemática hereda esa selección. Si modelamos un cuerpo por un punto,

$$\text{cuerpo extendido} \longrightarrow P,$$

ya no podemos recuperar del punto la forma del cuerpo, su orientación, su distribución interna, su color o su textura. La representación es deliberadamente no invertible. Esto no es un defecto accidental. Es parte del propósito del modelo.

Una representación útil puede olvidar precisamente aquello que no necesitamos.

Una representación puede introducir estructura adicional. También puede ocurrir lo contrario. Al elegir coordenadas, bases, parámetros o variables auxiliares podemos introducir estructura matemática que no corresponde directamente a una propiedad física independiente. Por ejemplo, dos descripciones matemáticas distintas pueden representar la misma situación física.

Más adelante veremos esto con gran profundidad: distintos sistemas de coordenadas, distintas bases, transformaciones de referencia y, mucho más adelante, representaciones matemáticas diferentes que conservan los mismos observables físicos.

Por ahora fijamos una advertencia:

$$\boxed{\text{diferencia entre descripciones matemáticas} \not\Rightarrow \text{diferencia física.}}$$

La cuestión «¿qué parte del formalismo representa algo físicamente distinguible?» será recurrente.

Una plantilla mínima de lectura. Necesitamos ahora una manera compacta de preguntar qué contiene un modelo.

Introduciremos la notación

$$\boxed{\mathcal{M} = (\mathcal{S},\, X,\, \theta,\, \mathcal{L},\, I,\, B,\, \mathcal{R})}$$

como **plantilla provisional de lectura**.

No es una definición axiomática universal de «modelo físico».

No afirmamos que toda teoría física pueda o deba reducirse literalmente a una séptupla de esta forma. La notación funciona como una lista de control. Nos obliga a preguntar si hemos especificado los componentes necesarios para comprender un problema.

$\mathcal{S}$: estados admitidos. Ya introdujimos el espacio de estados en §3.

Aquí lo situamos dentro de la plantilla:

$$\mathcal{S} = \{\text{estados admitidos por el modelo}\}.$$

El adjetivo **admitidos** importa. Un modelo no tiene por qué permitir toda asignación imaginable de números a sus variables. Puede haber restricciones.

Si dos variables x e y deben satisfacer

$$x^2 + y^2 = L^2,$$

entonces el estado

$$(x, y) = (0, 0)$$

no es admisible cuando $L \neq 0$. Por tanto, especificar variables no basta. Debemos especificar qué combinaciones representan estados físicamente permitidos **dentro del modelo**.

X: variables y observables modelados. Usaremos X como símbolo colectivo para la familia de cantidades que el modelo emplea para describir o interrogar el sistema. Puede incluir variables de estado, observables, variables de control y cantidades derivadas. No exigiremos que todos estos objetos tengan la misma estructura matemática.

En un modelo elemental, un observable puede ser una función

$$O : \mathcal{S} \to V.$$

En teorías posteriores esta representación tendrá que modificarse. Por eso X no es una «lista universal de coordenadas». Es un contenedor conceptual para las cantidades relevantes del modelo.

θ: parámetros. Escribiremos esquemáticamente

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$$

para reunir parámetros. Por ejemplo, distintos miembros de una familia de modelos pueden diferir en una longitud, una masa, una constante de acoplamiento o una propiedad material. La plantilla distingue

$$s \in \mathcal{S}$$

como estado de una realización, de

$$\theta$$

como parámetros que caracterizan la familia o que se consideran fijos durante el problema. Pero recordemos §3: la misma magnitud puede cambiar de papel en otro modelo.

$\mathcal{L}$: leyes y relaciones del modelo. El símbolo

$$\mathcal{L}$$

reunirá las relaciones que el modelo utiliza para vincular estados, variables y parámetros.

Todavía no definiremos formalmente qué diferencia una **ley**, un **principio**, un **postulado** o una **ecuación constitutiva**. Eso corresponde a §§6–7.

Por ahora basta advertir que $\mathcal{L}$ puede contener relaciones de estatus muy distinto. Una relación puede ser empírica, postulada, definitoria o derivada matemáticamente de otras. Por eso nunca debemos leer

$$\mathcal{L} = \{\text{ecuaciones}\}$$

como si todas las ecuaciones tuvieran el mismo origen epistemológico. La sección siguiente desarrollará precisamente este problema.

I: condiciones iniciales. Muchos modelos dinámicos necesitan especificar una condición del sistema en un instante elegido como inicial. Representaremos ese bloque mediante

$$I.$$

La etiqueta canónica será [IC]. Pero no toda condición inicial es una ley. Si escribimos

$$x(0) = a,$$

la forma algebraica no nos dice si se trata de un dato experimental, una elección de ejemplo, una condición impuesta o una consecuencia de otra relación. La expresión se vuelve condición inicial por el papel que cumple en el problema. No desarrollaremos todavía teoría de problemas de valor inicial. Solo fijamos el casillero conceptual.

B: condiciones de frontera. En problemas extendidos espacialmente puede ser necesario especificar qué ocurre en una frontera.

Representaremos esas condiciones por

$$B.$$

La etiqueta canónica será [BC].

Ejemplos conceptuales posteriores incluirán preguntas como: ¿los extremos están fijos?, ¿qué valor se prescribe en la superficie?, ¿puede atravesar algo la frontera?, ¿qué ocurre en la interfaz entre dos medios?

No necesitamos todavía resolver ninguna ecuación con estas condiciones. El punto es comprender que

$$\boxed{\text{ley} + \text{condiciones}}$$

suele contener más información que la ley aislada.

$\mathcal{R}$: régimen de validez. El componente

$$\mathcal{R}$$

recoge las condiciones bajo las cuales esperamos que el modelo represente adecuadamente el fenómeno para la pregunta planteada. Puede incluir restricciones sobre escalas, velocidades, amplitudes, intensidades, tiempos, precisión o propiedades del medio. En §4 introdujimos el concepto cualitativamente. En el capítulo 6 aprenderemos a formular muchos regímenes cuantitativamente.

Por ahora queremos que ningún modelo aparezca como si afirmara:

«Esta descripción vale para todo sistema, en toda escala y con precisión ilimitada.»

La tupla no contiene todavía toda la semántica. La plantilla

$$\mathcal{M} = (\mathcal{S}, X, \theta, \mathcal{L}, I, B, \mathcal{R})$$

es útil, pero sería un error pensar que ya hemos capturado toda la física.

Falta algo esencial:

$$\boxed{\text{¿qué significa cada componente?}}$$

Por eso la tupla debe viajar acompañada de un diccionario de interpretación

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}.$$

Usaremos esta notación de manera informal:

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}} = \{\text{significados físicos y reglas de conexión asociados a } \mathcal{M}\}.$$

Así, la unidad mínima de lectura será más bien

$$\boxed{(\mathcal{M}, \mathfrak{I}_{\mathcal{M}})}$$

y no la tupla matemática desnuda.

Esto incorpora una consecuencia de §2: una teoría física necesita conexiones con observaciones, no solo ecuaciones.

Un modelo puede estar incompleto. También debemos distinguir

componente innecesario

de

componente necesario pero todavía no especificado.

Supongamos que queremos predecir la evolución de un sistema y conocemos su espacio de estados y parámetros, pero no hemos declarado ninguna ley dinámica. Entonces el modelo está incompleto para esa pregunta. De manera semejante, una ecuación dinámica puede estar especificada pero las condiciones iniciales necesarias pueden faltar.

Principio 1.11 — La suficiencia de un modelo depende de la tarea Un conjunto de objetos matemáticos constituye una descripción suficiente solo si contiene la información necesaria para responder la pregunta física planteada; que una fórmula sea correcta no implica que el problema esté completamente especificado.

Ejemplo desarrollado 11 — Un sistema físico de dos estados. Construyamos un modelo deliberadamente sencillo.

Tenemos un dispositivo idealizado que puede estar en dos configuraciones distinguibles:

$$\text{cerrado}, \qquad \text{abierto}.$$

Representamos los estados mediante $\mathcal{S} = \{0, 1\}$,
con el diccionario

$$0 \longleftrightarrow \text{cerrado}, \qquad 1 \longleftrightarrow \text{abierto}.$$

Definimos un observable

$$O : \mathcal{S} \to \{0, 1\}, \qquad O(s) = s.$$

La fórmula es trivial. La física no está en la dificultad algebraica. Está en declarar qué diferencia física corresponde a 0 y 1, cómo determinamos experimentalmente si el dispositivo está abierto o cerrado, qué estados intermedios hemos excluido por idealización y para qué pregunta esa idealización es adecuada.

La estructura

$$\{0, 1\}$$

puede modelar innumerables sistemas distintos. El conjunto por sí solo no especifica cuál.

Ejemplo desarrollado 12 — Esqueleto del modelo del péndulo. Volvamos al péndulo, pero sin escribir todavía su ecuación de movimiento.

Podemos preparar una ficha.

Sistema físico. Una pequeña esfera suspendida mediante un hilo.

$\mathcal{S}$. Estados admitidos por la idealización elegida.

No los parametrizaremos técnicamente todavía.

X. Cantidades que deseamos representar, por ejemplo la posición angular, información sobre el movimiento y el tiempo de oscilación como observable derivado. Las definiciones precisas se darán en capítulos posteriores.

θ. Parámetros como la longitud del hilo y otras propiedades que el modelo trate como fijas.

$\mathcal{L}$. Todavía no especificado. La ley dinámica aparecerá después de desarrollar la mecánica necesaria.

I. Condición inicial: cómo se prepara el péndulo al comenzar el experimento.

B. No necesitamos aquí una condición de frontera espacial independiente.

$\mathcal{R}$. Régimen en el cual las idealizaciones adoptadas sean adecuadas.

$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$. Reglas que explican qué representa la posición angular, cómo se identifica experimentalmente una oscilación y cómo se mide el tiempo correspondiente. La ficha es útil precisamente porque muestra qué sabemos y qué **todavía falta**.

Ejemplo desarrollado 13 — Una ecuación, dos modelos. Consideremos

$$x + y = 1.$$

Modelo A — Dos fracciones de composición. Interpretamos

$$x = \text{fracción del componente A},$$

$$y = \text{fracción del componente B}.$$

La ecuación expresa que el modelo solo admite esos dos componentes y que las fracciones están normalizadas.

Modelo B — Distribución idealizada de un recurso. Interpretamos

$$x = \text{fracción asignada al subsistema 1},$$

$$y = \text{fracción asignada al subsistema 2}.$$

La misma ecuación posee otra semántica.

Matemáticamente, $x + y = 1$

es idéntica.

Físicamente, los modelos son diferentes porque cambia

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}.$$

Por tanto,

misma estructura matemática $\not\Rightarrow$ mismo modelo físico.

Ejercicio de §5.

Ejercicio 1.18 — Construir la ficha matemática mínima de un modelo.

Considera un depósito idealizado que solo puede registrarse como **vacío** o **lleno** mediante un sensor binario. Construye una ficha mínima utilizando

$$\mathcal{M} = (\mathcal{S}, X, \theta, \mathcal{L}, I, B, \mathcal{R})$$

y un diccionario $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$.

No es necesario inventar una ley dinámica si la pregunta solo es:

«¿Qué estado registra el sensor en el instante de observación?»

Explica también qué información física real elimina este modelo.

Solución.

Una ficha posible es la siguiente.

Sistema físico. El depósito y el mecanismo relevante para decidir si el sensor lo clasifica como vacío o lleno.

Pregunta. Determinar cuál de los dos estados registra el sensor.

Espacio de estados.

$$\mathcal{S} = \{0, 1\}.$$

Diccionario de estados.

$$0 \longleftrightarrow \text{vacío según el criterio del sensor},$$

$$1 \longleftrightarrow \text{lleno según el criterio del sensor}.$$

Es importante añadir «según el criterio del sensor»: un depósito real puede contener cantidades intermedias.

Variables/observables. Podemos tomar

$$X = \{O\},$$

con

$$O : \mathcal{S} \to \{0, 1\}, \qquad O(s) = s.$$

Parámetros. Si el sensor utiliza un umbral fijo para decidir la clasificación, ese umbral puede formar parte de

$$\theta.$$

No necesitamos asignarle un valor numérico concreto.

Leyes o relaciones. Para la pregunta instantánea no necesitamos especificar una ley dinámica. Por tanto, $\mathcal{L}$ puede quedar sin componente dinámico relevante para esta tarea. Esto no significa que el depósito real carezca de dinámica.

Condición inicial. No es necesaria si solo preguntamos por el estado registrado en el instante actual.

Condiciones de frontera. No se requieren para este modelo binario elemental.

Régimen de validez. El modelo sirve únicamente para preguntas cuya respuesta dependa de la clasificación binaria y no de la cantidad exacta de contenido.

Diccionario de interpretación. $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$ debe incluir qué significa «vacío», qué significa «lleno», cómo funciona la regla de clasificación del sensor y qué señal corresponde a 0 y cuál a 1.

Información omitida. El modelo elimina, entre otras cosas, todos los niveles intermedios, la forma de la superficie del contenido, temperatura, presión, composición y la dinámica de llenado o vaciado.

La conclusión metodológica es importante:

un modelo puede ser suficiente para una pregunta aunque omita casi toda la física del sistema

.

La suficiencia depende de la tarea.

Síntesis. Ya podemos distinguir cuatro niveles:

sistema físico

núcleo formal $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, X, \theta, \mathcal{L}, I, B, \mathcal{R})$

diccionario de interpretación $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$

observaciones y contraste

La tupla organiza la matemática. El diccionario explica qué significa físicamente.

Las reglas `[OBS]` conectan parte de ese significado con procedimientos de observación. El régimen $\mathcal{R}$ recuerda que la representación no reclama validez ilimitada.

Por tanto, la fórmula central de esta sección no debe leerse como una axiomatización de la física, sino como una disciplina de lectura:

no preguntes solo «¿qué ecuación tengo?»; pregunta «¿qué modelo está representando esta ecuación?»

Ahora podemos abordar el problema que hemos aplazado deliberadamente. Dentro de $\mathcal{L}$ aparecen ecuaciones de tipos muy diferentes. Algunas definen. Algunas resumen regularidades empíricas. Algunas expresan postulados. Algunas son hipótesis del modelo. Algunas son aproximaciones. Y otras se deducen matemáticamente.

La forma algebraica no permite distinguirlas.

Este será el objeto de (§6).

6. El estatus de una ecuación

La misma fórmula puede cumplir funciones distintas. Consideremos la fórmula

$$y = kx.$$

Aislada en una página, es solo una relación matemática entre símbolos.

Pero dentro de distintos contextos puede desempeñar papeles muy diferentes.

Contexto A — Definición. Podemos decidir definir una nueva cantidad y mediante

$$y := kx.$$

Entonces la relación fija el significado de y.

Su estatus es:

[DEF].

Contexto B — Regularidad empírica. Podemos medir dos magnitudes x e y y descubrir que, dentro de cierto intervalo experimental,

$$y \approx kx.$$

Ahora la relación resume un patrón observado.

Su respaldo depende de datos. Su estatus puede ser: [EMP].

Contexto C — Hipótesis de modelo. Podemos construir deliberadamente un modelo en el que supongamos que dos cantidades obedecen exactamente

$$y = kx,$$

aunque sepamos que el sistema real solo se comporta así aproximadamente.

Entonces tenemos: [MOD].

Contexto D — Consecuencia matemática. Podemos partir de premisas anteriores y demostrar algebraicamente que

$$y = kx.$$

Entonces la relación no introduce nuevo contenido físico.

Su estatus es:

[MATH].

La forma algebraica es idéntica.

El estatus no.

$$\boxed{\text{estatus físico} \neq \text{forma algebraica}}$$

Esta es la regla central de la sección. La cuestión decisiva no es la forma gráfica de la ecuación, sino su **procedencia y función dentro del argumento**. Por eso, al leer una derivación física, la primera pregunta será: «¿de dónde viene esta afirmación?».

Definición operativa 1.18 — Estatus de una afirmación El **estatus** de una afirmación dentro de un modelo o teoría indica el papel epistemológico y lógico que cumple: si fija significado,

resume evidencia empírica, introduce un postulado, especifica una idealización, declara una aproximación, fija condiciones, conecta con observaciones o se deduce matemáticamente de premisas ya aceptadas.

La palabra **dentro** es esencial. Una expresión puede cambiar de estatus cuando cambia el contexto. No clasificamos fórmulas por su aspecto, sino **afirmaciones situadas**.

Las nueve etiquetas canónicas. Usaremos las siguientes etiquetas:

Etiqueta	Estatus	Pregunta principal
`[DEF]`	definición	¿estamos fijando el significado de algo?
`[EMP]`	ley o relación empírica	¿su respaldo depende de observación o experimento?
`[POST]`	postulado o principio físico	¿se introduce como hipótesis estructural de la teoría?
`[MOD]`	hipótesis de modelo / idealización	¿qué rasgo del sistema real estamos sustituyendo o simplificando?
`[APPROX]`	aproximación	¿qué diferencia o efecto despreciamos y en qué régimen?
`[IC]`	condición inicial	¿qué se fija al comienzo del problema dinámico?
`[BC]`	condición de frontera	¿qué se prescribe en una frontera?
`[MATH]`	consecuencia matemática	¿se deduce sin introducir una nueva premisa física?
`[OBS]`	relación de observación o medición	¿cómo se conecta el formalismo con un procedimiento experimental?

No todas aparecerán en todos los problemas. Pero cuando una relación importante aparece por primera vez, el lector debe poder identificar su tipo. Las etiquetas forman un vocabulario de lectura. Conviene reunir aquí sus diferencias esenciales sin repetir nueve veces el mismo esquema.

`[DEF]`, `[EMP]` y `[POST]`. Una definición fija significado. Por ejemplo, si dos instantes registrados son t_i y t_f, podemos definir

$$[\text{DEF}] \qquad \Delta t := t_f - t_i.$$

No hemos descubierto experimentalmente que

$$\Delta t = t_f - t_i.$$

Hemos decidido usar el símbolo Δt para esa diferencia.

La definición puede estar motivada físicamente, pero su verdad no se contrasta como una ley. Una vez aceptada, podemos usarla en deducciones.

Pregunta de control.

¿la ecuación afirma algo sobre el comportamiento del mundo, o está fijando el significado de un símbolo? Una relación empírica obtiene su respaldo de observaciones o experimentos.

Esquemáticamente:

$$\text{[EMP]} \qquad Y = f(X;\theta)$$

significa que la relación se acepta porque describe, dentro de cierto dominio, una regularidad del mundo físico.

No necesitamos todavía estudiar una ley concreta.

Lo importante es reconocer que:

una ley empírica no se demuestra solo con álgebra

Podemos demostrar consecuencias **a partir** de ella.

Pero su conexión con la realidad requiere contraste.

Pregunta de control.

si ninguna observación del mundo pudiera contar a favor o en contra de esta relación, ¿seguiríamos llamándola empírica? Un postulado no es una simple abreviatura ni una observación aislada.

Es una hipótesis estructural que se adopta como parte de una teoría.

Podemos representarlo esquemáticamente:

$$\text{[POST]} \qquad P.$$

Después podremos derivar consecuencias:

$$P \Longrightarrow Q.$$

Entonces Q puede tener estatus `[MATH]` relativo al postulado P.

La teoría no «demuestra» P usando sus propias consecuencias. Su justificación física proviene de la coherencia del marco, sus éxitos, su relación con experimentos y su integración con otras estructuras.

Pregunta de control.

¿esta afirmación funciona como una premisa estructural del marco teórico?

`[MOD]` y `[APPROX]`. En §4 vimos ejemplos:

$$\text{[MOD]} \qquad \text{«el cuerpo se trata como partícula puntual».}$$

o

$$\text{[MOD]} \qquad \text{«el hilo se considera inextensible».}$$

Estas afirmaciones no pretenden ser literalmente verdaderas del objeto real.

Son exactas **dentro del modelo**.

Cada `[MOD]` debe permitir responder:

1. ¿qué propiedad real se omite o idealiza?;
2. ¿por qué creemos que no importa para la pregunta?;

3. ¿qué observación podría mostrar que sí importa?

Esta es una de las reglas de auditoría más importantes de la obra. Una aproximación declara una sustitución:

$$A \approx B.$$

Pero el símbolo $\approx$ no constituye una justificación.

Debemos registrar, cuando sea posible:

- qué término o efecto se desprecia;
- qué cantidad controla su tamaño;
- respecto de qué escala es pequeño;
- cuándo esperamos que el reemplazo falle.

Por ejemplo:

$$[\text{APPROX}] \qquad 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 - 2\varepsilon$$

solo es informativo si añadimos un régimen en el que $|\varepsilon|$ sea suficientemente pequeño para la precisión buscada.

Pregunta de control.

> ¿qué diferencia concreta estamos aceptando? Este es un punto especialmente delicado.

Supongamos que una ecuación final no contiene cierto efecto D.

Podemos llegar a ella de dos maneras:

Ruta A — Idealización. Declaramos:

$$[\text{MOD}] \qquad D = 0.$$

Dentro del modelo, el efecto es exactamente nulo.

Ruta B — Aproximación. Partimos de

$$D \neq 0$$

pero mostramos que, en el régimen estudiado,

$$|D| \ll \text{escala relevante},$$

y entonces escribimos

$$[\text{APPROX}] \qquad D \approx 0.$$

La ecuación simplificada puede ser la misma.

El razonamiento físico no.

`[IC]`, `[BC]`, `[MATH]` y `[OBS]`. Una condición inicial especifica información del estado en un instante elegido como inicial.

Por ejemplo:

$$[\text{IC}] \qquad x(0) = a.$$

La relación no es una ley universal.

No afirma que todos los sistemas tengan $x(0) = a$.

Describe una realización o preparación particular.

Una condición inicial puede provenir de:

- una medición;
- una preparación experimental;
- un enunciado de problema;
- una elección hipotética.

Pregunta de control.

> ¿esta ecuación describe la regla de evolución o especifica desde qué estado comenzamos? Una condición de frontera especifica información en el borde de un dominio.

Por ejemplo, en un problema posterior podríamos encontrar simbólicamente

$$[\text{BC}] \qquad u = 0 \quad \text{en una frontera.}$$

No necesitamos saber todavía resolver una ecuación de frontera.

Solo distinguir:

$$\boxed{\text{ley en el interior} \neq \text{condición prescrita en el borde.}}$$

La misma fórmula $u = 0$ puede ser una condición de frontera, una condición inicial o una solución, dependiendo del contexto. Esta es la categoría más familiar para un lector matemático.

Supongamos que ya hemos declarado:

$$A = B,$$
$$B = C.$$

Entonces, por transitividad de la igualdad,

$$[\text{MATH}] \qquad A = C.$$

No hemos añadido nueva física.

Hemos deducido una consecuencia lógica.

La regla crítica del proyecto es:

$$\boxed{\text{la prueba matemática comienza después de declarar las premisas físicas.}}$$

Una derivación física completa puede mezclar varios estatus, pero cada tramo deductivo debe dejar claro qué usa como premisa. Si de un modelo obtenemos matemáticamente

$$P,$$

entonces P es una consecuencia del modelo.

Pero todavía debemos distinguir:

$$\boxed{\text{«el modelo implica } P\text{»}}$$

de

$$\boxed{\text{«el experimento observa } P\text{».}}$$

La primera afirmación puede estar demostrada.

La segunda requiere contraste físico. Esta separación será decisiva en §13. Supongamos que un modelo contiene una cantidad x. Para compararla con el laboratorio necesitamos alguna conexión como

$$[\text{OBS}] \qquad x \longleftrightarrow \text{procedimiento de medición.}$$

En un experimento con video, por ejemplo, una coordenada física puede inferirse a partir de píxeles mediante una calibración.

La regla que convierte señal instrumental en valor físico no es automáticamente una ley dinámica. Es una **relación de observación**.

Pregunta de control.

> ¿esta relación nos dice cómo evoluciona el sistema o cómo obtenemos un dato sobre él?

Leer una derivación como una cadena de estatus. Construyamos una cadena deliberadamente elemental.

Supongamos que registramos dos instantes t_i y t_f.

Paso 1 — Definición.

$$[\text{DEF}] \qquad \Delta t := t_f - t_i.$$

Paso 2 — Observación. El aparato produce lecturas:

$$[\text{OBS}] \qquad t_i = 2.0, \qquad t_f = 5.0.$$

No discutimos todavía incertidumbres.

Paso 3 — Consecuencia matemática. Sustituimos:

$$[\text{MATH}] \qquad \Delta t = 5.0 - 2.0.$$

Entonces:

$$[\text{MATH}] \qquad \Delta t = 3.0.$$

La cadena es transparente porque vemos dónde entró el dato y dónde comenzó la deducción.

Si escribiéramos simplemente

$$\Delta t = t_f - t_i = 5.0 - 2.0 = 3.0,$$

la matemática sería correcta, pero el origen epistemológico de cada parte quedaría oculto. Podemos representar una derivación física típica como una secuencia:

$$[\text{POST}] \to [\text{MOD}] \to [\text{EMP}] \to [\text{IC}] \to [\text{MATH}] \to [\text{APPROX}] \to [\text{MATH}] \to [\text{OBS}].$$

No todas las derivaciones siguen este orden.

El esquema solo muestra que una solución física puede combinar:

- premisas teóricas;
- hipótesis sobre el sistema;
- datos;
- aproximaciones;
- deducciones.

Por eso llamaremos **demostración** únicamente al tramo matemático apropiado.

La argumentación física completa es más amplia. Supongamos que un texto parte de una relación física L y mediante álgebra obtiene otra relación R.

Si L es empírica o postulada, podemos demostrar:

$$L \Longrightarrow R.$$

Pero no hemos demostrado que L describa la naturaleza.

Hemos demostrado una implicación dentro del marco. Esta es una diferencia especialmente importante para el lector formado en matemática pura. En matemáticas, las premisas suelen presentarse explícitamente como axiomas, definiciones o hipótesis.

En física, parte de esas premisas puede estar escondida en frases aparentemente inocentes como:

- «despreciemos el rozamiento»;
- «supongamos un cuerpo rígido»;
- «experimentalmente se encuentra que...»;
- «tomemos el sistema inicialmente en reposo».

Nuestro protocolo hace visibles esas entradas. Cuando una ecuación sea ambigua, seguiremos esta secuencia.

Pregunta 1. ¿Está fijando significado?

Sí:

[DEF].

Pregunta 2. ¿Conecta el formalismo con un procedimiento de medida?

Sí: [OBS].

Pregunta 3. ¿Es una condición particular de preparación o de borde?

Inicial:

[IC].

Frontera:

[BC].

Pregunta 4. ¿Introduce una simplificación del sistema real?

Exacta dentro del modelo:

[MOD].

Como reemplazo cercano:

[APPROX].

Pregunta 5. ¿Funciona como premisa estructural de la teoría?

[POST].

Pregunta 6. ¿Su respaldo es primordialmente empírico?

[EMP].

Pregunta 7. ¿Se sigue lógicamente de premisas ya declaradas?

[MATH].

La clasificación puede requerir contexto histórico o teórico adicional.

No siempre será mecánica. Tres casos fronterizos merecen quedar visibles porque reaparecerán en el resto del tratado:

La frontera entre `[EMP]` y `[POST]` no siempre coincide con una frontera filosófica absoluta. Una relación históricamente descubierta como regularidad empírica puede ser incorporada después como parte estructural de un marco.

Para nuestro uso:

- `[EMP]` enfatiza su papel como regularidad respaldada experimentalmente;
- `[POST]` enfatiza su papel como premisa organizadora del formalismo.

En los casos dudosos, la solución deberá explicar **por qué** adopta una etiqueta. El objetivo del protocolo no es fingir que toda epistemología de la física cabe en nueve casillas. Es impedir que diferencias importantes desaparezcan bajo una sola palabra: «ecuación». Supongamos que definimos una magnitud T mediante una construcción teórica.

Eso puede ser `[DEF]`. Pero si además especificamos que cierto instrumento produce una lectura utilizada para estimar T, esa conexión es `[OBS]`.

Una misma magnitud puede tener:

[DEF] significado teórico

y

[OBS] procedimiento de acceso experimental.

Confundir ambos niveles puede ocultar problemas de calibración. Una observación individual como

$$x = 4.2$$

no es una ley física.

Es un dato o resultado de medición. Una colección de datos puede sugerir una relación. Pero el salto

$$\{(x_i, y_i)\} \longrightarrow y = f(x)$$

no es una deducción puramente lógica.

En §9 demostraremos que un conjunto finito de datos puede ser compatible con infinitas funciones distintas. Esta sección prepara la distinción. La regla práctica será sencilla: una demostración matemática comienza una vez declaradas las premisas físicas. Si durante la derivación aparece una nueva premisa empírica, de modelo, de aproximación o de observación, debe marcarse como tal.

Ejercicios. Ejercicio 1.19 — ¿Qué tipo de afirmación es?.

Clasifica cada afirmación con la etiqueta más adecuada y justifica.

1. $\Delta t := t_f - t_i$.
2. «El cuerpo se tratará como partícula puntual».
3. $x(0) = 3$, cuando el problema especifica que el sistema se prepara inicialmente con ese valor.
4. $u = 0$ sobre el borde de una región.
5. $1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 - 2\varepsilon$ para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño.

6. $A = C$, obtenido únicamente a partir de $A = B$ y $B = C$.
7. Una relación $Y = kX$ que resume un patrón experimental dentro de un intervalo medido.
8. Una regla que convierte píxeles de una imagen calibrada en una posición física.
9. Un principio estructural que la teoría adopta como premisa y del que se derivan consecuencias.

Solución.

1. **[DEF].** Fija el significado de Δt.
2. **[MOD].** Introduce una idealización: un cuerpo extendido se modela como punto.
3. **[IC].** Fija el estado inicial de una realización particular; no es una ley general.
4. **[BC].** Prescribe información en la frontera del dominio.
5. **[APPROX].** Reemplaza una relación por otra cercana en un régimen declarado.
6. **[MATH].** Es consecuencia de la transitividad de la igualdad y no añade una premisa física.
7. **[EMP].** Su respaldo depende del patrón observado experimentalmente.
8. **[OBS].** Conecta el formalismo con un procedimiento de medición.
9. **[POST].** Funciona como premisa estructural del marco.

La estrategia general es:

preguntar por origen y función, no por apariencia algebraica.

Ejercicio 1.20 — La misma fórmula, distinto estatus.

Construye cuatro contextos distintos en los que la fórmula

$$y = kx$$

tenga respectivamente estatus:

1. [DEF];
2. [EMP];
3. [MOD];
4. [MATH].

Después explica por qué no existe una función que, leyendo únicamente la cadena de símbolos $y = kx$, determine correctamente su estatus físico.

Solución.

1. Como definición. Definimos una nueva variable:

$$[\text{DEF}] \qquad y := kx.$$

La ecuación fija qué significa y.

2. Como relación empírica. Medimos x e y y encontramos experimentalmente que, dentro de cierto intervalo,

$$[\text{EMP}] \qquad y \approx kx.$$

La relación resume la evidencia.

3. Como hipótesis de modelo. Decidimos idealizar un sistema mediante una dependencia exactamente lineal:

$$[\text{MOD}] \qquad y = kx.$$

La linealidad exacta pertenece al modelo.

4. Como consecuencia matemática. Partimos de

$$y = ka$$

y de

$$a = x.$$

Por sustitución:

$$\text{[MATH]} \qquad y = kx.$$

Conclusión. La secuencia de caracteres

$$y = kx$$

es la misma en los cuatro casos.

Por tanto, ninguna regla que inspeccione **solo** la sintaxis puede distinguirlos.

El estatus depende de información contextual:

- cómo se introdujo la ecuación;
- qué premisas la sostienen;
- qué papel cumple;
- cómo se conecta con observaciones.

En términos de §5:

la sintaxis pertenece al núcleo formal; el estatus exige también el diccionario de interpretación y la historia lógica del argumento .

Síntesis. A partir de ahora no leeremos una ecuación física como una entidad homogénea.

Preguntaremos:

¿qué clase de afirmación es?

La taxonomía canónica es:

[DEF], [EMP], [POST], [MOD], [APPROX], [IC], [BC], [MATH], [OBS]

y la regla fundamental es:

la forma matemática no determina el estatus físico.

Una derivación físicamente rigurosa debe distinguir:

$$\text{premisas físicas} + \text{condiciones} + \text{idealizaciones} + \text{aproximaciones} + \text{deducción matemática} + \text{conexión observacional.}$$

Con esta herramienta ya podemos abordar una distinción más macroscópica.

¿Qué diferencia hay entre una **ley**, un **modelo** y una **teoría**?

Ése será el objeto de (§7).

7. Ley, modelo y teoría

Tres niveles de organización. En física encontramos continuamente expresiones como:

- «ley de...»;
- «modelo de...»;
- «teoría de...».

Es fácil tratarlas como sinónimos vagos de «conjunto de ecuaciones». Pero las seis secciones anteriores ya nos permiten ver que no cumplen la misma función.

Una **ley** suele expresar una regularidad, relación o principio físico.

Un **modelo** representa un sistema o una clase de sistemas bajo determinadas hipótesis. Una **teoría** proporciona una arquitectura más amplia dentro de la cual pueden construirse muchos modelos y derivarse muchas relaciones.

Por tanto, nuestra primera imagen será:

$$\boxed{\text{ley} \longrightarrow \text{ingrediente estructural}}$$

$$\boxed{\text{modelo} \longrightarrow \text{representación situada de un sistema}}$$

$$\boxed{\text{teoría} \longrightarrow \text{marco que organiza familias de modelos}}$$

Estas flechas no expresan una inclusión conjuntista literal.

No estamos diciendo:

$$\text{ley} \subset \text{modelo} \subset \text{teoría}$$

como si cada palabra designara simplemente un conjunto matemático contenido en otro. La relación es **funcional**: una teoría puede contener o motivar leyes, y sus principios permiten construir modelos; un modelo puede emplear leyes y postulados, pero además necesita sistema, interpretación, parámetros, condiciones, idealizaciones y régimen de validez.

Ley física. **Definición operativa 1.19 — Ley física** Llamaremos **ley física**, en sentido operativo, a una relación, regularidad o principio que expresa una estructura estable del comportamiento físico dentro de un dominio declarado y que puede emplearse como parte de la descripción o predicción de una clase de fenómenos.

Esta definición es deliberadamente amplia.

No exige que toda ley sea:

- una ecuación;
- una relación exacta;
- puramente empírica;
- universal;
- independiente de una teoría;
- válida en todas las escalas.

La palabra «ley» tiene una historia compleja en física. Nuestro objetivo no es imponer una única filosofía de las leyes naturales, sino poder leer correctamente un texto físico. La taxonomía de §6 no desaparece cuando usamos la palabra «ley».

Una relación llamada históricamente «ley» puede aparecer principalmente como: [EMP]

si enfatizamos que resume una regularidad observada.

Otra relación puede aparecer como: [POST]

si dentro de cierta presentación funciona como principio estructural de una teoría. Y una relación llamada «ley» en lenguaje informal puede resultar, dentro de otra formulación, una consecuencia matemática: [MATH]

de principios más generales.

Por eso:

«ley» no reemplaza la etiqueta de estatus

Cuando una ley importante aparezca en este libro, seguiremos preguntando:

> **¿qué estatus tiene aquí?** La palabra «ley» puede sugerir algo sin excepciones y válido en todo contexto.

En física esto sería peligroso. Una ley puede describir con enorme precisión un régimen y dejar de ser adecuada fuera de él.

Por eso una afirmación física debe viajar junto con algún dominio o régimen:

ley física utilizada + régimen de aplicación

Una relación válida para cierto tipo de sistema, intervalo de variables o escala no queda desacreditada simplemente porque exista un régimen donde deje de funcionar. Lo correcto es especificar **dónde** y **para qué** se utiliza. Esta idea se desarrollará sistemáticamente en §11.

Modelo físico. En §5 construimos la plantilla formal

$$\mathcal{M} = (\mathcal{S}, X, \theta, \mathcal{L}, I, B, \mathcal{R})$$

acompañada por un diccionario de interpretación

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}.$$

Ahora podemos condensar esa arquitectura.

Definición operativa 1.20 — Modelo físico Un **modelo físico** es una representación estructurada de un sistema o de una clase de sistemas que selecciona estados, variables, parámetros, relaciones, condiciones, idealizaciones, aproximaciones y reglas de interpretación suficientes para responder determinadas preguntas dentro de un régimen de validez.

La frase **suficientes para responder determinadas preguntas** conecta directamente con `1.11`.

Un modelo no es simplemente:

$$\text{ecuación} + \text{números}.$$

Es una arquitectura de representación. Consideremos de nuevo la Tierra.

Según la pregunta podemos utilizar modelos muy diferentes:

- plano local;
- esfera;
- cuerpo rígido;
- masa puntual;
- distribución continua.

No hemos cambiado de planeta.

Hemos cambiado de representación.

Por tanto:

$$\boxed{\text{un sistema físico} \not\longrightarrow \text{un único modelo obligatorio}}$$

La multiplicidad de modelos no es necesariamente una deficiencia.

Puede reflejar el hecho de que distintas preguntas seleccionan estructuras distintas.

Teoría física. Una teoría física debe permitir algo más general que describir una única realización.

Debe proporcionar una organización estable que nos diga, por ejemplo:

- qué tipos de sistemas o entidades consideramos;
- qué cantidades pueden representar sus estados;
- qué principios estructurales aceptamos;
- qué relaciones están permitidas;
- cómo construir modelos particulares;
- qué transformaciones dejan intacta la descripción física;
- qué observables pueden compararse con experimentos;
- qué clases de problemas quedan dentro del dominio de la teoría.

No todas las teorías responden estas preguntas del mismo modo.

Pero esta lista muestra una diferencia de escala conceptual. **Definición operativa 1.21 — Teoría física** Una **teoría física** es un marco conceptual y matemático que organiza una familia de modelos mediante conceptos, principios, estructuras, reglas de construcción e interpretación compartidos, y que permite formular consecuencias contrastables para una clase amplia de fenómenos.

Una teoría no tiene por qué presentarse como una lista finita de axiomas. Tampoco toda la física se organiza históricamente con una única forma lógica. La definición es una guía de lectura. Una teoría útil debe sobrevivir al cambio de problema.

Dentro de un mismo marco podremos estudiar, más adelante:

- partículas;
- sistemas de varias partículas;
- cuerpos rígidos;
- osciladores;
- sistemas sometidos a restricciones;
- campos.

Los modelos pueden parecer matemáticamente muy diferentes. Lo que los reúne es que comparten parte de la arquitectura teórica.

Por eso:

$$\boxed{\text{unidad teórica} \neq \text{uniformidad superficial de las ecuaciones}}$$

La unidad puede encontrarse en principios, simetrías, estructuras o reglas de construcción.

Cómo se relacionan sin confundirse. Una ley puede ser ingrediente de un modelo; un modelo representa un sistema o una clase de sistemas; una teoría organiza familias de modelos mediante principios, estructuras y reglas de interpretación. Esta relación es funcional, no una inclusión conjuntista literal.

Supongamos que conocemos una ley esquemática: $Y = kX$.

¿Podemos predecir ya un experimento concreto?

No necesariamente.

Todavía puede faltar:

- qué sistema estudiamos;
- qué valor tiene k para ese sistema;
- cuál es el estado inicial;
- qué cantidad controlamos;
- cómo medimos X;
- cómo medimos Y;
- qué idealizaciones hemos hecho;
- si el régimen experimental está dentro del dominio de validez.

Así aparece el siguiente nivel:

una ley puede ser un ingrediente de un modelo, pero no sustituye al modelo completo

Podemos distinguir tres niveles.

Nivel 1 — Teoría. Proporciona una arquitectura general.

Nivel 2 — Modelo. Selecciona una clase concreta de sistemas, variables, parámetros, hipótesis y condiciones.

Nivel 3 — Realización. Fija valores o datos particulares.

Esquemáticamente:

$$\text{teoría} \longrightarrow \text{familia de modelos} \longrightarrow \text{realización concreta} \longrightarrow \text{predicciones}.$$

Pero para llegar al experimento debemos añadir la capa de observación:

$$\text{predicciones del modelo} \longleftrightarrow [\text{OBS}] \longleftrightarrow \text{datos}.$$

Nuestro péndulo sirve para visualizar la jerarquía sin usar todavía leyes de movimiento.

Sistema físico. Esfera, hilo y entorno seleccionado.

Modelo. Decidimos:

- qué pertenece al sistema;
- si la esfera se trata como partícula puntual;
- si el hilo se considera inextensible;
- qué cantidades describen el estado;
- qué parámetros permanecen fijos;
- qué condiciones iniciales se preparan;
- qué efectos se omiten;
- qué observables registramos.

Teoría. Más adelante introduciremos un marco mecánico general que proporcionará principios para construir la dinámica de muchos sistemas distintos, no solo de este péndulo.

El punto importante es:

la teoría no es «la teoría del péndulo»; el péndulo es un modelo particular construido dentro de un marco más general

Todavía no necesitamos conocer ese marco para comprender la jerarquía. La misma situación experimental puede admitir representaciones de distinto nivel sin que las palabras históricas «ley», «modelo» o «teoría» se utilicen siempre con idéntico alcance. Consideremos un dispositivo óptico.

Podemos describir ciertos fenómenos mediante **rayos**. En otras preguntas necesitamos una descripción **ondulatoria**. Más adelante, para otros fenómenos, necesitaremos una descripción **cuántica**.

No desarrollaremos todavía ninguna de esas teorías.

Solo observaremos la arquitectura.

El mismo dispositivo físico puede admitir descripciones diferentes porque cambian:

- las escalas relevantes;
- los observables;
- el tipo de pregunta;
- la precisión;
- los fenómenos que queremos capturar.

Así:

$$\boxed{\text{cambiar de modelo o de marco teórico} \not\Rightarrow \text{que una descripción anterior haya sido inútil}}$$

Puede seguir siendo excelente dentro de su régimen. Hay nombres establecidos por tradición que pueden resultar engañosos. Algo llamado «modelo» puede ser un marco teórico extraordinariamente amplio.

Algo llamado «ley» puede ocupar el papel de postulado.

Algo llamado «teoría» puede designar una familia histórica de formulaciones distintas. Por eso no corregiremos automáticamente el vocabulario histórico de la física.

Haremos algo más útil:

preguntaremos qué función cumple el objeto en el argumento presente.

La taxonomía es una herramienta de lectura, no una policía terminológica. Una predicción concreta está más situada que la teoría que la hace posible, y la teoría tampoco es un formalismo sin semántica:

Podemos escribir de forma esquemática: $T \longrightarrow M \longrightarrow P$,

donde:

- T representa una teoría;
- M un modelo particular;
- P una predicción.

Pero normalmente una predicción concreta requiere además datos y condiciones:

$$T + M + I + B + \theta + \text{aproximaciones} \longrightarrow P.$$

Por eso, si la predicción falla, no podemos concluir inmediatamente:

«la teoría completa es falsa».

En §12 analizaremos formalmente esta lógica de revisión. Podríamos imaginar una teoría como una estructura puramente formal. Pero para ser teoría **física** debe existir alguna manera de conectar parte del formalismo con fenómenos y observaciones.

En términos de §5, una teoría debe permitir construir diccionarios como $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$

para sus modelos. En términos de §6, debe haber relaciones `[OBS]` suficientes para confrontar consecuencias con datos.

Por eso:

$$\boxed{\text{formalismo sin interpretación} \neq \text{teoría física completa}}$$

aunque el formalismo pueda constituir un objeto matemático perfectamente interesante por sí mismo. Feynman insiste en una idea que conviene conservar metodológicamente: el experimento pone a prueba las leyes, pero los datos no generan por sí solos las grandes generalizaciones.[1]

Hay un salto creativo y estructural:

$$\begin{array}{c}\text{observaciones} \longrightarrow \text{regularidades sugeridas} \\ \Downarrow \\ \text{hipótesis y generalizaciones} \\ \Downarrow \\ \text{nuevas predicciones.}\end{array}$$

La flecha central no es una inferencia lógica automática. En §9 veremos una razón matemática elemental: los datos finitos no determinan una función única. Por tanto, una teoría no es una simple compresión mecánica de una tabla experimental. Hassani subraya que las estructuras matemáticas utilizadas en física poseen simultáneamente poder y límites.[2]

Para nuestro libro esto implica dos reglas.

Regla 1. No presentar una estructura matemática como si su aplicabilidad física fuera automática.

Regla 2. No reducir la matemática a una calculadora.

Una estructura matemática puede revelar:

- invariantes;
- relaciones ocultas;
- posibilidades;
- imposibilidades;
- equivalencias;
- límites;
- nuevas variables naturales.

Así, la relación entre teoría y matemática es bidireccional:

$$\text{estructura física} \longrightarrow \text{formalismo matemático} \longrightarrow \text{nueva comprensión física.}$$

Matriz de lectura.

Pregunta	Ley	Modelo	Teoría
¿Qué organiza?	una regularidad, relación o principio	un sistema o clase de sistemas	una familia de modelos
¿Qué necesita además?	interpretación y dominio	estados, parámetros, condiciones, idealizaciones, observación	principios, estructuras y reglas comunes

[1] Feynman, Leighton y Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, cap. 1, §1-1, p. 1-1.

[2] Hassani, *Mathematical Physics*, 2.ª ed., «Preface to First Edition», p. xii.

Pregunta	Ley	Modelo	Teoría
¿Está situada en una realización concreta?	no necesariamente	sí, o en una clase bien especificada	normalmente no
¿Su nombre histórico fija su función?	no	no	no

Principio 1.12 — No colapsar los niveles de organización Al analizar una afirmación física distinguiremos entre la relación o principio que funciona como ley, el modelo concreto en el que se aplica y la teoría que organiza una familia de modelos. Las tres capas pueden estar estrechamente conectadas, pero no son intercambiables.

Este principio será especialmente útil cuando una derivación parezca decir:

«La teoría predice...»

Preguntaremos entonces:

1. ¿qué modelo particular de la teoría se está usando?;
2. ¿qué condiciones se han fijado?;
3. ¿qué aproximaciones se han introducido?;
4. ¿qué observable se compara con el experimento? **Ejercicio.**

Ejercicio 1.21 — Ley, modelo o teoría.

Clasifica cada descripción principalmente como **ley**, **modelo** o **teoría**, justificando la respuesta. Si el caso admite más de una lectura, explica qué información adicional necesitarías.

1. Una relación experimental entre dos magnitudes, válida en cierto intervalo, escrita como $Y = kX$.
2. Una descripción de un péndulo que especifica sistema, masa puntual, hilo inextensible, variables, parámetros, preparación inicial, observables y régimen de validez.
3. Un marco general que establece conceptos y principios con los que se construyen modelos de muchos sistemas mecánicos diferentes.
4. La ecuación $Y = kX$ escrita sin ninguna interpretación física.
5. Un conjunto de reglas para representar un instrumento concreto y convertir su señal en un valor medido.
6. Un texto histórico titulado «modelo de X» que, al examinarlo, contiene principios generales y permite construir una amplia familia de modelos.

Solución.

1. Relación experimental $Y = kX$. La clasificación principal es:

$$\boxed{\text{ley}}$$

porque se presenta como una regularidad física entre magnitudes dentro de un dominio. Su estatus en el sentido de §6 sería principalmente: [EMP]. Pero para usarla en un problema concreto todavía necesitamos un modelo.

2. Descripción detallada del péndulo. La clasificación principal es:

$$\boxed{\text{modelo}}$$

porque la descripción especifica un sistema particular y organiza:

- idealizaciones;
- variables;
- parámetros;

- condiciones;
- observables;
- régimen.

No basta con que utilice leyes: la característica decisiva es que **sitúa** esas relaciones en una representación concreta.

3. Marco general para muchos sistemas mecánicos. La clasificación principal es:

$$\boxed{\text{teoría}}$$

porque proporciona una arquitectura común capaz de generar o estructurar muchos modelos.

4. $Y = kX$ sin interpretación. No podemos clasificarla todavía como ley física.

Es únicamente una relación matemática:

$$\boxed{\text{estructura formal sin estatus físico determinado}}.$$

Necesitamos saber:

- qué significan los símbolos;
- cómo se obtuvo la relación;
- qué función cumple.

Este es exactamente el aprendizaje de §§5–6.

5. Reglas para un instrumento concreto. La clasificación principal es:

$$\boxed{\text{modelo}}$$

más precisamente, **modelo del instrumento**.

Puede incluir relaciones `[OBS]`, calibraciones e idealizaciones.

No constituye necesariamente una teoría física amplia.

6. Un «modelo» histórico que funciona como marco general. Aquí la respuesta correcta exige separar **nombre histórico** y **función**.

Si realmente contiene principios generales y organiza una amplia familia de modelos, cumple en nuestra taxonomía operativa una función cercana a:

$$\boxed{\text{teoría}}.$$

Sin embargo, no renombraríamos obligatoriamente la construcción histórica.

Diríamos:

> «Se llama tradicionalmente modelo, pero en este contexto desempeña una función teórica más amplia.»

Conclusión. La clasificación no depende del título.

Depende de la función:

$$\boxed{\text{ley : relación;} \qquad \text{modelo : representación situada;} \qquad \text{teoría : marco organizador.}}$$

Síntesis. Podemos resumir la arquitectura así:

$$\boxed{\text{teoría} \longrightarrow \text{familias de modelos} \longrightarrow \text{realizaciones} \longrightarrow \text{predicciones} \longleftrightarrow \text{observaciones}}$$

Las leyes aparecen como relaciones o principios dentro de esta arquitectura. Una ley no es todavía un modelo completo. Un modelo no es todavía una teoría general.

Una teoría no produce por sí sola una predicción concreta sin especificar un modelo, datos, condiciones, parámetros y reglas de interpretación.

El principio que conservará el lector es:

no confundir una relación física, una representación de un sistema y el marco que organiza muchas representaciones

Con esta distinción ya podemos formular una nueva pregunta.

Una vez fijados teoría, modelo y condiciones, ¿qué significa **predecir**?

¿Es lo mismo ajustar datos, reconstruir el pasado, predecir una observación nueva y explicar un fenómeno?

Este será el objeto de (§8).

8. Predicción, retrodicción y explicación

Ajustar y predecir no son la misma operación. En §7 construimos la cadena

$$\text{teoría} \longrightarrow \text{modelos} \longrightarrow \text{realizaciones} \longrightarrow \text{predicciones} \longleftrightarrow \text{observaciones}.$$

Ahora debemos detenernos en la palabra **predicción**.

Supongamos que un modelo produce el valor

$$y = 12.$$

¿Hemos hecho una predicción?

No podemos saberlo todavía. Tal vez el valor 12 fue calculado antes de realizar una observación nueva.

Pero también podría haber ocurrido lo contrario:

1. observamos primero el valor 12;
2. elegimos después los parámetros del modelo para reproducirlo;
3. finalmente mostramos que el modelo devuelve precisamente 12.

La igualdad matemática es la misma. La situación metodológica no.

Por tanto:

reproducir un dato conocido $\neq$ predecir un dato nuevo.

Esta será nuestra primera distinción. Consideremos una relación elemental: $y = kx$.

Realizamos una observación: $x = 2, \qquad y = 6$. Si elegimos k de modo que la relación reproduzca ese dato, obtenemos $k = \frac{6}{2} = 3$. Entonces el modelo

$$y = 3x$$

reproduce automáticamente el dato utilizado para fijar k: $6 = 3 \cdot 2$.

Eso puede ser útil. Pero no constituye todavía una prueba independiente del modelo.

Definición operativa 1.22 — Ajuste Llamaremos **ajuste** al proceso mediante el cual seleccionamos parámetros, condiciones o alguna parte de la forma de un modelo utilizando datos que queremos que el propio modelo reproduzca.

No suponemos aquí ningún método estadístico específico. El ajuste puede ser tan sencillo como determinar una constante a partir de una observación. En el ejemplo anterior, $(x_1, y_1) = (2, 6)$ se utilizó para fijar

$$k = 3.$$

Por eso, obtener luego

$$y_1 = kx_1$$

no es un éxito predictivo independiente.

Era parte del procedimiento de construcción.

Principio 1.13 — No confundir ajuste con predicción Un dato utilizado para seleccionar parámetros, condiciones o estructura de un modelo no debe contarse después como una predicción independiente del mismo modelo.

Esta regla parece obvia cuando el ejemplo contiene una sola constante. En problemas reales puede quedar mucho más escondida. Un modelo puede contener muchos parámetros y haber sido diseñado tras observar una gran cantidad de datos.

Si evaluamos después su «éxito» únicamente sobre esos mismos datos, podemos estar midiendo principalmente su capacidad de ajuste. Shankar formula, en esencia, una de las preguntas clásicas de la mecánica: dada suficiente información sobre el estado presente de un sistema, ¿qué puede decirse de su evolución futura?[3]

Este es el sentido temporal habitual de **predicción**:

$$\text{estado presente} \longrightarrow \text{estado futuro}.$$

Pero para nuestro método necesitamos una noción un poco más amplia.

Una teoría puede producir una consecuencia acerca de:

- un experimento que todavía no hemos realizado;
- una condición todavía no ensayada;
- una observación pasada que no fue utilizada para construir el modelo;
- una cantidad desconocida aunque no esté en el futuro cronológico.

La distinción relevante es entonces **informacional** además de temporal.

Definición operativa 1.23 — Predicción Una **predicción** es una consecuencia físicamente interpretable de un modelo para una observación, condición o caso cuyo resultado no ha sido utilizado para fijar precisamente esa consecuencia mediante el ajuste del modelo.

Esta definición incluye la predicción temporal como caso central, pero no la reduce a ella. La predicción física requiere además una conexión observacional:

Supongamos que un modelo, ya fijado, implica:

$$\text{[MATH]} \qquad Y_{\text{pred}} = f(X_0; \theta).$$

Mientras Y_{pred} siga siendo solo un objeto del formalismo, todavía falta la conexión experimental.

Necesitamos:

$$\text{[OBS]} \qquad Y \longleftrightarrow \text{procedimiento de medición}.$$

Entonces podemos comparar

$$Y_{\text{pred}}$$

con

[3] Shankar, *Fundamentals of Physics I*, edición ampliada, cap. 1, §1.2, p. 3.

$$Y_{\text{obs}}.$$

La cadena completa es:

$$\boxed{\text{modelo fijado} \to \text{[MATH] predicción} \to \text{[OBS] dato} \to \text{comparación.}}$$

Una predicción física no termina al obtener una fórmula.

Debe poder traducirse en algo contrastable. Tomemos otra vez

$$y = kx.$$

Paso 1 — Dato de ajuste. Observamos: $x_1 = 2, \qquad y_1 = 6.$

Paso 2 — Ajuste. Fijamos: $k = 3$.

Paso 3 — Nuevo caso. Antes de observar el resultado para

$$x_2 = 5,$$

el modelo produce:

$$\text{[MATH]} \qquad y_{2,\text{pred}} = 3 \cdot 5 = 15.$$

Paso 4 — Observación nueva. Realizamos el procedimiento experimental y obtenemos cierto

$$y_{2,\text{obs}}.$$

Ahora sí existe un contraste entre una consecuencia obtenida **sin usar ese resultado** y una observación posterior. Si ocurre que

$$y_{2,\text{obs}} = 15$$

dentro de la precisión pertinente, el nuevo dato es compatible con la predicción.

No hemos demostrado que el modelo sea verdadero.

Hemos superado una prueba nueva. Una predicción acertada apoya un modelo, pero no lo convierte en teorema:

Supongamos que un modelo predice correctamente un dato.

Podemos concluir:

> el modelo ha producido una consecuencia compatible con esa observación.

No podemos concluir automáticamente:

> ninguna otra descripción física podría producirla.

Ni:

> todas las hipótesis del modelo han quedado demostradas.

Ni:

> el modelo funcionará fuera del régimen contrastado.

La lógica es asimétrica. Una predicción acertada proporciona apoyo. Pero no convierte una hipótesis física en un teorema.

En §9 veremos una razón matemática elemental para mantener esta cautela: datos finitos pueden ser compatibles con muchas leyes funcionales distintas. La predicción temporal conserva una estructura especialmente importante para la mecánica:

Supongamos que el modelo posee un conjunto de estados

$$\mathcal{S}$$

y una regla de evolución de un paso: $E : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Si el estado actual es $s_0 \in \mathcal{S}$,
el modelo predice: $s_1 = E(s_0)$. Y después: $s_2 = E(s_1)$.

No necesitamos ecuaciones diferenciales para comprender la estructura lógica.

La predicción temporal consiste en combinar:

- un estado inicial;
- una regla de evolución;
- parámetros;
- condiciones externas pertinentes.

Esquemáticamente:

$$\boxed{(s_0, \theta, \mathcal{L}) \longrightarrow s_1.}$$

En §3 vimos que una fotografía del péndulo puede mostrar la misma posición para dos estados dinámicamente diferentes.

Esto significa que una descripción insuficiente del presente puede producir ambigüedad futura. Si dos estados

$$s_a \neq s_b$$

comparten la misma observación: $O(s_a) = O(s_b)$,
pero evolucionan de manera distinta: $E(s_a) \neq E(s_b)$,

entonces el dato observable actual no basta para una predicción única. La dificultad no está en «resolver mal la ecuación». Está en que no conocemos suficiente estado. En §3 dejamos abierto un punto importante.

No toda teoría predice un único resultado.

Podemos encontrar:

Predicción determinista.

$$s_0 \longrightarrow s_1.$$

Predicción probabilística.

$$s_0 \longrightarrow \{\text{probabilidades para resultados posibles}\}.$$

Por tanto:

$$\boxed{\text{predecir} \neq \text{afirmar siempre un único valor futuro.}}$$

Más adelante desarrollaremos formalmente la probabilidad física. Aquí solo preservamos una definición suficientemente general. La palabra «nuevo» no significa siempre «futuro» ni garantiza el mismo nivel de riesgo. Una predicción dentro de la región ya contrastada y una extrapolación lejana son metodológicamente diferentes.

Usaremos informalmente:

- **interpolación**: predecir dentro de una región rodeada o cubierta por condiciones previamente observadas;
- **extrapolación**: extender la predicción más allá del dominio donde el modelo fue ajustado o contrastado.

No fijaremos todavía una definición matemática general.

Lo importante es:

$$\boxed{\text{dato nuevo} \not\Rightarrow \text{mismo nivel de riesgo.}}$$

Una extrapolación puede poner a prueba una estructura de manera particularmente fuerte, pero también puede simplemente abandonar el régimen de validez del modelo. Por eso toda extrapolación exige revisar

$$\mathcal{R}.$$

Retrodicción. A veces conocemos información actual y queremos reconstruir un estado anterior.

La dirección de la pregunta cambia:

$$\text{presente} \longrightarrow \text{pasado posible.}$$

Definición operativa 1.24 — Retrodicción Una **retrodicción** es una inferencia, realizada mediante un modelo, desde datos o estados posteriores hacia estados, condiciones o acontecimientos anteriores compatibles con ellos.

No es simplemente «recordar el pasado». Es usar una estructura física para reconstruirlo. Supongamos que

$$E : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

es una regla de evolución.

Dado un estado final

$$s_1,$$

queremos encontrar estados s_0 tales que

$$E(s_0) = s_1.$$

Puede ocurrir que exista:

- ningún estado previo compatible;
- un único estado previo;
- varios estados previos.

La retrodicción no es automáticamente única. Sea

$$\mathcal{S} = \{a, b, c\}$$

y definamos:

$$E(a) = c,$$

$$E(b) = c,$$

$$E(c) = b.$$

Supongamos que observamos actualmente: $s_1 = c$.

¿Qué estados anteriores son compatibles?
Buscamos soluciones de: $E(s_0) = c$.
Tenemos: $E(a) = c$
y

$$E(b) = c.$$

Por tanto, el pasado compatible puede ser: $s_0 = a$
o

$$s_0 = b.$$

La información actual no determina cuál ocurrió.
Así:

$$\boxed{\text{evolución bien definida hacia adelante} \not\Rightarrow \text{retrodicción única.}}$$

En la práctica quizá ni siquiera conozcamos el estado final completo.

Conocemos un dato: $O(s_1) = d$. Si el observable

$$O : \mathcal{S} \to \mathcal{V}$$

no es inyectivo, varios estados presentes pueden producir el mismo dato.

Entonces existen dos fuentes de ambigüedad:

1. varios estados presentes compatibles con el dato;
2. varios estados pasados compatibles con cada estado presente.

Por eso reconstruir el pasado puede ser un problema mucho más delicado que simplemente «poner tiempo negativo». Imaginemos que un modelo, a partir de datos actuales, retrodice:

en una etapa anterior debía haber ocurrido cierto evento observable.

Si posteriormente encontramos un registro independiente de ese pasado —un archivo experimental, una huella material, una observación astronómica conservada— podemos contrastar la retrodicción. Así, el valor metodológico de una consecuencia física no depende solamente de que apunte hacia el futuro cronológico.

También puede depender de que alcance información **no utilizada para producirla**.

Explicación. Ahora aparece una cuarta palabra.

Supongamos que un modelo:

- ajusta correctamente los datos;
- predice correctamente una observación nueva;
- permite reconstruir estados anteriores.

¿Hemos explicado el fenómeno?

Tal vez. Pero no automáticamente.

La palabra **explicación** exige preguntar qué parte de la estructura del modelo hace inteligible el resultado. **Definición operativa 1.25 — Explicación física** Llamaremos **explicación física**, en sentido operativo, a un argumento que muestra cómo un fenómeno, regularidad o resultado depende de estructuras, mecanismos, principios, condiciones o relaciones del modelo o de la teoría, de modo que podamos identificar qué elementos son responsables de que el resultado tenga la forma observada.

Esta definición no pretende resolver toda la filosofía de la explicación científica.

Nos basta para distinguir:

«el modelo da el número correcto»

de:

«podemos identificar por qué el modelo produce este comportamiento».

Consideremos un resultado esquemático:

$$Q = f(a, b, c).$$

Una explicación útil puede preguntar:

- ¿qué ocurre si cambiamos a?;
- ¿el resultado depende realmente de b?;
- ¿qué término domina?;
- ¿qué simetría obliga a cierta forma?;
- ¿qué mecanismo produce el signo?;
- ¿qué hipótesis es responsable de la regularidad?;
- ¿qué cambiaría si eliminamos una interacción?

La explicación no consiste solamente en repetir la derivación.

Consiste en reconocer **qué estructura produce qué consecuencia**.

Principio 1.14 — Explicar exige identificar dependencias Una explicación física no queda completa por el solo hecho de reproducir o predecir un resultado; debe hacer visible qué estructura, hipótesis, mecanismo o principio del modelo es responsable del comportamiento que se quiere comprender. Una derivación correcta puede ser poco explicativa si oculta qué dependencia produce el resultado:

Imaginemos una cadena algebraica de cincuenta pasos que termina en el número observado.

Puede ser matemáticamente impecable.

Pero quizá no sepamos todavía:

- qué hipótesis controla el resultado;
- por qué cambia de signo;
- por qué una variable no aparece;
- qué efecto es dominante;
- qué simplificación sería fatal.

En ese sentido, una derivación larga puede proporcionar una consecuencia sin proporcionar todavía una buena explicación física.

Esto conecta con §4:

una aproximación bien elegida puede ser más explicativa que una fórmula exacta si hace visible la jerarquía de efectos. Una explicación puede ser mecanística, estructural o unificadora, pero en todos los casos debe mostrar una dependencia que vaya más allá de reproducir un dato conocido.

No todas las explicaciones físicas tienen la misma forma.

Explicación causal o mecanística. Identifica una cadena de interacciones o procesos.

Explicación estructural. Muestra que un resultado está obligado por cierta geometría, restricción, invariancia o estructura matemática.

Explicación por unificación. Muestra que fenómenos aparentemente distintos son casos de un mismo principio.

No fijaremos fronteras rígidas entre estas categorías.

Solo queremos evitar identificar «explicación» con una única clase de relato. El peligro contrario también existe. Podemos contar una historia intuitiva y llamarla «explicación».

Pero una explicación física debe estar conectada con el modelo y sus consecuencias.

Si afirmamos que cierto mecanismo produce un resultado, debemos poder preguntar:

> ¿qué cambiaría si ese mecanismo no estuviera presente?

La explicación gana contenido cuando produce diferencias contrastables.

Por eso:

$$\boxed{\text{explicación física} \leftrightarrow \text{estructura del modelo} \leftrightarrow \text{consecuencias.}}$$

Supongamos que dos modelos M_1 y M_2 producen, para todos los datos disponibles:

$$P_1 = P_2.$$

No se sigue que posean la misma explicación.

Pueden atribuir el comportamiento a estructuras distintas.

Mientras no encontremos una observación capaz de distinguirlas, los datos no seleccionan necesariamente una interpretación única. Esta situación prepara §9. Allí mostraremos matemáticamente, en un caso elemental, que una colección finita de datos no determina una única ley funcional. Existen al menos cuatro situaciones conceptuales.

Caso	Predice	Explica
A	sí	sí
B	sí	débilmente
C	no todavía	propone mecanismo
D	reproduce datos	no necesariamente

Caso A. Un modelo predice observaciones nuevas y muestra qué estructura las produce.

Caso B. Un modelo entrega resultados precisos, pero su mecanismo físico permanece poco transparente.

Caso C. Una hipótesis ofrece una explicación plausible, pero todavía no produce predicciones suficientemente precisas.

Caso D. Una fórmula flexible reproduce datos conocidos sin revelar por qué el fenómeno ocurre.

La ciencia intenta, idealmente, mejorar simultáneamente capacidad predictiva y comprensión.

Pero no son la misma propiedad. Supongamos que observamos:

> dos configuraciones aparentemente diferentes producen el mismo resultado.

Proponemos una explicación:

> ambas comparten una estructura relevante S y las diferencias restantes no intervienen en el fenómeno.

Esta explicación debería permitir una prueba.

Buscamos una tercera configuración que:

- conserve S;
- cambie otros aspectos;
- no haya sido usada para construir la hipótesis.

Si el modelo predice que el resultado permanecerá igual y la observación coincide, la explicación gana apoyo.

La idea es:

una buena explicación abre nuevas preguntas contrastables.

Separar construcción y contraste. Recordemos:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{S}, X, \theta, \mathcal{L}, I, B, \mathcal{R}),$$

junto con

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}.$$

Podemos situar nuestras nuevas operaciones.

Ajuste. Usa observaciones para fijar parte de: $\theta, \quad I, \quad \mathcal{L}$

o incluso elecciones de estructura.

Predicción. Con el modelo ya fijado, deriva consecuencias para casos no utilizados en ese ajuste.

Retrodicción. Busca estados o condiciones anteriores compatibles con datos posteriores.

Explicación. Identifica qué componentes de

$$\mathcal{M}$$

y de

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$$

son responsables de la forma del fenómeno. Podemos representar un buen procedimiento mediante dos conjuntos de datos conceptualmente separados.

Datos de construcción.

$$D_{\text{ajuste}}.$$

Se usan para elegir parámetros o estructura.

Datos de contraste.

$$D_{\text{nuevo}}.$$

No se utilizan para fijar aquello que se va a poner a prueba.

Entonces:

$$D_{\text{ajuste}} \longrightarrow M_{\text{fijado}} \longrightarrow P(D_{\text{nuevo}}) \longleftrightarrow D_{\text{nuevo}}.$$

No introducimos todavía estadística. La separación es puramente lógica. A veces tenemos pocos datos y necesitamos utilizarlos todos para construir el modelo.

Eso puede ser razonable. Pero debemos describir correctamente lo que hemos logrado.

Podemos afirmar:

> «El modelo es compatible con los datos utilizados para construirlo.»

No debemos exagerar:

> «El modelo ha predicho independientemente todos esos datos.»

Entonces la siguiente tarea científica puede ser buscar:

- nuevos casos;
- nuevas escalas;

- nuevos observables;
- nuevas condiciones experimentales. Supongamos que un modelo ha funcionado para:

$$x \in [0, 10].$$

Ahora predecimos para: $x = 10.1$. Tal vez sea razonable. Pero predecir para: $x = 10^{12}$ puede exigir una justificación completamente distinta.

Antes de aceptar una extrapolación debemos preguntar:

$$\boxed{\text{¿seguimos dentro de } \mathcal{R}?}$$

Una predicción algebraicamente bien calculada puede ser físicamente irrelevante si abandona el régimen de validez. Supongamos:

$$P_{\text{modelo}} \neq O_{\text{experimento}}.$$

¿Qué ha fallado?

Todavía no podemos decir.

Podrían estar implicados:

- la teoría;
- el modelo particular;
- un parámetro;
- una condición inicial;
- una aproximación;
- una idealización;
- una regla `[OBS]`;
- el procedimiento experimental.

En §12 formalizaremos esta lógica.

Por ahora la lección es:

$$\boxed{\text{fallo predictivo} \neq \text{diagnóstico automático.}}$$

Ficha FPM — Ajuste, predicción, retrodicción y explicación 1. **Datos usados:** ¿qué observaciones ya conocíamos? 2. **Ajuste:** ¿qué parámetros o elecciones se fijaron con esos datos? 3. **Predicción:** ¿qué resultado no fue utilizado para fijar la consecuencia? 4. **Régimen:** ¿la nueva condición pertenece a $\mathcal{R}$? 5. **Observación:** ¿qué regla `[OBS]` conecta la predicción con un dato? 6. **Retrodicción:** si inferimos el pasado, ¿la reconstrucción es única? 7. **Explicación:** ¿qué estructura concreta del modelo produce el resultado? 8. **Alternativas:** ¿otra estructura podría producir observaciones semejantes? 9. **Nueva prueba:** ¿qué observación distinguiría las alternativas? Esta separación prepara §9: incluso un ajuste perfecto sobre datos finitos no determina por sí solo una ley única. La fuerza de una prueba aumenta cuando el modelo se compromete con resultados que no fueron utilizados para construir precisamente esa consecuencia.

Ejercicio.

Ejercicio 1.22 — Ajuste, predicción, retrodicción y explicación.

Considera el modelo

$$y = kx.$$

Se observa primero: $(x_1, y_1) = (2, 6)$. Con ese dato se fija: $k = 3$.

Parte A. Clasifica cada operación.

1. Verificar que $6 = 3 \cdot 2$.
2. Antes de medir un segundo caso, calcular que para $x_2 = 5$ el modelo da $y_2 = 15$.
3. Medir después y_2 y compararlo con 15.
4. Usar también el segundo dato para modificar k y después presentar ambos datos como «predicciones independientes».

Parte B. Sea ahora

$$\mathcal{S} = \{a, b, c\}$$

con evolución

$$E(a) = c, \qquad E(b) = c, \qquad E(c) = b.$$

Si el estado actual es c, determina todos los estados anteriores posibles.

Parte C. Un estudiante afirma:

> «Como el modelo reproduce correctamente todos los datos con los que fue construido, ya hemos explicado el fenómeno.»

Analiza la afirmación. **Solución.**

Parte A.1. Comprobar

$$6 = 3 \cdot 2$$

es verificar que el modelo ajustado reproduce el dato utilizado para fijar k.
Clasificación:

$$\boxed{\text{reproducción de dato de ajuste}}.$$

No es una predicción independiente.

Parte A.2. El cálculo

$$y_{2,\text{pred}} = 3 \cdot 5 = 15$$

se hace antes de usar el resultado del segundo caso.
Clasificación:

$$\boxed{\text{predicción}}.$$

Es una consecuencia `[MATH]` del modelo ya fijado.

Parte A.3. Medir y_2 y compararlo con 15 es:

$$\boxed{\text{contraste experimental de una predicción}}.$$

La comparación necesita una regla `[OBS]`. Si la observación coincide, el nuevo dato apoya el modelo dentro del régimen considerado. Si no coincide, habrá que diagnosticar qué componente falla.

Parte A.4. Si utilizamos también el segundo dato para volver a escoger k, ese dato deja de ser independiente respecto del ajuste resultante. Presentarlo después como si hubiera sido predicho sin haber intervenido en la construcción viola principio 1.13.

Clasificación:

$$\boxed{\text{nuevo ajuste, no predicción independiente}}.$$

Parte B. Buscamos todos los $s_0 \in \mathcal{S}$ tales que

$$E(s_0) = c.$$

Como $E(a) = c$

y

$$E(b) = c,$$

los estados pasados compatibles son:

$$\boxed{s_0 \in \{a, b\}}.$$

No podemos distinguirlos utilizando solo el estado actual c. Por tanto, la retrodicción no es única.

Parte C. La afirmación es demasiado fuerte.

Que el modelo reproduzca los datos utilizados para construirlo muestra, como mínimo, **compatibilidad con esos datos**.

No demuestra por sí solo:

- capacidad predictiva independiente;
- unicidad del modelo;
- corrección de todas sus idealizaciones;
- adecuación fuera del régimen contrastado;
- explicación física del mecanismo.

Para hablar de explicación necesitamos identificar qué estructura del modelo produce el fenómeno y qué diferencias observables esperaríamos si esa estructura cambiara.

Además, una prueba más fuerte debería reservar algún resultado nuevo:

$$D_{\text{ajuste}} \longrightarrow M \longrightarrow P(D_{\text{nuevo}}) \longleftrightarrow D_{\text{nuevo}}.$$

La conclusión correcta es:

$$\boxed{\text{ajustar} \neq \text{predecir} \neq \text{explicar.}}$$

Síntesis. Ya podemos distinguir cuatro operaciones.

$$\boxed{\text{ajuste} = \text{usar datos para fijar el modelo}}$$

$$\boxed{\text{predicción} = \text{obtener una consecuencia para un caso no usado para fijarla}}$$

$$\boxed{\text{retrodicción} = \text{inferir estados o condiciones anteriores desde información posterior}}$$

$$\boxed{\text{explicación} = \text{hacer visible qué estructura produce el fenómeno}}$$

La relación entre ellas puede representarse como:

$$D_{\text{ajuste}} \to M \to \begin{cases} \text{predicción}, \\ \text{retrodicción}, \\ \text{explicación} \end{cases} \longleftrightarrow D_{\text{nuevo}}.$$

Y conservaremos dos reglas:

$$\boxed{\text{dato usado para ajustar} \neq \text{predicción independiente}}$$

y

$$\boxed{\text{éxito predictivo} \neq \text{explicación automática.}}$$

Ahora podemos enfrentar una pregunta más profunda.

Si observamos una colección finita de datos y encontramos una función que pasa exactamente por todos ellos, ¿hemos descubierto **la** ley?

La respuesta matemática será no. En la sección siguiente lo demostraremos.

Entramos así en el §9.

9. Datos finitos no determinan una ley única

Una tabla no trae escrita su ley. Supongamos que realizamos un experimento y obtenemos los pares

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

Imaginemos además que encontramos una función f que reproduce exactamente todos los datos: $f(x_i) = y_i$

para cada

$$i = 1, \dots, n.$$

La tentación es decir:

> «Hemos encontrado la ley que generan los datos».

Pero esa conclusión contiene más información que las observaciones.

Los datos nos dicen qué debe ocurrir en los puntos medidos: $x_1, \dots, x_n$.

No nos dicen directamente qué debe ocurrir en los demás valores de x.

Entre dos puntos observados, o fuera del intervalo observado, quedan infinitas posibilidades. Esta sección convertirá esa cautela en un resultado matemático exacto.

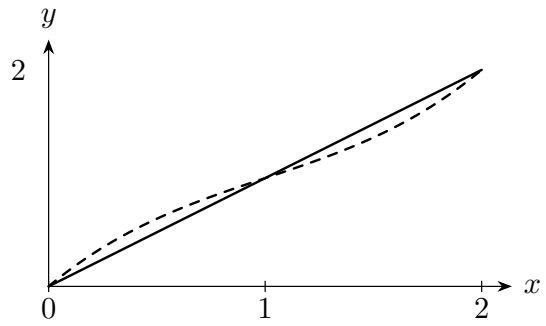


Figura 1.5. Las curvas $y = x$ (continua) y $y = x + x(x-1)(x-2)/3$ (discontinua) coinciden en $x = 0, 1, 2$. Los tres datos no fijan la interpolación entre ellos. Véase §9.

Compatibilidad no es unicidad. Conviene separar dos afirmaciones.

Afirmación A. La función f es **compatible** con los datos: $f(x_i) = y_i$ para todos los i.

Afirmación B. La función f es la **única** función compatible con los datos. La primera no implica la segunda.

En símbolos:

$$\boxed{f(x_i) = y_i \text{ para todos los datos } \not\Rightarrow f \text{ es la única ley compatible.}}$$

El salto de compatibilidad a unicidad necesita hipótesis adicionales.

Dos puntos: la intuición geométrica más simple. Tomemos dos observaciones: $(0, 0)$, $(1, 1)$. La función

$$p(x) = x$$

pasa por ambos puntos.

Podríamos pensar que los datos sugieren la recta

$$y = x.$$

Pero consideremos ahora

$$q(x) = x + c\,x(x-1),$$

donde c es cualquier constante. En $x = 0$, $q(0) = 0 + c\cdot 0\cdot(-1) = 0$. En $x = 1$, $q(1) = 1 + c\cdot 1\cdot 0 = 1$. Por tanto, **todos** los valores de c producen funciones que pasan por los dos mismos puntos. Para $c = 0$: $q(x) = x$. Para $c = 1$: $q(x) = x + x(x-1) = x^2$.

Para $c = -1$: $q(x) = x - x(x-1) = 2x - x^2$.

Las tres funciones coinciden en los datos: $q(0) = 0$, $q(1) = 1$,

pero no coinciden, por ejemplo, en

$$x = \frac{1}{2}.$$

Así aparecen muchas continuaciones posibles de la misma evidencia finita.

El truco algebraico. ¿Qué hizo funcionar el ejemplo?

Añadimos a $p(x)$ un término que vale cero exactamente en todos los puntos observados. Con dos datos usamos: $x(x-1)$.

Este producto se anula cuando:

$$x = 0$$

o

$$x = 1.$$

Por eso modificar

$$p(x)$$

mediante $p(x) + c\,x(x-1)$

no altera ninguno de los datos. La idea general será construir un polinomio que se anule en todos los valores observados.

El polinomio que desaparece en los datos. Sean

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

valores distintos de la variable independiente.

Definimos $Z(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$.

No necesitamos ninguna teoría avanzada de polinomios para observar que, para cada índice j, $Z(x_j) = \prod_{i=1}^{n}(x_j - x_i)$. En ese producto aparece el factor correspondiente a $i = j$: $x_j - x_j = 0$. Por tanto,

$$\boxed{Z(x_j) = 0}$$

para todo

$$j = 1, \dots, n.$$

Esta es toda la idea algebraica que necesitaremos.

Primera proposición formal del capítulo. 1.1 — Datos finitos no determinan una ley polinómica única

Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ valores distintos y sean $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Supongamos que un polinomio

$$p \in \mathbb{R}[x]$$

satisface $p(x_i) = y_i$

para todo

$$i = 1, \dots, n.$$

Entonces, para toda constante

$$c \in \mathbb{R},$$

el polinomio

$$p_c(x) = p(x) + c\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

satisface exactamente los mismos datos: $p_c(x_i) = y_i$
para todo

$$i = 1, \dots, n.$$

Además, si $c_1 \neq c_2$, entonces $p_{c_1} \neq p_{c_2}$. Por tanto, una vez que existe un polinomio compatible con los datos, existen infinitos polinomios distintos compatibles con esos mismos datos.

Demostración de 1.1.
Paso 1 — Fijar uno de los datos. Sea

$$j \in \{1, \dots, n\}.$$

Queremos evaluar

$$p_c(x_j).$$

Por definición: $p_c(x_j) = p(x_j) + c\prod_{i=1}^{n}(x_j - x_i)$.
Paso 2 — Usar el dato conocido. Como p es compatible con los datos, $p(x_j) = y_j$. Por tanto: $p_c(x_j) = y_j + c\prod_{i=1}^{n}(x_j - x_i)$.
Paso 3 — Detectar el factor nulo. En el producto aparece el factor

$$x_j - x_j = 0.$$

Luego: $\prod_{i=1}^{n}(x_j - x_i) = 0$.
Así, $p_c(x_j) = y_j + c \cdot 0 = y_j$.
Como j era arbitrario,

$$\boxed{p_c(x_i) = y_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.}$$

Paso 4 — Mostrar que la familia contiene polinomios distintos. Sean

$$c_1 \neq c_2.$$

Entonces:

$$p_{c_1}(x) - p_{c_2}(x) = (c_1 - c_2)\prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Como $c_1 - c_2 \neq 0$
y

$$\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

no es el polinomio cero, tenemos: $p_{c_1} - p_{c_2} \neq 0$. Por tanto: $p_{c_1} \neq p_{c_2}$.
Finalmente, como existen infinitos números reales c, obtenemos infinitos polinomios distintos compatibles con los mismos datos.

QED

Qué se demostró exactamente. La proposición **no** dice que cualquier polinomio pase por los datos.

Dice algo más preciso.

Partimos de **un** polinomio compatible:

$$p.$$

Después construimos una familia: $\{p_c\}$.

Todos los miembros conservan las observaciones porque la modificación añadida desaparece en los puntos medidos.

La estructura es:

ajuste conocido + término invisible en los datos = nuevo ajuste igualmente compatible.

Ésa es la idea que debemos conservar.

La demostración es matemática; la conclusión física necesita interpretación. `1.1` es una proposición matemática. Su estatus es: [MATH].

La proposición no afirma por sí sola:

> «Las leyes de la naturaleza son polinomios».

Tampoco afirma:

> «Nunca podemos conocer ninguna ley física».

Lo que demuestra es más limitado y más útil:

> una colección finita de valores no basta, por sí sola, para seleccionar una única función polinómica entre todas las que podrían reproducirlos.

La inferencia física será:

ajuste exacto a datos finitos $\not\Rightarrow$ identificación lógica de una ley única.

El papel de las hipótesis adicionales. ¿Cómo puede la física elegir entre funciones compatibles?

Necesitamos información adicional.

Por ejemplo, podemos imponer:

- una clase restringida de funciones;
- una simetría;
- una estructura teórica;
- un mecanismo;
- un principio de conservación;
- un régimen de validez;
- restricciones sobre parámetros;
- nuevas observaciones.

La función no se elige solamente preguntando:

> «¿pasa por los puntos?»

También preguntamos:

«¿qué estructura física la justifica?»

Este será precisamente el tema de §10.

Si restringimos la clase, la situación puede cambiar. Supongamos que tenemos los dos puntos

$$(0,0), \qquad (1,1).$$

Entre **todas** las funciones hay innumerables posibilidades.

Entre todos los polinomios también.

Pero si imponemos la hipótesis adicional:

«la relación debe ser lineal y de la forma $y = mx + b$»,

entonces los dos datos pueden determinar m y b. La unicidad no proviene solamente de los dos puntos.

Proviene de:

$$\boxed{\text{datos} + \text{restricción de clase.}}$$

Por tanto, cuando un conjunto de datos parece «determinar» una ley debemos preguntar:

¿dentro de qué clase de modelos?

Ajuste perfecto y complejidad. Imaginemos cien datos experimentales. Una función muy flexible podría construirse para pasar exactamente por todos ellos.

¿Debemos preferirla automáticamente?

No.

Un ajuste perfecto puede ocultar varios problemas:

- sensibilidad excesiva;
- mala extrapolación;
- gran cantidad de parámetros;
- ausencia de interpretación;
- adaptación a irregularidades accidentales;
- falta de conexión con una teoría física.

Todavía no desarrollaremos estos problemas estadísticamente.

Solo fijaremos la diferencia lógica:

$$\boxed{\text{capacidad de reproducir datos} \neq \text{calidad física automática del modelo.}}$$

Volver a §8: ajuste frente a predicción. La proposición explica por qué principio 1.13 era necesaria.

Supongamos que elegimos p_c después de conocer todos los datos.

Entonces todos los miembros de la familia pueden ajustarlos perfectamente. Pero en un valor nuevo

$$x_* \notin \{x_1, \dots, x_n\},$$

tenemos:

$$p_c(x_*) = p(x_*) + c\prod_{i=1}^{n}(x_* - x_i).$$

Como ningún factor es necesariamente cero, el resultado depende de c.

Distintos modelos compatibles con los mismos datos pueden producir predicciones diferentes. Por eso un nuevo experimento puede ser discriminante.

Ejemplo desarrollado 14 — Dos datos, infinitas predicciones. Retomemos: $(0,0)$, $(1,1)$. La familia es: $p_c(x) = x + c\,x(x-1)$.

Preguntemos qué predice cada modelo para: $x = 2$.

Tenemos: $p_c(2) = 2 + c \cdot 2 \cdot 1 = 2 + 2c$.

Si: $c = 0$,

obtenemos: $p_0(2) = 2$.

Si: $c = 1$,

obtenemos: $p_1(2) = 4$.

Si: $c = -1$,

obtenemos: $p_{-1}(2) = 0$.

Tres funciones indistinguibles en los datos originales producen tres predicciones completamente distintas en el nuevo punto.

Por tanto:

nuevo dato $\longrightarrow$ posible discriminación entre modelos.

Un dato nuevo elimina modelos, pero no necesariamente deja uno solo. Supongamos que el nuevo experimento produce: $(2,4)$.

Dentro de nuestra familia: $p_c(2) = 2 + 2c$. Para reproducir 4 necesitamos: $2 + 2c = 4$.

Entonces: $c = 1$.

Parece que hemos seleccionado: $p(x) = x^2$. Pero debemos ser cuidadosos.

Hemos seleccionado $c = 1$ **dentro de esta familia particular**.

Todavía podemos construir otras funciones que coincidan en: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y difieran en otra parte. De hecho, podemos añadir: $d\,x(x-1)(x-2)$.

Por tanto:

más datos restringen $\neq$ datos finitos garantizan unicidad absoluta.

Tres datos y la misma construcción. Supongamos ahora: $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$. El polinomio

$$p(x) = x^2$$

reproduce los tres datos.

Construimos: $p_c(x) = x^2 + c\,x(x-1)(x-2)$. En cada punto observado, uno de los factores del producto se anula.

Por tanto:

$$p_c(0) = 0,$$

$$p_c(1) = 1,$$

$$p_c(2) = 4.$$

Pero en

$$x = 3$$

obtenemos: $p_c(3) = 9 + 6c$.

Así, los tres datos tampoco fijan una predicción única para $x = 3$.

Lo que los datos sí hacen. No debemos ir al extremo contrario.

Los datos finitos no son inútiles.

Cada nuevo dato puede:

- eliminar modelos incompatibles;
- restringir parámetros;
- reducir familias posibles;
- revelar fallos de una aproximación;
- sugerir nuevas regularidades;
- distinguir hipótesis rivales.

La conclusión correcta no es:

> «Los datos no dicen nada».

Es:

> «Los datos no seleccionan una ley sin ayuda de hipótesis, estructura y nuevas pruebas».

La subdeterminación es concreta, no retórica. La palabra **subdeterminación** se utiliza en filosofía de la ciencia para problemas mucho más generales. No necesitamos adoptarla aquí como término técnico. Nuestro resultado es completamente concreto: $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$

puede ser compatible con una familia infinita de polinomios.

No estamos formulando una tesis metafísica.

Estamos exhibiendo las funciones.

El papel del matemático. Para un lector matemático aparece una lección importante. La demostración de la proposición 1.1 es sencilla. La dificultad física comienza después.

La matemática nos dice:

hay no unicidad.

La física debe preguntar:

> ¿qué criterio permite seleccionar una familia relevante?

Es aquí donde vuelven:

- fenómeno;
- sistema;
- estado;
- idealización;
- aproximación;

- teoría;
- interpretación;
- predicción;
- experimento.

El teorema no reemplaza esas decisiones.

Las hace necesarias de manera explícita.

El planteamiento correcto del problema. Arnold insiste en que una contribución matemática esencial a las ciencias naturales ocurre antes del cálculo rutinario: al formular correctamente la pregunta y elegir el modelo apropiado.[4]

Proposición 1.1 muestra una razón elemental para esa insistencia. Una tabla finita no contiene instrucciones suficientes para producir automáticamente su continuación. Debemos añadir estructura.

Así:

$$\boxed{\text{datos} + \text{elección de modelo} \longrightarrow \text{predicciones.}}$$

La elección de modelo no es una operación puramente mecánica escondida dentro del álgebra.

Principio metodológico. Principio 1.15 — Ajuste exacto no implica identificación única Que un modelo reproduzca exactamente un conjunto finito de datos no basta para identificarlo como la única ley compatible. La selección requiere restricciones adicionales, estructura física o nuevas observaciones capaces de discriminar entre alternativas.

Este principio no añade contenido al teorema.

Registra su consecuencia metodológica para el resto del libro.

Qué no demuestra proposición 1.1. Conviene cerrar varias interpretaciones incorrectas.

proposición 1.1 no demuestra que todas las teorías sean igualmente buenas. Los modelos pueden diferir en:

- coherencia;
- simplicidad;
- alcance;
- capacidad predictiva;
- compatibilidad con otros fenómenos;
- estructura teórica;
- adecuación física.

proposición 1.1 no demuestra que nunca haya unicidad. Puede haber unicidad **dentro de una clase restringida**.

proposición 1.1 no demuestra que la predicción sea imposible. Precisamente las distintas predicciones permiten diseñar experimentos discriminantes.

proposición 1.1 no demuestra que la matemática sea insuficiente. La matemática es la que hace visible la no unicidad. Lo que no puede hacer, sin premisas adicionales, es inventar qué estructura física debemos imponer.

[4]Arnold, *Mathematical Understanding of Nature*, prefacio, p. xiii.

De la no unicidad al diseño experimental. Supongamos que dos candidatos:

$$f$$

y

$$g$$

coinciden en todos los datos conocidos: $f(x_i) = g(x_i)$. Para distinguirlos debemos buscar algún x_* tal que: $f(x_*) \neq g(x_*)$. Entonces diseñamos una observación en esa condición.

La lógica es:

$$\boxed{f(x_*) \neq g(x_*) \longrightarrow \text{experimento potencialmente discriminante.}}$$

Este es el puente entre §9 y §10.

No basta saber que existen muchos modelos.

Debemos aprender **cómo elegir dónde mirar** para separarlos.

Ejercicios de §9. Ejercicio 1.23 — Demostrar la familia de no unicidad.

Sean $x_1, \dots, x_n$ distintos y supón que

$$p(x_i) = y_i$$

para todo i.

Define

$$q(x) = p(x) + 7\prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Demuestra directamente que: $q(x_i) = y_i$

para todo i.

Solución.

Fijemos un índice j. Por definición: $q(x_j) = p(x_j) + 7\prod_{i=1}^{n}(x_j - x_i)$.

Como: $p(x_j) = y_j$,

tenemos: $q(x_j) = y_j + 7\prod_{i=1}^{n}(x_j - x_i)$. En el producto aparece el factor: $x_j - x_j = 0$. Por tanto: $\prod_{i=1}^{n}(x_j - x_i) = 0$. Luego: $q(x_j) = y_j$.

Como j era arbitrario:

$$\boxed{q(x_i) = y_i \quad \text{para todo } i.}$$

La constante 7 no desempeña ningún papel especial. Podría sustituirse por cualquier c. **Ejercicio 1.24 — Dos puntos, infinitas leyes.**

Considera los datos: $(0, 1), \qquad (1, 2)$.

1. Encuentra un polinomio lineal p que pase por ambos puntos.
2. Construye una familia p_c de polinomios que pase por los mismos puntos.
3. Calcula las predicciones para $x = 2$ cuando $c = 0$, $c = 1$ y $c = -1$.
4. Explica qué demuestra el ejercicio.

Solución.

1. Polinomio lineal. La recta: $p(x) = x + 1$
satisface:

$$p(0) = 1,$$

$$p(1) = 2.$$

2. Familia. El factor que se anula en los puntos observados es: $x(x-1)$. Por tanto: $p_c(x) = x + 1 + c\,x(x-1)$. Para $x = 0$: $p_c(0) = 1$. Para $x = 1$: $p_c(1) = 2$.

3. Predicción en $x = 2$. Tenemos: $p_c(2) = 3 + 2c$.
Entonces:

$$p_0(2) = 3,$$

$$p_1(2) = 5,$$

$$p_{-1}(2) = 1.$$

4. Interpretación. Los datos originales no distinguen entre estas funciones. Pero un nuevo dato en $x = 2$ podría hacerlo.
Por tanto:

$$\boxed{\text{mismo ajuste} \not\Rightarrow \text{misma predicción.}}$$

Ejercicio 1.25 — Tres puntos y una nueva familia.
Considera los datos: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$. El polinomio

$$p(x) = x^2 - x + 1$$

es compatible con ellos.

1. Verifica los tres datos.
2. Construye la familia

$$p_c(x) = p(x) + c\,x(x-1)(x-2).$$

3. Demuestra que todos los miembros de la familia conservan los tres datos.
4. Calcula $p_c(3)$.
5. Si una nueva observación produce $(3, 7)$, determina qué valor de c queda seleccionado **dentro de esta familia**.
6. Explica por qué ese nuevo dato todavía no demuestra unicidad absoluta entre todas las funciones posibles.

Solución.

1. Verificación. Para $x = 0$: $p(0) = 1$. Para $x = 1$: $p(1) = 1 - 1 + 1 = 1$. Para $x = 2$: $p(2) = 4 - 2 + 1 = 3$. Por tanto, p reproduce los tres datos.

2. Familia. Definimos: $p_c(x) = x^2 - x + 1 + c\,x(x-1)(x-2)$.

3. Conservación de los datos. En $x = 0$, el factor x es cero. En $x = 1$, el factor $(x - 1)$ es cero. En $x = 2$, el factor $(x - 2)$ es cero.

Por tanto:

$$p_c(0) = 1,$$

$$p_c(1) = 1,$$

$$p_c(2) = 3$$

para todo c.

4. Valor en $x = 3$. Tenemos: $p(3) = 9 - 3 + 1 = 7$.

Además: $3(3 - 1)(3 - 2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Luego: $p_c(3) = 7 + 6c$.

5. Nuevo dato. Si observamos: $p_c(3) = 7$,

entonces: $7 + 6c = 7$.

Así: $6c = 0$

y:

$$\boxed{c = 0}.$$

Dentro de esta familia queda seleccionado el polinomio: $p(x) = x^2 - x + 1$.

6. Por qué no hay unicidad absoluta. Ahora tenemos cuatro datos.

Podemos modificar nuevamente p mediante un término que se anule en los cuatro valores: $d\,x(x-1)(x-2)(x-3)$. Por tanto: $p_d(x) = p(x) + d\,x(x-1)(x-2)(x-3)$

reproduce los cuatro datos para cualquier d. La nueva observación restringió la familia anterior, pero los datos siguen siendo finitos.

$$\boxed{\text{más evidencia} \Rightarrow \text{más restricciones,}}$$

pero no:

$$\boxed{\text{evidencia finita} \Rightarrow \text{unicidad entre todas las funciones.}}$$

Síntesis. La primera proposición formal del capítulo establece:

$$\boxed{p_c(x) = p(x) + c\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)}$$

y:

$$\boxed{p_c(x_i) = p(x_i) = y_i}$$

para todos los datos observados.

Por tanto:

$$\boxed{\text{datos finitos} \nRightarrow \text{ley funcional única.}}$$

La consecuencia metodológica es principio 1.15:

$$\boxed{\text{ajuste exacto} \not\Rightarrow \text{identificación única.}}$$

Pero esto abre una pregunta constructiva.
Si muchas funciones son compatibles con los mismos datos, ¿cómo elegimos entre ellas?
La respuesta no puede ser simplemente:

> «escogemos la que nos gusta».

Necesitamos criterios físicos y matemáticos:

- estructura;
- simplicidad relevante;
- simetría;
- mecanismo;
- compatibilidad con teorías;
- régimen;
- capacidad de producir nuevas predicciones;
- experimentos discriminantes.

Ése será el objeto de (§10).

10. Cómo se elige entre modelos compatibles con los datos

Después de la no unicidad. En §9 demostramos que, si un polinomio p reproduce una colección finita de datos

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

entonces toda la familia

$$p_c(x) = p(x) + c \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

reproduce exactamente esos mismos datos.
Por tanto:

$$\boxed{\text{ajuste exacto} \not\Rightarrow \text{identificación única.}}$$

Ahora aparece la pregunta físicamente interesante:

> Si varios modelos son compatibles con los datos disponibles, ¿cómo elegimos entre ellos?

Una primera respuesta sería:

> obteniendo más datos.

Eso es correcto, pero incompleto.
Antes de medir algo nuevo debemos decidir **qué** medir. Si dos modelos coinciden en todas las condiciones que volvemos a observar, el nuevo experimento no los distinguirá.

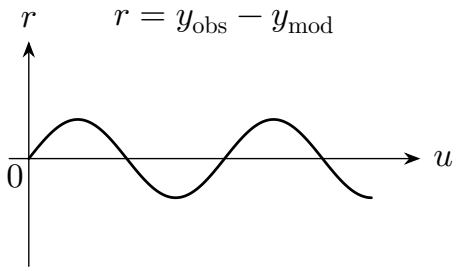


Figura 1.6. El residuo es la diferencia entre la observación y la predicción. Un patrón oscilatorio persistente puede señalar estructura que el modelo no representa. La curva es un esquema de diagnóstico, no una prueba estadística de rechazo. Véase §10.

La selección de modelos exige combinar:

- evidencia;
- estructura física;
- teoría;
- economía de hipótesis;
- régimen de validez;
- capacidad explicativa;
- nuevas predicciones;
- diseño experimental. Sería cómodo disponer de una regla:

$$\text{modelo A} > \text{modelo B}$$

que pudiera decidirse siempre mediante un solo número.

No adoptaremos tal regla. En distintas situaciones pueden importar criterios diferentes.

Un modelo puede ser:

- más simple;
- más preciso;
- más general;
- más fácil de medir;
- más conectado con una teoría;
- más explicativo;
- más robusto;
- más útil para una pregunta concreta.

Y esas ventajas pueden entrar en tensión.

Por tanto:

$$\boxed{\text{selección de modelos} \neq \text{aplicación mecánica de una única regla.}}$$

La comparación debe conservar visible **para qué pregunta**, **con qué datos** y **en qué régimen** se está eligiendo. **Definición operativa 1.26 — Criterio de selección de modelos** Un **criterio de selección de modelos** es una propiedad, condición o prueba utilizada para comparar modelos candidatos respecto de una pregunta física, una evidencia disponible y un régimen de aplicación determinados.

La definición es deliberadamente contextual. Un criterio que resulta decisivo para una tarea puede ser secundario para otra. Por ejemplo, si queremos una predicción de baja precisión en un régimen estrecho, un modelo sencillo puede ser suficiente.

Si queremos comprender un nuevo fenómeno fuera de ese régimen, la misma descripción puede dejar de ser adecuada. Recordemos principio 1.2 y principio 1.11:

- la adecuación es relativa a una pregunta;
- la suficiencia depende de la tarea.

No existe «el mejor modelo» sin contexto.

Puede existir:

> el modelo más adecuado para estimar cierta cantidad con determinada precisión en cierto régimen.

Un modelo muy detallado puede ser innecesario para una pregunta.

Uno muy simple puede ser insuficiente para otra.

Por tanto:

Principio 1.16 — La preferencia entre modelos es relativa a la tarea Comparar modelos exige declarar la pregunta, la evidencia y el régimen. Una preferencia metodológica no constituye un orden absoluto entre modelos independiente de su uso.

Tres capas de comparación. La comparación entre modelos puede organizarse en tres capas.

Coherencia mínima. Antes de comparar virtudes, debemos eliminar candidatos que fallan requisitos básicos.

Podemos pensar esta primera capa como una serie de filtros.

Filtro 1 — Coherencia matemática interna. El modelo no debe contradecir sus propias definiciones, restricciones y condiciones. Si declara: $s \in \mathcal{S}$

pero luego exige un estado que no pertenece a $\mathcal{S}$, el problema es interno.

No necesitamos ningún experimento para detectarlo.

Filtro 2 — Compatibilidad con la evidencia relevante. Si un modelo predice algo incompatible con observaciones fiables dentro del régimen que afirma describir, necesita revisión.

Filtro 3 — Interpretación física suficiente. Los símbolos que se comparan con datos deben tener una interpretación y una conexión observacional.

Filtro 4 — Régimen pertinente. No debemos juzgar un modelo usando una condición que él mismo no pretende describir sin antes preguntar si estamos extendiéndolo legítimamente. Estos filtros no garantizan que el modelo sea correcto. Solo impiden mantener candidatos que ya fallan requisitos elementales.

Adecuación y estructura. Una vez superados los filtros mínimos, pueden importar varios criterios que no forman un algoritmo universal:

Criterio	Pregunta de control
economía de estructura	¿cuánta estructura independiente se introduce para obtener las consecuencias?
integración teórica	¿cómo se relaciona con conocimiento ya bien establecido en el mismo régimen?
poder explicativo	¿qué dependencias, mecanismos o estructuras comunes hace visibles?

Criterio	Pregunta de control
alcance	¿qué diversidad de fenómenos organiza sin ocultar su régimen?
robustez	¿la conclusión depende críticamente de ajustes irrelevantes o excesivamente delicados?
acceso observacional	¿cómo se conectan sus predicciones con procedimientos `[OBS]`?

La simplicidad es un criterio metodológico, no una demostración de verdad. Si dos modelos describen igual de bien los fenómenos relevantes, puede ser razonable preferir el que requiere menos estructura no justificada. Pero debemos formular esta idea con cuidado.

Más simple no significa necesariamente:

- fórmula más corta;
- menos símbolos impresos;
- cálculo más fácil;
- menor número de páginas.

Una expresión compacta puede ocultar muchas hipótesis. Una expresión larga puede desarrollar explícitamente una estructura sencilla.

La pregunta útil es:

> ¿cuánta estructura independiente debemos introducir para obtener las consecuencias observadas?

Esta idea suele llamarse **parsimonia**. La utilizaremos como criterio metodológico, no como ley lógica de la naturaleza. Un modelo no vive aislado.

Puede compartir estructuras con teorías que ya explican otros fenómenos. Si un candidato requiere abandonar relaciones bien contrastadas en el mismo régimen, ese costo debe ser visible. En cambio, un modelo que surge naturalmente de un marco ya exitoso puede tener una ventaja metodológica.

Esto tampoco constituye una prueba automática. Una teoría nueva puede precisamente mostrar que un marco anterior era limitado.

La regla correcta es más modesta:

$$\boxed{\text{compatibilidad teórica amplia} = \text{evidencia estructural relevante},}$$

no:

$$\boxed{\text{compatibilidad con lo conocido} = \text{imposibilidad de revisión}.}$$

En §8 distinguimos predecir de explicar.

Dos modelos pueden reproducir el mismo dato y, sin embargo, uno puede mostrar por qué ocurre el patrón. Por ejemplo, una relación ajustada puede decir: $Y = f(X)$.

Otro modelo puede además mostrar que esa forma surge de:

- una simetría;
- una restricción;
- una interacción;
- una estructura común a varios fenómenos.

El segundo no es mejor únicamente por contar una historia más atractiva. Su explicación gana valor si organiza consecuencias que pueden ponerse a prueba. Por eso el poder explicativo está estrechamente ligado a la capacidad de generar nuevas preguntas. Un modelo que explica varios fenómenos con una misma estructura puede ser preferible a una colección de reglas independientes.

Pero mayor alcance no significa validez ilimitada.

Debemos conservar: $\mathcal{R}$. Un modelo puede unificar mucho dentro de cierto régimen y fallar fuera de él.

La pregunta correcta es:

> ¿qué diversidad de fenómenos explica con la misma estructura, y bajo qué condiciones?

No:

> ¿puede aplicarse sin restricciones a todo? Supongamos que una conclusión depende de que un parámetro tenga exactamente el valor:

$$a = 1.0000000000.$$

Si un cambio minúsculo de a destruye completamente el fenómeno, debemos preguntarnos si el mecanismo propuesto es físicamente estable frente a las variaciones inevitables de preparación y modelización. No desarrollaremos todavía una teoría matemática de estabilidad.

Usaremos **robustez** en sentido cualitativo:

> una conclusión es robusta si no depende críticamente de elecciones irrelevantes o ajustes excesivamente delicados para el fenómeno estudiado.

La falta de robustez no invalida automáticamente un modelo.

Algunos fenómenos físicos son genuinamente sensibles. Pero, si la sensibilidad es esencial, el modelo debe hacerla visible en lugar de esconderla. Un modelo puede introducir una cantidad que matemáticamente está perfectamente definida.

Pero si la comparación con el mundo depende de ella, necesitamos preguntar:

> ¿cómo se observa?

En términos de §5: $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$

debe ser suficientemente explícito. Y en términos de §6: [OBS]

debe conectar la cantidad con un procedimiento. Un modelo cuyas predicciones no poseen ninguna conexión observacional accesible puede seguir teniendo interés teórico. Pero no podemos contar esas predicciones como contrastes experimentales realizados.

Fecundidad predictiva. El criterio más fuerte aparece cuando los modelos, compatibles con los datos actuales, divergen en una situación todavía no observada. Volvamos a §9. Supongamos: $f(x_i) = g(x_i)$

para todos los puntos medidos.

Los modelos son indistinguibles en la evidencia disponible. La estrategia natural es buscar un valor x_* tal que: $f(x_*) \neq g(x_*)$. Entonces los modelos producen predicciones rivales. Si podemos realizar una observación en x_*, obtenemos una prueba potencialmente discriminante.

Esta idea merece una definición propia.

Definición operativa 1.27 — Experimento discriminante Un **experimento discriminante** entre dos o más modelos es un experimento diseñado en condiciones donde los modelos candidatos producen consecuencias observacionales distinguibles, de modo que el resultado pueda favorecer algunos candidatos frente a otros.

La palabra **distinguibles** importa.

No basta que las fórmulas sean diferentes. La diferencia debe poder conectarse, mediante `[OBS]`, con una observación capaz de separarlas. Este principio cambia la estrategia experimental.

Si queremos distinguir M_1 y M_2, no conviene repetir indefinidamente condiciones donde: $P_1 = P_2$. Debemos buscar, cuando sea posible: $P_1 \neq P_2$.

Principio 1.17 — Para discriminar modelos, buscar divergencia predictiva Si varios modelos son compatibles con los datos existentes, una prueba informativa debe buscar condiciones accesibles dentro de sus regímenes pertinentes en las que sus predicciones observables difieran.

El principio contiene tres restricciones:

1. **condiciones accesibles**;
2. **regímenes pertinentes**;
3. **diferencias observables**.

Una diferencia puramente formal que no puede medirse no basta todavía.

Diseñar una prueba discriminante. En §9 vimos los datos: $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Consideremos: $M_1 : \quad f(x) = x$,

y: $M_2 : \quad g(x) = x^2$.

Ambos reproducen:

$$f(0) = g(0) = 0,$$

$$f(1) = g(1) = 1.$$

Repetir observaciones únicamente en $x = 0$ y $x = 1$ no añade capacidad discriminante.

Probemos: $x_* = \frac{1}{2}$.

Entonces: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

mientras: $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Las predicciones son diferentes. Por tanto, una observación en: $x = \frac{1}{2}$

puede distinguir los modelos, siempre que el procedimiento experimental sea capaz de separar una salida próxima a $1/2$ de una próxima a $1/4$. En §9 también usamos: $x = 2$. Allí las predicciones eran distintas.

¿Por qué ahora preferimos: $x = \frac{1}{2}$?

Porque los datos originales estaban en:

$$x = 0$$

y: $x = 1$. Una medición intermedia puede mantenerse más cerca del régimen ya explorado.

Ir directamente a:

$$x = 2$$

podría introducir una dificultad adicional:

¿estamos extrapolando fuera del dominio donde ambos modelos eran plausibles?

Un buen experimento discriminante intenta cambiar **lo necesario para separar los modelos** sin introducir simultáneamente nuevas ambigüedades evitables. Supongamos ahora:

$$f(x_*) = 1.000000,$$

$$g(x_*) = 1.000001.$$

Matemáticamente: $f(x_*) \neq g(x_*)$. Pero si el instrumento solo permite distinguir diferencias del orden de: 0.01,

el experimento no separará operativamente ambos modelos.

No desarrollaremos aquí teoría de errores.

Solo fijamos la lógica:

predicciones matemáticamente distintas $\nRightarrow$ predicciones experimentalmente distinguibles.

La capacidad del procedimiento `[OBS]` forma parte del diseño. Supongamos tres modelos: $M_1, \quad M_2, \quad M_3$.

En una condición C predicen:

$$P_1 = a,$$

$$P_2 = b,$$

$$P_3 = b.$$

Si el experimento favorece b, podemos debilitar M_1.

Pero todavía no distinguimos entre:

$$M_2$$

y: M_3. El experimento fue informativo aunque no produjera una selección única.

Así:

discriminación $\neq$ decisión final garantizada.

La investigación puede proceder por sucesivas particiones de la familia de modelos. Imaginemos tres candidatos que coinciden en los datos iniciales.

Primera prueba. Elegimos una condición C_1 donde:

$$M_1$$

predice algo diferente de: $M_2,\ M_3$. El resultado descarta o debilita M_1.

Segunda prueba. Ahora buscamos una condición C_2 donde:

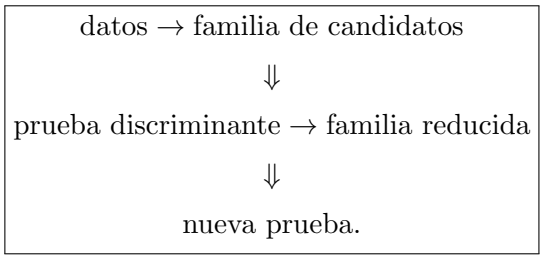
$$M_2$$

y:

$$M_3$$

difieran.

La selección de experimentos se vuelve adaptativa:



No necesitamos todavía una teoría estadística para comprender esta arquitectura lógica. Si elegimos puntos de prueba al azar, quizá los modelos sigan coincidiendo. La estructura física puede guiarnos.

Dos modelos pueden diferir especialmente:

- cuando una idealización deja de ser adecuada;
- cerca de una frontera del régimen;
- cuando cambia una simetría;
- cuando un efecto antes despreciado se vuelve importante;
- al variar un parámetro que afecta de modo diferente a los mecanismos rivales.

La teoría no solo produce predicciones.

También ayuda a diseñar **experimentos informativos**. Supongamos que M_1:

- requiere menos hipótesis independientes;
- se integra con una teoría más amplia;
- explica varios fenómenos;
- produce nuevas predicciones acertadas.

Mientras M_2:

- reproduce solo los datos originales;
- necesita varios ajustes independientes;
- no produce consecuencias nuevas.

Es razonable preferir M_1.

Pero la forma correcta de expresarlo es:

> «La evidencia y la estructura disponibles favorecen M_1».

No:

> «M_1 ha sido demostrado como descripción final de la naturaleza».

La selección física es revisable. Los criterios pueden entrar en tensión; ni la complejidad ni la sencillez merecen premio automático:

Consideremos dos candidatos.

Modelo A.

- muy simple;
- fácil de calcular;
- válido solo en un régimen pequeño.

Modelo B.

- más complejo;
- explica varios regímenes;
- requiere más estructura matemática.

¿Cuál es mejor?

La pregunta está incompleta. Para una estimación rápida dentro del régimen pequeño, A puede ser preferible. Para estudiar la transición entre regímenes, B puede ser necesario.

Esto refuerza:

$$\boxed{\text{preferencia} = \text{relación entre modelo, pregunta y régimen.}}$$

También debemos evitar el sesgo contrario.

Un modelo no mejora automáticamente al agregar:

- más parámetros;
- más mecanismos;
- más términos;
- más variables;
- más detalle microscópico.

Cada nueva estructura debe responder:

> ¿qué problema resuelve?

Si una ampliación no cambia ninguna predicción relevante, no explica ningún fenómeno nuevo y no extiende el régimen, puede ser innecesaria para la tarea actual.

Esto recupera principio 1.9:

> **modelo mínimo suficiente**. Pero tampoco debemos eliminar estructura necesaria solo para obtener una fórmula elegante.

Si dos efectos observados requieren mecanismos distintos, un modelo que ignora uno de ellos puede ser más corto y peor.

La economía debe entenderse como:

$$\boxed{\text{no introducir estructura innecesaria}}$$

y no como:

$$\boxed{\text{eliminar estructura necesaria para que la fórmula sea corta.}}$$

La selección de modelos debe conservar tres preguntas: ¿es coherente?, ¿es adecuada para la tarea?, ¿produce nuevas consecuencias capaces de ser contrastadas?

Podemos organizar los criterios en tres grupos.

1. Coherencia. Preguntas:

- ¿el modelo es matemáticamente consistente?;
- ¿sus definiciones y condiciones son compatibles?;
- ¿su interpretación es clara?

2. Adecuación. Preguntas:

- ¿reproduce los fenómenos relevantes?;
- ¿funciona en el régimen declarado?;
- ¿las magnitudes pueden conectarse con observaciones?

3. Fecundidad. Preguntas:

- ¿produce predicciones nuevas?;
- ¿explica varios fenómenos?;
- ¿sugiere experimentos?;
- ¿organiza relaciones antes separadas?;
- ¿muestra dónde debería fallar?

Un modelo científicamente potente no solo encaja lo ya observado.

También abre trabajo nuevo. Puede parecer extraño valorar un modelo porque declara sus límites. Pero un modelo que especifica: $\mathcal{R}$

y anticipa dónde una aproximación debe dejar de funcionar es más informativo que uno que simplemente se aplica sin control.

Una teoría física madura suele permitir preguntar:

¿qué parámetro controla esta aproximación?

y:

¿qué fenómeno aparecerá cuando deje de ser pequeño?

Por eso la capacidad de delimitar el propio fracaso puede ser parte de la calidad del modelo. Podemos ahora reunir el proceso:

fenómeno → modelos candidatos

⇓

filtros → criterios comparativos

⇓

predicciones divergentes → experimento

⇓

revisión.

El resultado no es necesariamente un modelo definitivo.

Puede ser:

- descartar uno;
- restringir otro;
- modificar una aproximación;
- descubrir un nuevo régimen;
- formular un tercer candidato.

La selección y la revisión forman un proceso continuo. **Ficha FPM — Comparación y discriminación de modelos** 1. **Pregunta:** ¿qué queremos explicar o predecir? 2. **Candidatos:** ¿qué modelos se comparan? 3. **Datos compartidos:** ¿qué evidencia reproducen todos? 4. **Coherencia:** ¿algún candidato falla internamente? 5. **Interpretación:** ¿qué significa físicamente cada formalismo? 6. **Régimen:** ¿en qué $\mathcal{R}$ pretende funcionar cada modelo? 7. **Hipótesis:** ¿qué estructura independiente introduce cada uno? 8. **Explicación:** ¿qué mecanismo o estructura hace responsable del fenómeno? 9. **Predicciones rivales:** ¿dónde difieren? 10. **Observabilidad:** ¿esa diferencia puede medirse? 11. **Prueba:** ¿qué experimento discrimina mejor? 12. **Resultado:** ¿qué modelos quedan favorecidos, debilitados o todavía indistinguibles? **Ejercicio.**

Ejercicio 1.26 — Diseñar un experimento discriminante.

Se han observado únicamente los datos: $(0,0), \qquad (1,1)$.

Dos modelos candidatos son:

$$M_1 : \quad y = x,$$

$$M_2 : \quad y = x^2.$$

Responde:

1. Verifica que ambos modelos reproducen los datos conocidos.
2. Explica por qué repetir exactamente las mismas condiciones $x = 0$ y $x = 1$ no discrimina los modelos.
3. Propón un valor x_* dentro del intervalo $[0, 1]$ donde las predicciones difieran.
4. Calcula ambas predicciones.
5. Explica qué debe cumplir el procedimiento `[OBS]` para que el experimento sea realmente discriminante.
6. Supón que la observación nueva es compatible con $y = 1/4$. ¿Qué modelo queda favorecido dentro de este par?
7. Explica por qué el resultado no demuestra que el modelo favorecido sea la única función posible compatible con todos los datos.
8. Indica al menos dos criterios adicionales, distintos del nuevo dato, que sería razonable examinar antes de adoptar el modelo para una aplicación física. **Solución.**

1. Datos conocidos. Para M_1:

$$M_1(0) = 0,$$

$$M_1(1) = 1.$$

Para M_2:

$$M_2(0) = 0^2 = 0,$$

$$M_2(1) = 1^2 = 1.$$

Por tanto:

$$\boxed{M_1 \sim D \quad \text{y} \quad M_2 \sim D.}$$

2. Repetir los extremos. En:

$$x = 0$$

y: $x = 1$,

ambos modelos producen exactamente las mismas predicciones. Por tanto, aunque mejoremos mucho la repetición experimental, esas condiciones no separan la estructura de los candidatos. Necesitamos una condición donde: $M_1(x_*) \neq M_2(x_*)$.

3. Elección de x_*. Una elección sencilla es: $x_* = \frac{1}{2}$.

Está dentro del intervalo ya explorado entre los dos datos originales.

4. Predicciones. Para M_1: $M_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Para M_2:

$$M_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Así:

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{2}, \qquad P_2 = \frac{1}{4}.}$$

5. Papel de `[OBS]`. No basta que: $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$. El procedimiento experimental debe poder distinguir resultados compatibles con ambos valores.

Esto requiere una conexión observacional:

$$[\text{OBS}] \qquad y \longleftrightarrow \text{procedimiento de medición}$$

capaz de separar las dos predicciones con la precisión pertinente.

6. Resultado $y = 1/4$. Si la nueva observación es compatible con: $y = \frac{1}{4}$,
entonces, dentro del par considerado, queda favorecido:

$$\boxed{M_2}.$$

El modelo M_1 predice: $y = \frac{1}{2}$,
por lo que la nueva evidencia lo contradice bajo las condiciones y el régimen asumidos.

7. Por qué no hay unicidad absoluta. Los tres datos:

$$(0,0), \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \qquad (1,1)$$

siguen siendo finitos. Por proposición 1.1, una vez conocido un polinomio compatible podemos construir otros añadiendo un término que se anule en los tres valores observados.

Por ejemplo:

$$q_c(x) = x^2 + c\,x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1).$$

Todos los q_c conservan los tres datos.

Por tanto:

$$\boxed{\text{favorecer } M_2 \text{ frente a } M_1 \neq \text{demostrar unicidad absoluta de } M_2.}$$

8. Criterios adicionales. Entre otros, podríamos examinar:

- qué estructura física justifica cada relación;
- qué régimen de validez declara;
- cuántas hipótesis independientes requiere;
- si se integra con una teoría más amplia;
- si explica otros fenómenos;
- qué nuevas predicciones produce;
- si sus conclusiones son robustas;
- cómo se conecta cada variable con observaciones.

La selección no termina con un único dato.

Síntesis. §9 estableció:

$$\boxed{\text{datos finitos} \not\Rightarrow \text{modelo único.}}$$

§10 añade:

no unicidad $\longrightarrow$ comparación estructurada + nuevas pruebas.

Los criterios principales son:

- coherencia;
- adecuación al fenómeno;
- interpretación;
- régimen;
- economía;
- integración teórica;
- poder explicativo;
- robustez;
- fecundidad predictiva.

Pero ninguno reemplaza por sí solo al contraste.

La estrategia experimental más importante queda resumida por el principio 1.17:

si los modelos coinciden donde ya miramos, buscar dónde predicen cosas distintas.

Esto nos conduce al siguiente problema.

Incluso después de elegir un modelo razonable debemos saber:

¿hasta dónde podemos confiar en él?

Ése será el objeto de (§11).

11. Dominio de validez y teorías efectivas

Dominio matemático y dominio físico. Supongamos que un modelo contiene una relación matemática

$$Y = f(X).$$

La función puede estar perfectamente definida para muchos valores de X.

Puede incluso ocurrir que el problema matemático asociado tenga una solución exacta. Pero de ahí no se sigue que la relación represente físicamente al sistema para todos esos valores.

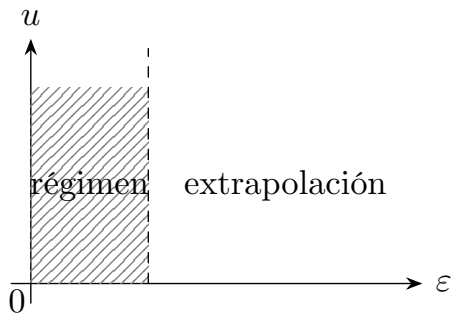


Figura 1.7. Las condiciones de régimen seleccionan una parte del espacio de parámetros. Extender una fórmula fuera de esa región exige una justificación nueva. La frontera vertical es esquemática y no representa un umbral universal. Véase §11.

Esta es una de las diferencias más importantes entre:

dominio matemático

y:

dominio físico de aplicación.

Una expresión puede tener sentido matemático donde el modelo ya no tiene sentido físico.

Por tanto:

$$\boxed{\text{estar definido matemáticamente} \neq \text{ser físicamente válido.}}$$

Desde §5 hemos escrito el modelo como:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{S}, X, \theta, \mathcal{L}, I, B, \mathcal{R}),$$

acompañado de: $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$.

Hasta ahora $\mathcal{R}$ aparecía como uno de los componentes de la ficha. A partir de esta sección debemos leerlo como una restricción activa.

No basta preguntar:

«¿Qué predice el modelo?»

Debemos preguntar:

«¿Bajo qué condiciones afirma poder predecirlo?»

Así, una predicción físicamente completa tiene la forma conceptual:

$$\boxed{\text{modelo} + \text{condición perteneciente a } \mathcal{R} \longrightarrow \text{predicción físicamente interpretable.}}$$

Definición operativa 1.28 — Dominio de validez físico El **dominio de validez físico** de un modelo, una aproximación o una teoría aplicada es el conjunto de condiciones, escalas, clases de sistemas y preguntas para las cuales se considera que sus representaciones y predicciones alcanzan la adecuación requerida.

Esta definición contiene una palabra importante:

requerida.

Un modelo puede ser adecuado para una precisión y no para otra.

Puede ser adecuado para una pregunta cualitativa y no para una medición extremadamente precisa.

Puede describir bien una escala y omitir fenómenos decisivos en otra.

Por eso el dominio de validez no es una etiqueta binaria del tipo:

verdadero/falso.

Es una declaración de alcance. Supongamos: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Matemáticamente podemos evaluar: $f(x)$

para cualquier: $x \in \mathbb{R}$. Pero el modelo físico podría haber sido construido solo para: $x \in \mathcal{R}$. Entonces: $x_* \notin \mathcal{R}$

no impide necesariamente calcular: $f(x_*)$. Lo que impide es interpretar automáticamente ese cálculo como una predicción confiable del sistema real.

Así:

$$\boxed{x_* \in \mathrm{Dom}(f) \not\Rightarrow x_* \in \mathcal{R}.}$$

Esta distinción aparecerá una y otra vez en el resto del libro. Supongamos una cadena:

$$[\mathrm{MOD}] \longrightarrow [\mathrm{APPROX}] \longrightarrow [\mathrm{MATH}] \longrightarrow P.$$

Si la aproximación fue declarada válida solo en cierto régimen: $\mathcal{R}$,

entonces la predicción P no queda mágicamente liberada de esa restricción porque la derivación matemática sea exacta.

Principio 1.18 — Toda predicción hereda el régimen del modelo Una consecuencia matemática derivada de un modelo conserva las restricciones físicas, idealizaciones y aproximaciones de las premisas que la producen. La exactitud de la derivación no amplía por sí sola el dominio de validez físico.

En símbolos:

$$\boxed{[\mathrm{MATH}]\ \text{exacto} + [\mathrm{MOD}]/[\mathrm{APPROX}]\ \text{restringidos} \not\Rightarrow \text{validez física universal.}}$$

Imaginemos una aproximación sencilla válida cuando una cantidad adimensional ε es pequeña:

$$Q_{\mathrm{aprox}} = Q_0(1-\varepsilon).$$

Supongamos que el modelo declara como régimen: $0 \leq \varepsilon \leq 0.05$.

Matemáticamente podemos sustituir: $\varepsilon = 0.8$.

Obtendremos un número perfectamente definido. Pero el modelo nunca afirmó que la aproximación fuera adecuada allí. Por tanto: $Q_{\mathrm{aprox}}(0.8)$

es un valor matemático de la fórmula, no automáticamente una predicción física autorizada.

La pregunta correcta es:

> ¿Qué control justificaba despreciar los términos omitidos y sigue funcionando para $\varepsilon = 0.8$? No siempre existe una frontera brusca:

$$\mathcal{R} = \{x : x < x_c\}$$

donde todo funciona perfectamente a un lado y deja de funcionar de golpe al otro.

Muchas aproximaciones se degradan progresivamente.

Podemos imaginar:

$$\text{error pequeño} \longrightarrow \text{error apreciable} \longrightarrow \text{modelo inadecuado.}$$

Esto significa que el dominio de validez puede depender de la precisión exigida. Para una tarea basta quizá un error del: 5 %. Para otra, incluso: 0.1 %

puede ser demasiado. Por eso el dominio físico debe leerse junto con el objetivo. Feynman utiliza un ejemplo conceptualmente importante: a velocidades ordinarias puede tratarse la masa como constante con precisión extraordinaria, mientras que a velocidades suficientemente altas esa aproximación deja de ser adecuada.[5]

La lección que tomaremos no es la teoría relativista —que estudiaremos mucho después—, sino la estructura metodológica:

[5]Feynman, Leighton y Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, cap. 1, §1-1, pp. 1-1–1-2.

una relación puede ser excelente en un régimen y equivocada fuera de él.

Eso no convierte en inútil la relación aproximada. La convierte en una herramienta con dominio declarado.

Descripciones efectivas. Una descripción puede ser excelente dentro de un régimen sin pretender ser fundamental ni universal. Supongamos que una teoría T_2 describe un dominio más amplio que una teoría anterior T_1.

Sería tentador concluir:

> «Entonces debemos dejar de usar T_1.»

Pero no se sigue.

Dentro del régimen donde T_1 funciona con la precisión requerida, puede tener ventajas decisivas:

- variables más simples;
- cálculos más cortos;
- interpretación más transparente;
- datos más fáciles de obtener;
- suficiente precisión para la tarea.

Por tanto:

$$\boxed{\text{teoría más amplia} \not\Rightarrow \text{teoría anterior inútil.}}$$

Definición operativa 1.29 — Descripción efectiva Llamaremos **descripción efectiva** a un modelo o marco físico que retiene las variables, estructuras y relaciones relevantes para un régimen determinado y omite, promedia o sustituye detalles cuya influencia no es necesaria para responder las preguntas planteadas con la precisión requerida.

La palabra «efectiva» no significa:

> «falsa».

Significa:

> «construida para capturar eficazmente cierta física a cierta escala o bajo ciertas condiciones».

En física avanzada, la expresión **teoría efectiva** adquirirá usos técnicos más específicos.

Aquí fijamos solamente esta noción operativa. Sin desarrollar todavía sus teorías, podemos anticipar varios casos.

Un cuerpo como partícula puntual. La extensión interna del objeto se omite cuando no afecta a la pregunta.

Un fluido como medio continuo. La estructura molecular puede quedar fuera de la descripción cuando interesan variables macroscópicas.

La óptica de rayos. Una descripción mediante rayos puede ser extraordinariamente útil cuando la estructura ondulatoria relevante no se resuelve en la pregunta.

Mecánica clásica a velocidades ordinarias. Puede proporcionar predicciones excelentes sin incorporar toda la estructura relativista.

En cada caso:

$$\boxed{\text{omitir detalle} \neq \text{ignorar arbitrariamente.}}$$

La omisión debe estar justificada por el régimen. Una teoría más amplia también puede cambiar la interpretación que hacemos de una descripción anterior, sin volverla inútil dentro del régimen donde funcionaba:

Feynman subraya una sutileza profunda.[6]

Una corrección puede ser numéricamente pequeña y, sin embargo, obligarnos a cambiar de manera importante nuestra imagen conceptual.

Esto significa que debemos distinguir:

diferencia numérica

de:

diferencia estructural.

Dos teorías pueden producir números casi idénticos en cierto régimen y, sin embargo, organizar el mundo mediante conceptos muy diferentes.

Por tanto:

$$\boxed{\text{aproximación numérica excelente} \not\Rightarrow \text{identidad conceptual.}}$$

No utilizaremos una teoría efectiva para concluir automáticamente qué entidades existen «en último término».

Una descripción macroscópica puede hablar de:

- presión;
- temperatura;
- ondas;
- rayos;
- cuerpos rígidos.

Estas entidades pueden ser extremadamente reales y útiles al nivel de descripción correspondiente aunque una teoría más microscópica utilice otras variables.

La pregunta:

> «¿qué es más fundamental?»

no sustituye a:

> «¿qué variables son adecuadas para esta escala y esta pregunta?» Imaginemos una caja con una enorme cantidad de componentes microscópicos.

Podríamos intentar registrar el estado detallado de cada componente.

Pero nuestra pregunta podría ser solamente:

> «¿cómo cambia una propiedad macroscópica global de la caja?»

Entonces una descripción efectiva puede utilizar pocas variables colectivas.

No afirmamos que los detalles microscópicos hayan desaparecido físicamente.

Afirmamos que:

$$\boxed{\text{no son variables necesarias para la pregunta efectiva.}}$$

Esto es una aplicación directa del principio 1.9 y principio 1.11. **Principio 1.19 — Más fundamental no significa más útil para toda tarea** Una descripción más amplia o más fundamental

[6] Feynman, Leighton y Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, cap. 1, §1-1, p. 1-2.

no reemplaza automáticamente a una descripción efectiva dentro del régimen donde esta última es suficientemente precisa, interpretable y eficiente para la pregunta planteada.

Este principio no autoriza a ignorar teorías más amplias.

Obliga a comparar niveles de descripción con la tarea.

Escala, control y recuperación de límites. La palabra **escala** aparecerá continuamente en física. Una estructura puede ser visible en una escala y prácticamente irrelevante en otra. Imaginemos dos longitudes: ℓ

y:

$$L.$$

Si: $\ell \ll L$,

ciertos detalles asociados con ℓ pueden no afectar a una pregunta formulada a escala L.

No convertiremos todavía esta idea en una teoría general de escalas.

Solo conservaremos la regla conceptual:

> la relevancia física de un detalle depende de cómo se compara con las escalas de la pregunta. En §4 vimos que la palabra «pequeño» necesita una referencia.

Una forma común de hacer visible esa referencia es comparar dos cantidades del mismo tipo. Por ejemplo: $\varepsilon = \frac{\ell}{L}$. Si: $\varepsilon \ll 1$,

puede existir una aproximación controlada por esa separación de escalas. La expresión: $\varepsilon \ll 1$

no prueba por sí sola cuál aproximación es correcta. Pero nos obliga a declarar **qué comparación** sostiene la simplificación.

Esto anticipa el análisis dimensional del capítulo siguiente sin utilizarlo todavía como técnica formal. Una buena declaración de validez no dice solamente:

> «esto funciona cuando ε es pequeño».

Debe intentar responder:

1. ¿qué efecto se omitió?;
2. ¿por qué era despreciable?;
3. ¿qué observación indicaría que ya no lo es?;
4. ¿qué descripción más amplia deberíamos considerar entonces?

Este procedimiento transforma una aproximación en algo auditable. Un modelo puede ser científicamente valioso incluso cuando falla, si sabemos interpretar el fallo. Supongamos que una aproximación predice bien para: $\varepsilon = 0.01$,

aceptablemente para: $\varepsilon = 0.05$,

y mal para: $\varepsilon = 0.5$. Si el modelo declaraba desde el comienzo: $\varepsilon \ll 1$,

el tercer caso no constituye una sorpresa lógica.

Puede ser precisamente la señal esperada de que un efecto omitido se volvió relevante.

Así:

$$\boxed{\text{fallar fuera del régimen} \neq \text{haber fracasado dentro del régimen.}}$$

La utilidad de una descripción efectiva depende de saber qué cambia al salir de su régimen. Una teoría más amplia debe, cuando corresponda, recuperar la anterior como buena aproximación en las condiciones apropiadas.

En física es frecuente que una descripción más amplia reproduzca una teoría anterior bajo condiciones apropiadas.

Esquemáticamente:

$$T_{\text{amplia}} \longrightarrow T_{\text{efectiva}}$$

cuando ciertas cantidades son pequeñas, grandes o no resolubles a la escala considerada.

Debemos ser cuidadosos con la flecha.

No significa necesariamente inclusión literal:

$$T_{\text{efectiva}} \subset T_{\text{amplia}}.$$

La relación puede requerir:

- aproximaciones;
- reexpresión de variables;
- promedios;
- eliminación de grados de detalle;
- identificación de un régimen. Más adelante estudiaremos relatividad especial.

Por ahora nos basta una relación histórica y metodológica. La mecánica newtoniana funciona extraordinariamente bien para una enorme clase de movimientos ordinarios. La relatividad especial modifica la estructura de espacio, tiempo y movimiento cuando las velocidades dejan de ser pequeñas frente a la velocidad de la luz.

La conclusión correcta no es:

> «Newton era simplemente inútil».

Es:

> «la teoría newtoniana posee un dominio de validez extremadamente importante, pero no universal».

Y la teoría más amplia debe explicar por qué la descripción anterior funcionaba tan bien dentro de ese dominio. El régimen de una aproximación concreta y el dominio de una teoría completa no son necesariamente idénticos; tampoco el dominio puede separarse de observables, condiciones y precisión:

También los observables pueden depender del régimen. Un instrumento diseñado para distinguir estructuras a gran escala puede no detectar detalles microscópicos. Entonces dos modelos que difieren microscópicamente pueden ser observacionalmente equivalentes para ese procedimiento.

La situación es: $M_1 \neq M_2$

pero: $O(M_1) = O(M_2)$

para el observable disponible.

Esto conecta §11 con §10:

para discriminar modelos necesitamos no solo una diferencia teórica, sino una diferencia observable en un régimen accesible. Una teoría puede ser muy general y contener dentro de ella varias aproximaciones. Por ejemplo, una teoría T puede ser aplicable en un dominio amplio: $\mathcal{R}_T$,

pero cierta fórmula aproximada derivada dentro de ella puede requerir: $\mathcal{R}_A \subset \mathcal{R}_T$.

Entonces no debemos confundir:

fracaso de la aproximación

con:

fracaso de la teoría completa.

Este punto será esencial en §12. Tampoco toda discrepancia proviene del régimen.
Podemos estar dentro de: $\mathcal{R}$
y aun así usar condiciones iniciales incorrectas.
Por eso debemos distinguir:

modelo fuera de régimen

de:

modelo dentro de régimen con datos de entrada incorrectos.

La diferencia importa porque las revisiones necesarias son distintas. Supongamos dos modelos: M_A, M_B. En cierto régimen sus predicciones difieren en: 0.01 %. Si nuestro instrumento solo resuelve: 1 %,
ambos pueden ser indistinguibles para la tarea. Si un nuevo instrumento alcanza: 0.001 %,
la situación cambia. Por tanto, el dominio de utilidad práctica de una descripción puede depender también de la precisión observacional disponible. No estamos introduciendo todavía teoría de incertidumbre.

Solo registramos la dependencia lógica. Dos ejemplos finales muestran por qué «más exactitud» y «más detalle» no son metas independientes de la pregunta:
Supongamos que una tarea exige estimar una cantidad con precisión del: 1 %.
Tenemos:
Modelo A.

- error esperado menor que:

$$0.1\,\%;$$

- cálculo sencillo.

Modelo B.

- error esperado muchísimo menor;
- cálculo y datos mucho más complejos.

Si ambos están dentro de su régimen, el modelo A puede ser suficiente.
Elegir B no es incorrecto. Pero puede ser innecesario.
El criterio no es:

> «usar siempre la teoría más sofisticada disponible».

Es:

> «usar una descripción cuya adecuación sea controlada para la tarea». Ahora cambiemos la pregunta.

Supongamos que queremos detectar precisamente una corrección del orden de: 0.05 %.
Entonces el modelo A anterior, cuyo error puede alcanzar: 0.1 %,
ya no basta.
El mismo modelo ha pasado de:

> adecuado

a:

> insuficiente

sin que haya cambiado su matemática.
Cambió la pregunta.
Esto refuerza:

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ depende también del criterio de adecuación exigido.}}$$

Ficha FPM — Validez y descripción efectiva 1. **Pregunta:** ¿qué queremos predecir o explicar? 2. **Modelo:** ¿qué descripción estamos usando? 3. **Régimen:** ¿qué condiciones forman $\mathcal{R}$? 4. **Escalas:** ¿qué comparaciones hacen pequeños o irrelevantes ciertos efectos? 5. **Idealizaciones:** ¿qué se ha omitido exactamente? 6. **Aproximaciones:** ¿qué término o efecto se ha reemplazado o despreciado? 7. **Control:** ¿qué parámetro o condición vigila la aproximación? 8. **Precisión:** ¿qué error es aceptable para la tarea? 9. **Observables:** ¿el instrumento puede detectar la diferencia entre modelos? 10. **Fallo esperado:** ¿qué señal indicaría salida de régimen? 11. **Descripción más amplia:** ¿qué modelo o teoría debería usarse entonces? 12. **Estatus:** ¿el cálculo es exacto dentro de un modelo aproximado?

Ejercicios. Ejercicio 1.27 — Órbita marciana y perceptibilidad.

Fuente del motivo: adaptación y ampliación del ejemplo de Arnold sobre la excentricidad de la órbita de Marte.[7]

Una elipse de semieje mayor a y excentricidad e tiene semieje menor: $b = a\sqrt{1-e^2}$. Para Marte podemos tomar, como orden de magnitud: $e \approx 0.1$.

Responde:

1. Calcula:
$$\frac{b}{a}.$$
2. Usando la aproximación de §4,
$$\sqrt{1-A} \approx 1 - \frac{A}{2},$$
estima: $\frac{b}{a}$
sin calculadora.
3. Estima la diferencia relativa:
$$1 - \frac{b}{a}.$$
4. Explica por qué una excentricidad de orden 0.1 puede corresponder a una diferencia visual entre los semiejes de solo alrededor de medio punto porcentual.
5. Explica por qué este ejemplo distingue:
   - diferencia matemática;
   - perceptibilidad física;
   - régimen de una aproximación. **Solución.**

[7] Arnold, *Mathematical Understanding of Nature*, cap. 1, pp. 1–2. El ejercicio conserva el motivo matemático y físico, pero reformula el enunciado, amplía las preguntas y desarrolla una solución propia.

1. Razón exacta. Con: $e = 0.1$,
tenemos: $e^2 = 0.01$. Por tanto: $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - 0.01} = \sqrt{0.99}$.
Numéricamente: $\sqrt{0.99} \approx 0.99499$.
Así:

$$\boxed{\frac{b}{a} \approx 0.995.}$$

2. Aproximación elemental. Tomamos: $A = 0.01$.
Entonces: $\sqrt{1 - A} \approx 1 - \frac{A}{2}$. Por tanto: $\frac{b}{a} \approx 1 - \frac{0.01}{2}$.
Así:

$$\boxed{\frac{b}{a} \approx 0.995.}$$

La aproximación reproduce muy bien el valor anterior.

3. Diferencia relativa. Tenemos: $1 - \frac{b}{a} \approx 1 - 0.995 = 0.005$.
Como porcentaje: $0.005 \times 100\,\% = 0.5\,\%$.
Por tanto:

$$\boxed{a - b \text{ representa aproximadamente el } 0.5\,\% \text{ de } a.}$$

4. Excentricidad y apariencia. La excentricidad entra al cuadrado en: $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$.
Así, aunque: $e \approx 0.1$,
la corrección geométrica relevante para comparar ambos semiejes es del orden de: $e^2 \approx 0.01$. La diferencia final entre a y b es todavía menor, aproximadamente: $0.5\,\%$. Por eso una cantidad matemática que no parece extremadamente pequeña puede producir una diferencia visual difícil de percibir directamente.

5. Las tres distinciones. **Diferencia matemática:** la elipse no es un círculo.
Perceptibilidad física: la diferencia entre sus semiejes puede ser demasiado pequeña para distinguirla fácilmente a simple vista o con un procedimiento poco sensible.
Régimen de aproximación: la fórmula:

$$\sqrt{1 - A} \approx 1 - \frac{A}{2}$$

funciona aquí porque: $A = e^2 = 0.01$
es pequeño.
Por tanto:

$$\boxed{\text{diferencia real} \neq \text{diferencia fácilmente observable.}}$$

Ejercicio 1.28 — Rayos, ondas y fotones.
En física aparecen distintas descripciones de la luz:

- rayos;
- ondas;
- fotones.

Sin desarrollar todavía ninguna de estas teorías, responde:

1. ¿Por qué la existencia de una descripción ondulatoria no vuelve automáticamente inútil la óptica de rayos?

2. ¿Qué tipo de pregunta puede hacer insuficiente una descripción mediante rayos?
3. ¿Por qué una descripción cuántica más amplia no implica que debamos usar fotones en todo problema óptico elemental?
4. Formula la relación entre estas descripciones usando las ideas de:
   - pregunta;
   - escala;
   - observable;
   - dominio de validez;
   - descripción efectiva.
5. Explica por qué sería incorrecto escribir simplemente:

$$\text{rayos} \subset \text{ondas} \subset \text{fotones}.$$

Solución.

1. Utilidad de los rayos. Una descripción de rayos puede capturar con enorme eficacia:

- propagación aproximada de trayectorias;
- formación geométrica de imágenes;
- direcciones relevantes;
- relaciones entre objetos e instrumentos.

Si la pregunta no resuelve efectos donde la estructura ondulatoria es esencial, la descripción de rayos puede ser suficiente.

Por tanto:

$$\boxed{\text{descripción más amplia} \not\Rightarrow \text{descripción efectiva inútil.}}$$

2. Cuándo pueden ser insuficientes los rayos. Si el fenómeno que queremos comprender depende precisamente de propiedades que una descripción de rayos omite, debemos cambiar de modelo. Por ejemplo, una pregunta donde sean esenciales patrones producidos por la estructura ondulatoria requerirá una descripción capaz de representar esa estructura.

La conclusión correcta es:

> el modelo deja de ser suficiente para la nueva pregunta.

No:

> el modelo nunca fue útil.

3. Por qué no usar siempre la descripción más fundamental. Una descripción cuántica puede contener estructura innecesaria para una tarea geométrica elemental.

Si el objetivo es determinar, por ejemplo, una dirección de propagación aproximada o una construcción geométrica de imagen, una teoría efectiva más simple puede ser:

- suficiente;
- más transparente;
- más eficiente.

Esto es precisamente principio 1.19.

4. Relación entre las descripciones. Podemos representarla conceptualmente:

$$\text{pregunta} + \text{escala} + \text{observable} \longrightarrow \text{descripción adecuada}.$$

Cada descripción posee un dominio físico donde ciertas variables y estructuras son las relevantes. Una descripción efectiva selecciona justamente esas estructuras sin afirmar que sean la última descripción posible de la luz.

5. Por qué no es inclusión conjuntista. Las teorías no son simplemente conjuntos de fórmulas colocados unos dentro de otros.

El paso entre descripciones puede requerir:

- nuevas variables;
- nuevas interpretaciones;
- aproximaciones;
- límites físicos;
- cambios en lo que consideramos observable.

Por tanto, la relación correcta es funcional:

$$\boxed{\text{descripciones distintas} \longleftrightarrow \text{regímenes y preguntas distintas,}}$$

no una cadena literal de inclusión de conjuntos.

Síntesis. Esta sección incorpora definitivamente el régimen: $\mathcal{R}$
a la lectura de cualquier modelo.
La regla central es:

$$\boxed{\text{fórmula matemáticamente válida} \nRightarrow \text{predicción físicamente válida en todo régimen.}}$$

Definimos además una descripción efectiva como aquella que conserva la estructura necesaria para una pregunta y una escala determinadas sin reclamar universalidad.

Por eso:

$$\boxed{\text{efectivo} \neq \text{falso.}}$$

Y:

$$\boxed{\text{más fundamental} \neq \text{más útil para toda tarea.}}$$

A partir de ahora, cada aproximación importante deberá venir acompañada por preguntas de control:

- ¿qué se omitió?;
- ¿qué lo hace pequeño?;
- ¿qué precisión necesitamos?;
- ¿qué señal indicará que salimos del régimen?;
- ¿qué descripción más amplia debemos usar entonces?

Esto prepara la siguiente sección.

Cuando una predicción contradice una observación, debemos evitar el salto:

> «la teoría está equivocada».

Una predicción depende de teoría, modelo, condiciones, aproximaciones y reglas de observación.

La lógica de esa revisión será el objeto de (§12).

12. Cuando una predicción falla: lógica de revisión

El error más tentador. Supongamos que una teoría, junto con un modelo concreto, produce una predicción:

$$P.$$

Realizamos el experimento y obtenemos un resultado incompatible con esa predicción: $\neg P$.

La reacción inmediata puede ser:

> «Entonces la teoría es falsa».

Pero esa inferencia es demasiado rápida. La predicción no provenía de una teoría desnuda.

Para llegar a P tuvimos que combinar:

- principios o hipótesis físicas;
- condiciones iniciales y de frontera;
- parámetros;
- idealizaciones;
- aproximaciones;
- reglas de interpretación;
- procedimientos de medición.

La predicción depende de un **paquete de premisas**. Por eso un fallo predictivo pone en cuestión el paquete completo, no identifica automáticamente qué componente debe abandonarse.

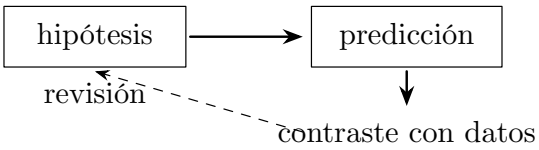


Figura 1.8. Una discrepancia motiva revisar hipótesis, condiciones iniciales y procedimiento de observación. El esquema no adjudica por sí solo el fallo a una ley fundamental. Véase §12.

El paquete predictivo. Para hacer visible la lógica, comprimiremos temporalmente las premisas en cuatro grupos.

Usaremos:

$$H$$

para las hipótesis, leyes o principios físicos relevantes;

$$I$$

para la información que fija la realización concreta, como condiciones iniciales, condiciones de frontera y parámetros pertinentes;

$$A$$

para las idealizaciones y aproximaciones utilizadas;

y:

$$M$$

para la mediación observacional: interpretación de magnitudes, calibración, procedimiento experimental y reglas [OBS] necesarias para comparar la consecuencia formal con una observación. La letra M de esta sección significa **mediación observacional** y no debe confundirse con el símbolo: $\mathcal{M}$

que usamos para el modelo físico completo.

Definición operativa 1.30 — Paquete predictivo Llamaremos **paquete predictivo** a la conjunción de premisas físicas, condiciones, aproximaciones y reglas de observación cuya aceptación conjunta permite derivar una predicción contrastable.

En nuestra notación esquemática: $\Pi = H \wedge I \wedge A \wedge M$.

La estructura lógica de una predicción. Una derivación física puede representarse esquemáticamente como: $(H \wedge I \wedge A \wedge M) \to P$. Esta fórmula no significa que toda teoría física real pueda reducirse literalmente a cuatro proposiciones simples. Es un **esqueleto lógico**. La utilidad del esquema consiste en impedir que olvidemos que P depende de más de una premisa.

En términos del protocolo de estatus, una cadena real puede contener:

$$\text{[POST]}, \quad \text{[EMP]}, \quad \text{[MOD]}, \quad \text{[APPROX]}, \quad \text{[IC]}, \quad \text{[BC]}, \quad \text{[OBS]},$$

antes de llegar a las consecuencias: [MATH].

La parte matemática empieza después de declarar las premisas. El protocolo FPM establece:

> la prueba matemática comienza después de declarar las premisas físicas.

La razón puede verse ahora con claridad. Una vez aceptamos: $H,\ I,\ A,\ M,$
podemos realizar una derivación matemática rigurosa.

Pero esa demostración muestra:

$$\boxed{H \wedge I \wedge A \wedge M \Longrightarrow P,}$$

no:

$$\boxed{P \text{ es una verdad matemática independiente del mundo.}}$$

La consecuencia es exacta **relativamente a las premisas**.

El modus tollens elemental. Recordemos la forma lógica: $Q \to P$. Si además sabemos: $\neg P$, podemos concluir: $\neg Q$.

Este es el modus tollens:

$$\boxed{(Q \to P) \wedge \neg P \Longrightarrow \neg Q.}$$

En nuestro caso: $Q = H \wedge I \wedge A \wedge M$.

Entonces el resultado será inmediato. Pero sus consecuencias físicas merecen una lectura cuidadosa.

Segunda proposición formal del capítulo. 1.2 — Lógica de revisión de un paquete predictivo

Sean H, I, A, M y P proposiciones. Si: $(H \wedge I \wedge A \wedge M) \to P$

y: $\neg P$,

entonces: $\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M)$.

Equivalentemente, por las leyes de De Morgan: $\neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M$. Por tanto, la falsedad de la predicción no permite concluir lógicamente, a partir de estas premisas solamente, cuál de los componentes H, I, A o M debe rechazarse.

Demostración de 1.2. Definamos: $Q = H \wedge I \wedge A \wedge M$. La primera hipótesis se convierte en: $Q \to P$. La segunda hipótesis es: $\neg P$. Por modus tollens: $\neg Q$. Sustituyendo nuevamente la definición de Q: $\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M)$.

Aplicamos ahora la ley de De Morgan para una conjunción finita:

$$\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M) \equiv \neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M.$$

Por tanto:

$$\boxed{\neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M.}$$

Esto demuestra la proposición.

$$\boxed{\text{QED}}$$

Qué demuestra realmente proposición 1.2. La conclusión es una **disyunción**: $\neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M$.

No es: $\neg H$. Tampoco es: $\neg A$.

Ni: $\neg M$. Con la información lógica disponible sabemos solamente que **al menos un componente del paquete no puede mantenerse tal como estaba**.

Esta es la diferencia entre:

$$\boxed{\text{detección de inconsistencia}}$$

y:

$$\boxed{\text{diagnóstico de la causa.}}$$

El teorema no decide por nosotros. El matemático podría sentir cierta frustración.

Tenemos una demostración perfecta y, sin embargo, la conclusión física parece incompleta. Pero esto no es una debilidad de la demostración. Es precisamente lo que la lógica permite concluir.

Para pasar de: $\neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M$

a una afirmación como: $\neg A$

necesitamos información adicional que descarte las demás alternativas. Por ejemplo, podríamos comprobar independientemente: H, I, M. Entonces la disyunción obligaría a: $\neg A$. El diagnóstico requiere **nuevas premisas**.

La discrepancia observacional también es una premisa. Hemos escrito: $\neg P$. Pero en un experimento real rara vez recibimos una proposición booleana directamente de la naturaleza.

Recibimos:

- lecturas;
- imágenes;
- conteos;
- señales;
- intervalos;
- resultados procesados.

Para afirmar: $\neg P$

debemos decidir que la observación es suficientemente incompatible con la predicción bajo un criterio pertinente. Ese paso pertenece a: [OBS]. Más adelante estudiaremos incertidumbre y tratamiento cuantitativo de datos.

Aquí simplemente registramos:

establecer $\neg P$ también requiere una cadena observacional fiable.

Por eso M forma parte del paquete.

Ejemplo desarrollado 15 — El cronómetro. Supongamos que un modelo de cierto sistema predice un tiempo: T_{pred}. La medición produce un valor incompatible con esa predicción. Podemos organizar las posibilidades.

H — *Estructura física.* Tal vez alguna relación física utilizada no sea adecuada para el fenómeno.

I — *Condiciones.* Tal vez el estado inicial real no fue el que creíamos.

A — *Aproximaciones.* Tal vez un efecto despreciado se volvió relevante.

M — *Medición.* Tal vez el cronómetro, la calibración o el procedimiento de detección introdujeron un problema. El resultado experimental, por sí solo, no selecciona una de estas cuatro explicaciones.

Un fallo puede localizarse mediante pruebas auxiliares. La ambigüedad no significa que el diagnóstico sea imposible.

Significa que requiere trabajo adicional.

Podemos diseñar pruebas independientes.

Por ejemplo:

Prueba de I. Repetir el experimento con una preparación mejor controlada.

Prueba de M. Calibrar el instrumento mediante un patrón independiente.

Prueba de A. Cambiar deliberadamente la escala o condición que controla la aproximación.

Prueba de H. Buscar otra predicción que dependa de la misma hipótesis pero no de las mismas aproximaciones. La revisión se convierte así en un problema de **discriminación entre causas posibles**, análogo a §10.

El experimento discriminante reaparece. En §10 definimos un experimento discriminante entre modelos. Ahora podemos extender la idea conceptualmente.

Después de un fallo, nuestras alternativas son:

$$\neg H, \qquad \neg I, \qquad \neg A, \qquad \neg M.$$

Buscamos una nueva prueba cuyo resultado cambie según cuál de esas posibilidades sea la responsable.

Por ejemplo:

$$\text{prueba auxiliar} \longrightarrow \begin{cases} \text{resultado compatible con fallo de } A, \\ \text{resultado compatible con fallo de } M. \end{cases}$$

El diagnóstico es una nueva tarea de modelización.

Principio metodológico de auditoría. Principio 1.20 — Un fallo predictivo exige auditoría, no culpable automático Si una predicción fiable contradice una observación fiable, debe revisarse el paquete de premisas que produjo la predicción. La discrepancia, por sí sola, no identifica cuál hipótesis, condición, aproximación o regla de observación es responsable.

Este principio es la lectura metodológica directa de la proposición 1.2.

Qué ocurre con una solución físicamente absurda. A veces el problema aparece incluso antes de realizar el experimento. Una derivación matemática produce una solución que contradice una restricción física declarada.

Entonces no debemos decir automáticamente:

> «La matemática falló».

Debemos preguntar:

1. ¿la solución satisface realmente las ecuaciones?;
2. ¿pertenece al espacio físico de estados admitido?;
3. ¿respeta las condiciones iniciales y de frontera?;
4. ¿viola una idealización o un régimen?;
5. ¿hemos interpretado correctamente las variables?

Una solución puede ser matemáticamente válida para la ecuación y físicamente inadmisible para el modelo completo. Este punto prepara §13.

Ficha FPM de auditoría de una predicción fallida. Ficha FPM — Auditoría de fallo predictivo 1. **Predicción:** ¿qué proposición P estaba realmente implicada? 2. **Hipótesis:** ¿qué contiene H? 3. **Condiciones:** ¿qué contiene I? 4. **Idealizaciones y aproximaciones:** ¿qué contiene A? 5. **Mediación observacional:** ¿qué contiene M? 6. **Régimen:** ¿estábamos dentro de $\mathcal{R}$? 7. **Discrepancia:** ¿qué evidencia autoriza afirmar $\neg P$? 8. **Conclusión lógica mínima:** ¿qué conjunción queda negada? 9. **Alternativas:** ¿qué términos aparecen en la disyunción de De Morgan? 10. **Evidencia independiente:** ¿qué alternativas podemos descartar ya? 11. **Prueba nueva:** ¿qué experimento distinguiría las causas restantes? 12. **Revisión:** ¿qué nivel del modelo o teoría debe modificarse? **Ejercicio 1.29 — Modus tollens compuesto.**

Demuestra:

$$[(H \wedge I \wedge A \wedge M) \to P] \wedge \neg P \Longrightarrow \neg(H \wedge I \wedge A \wedge M).$$

Después explica por qué la conclusión: $\neg H$

no se sigue de las premisas. **Solución.**

Definamos: $Q = H \wedge I \wedge A \wedge M$. La primera parte de la hipótesis es: $Q \to P$. La segunda es: $\neg P$. Por modus tollens: $\neg Q$.

Sustituyendo:

$$\boxed{\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M).}$$

Ahora preguntamos si podemos concluir: $\neg H$.
No.
Por De Morgan:

$$\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M) \equiv \neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M.$$

La disyunción puede ser verdadera aunque:

$$H$$

sea verdadera.
Por ejemplo, consideremos:

$$H = \mathrm{V}, \qquad I = \mathrm{F}, \qquad A = \mathrm{V}, \qquad M = \mathrm{V}.$$

Entonces: $H \wedge I \wedge A \wedge M = \mathrm{F}$,
y por tanto: $\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M) = \mathrm{V}$,
pero: $\neg H = \mathrm{F}$. Así existe una valuación donde la conclusión de la proposición 1.2 es verdadera y $\neg H$ es falsa.
Por tanto:

$$\boxed{\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M) \not\Rightarrow \neg H.}$$

Ejercicio 1.30 — De Morgan y diagnóstico físico.
Un experimento se modela mediante el siguiente paquete:

- H: la relación física central utilizada es adecuada;
- I: las condiciones iniciales y parámetros fueron correctamente determinados;
- A: las aproximaciones e idealizaciones siguen dentro de su régimen;
- M: el procedimiento de observación y calibración es correcto.

Se ha demostrado que: $(H \wedge I \wedge A \wedge M) \to P$. Una observación fiable es incompatible con P.

1. Escribe la conclusión lógica mínima.
2. Aplica De Morgan.
3. Un control independiente confirma I.
4. Una calibración independiente confirma M.
5. Una prueba adicional muestra que la aproximación principal está fuera de su régimen.
6. ¿Qué revisión está entonces directamente justificada?
7. ¿Se sigue de este diagnóstico que H es falsa?
8. Explica qué habría ocurrido si se hubiera saltado directamente de $\neg P$ a $\neg H$. **Solución.**

1. Conclusión mínima. Tenemos: $(H \wedge I \wedge A \wedge M) \to P$
y: $\neg P$.
Por modus tollens:

$$\boxed{\neg(H \wedge I \wedge A \wedge M).}$$

2. De Morgan. Aplicamos: $\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$.
Extendida a las cuatro premisas:

$$\boxed{\neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M.}$$

3. Confirmación de I. La evidencia independiente autoriza mantener:

$$I.$$

Por tanto, dentro del diagnóstico actual podemos eliminar: $\neg I$. La disyunción se reduce informativamente a: $\neg H \vee \neg A \vee \neg M$.

4. Confirmación de M. La calibración independiente autoriza mantener:

$$M.$$

La disyunción restante es: $\neg H \vee \neg A$.

5. La aproximación está fuera de régimen. La nueva prueba proporciona evidencia específica para: $\neg A$. Ahora tenemos una causa concreta capaz de explicar la discrepancia.

6. Revisión justificada. La revisión directamente justificada es:

> abandonar o modificar la aproximación que produjo A, o sustituirla por una descripción válida en el nuevo régimen.

En símbolos, la evidencia favorece:

$$\boxed{\neg A}.$$

7. ¿Implica esto $\neg H$? No. La disyunción: $\neg H \vee \neg A$
queda satisfecha si: $\neg A$
es verdadera.
Por tanto, el fallo de la aproximación no obliga lógicamente a rechazar:

$$H.$$

La relación física central puede continuar siendo adecuada.

8. Error del salto directo. Si hubiéramos inferido inmediatamente: $\neg P \Longrightarrow \neg H$,
habríamos cometido un error lógico. La predicción dependía de: $H \wedge I \wedge A \wedge M$,
no de H sola.
La inferencia válida era:

$$\neg P \Longrightarrow \neg(H \wedge I \wedge A \wedge M),$$

dado el condicional predictivo. El diagnóstico posterior requirió evidencia nueva.
La lección es:

$$\boxed{\text{fallo predictivo} \neq \text{identificación automática de la causa.}}$$

Síntesis. La segunda proposición formal del capítulo es:

$$\boxed{[(H \wedge I \wedge A \wedge M) \to P] \wedge \neg P \Longrightarrow \neg(H \wedge I \wedge A \wedge M).}$$

Por De Morgan:

$$\boxed{\neg H \vee \neg I \vee \neg A \vee \neg M.}$$

La matemática nos dice exactamente cuánto podemos concluir.
No menos:

alguna parte del paquete debe revisarse.

Pero tampoco más:

la lógica por sí sola no identifica cuál.

Por eso proposición 1.2 conduce al principio:

$$\boxed{\text{predicción fallida} \longrightarrow \text{auditoría de premisas.}}$$

La tarea física comienza entonces de nuevo:

- revisar condiciones;
- revisar régimen;
- revisar aproximaciones;
- revisar observación;
- diseñar pruebas discriminantes;
- y, cuando la evidencia lo exige, revisar la propia teoría.

La sección siguiente afinará una distinción que ya ha aparecido varias veces. Una solución puede ser matemáticamente exacta y, sin embargo, describir mal el mundo. Una aproximación puede ser matemáticamente inexacta y, sin embargo, describirlo extraordinariamente bien en su régimen.
Entramos así en el §13.

13. Exactitud matemática y adecuación física

Dos evaluaciones que no deben confundirse. A lo largo del capítulo hemos usado expresiones como:

- «resultado exacto»;
- «aproximación»;
- «modelo adecuado»;
- «predicción compatible con la observación».

Estas expresiones pertenecen a planos diferentes.
Cuando preguntamos:

¿La derivación es matemáticamente correcta?

examinamos la relación entre premisas y conclusión.
Cuando preguntamos:

¿El modelo describe adecuadamente el sistema físico?

examinamos la relación entre la representación y el mundo.
Por tanto:

$$\boxed{\text{exactitud matemática} \neq \text{adecuación física.}}$$

Esta es quizá la distinción más importante del capítulo completo. Supongamos que hemos declarado un paquete de premisas: Π. Y demostramos rigurosamente: $\Pi \to P$. Si la demostración es válida, entonces P es una consecuencia matemática exacta de Π.

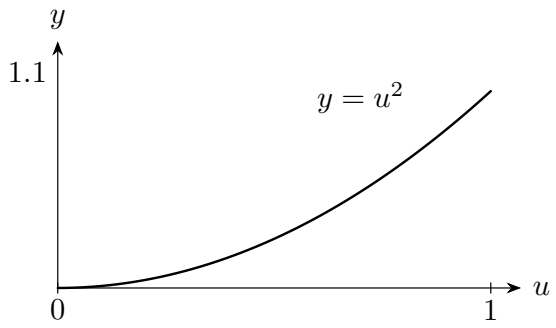


Figura 1.9. La igualdad $y = u^2$ define exactamente la curva dibujada. Su uso como ley de un fenómeno requiere declarar qué representan u e y, cómo se miden y dónde se ha contrastado la relación. Véase §13.

Pero esto no establece todavía que:

$$\Pi$$

sea una descripción físicamente adecuada del sistema real.

La forma lógica es:

$$\boxed{\Pi \text{ aceptada} \Longrightarrow P \text{ exactamente derivada.}}$$

La palabra **exactamente** modifica aquí a la derivación, no al mundo. **Definición operativa 1.31 — Exactitud matemática relativa al modelo** Diremos que un resultado es **matemáticamente exacto respecto de un modelo** cuando se obtiene sin introducir nuevas aproximaciones matemáticas a partir de las definiciones, hipótesis y relaciones formales declaradas en ese modelo.

Esta definición contiene dos restricciones.

Primera:

> **respecto de un modelo**.

Segunda:

> **sin introducir nuevas aproximaciones matemáticas**.

No afirmamos que el modelo mismo sea exacto como representación de la naturaleza. **Definición operativa 1.32 — Adecuación física** La **adecuación física** de un modelo es el grado en que sus representaciones, relaciones y predicciones conservan los rasgos relevantes del sistema real para una pregunta, un régimen y una precisión determinados.

No la tratamos aquí como una cantidad numérica. La definición es metodológica.

Obliga a declarar:

- **qué pregunta**;
- **qué régimen**;
- **qué precisión**;
- **qué rasgos son relevantes**.

Sin esos datos, la expresión «modelo correcto» es demasiado vaga. El contraste puede resumirse así:

Pregunta	Evaluación
¿La conclusión se sigue de las premisas?	corrección o exactitud matemática relativa
¿Las premisas representan adecuadamente el sistema?	adecuación física
¿La solución satisface restricciones y condiciones?	admisibilidad física
¿La diferencia prevista puede observarse?	accesibilidad observacional

Imaginemos un sensor cuyo modelo ideal es: [MOD] $y = 2x$.
Dentro del modelo, si: $x = 4$,
obtenemos exactamente: $y = 8$.
No hay error algebraico.
Ahora supongamos que el dispositivo real posee una limitación física:

su salida no puede superar 10.

Entonces, para: $x = 8$,
el modelo lineal produce exactamente: $y = 16$. Pero el dispositivo real no puede entregar ese valor. La conclusión: $y = 16$
es matemáticamente exacta **dentro del modelo lineal** y físicamente inadecuada **para el dispositivo real en ese régimen**. No hay contradicción.

Las dos evaluaciones pertenecen a niveles diferentes. Ante el ejemplo anterior sería incorrecto decir:

«La cuenta $2 \cdot 8 = 16$ salió mal».

La cuenta es correcta. El problema está en la premisa física: [MOD] $y = 2x$
aplicada fuera del régimen donde representa adecuadamente al sensor.
Por tanto:

$$\boxed{\text{predicción físicamente mala} \not\Rightarrow \text{matemática incorrecta.}}$$

Este es exactamente el tipo de diagnóstico que §12 nos enseñó a realizar. Un mapa puede ser excelente sin ser el territorio. De manera análoga, un modelo físico no necesita reproducir todos los detalles del sistema.

La pregunta correcta no es:

«¿Es idéntico al objeto real?»

Sino:

«¿Conserva la estructura necesaria para responder la pregunta?»

Esto conecta:

definición 1.32

con: principio 1.9, principio 1.11, definición 1.29.

Una descripción efectiva puede ser muy adecuada precisamente porque **no** intenta representar todo. El matemático puede, por tanto, resolver perfectamente una pregunta mal formulada o un modelo innecesariamente detallado:

Spivak insiste, en su proyecto de física para matemáticos, en una dificultad característica: una vez reducida una situación física a una cuestión matemática, el matemático puede manejar con

comodidad el formalismo; el trabajo específicamente físico está en construir correctamente esa reducción.[8]

Podemos expresarlo así:

$$\boxed{\text{resolver exactamente una pregunta matemática} \neq \text{haber formulado la pregunta física correcta.}}$$

Esta no es una crítica a la matemática.

Es una advertencia sobre el paso:

$$\text{fenómeno} \longrightarrow \text{modelo.}$$

Supongamos que agregamos diez variables a un modelo.

¿Se volvió más exacto?

No necesariamente.

Tal vez las nuevas variables:

- no estén bien determinadas;
- representen efectos irrelevantes;
- introduzcan parámetros arbitrarios;
- dificulten la interpretación;
- no mejoren ninguna predicción.

La adecuación física no se mide por el número de componentes del formalismo.

Por eso:

$$\boxed{\text{más detalle} \neq \text{más adecuación automática.}}$$

Exactitud de la solución y calidad del modelo. Supongamos que tenemos dos opciones.

Modelo A. Representa muy pobremente el sistema real, pero podemos resolverlo exactamente.

Modelo B. Representa mejor el fenómeno relevante, aunque para obtener una predicción usemos una aproximación controlada.

Podría ocurrir que:

$$P_A$$

sea exacta respecto de A, mientras:

$$P_B$$

sea aproximada respecto de B.

Y, sin embargo:

$$P_B$$

puede describir mucho mejor la observación física.

Por tanto:

$$\boxed{\text{resultado matemáticamente aproximado} \not\Rightarrow \text{descripción físicamente peor.}}$$

Debemos distinguir al menos dos lugares donde puede aparecer una aproximación.

[8] Spivak, *Physics for Mathematicians: Mechanics I*, prefacio, p. vii.

Aproximación en la construcción del modelo. Por ejemplo:

$$[\text{MOD}] \qquad \text{objeto real} \mapsto \text{partícula puntual.}$$

Aproximación en la resolución matemática. Incluso después de fijar un modelo, puede resultar difícil obtener su solución exacta y empleamos: [APPROX]. Así tenemos cuatro combinaciones conceptuales.

Modelo físico	Solución matemática	Evaluación
adecuado	exacta	situación favorable
adecuado	aproximada y controlada	puede ser físicamente excelente
inadecuado	exacta	exactitud formal, mala representación
inadecuado	aproximada	dos fuentes potenciales de discrepancia

La palabra «exacto» no debe ocultar en qué fila estamos. La potencia del formalismo no elimina sus condiciones de interpretación:

Una estructura matemática puede ser extraordinariamente poderosa.

Puede revelar:

- consecuencias no evidentes;
- invariantes;
- relaciones entre variables;
- imposibilidades;
- simetrías;
- familias completas de soluciones.

Pero su poder lógico comienza **después** de fijar la representación. Si aplicamos una estructura fuera de su dominio físico, la matemática puede continuar funcionando perfectamente mientras la interpretación se degrada.

De ahí la regla:

> nunca evaluar la calidad física de un modelo solamente por la elegancia o solvencia de su formalismo. Comparemos dos procedimientos.

Procedimiento A. Usamos una aproximación: Q_{aprox}

y declaramos:

- qué efecto omitimos;
- qué parámetro lo controla;
- qué régimen utilizamos;
- dónde esperamos que falle.

Procedimiento B. Usamos una fórmula exacta: Q_{exacta}

pero ocultamos que proviene de una idealización inaplicable al sistema real.

Desde el punto de vista del conocimiento físico, A puede ser superior. No porque la aproximación sea mágicamente más verdadera, sino porque sus límites están **controlados y visibles**. En matemáticas, podemos hablar con precisión de igualdad exacta: $a = b$.

En física experimental, las afirmaciones dependen de:

- procedimientos;
- resolución;
- calibración;

- condiciones;
- convenciones de representación.

Por eso evitaremos expresiones vagas como:

> «este valor físico es absolutamente exacto».

Preguntaremos siempre:

> exacto ¿en qué sentido?

Puede significar:

- exacto por definición;
- exacto dentro del modelo;
- obtenido sin aproximación matemática;
- compatible con la observación dentro de cierta precisión.

Son afirmaciones diferentes. Una expresión exacta puede depender de parámetros medidos y una solución exacta puede quedar excluida por restricciones físicas:

Incluso si el modelo produce una expresión exacta: $P = f(\theta)$,
el parámetro: θ
puede provenir de una medición.

Entonces debemos separar:

1. exactitud de la relación formal $P = f(\theta)$;
2. conocimiento empírico de θ;
3. adecuación física del modelo;
4. precisión de la comparación con la observación.

No desarrollaremos todavía propagación de incertidumbre. Pero la estructura lógica debe quedar visible. En §12 vimos el ejemplo abstracto de dos soluciones: x_1, x_2,
cuando una restricción física exige: $x > 0$.
Si: $x_2 < 0$,
x_2 puede seguir siendo solución exacta de la ecuación.
Lo que falla es su admisibilidad física.
Así:

$$\boxed{\text{solución exacta de la ecuación} \neq \text{estado físicamente permitido.}}$$

Esta distinción será esencial cuando aparezcan condiciones de frontera, restricciones y ramas de soluciones. Consideremos dos tareas.

Tarea A. Necesitamos una estimación cualitativa.

Tarea B. Queremos detectar una corrección extremadamente pequeña. El mismo modelo puede ser excelente para A e insuficiente para B.

Por tanto, no preguntamos:

> «¿Es exacto el modelo?»

sino:

> «¿Es suficientemente adecuado para esta tarea, en este régimen y con esta precisión?»

Esto conecta directamente con:

definición 1.28

y:

definición 1.32.

La distinción también alcanza a la observación: dos resultados matemáticamente diferentes pueden quedar por debajo de la capacidad discriminante del procedimiento experimental.

El ejemplo de la órbita marciana nos dio una lección distinta.[9]

Una elipse puede ser matemáticamente distinta de un círculo. Pero para cierta excentricidad, la diferencia entre sus semiejes puede ser visualmente pequeña.

Entonces tenemos tres planos:

distinción matemática,

magnitud física de la diferencia,

capacidad observacional para detectarla.

No deben colapsarse.

Un modelo puede distinguir exactamente dos casos que un instrumento o la percepción disponible no puede separar. Supongamos que dos modelos predicen:

$$P_1 = 1.000000,$$

$$P_2 = 1.000001.$$

La diferencia matemática es exacta: $P_1 \neq P_2$. Pero si el procedimiento `[OBS]` solo discrimina diferencias del orden de: 0.01,

esa distinción no es experimentalmente accesible.

Por tanto:

$$\boxed{\text{distinguibilidad matemática} \not\Rightarrow \text{distinguibilidad física disponible.}}$$

La exactitud del formalismo no puede sustituir la resolución del experimento.

Dos principios permanentes. Principio 1.21 — La exactitud matemática no repara una representación física inadecuada Una derivación exacta puede garantizar que la conclusión se sigue de las premisas del modelo; no puede garantizar por sí sola que esas premisas representen adecuadamente el sistema real, la pregunta o el régimen considerado.

En forma condensada:

$$\boxed{\text{corrección formal} \not\Rightarrow \text{adecuación física.}}$$

Este principio permanecerá activo en todo el tratado. **Principio 1.22 — Una aproximación controlada puede ser físicamente superior a una solución exacta de un modelo inadecuado** Al comparar descripciones físicas, la exactitud matemática de la solución debe evaluarse junto con la adecuación del modelo y su régimen. Una aproximación cuyas omisiones y límites están controlados puede representar mejor el fenómeno que una solución exacta obtenida de premisas físicamente inadecuadas.

[9] Arnold, *Mathematical Understanding of Nature*, cap. 1, pp. 1–2.

Este principio resume la tensión central de §13. La consecuencia editorial y metodológica es importante: el texto debe declarar dónde se ha aproximado y qué relación permanece exacta dentro del modelo simplificado. Supongamos que declaramos: [APPROX] $F(x) \approx G(x)$.

Después definimos un modelo simplificado usando: $G(x)$.

Dentro de ese modelo simplificado podemos obtener exactamente: $H = 2G(x)$.

No hay contradicción entre: $F \approx G$

y: $H = 2G$. La primera relación compara dos niveles de descripción. La segunda es una igualdad exacta **dentro del modelo simplificado**. Este es un patrón que aparecerá continuamente en física. El protocolo de §6 permite mantener la jerarquía visible.

Por ejemplo: [APPROX] $F \approx G$,

seguido de: [MATH] $G = K$,

no autoriza escribir sin comentario: $F = K$. La cadena correcta conserva el estatus: $F \approx G = K$,

y por tanto: $F \approx K$

en el régimen pertinente.

La sintaxis matemática también debe reflejar la epistemología del argumento. Como cierre operativo, cualquier cálculo físico debe auditar corrección, estatus, admisibilidad, régimen, observabilidad y adecuación:

Lista de control. Cada vez que obtengamos un resultado, seguiremos este orden.

1. Corrección lógica.

   ¿La conclusión se sigue de las premisas?

2. Corrección algebraica.

   ¿Las operaciones matemáticas se realizaron correctamente?

3. Estatus.

   ¿Qué pasos eran `[MATH]`, `[MOD]` o `[APPROX]`?

4. Admisibilidad.

   ¿La solución satisface las restricciones físicas?

5. Régimen.

   ¿Estamos dentro de $\mathcal{R}$?

6. Observabilidad.

   ¿La cantidad calculada corresponde a una medición bien definida?

7. Adecuación.

   ¿La predicción representa el fenómeno con la precisión necesaria?

Una respuesta positiva en el primer nivel no garantiza las restantes. **Ficha FPM — Exactitud matemática y adecuación física** 1. **Modelo:** ¿qué sistema está siendo representado? 2. **Premisas:** ¿qué se supone exactamente? 3. **Idealizaciones:** ¿qué rasgos reales se han eliminado? 4. **Aproximaciones:** ¿qué reemplazos no exactos se han realizado? 5. **Derivación:** ¿es exacta dentro de esas premisas? 6. **Soluciones:** ¿todas las soluciones matemáticas son físicamente admisibles? 7. **Parámetros:** ¿son definidos, ajustados o medidos? 8. **Régimen:** ¿pertenece el caso a $\mathcal{R}$? 9. **Observación:** ¿cómo se conecta el resultado con `[OBS]`? 10. **Precisión:** ¿qué nivel de adecuación exige la pregunta? 11. **Comparación:** ¿una aproximación controlada representa mejor el fenómeno? 12. **Conclusión:** ¿qué es exactamente lo que podemos afirmar? **Ejercicio.**

Ejercicio 1.31 — Solución exacta de un modelo inadecuado.

Un dispositivo convierte una entrada física $x \geq 0$ en una señal de salida y. Un primer modelo ideal propone: $M_1 : \quad y = 2x$. La electrónica real del dispositivo posee, sin embargo, una saturación física: $0 \leq y \leq 10$. Para entradas pequeñas, las mediciones disponibles son compatibles con M_1.

Responde:

1. Calcula exactamente la predicción de M_1 para:

$$x = 3.$$

2. Calcula exactamente la predicción de M_1 para:

$$x = 8.$$

3. Explica por qué el segundo cálculo puede ser matemáticamente correcto y físicamente inadmisible.
4. Propón un modelo efectivo elemental que incorpore la saturación.
5. Calcula su predicción para $x = 3$ y $x = 8$.
6. ¿Cuál de los dos modelos es «más exacto»? Explica por qué la pregunta es ambigua.
7. Un estudiante afirma: «Como M_1 tiene una fórmula más simple y sus cálculos son exactos, es científicamente superior». Analiza el argumento.
8. Identifica los estatus `[MOD]`, `[MATH]` y `[OBS]` que deberían aparecer en una investigación real del dispositivo. **Solución.**

1. Predicción para $x = 3$. El modelo declara: $y = 2x$.

Entonces: $y = 2 \cdot 3$.

Por tanto:

$$\boxed{y = 6}.$$

El cálculo es exacto dentro de M_1.

Además: $6 \leq 10$,

por lo que la predicción no viola la restricción de saturación.

2. Predicción para $x = 8$. Aplicando la misma relación: $y = 2 \cdot 8$.

Luego:

$$\boxed{y = 16}.$$

Nuevamente, la aritmética es exacta.

3. Corrección matemática y admisibilidad física. La electrónica real exige: $y \leq 10$.

Pero: $16 > 10$. Por tanto, el valor: $y = 16$

es una consecuencia matemática exacta de: M_1,

pero no es físicamente admisible para el dispositivo descrito.

La conclusión correcta es:

$$\boxed{\text{el modelo lineal ha sido extrapolado fuera de su régimen adecuado.}}$$

No:

$$\boxed{2 \cdot 8 \neq 16.}$$

4. Modelo efectivo con saturación. Podemos proponer:

$$M_2 : \qquad y = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 5, \\ 10, & x > 5. \end{cases}$$

Este modelo conserva la relación lineal donde la salida todavía no ha alcanzado el límite y representa la saturación después. No afirmamos que sea una descripción microscópica completa de la electrónica. Es un modelo efectivo para la pregunta.

5. Predicciones de M_2. Para: $x = 3$,
como: $3 \le 5$,
tenemos: $y = 2 \cdot 3 = 6$.
Para: $x = 8$,
como: $8 > 5$,
tenemos: $y = 10$.
Por tanto:

$$\boxed{M_2(3) = 6, \qquad M_2(8) = 10.}$$

6. ¿Cuál es más exacto? La pregunta mezcla dos sentidos.

Dentro de sus propias fórmulas, ambos modelos permiten cálculos exactos. Pero como representación del dispositivo en el régimen que incluye $x = 8$, M_2 es físicamente más adecuado porque incorpora la restricción de saturación.

Por tanto:

$$\boxed{\text{exactitud matemática} \neq \text{adecuación física.}}$$

7. Simplicidad y superioridad científica. El argumento del estudiante es incorrecto. La sencillez de: $y = 2x$
puede ser una virtud dentro de su régimen. Pero la simplicidad formal no compensa una predicción físicamente imposible para el sistema.

La comparación debe incluir:

- régimen;
- restricciones físicas;
- observaciones;
- pregunta;
- precisión requerida.

Así:

$$\boxed{\text{fórmula simple} + \text{cálculo exacto} \not\Rightarrow \text{modelo físicamente superior.}}$$

8. Estatus. La relación: $y = 2x$
puede aparecer como: [MOD]
cuando se declara como idealización lineal del dispositivo. La derivación: $x = 3 \Longrightarrow y = 6$
es: [MATH]. La regla que conecta la señal y con una lectura real del instrumento requiere: [OBS]. La existencia y valor de la saturación física deben establecerse mediante la construcción del dispositivo, documentación o evidencia experimental pertinente; no surgen de la ecuación lineal.

La solución completa muestra:

una matemática impecable puede revelar precisamente que el modelo físico necesita revisión .

Síntesis. La sección completa puede comprimirse en una pregunta doble:

¿es correcta la consecuencia matemática?

y

¿es físicamente adecuada la representación?

Responder afirmativamente a la primera no resuelve la segunda. Una aproximación controlada puede representar mejor el fenómeno que una solución exacta de un modelo inadecuado.

14. Cómo leer el resto de Física para matemáticos

Este capítulo no era un prólogo. Podría parecer que hemos dedicado demasiadas páginas a hablar de física antes de empezar a «hacer física». Pero el objetivo de este capítulo nunca fue retrasar las ecuaciones. Fue aprender a leerlas.

A partir del capítulo siguiente comenzarán a aparecer de manera progresiva:

- magnitudes;
- unidades;
- vectores;
- curvas;
- leyes de movimiento;
- energía;
- campos;
- ecuaciones diferenciales;
- principios variacionales;
- operadores;
- probabilidades;
- estructuras geométricas.

Cada una de esas herramientas puede ser estudiada matemáticamente.

Pero en este libro siempre aparecerá además una segunda pregunta:

¿qué trabajo físico está realizando aquí esta estructura matemática?

Este es el contrato de lectura del resto de la obra. Todo tema importante intentará conservar, cuando corresponda, la secuencia:

fenómeno físico $\longleftrightarrow$ modelo matemático $\longleftrightarrow$ estructura matemática.

La flecha doble es esencial.

No leeremos la física como una simple aplicación posterior de matemáticas ya terminadas. Tampoco trataremos la matemática como una colección de trucos para producir números. Buscaremos un movimiento en ambas direcciones.

La física plantea problemas que exigen estructuras matemáticas. La matemática reorganiza la comprensión física y permite descubrir consecuencias que no eran visibles al comienzo.

El protocolo permanente FPM. En vez de repetir por separado cada una de las quince preguntas desarrolladas a lo largo del capítulo, las reuniremos desde ahora en un único protocolo acumulativo. Podemos condensar todo el capítulo en una secuencia.

Protocolo permanente de lectura FPM

1. Fenómeno

¿Qué ocurre físicamente?

2. Pregunta

¿Qué queremos explicar, predecir o comparar?

3. Sistema

¿Qué incluimos y qué dejamos en el entorno?

4. Estado y variables

¿Qué información conserva el modelo?

5. Representación

¿Qué objetos matemáticos utilizamos y qué significan?

6. Estatus

¿Qué es definición, dato empírico, postulado, modelo, aproximación, condición o consecuencia matemática?

7. Estructura matemática

¿Qué teoremas, operaciones o estructuras producen las consecuencias?

8. Régimen

¿Dónde esperamos que la representación sea adecuada?

9. Observación

¿Cómo se conecta el formalismo con una medición?

10. Predicción o explicación

¿Qué resultado nuevo produce y qué estructura lo hace inteligible?

11. Contraste

¿Qué observación podría discriminar esta descripción de alternativas?

12. Revisión

Si falla, ¿qué parte del paquete predictivo debe auditarse?

Esta secuencia no será una plantilla rígida.

No todos los problemas necesitan doce apartados explícitos. Pero todos los pasos relevantes deben poder reconstruirse.

Cómo se usará el protocolo en el resto del tratado. Cuando una teoría física requiera una herramienta matemática todavía no disponible, no la utilizaremos silenciosamente.

El texto deberá:

1. identificar la necesidad física;
2. declarar el objeto matemático requerido;
3. construir o recordar sus definiciones;
4. demostrar los resultados necesarios;
5. volver al problema físico;
6. interpretar qué ganó la descripción.

La progresión será:

$$\boxed{\text{problema físico} \to \text{necesidad matemática} \to \text{estructura} \to \text{retorno a la física.}}$$

Esta regla evita dos extremos:

- convertir la física en un pretexto para una lista de fórmulas;
- convertir el libro en un tratado abstracto de matemáticas desconectado del fenómeno. Cuando un resultado sea puramente matemático, deberá distinguirse de las premisas físicas que permiten aplicarlo.

Por ejemplo:

$$[\text{POST}] + [\text{MOD}] + [\text{IC}] \longrightarrow [\text{MATH}].$$

El teorema matemático puede tener demostración completa. Pero la aplicación física debe conservar visibles las hipótesis que lo hacen relevante.

Así podremos responder siempre:

> ¿qué parte del argumento está demostrada matemáticamente y qué parte pertenece a la construcción física del modelo? Las aproximaciones no serán tratadas como errores vergonzosos que debamos esconder.

Son una herramienta central de la física. Pero deben estar controladas.

Cuando sea posible, registraremos:

efecto omitido,

parámetro de control,

régimen,

criterio de fallo.

El objetivo no es eliminar las aproximaciones. Es saber exactamente qué trabajo realizan. Los ejercicios del tratado pertenecen a familias distintas.

No todos pedirán calcular.

Encontraremos:

- `E-CALC` — cálculo;
- `E-DER` — derivación;
- `E-PROOF` — demostración;
- `E-MOD` — modelización;
- `E-DIM` — análisis dimensional;
- `E-EST` — estimación;
- `E-CON` — comprensión conceptual;
- `E-LIM` — límites y regímenes;
- `E-FAIL` — diagnóstico de fallos;
- `E-NUM` — exploración numérica;
- `E-HIST` — reconstrucción histórica o conceptual.

La solución completa no consistirá solamente en producir el resultado final.

Deberá hacer visible qué tipo de razonamiento exige el problema.

Señales de alarma. A lo largo del libro convendrá detenerse cuando aparezca alguna de estas situaciones:

1. *Una ecuación sin interpretación.* Preguntar:

   ¿qué significan los símbolos?

2. *Una aproximación sin régimen.* Preguntar:
   ¿qué la controla?
3. *Una idealización sin omisión declarada.* Preguntar:
   ¿qué se dejó fuera?
4. *Una predicción sin procedimiento observacional.* Preguntar:
   ¿cómo se mediría?
5. *Una solución matemáticamente válida pero extraña físicamente.* Preguntar:
   ¿es admisible dentro del modelo?
6. *Un desacuerdo experimental.* Preguntar:
   ¿qué parte del paquete predictivo debe auditarse?
7. *Una teoría más avanzada que «reemplaza» otra.* Preguntar:
   ¿qué régimen recupera y qué estructura cambia?
8. *Una fórmula muy elegante.* Preguntar:
   ¿su elegancia matemática coincide con adecuación física?

Estas preguntas no son obstáculos.
Son el método.

Principio final del capítulo. Principio 1.23 — Ningún cálculo físico se cierra al obtener un número Un cálculo físico termina solamente cuando el resultado ha sido interpretado respecto del sistema, las premisas, el estatus de las relaciones, el régimen de validez, las restricciones físicas y la conexión observacional pertinentes.

En forma esquemática:

$$\boxed{\text{cálculo} \to \text{interpretación} \to \text{control físico.}}$$

Este será el principio operativo que acompañará todo el tratado. **Ejercicio de síntesis.**

Ejercicio 1.32 — Ficha completa de un modelo.

Un pequeño carro se desplaza por una pista recta. Una cámara registra su posición en instantes igualmente espaciados.

En una primera serie de observaciones se obtiene:

$$x_0 = 0,$$

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = 4,$$

$$x_3 = 6.$$

Las posiciones están expresadas en una misma unidad de longitud. No utilizaremos todavía una teoría mecánica para explicar el movimiento. Se propone el modelo empírico discreto: [MOD] $x_{n+1} = x_n + d$,
con: $d = 2$.

Construye una **ficha FPM completa** respondiendo:

1. ¿Cuál es el fenómeno?

2. Formula una pregunta física concreta.
3. Define sistema y entorno.
4. Propón un espacio de estados mínimo para la pregunta.
5. Identifica variable de estado, parámetro y observable.
6. Explica el estatus de:
$$x_{n+1} = x_n + d.$$
7. Identifica una posible condición inicial.
8. Formula una predicción para x_4.
9. Explica qué parte de esa predicción es `[MATH]`.
10. Explica qué regla `[OBS]` sería necesaria para contrastarla.
11. Declara al menos dos idealizaciones o simplificaciones del modelo.
12. Propón un régimen de validez cualitativo.
13. Si la cámara observa $x_4 = 8$, ¿qué podemos concluir?
14. Si observa $x_4 = 7.1$, aplica la lógica de §12 y enumera al menos cuatro elementos a auditar.
15. Explica por qué el modelo no constituye todavía una teoría mecánica del carro.
16. Explica qué observación nueva sería útil para probar si la regla continúa funcionando.
17. Evalúa la exactitud matemática y la adecuación física por separado.
18. Resume el modelo usando:
$$(\mathcal{M}, \mathfrak{I}_{\mathcal{M}}).$$

Solución.

1. Fenómeno. El fenómeno es el cambio de posición de un carro sobre una pista recta observado mediante una cámara en instantes sucesivos. Todavía no afirmamos qué causa el movimiento.

2. Pregunta física. Una pregunta concreta puede ser:

> ¿Qué posición registrará la cámara en el siguiente instante si continúa la regularidad observada?

Esta pregunta es predictiva y deliberadamente modesta.

3. Sistema y entorno. **Sistema:**
el carro, representado solo mediante la información necesaria para registrar su posición.
Entorno:
la pista, la cámara y cualquier agente externo que pueda afectar al movimiento quedan fuera de la frontera inicial del sistema, aunque parte de sus efectos puede estar implícitamente presente en la regularidad empírica. Si más adelante esos efectos importan, la frontera deberá revisarse.

4. Espacio de estados mínimo. Para esta pregunta elemental podemos utilizar:
$$\mathcal{S} = \{(n, x) : n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\}.$$
El estado modelado conserva:
- el índice temporal discreto n;
- la posición x.

No afirmamos que esto sea suficiente para toda pregunta mecánica sobre el carro. Es suficiente para la tarea predictiva propuesta.

5. Variable, parámetro y observable. Una variable de estado es:
$$x.$$

El parámetro del modelo es: $d = 2$. El observable es la posición registrada por la cámara: $O(n, x) = x$. En una realización experimental, esa cantidad necesita una regla de calibración espacial.

6. Estatus de la regla. La relación: $x_{n+1} = x_n + d$

se ha propuesto para representar exactamente, dentro del modelo, la regularidad observada. Por tanto, en este contexto su estatus principal es: [MOD]. Podría haber sido motivada por datos `[EMP]`, pero no la hemos derivado de una teoría mecánica.

7. Condición inicial. Podemos tomar: [IC] $x_0 = 0$.

Esto selecciona una realización concreta de la regla.

8. Predicción. Como: $x_3 = 6$

y: $d = 2$,

la regla da: $x_4 = x_3 + d$.

Entonces: $x_4 = 6 + 2 = 8$.

Por tanto:

$$\boxed{x_4 = 8}.$$

9. Parte matemática. Una vez aceptados:

$$x_3 = 6,$$

$$d = 2$$

y: $x_{n+1} = x_n + d$,

la inferencia: $x_4 = 8$

es: [MATH]. La aritmética es exacta dentro del modelo.

10. Regla observacional. Necesitamos una conexión:

[OBS] $x \longleftrightarrow$ posición inferida de la imagen de la cámara mediante una escala calibrada.

Debemos saber:

- qué punto del carro representa su posición;
- dónde está el origen;
- qué unidad se utiliza;
- cómo la imagen se convierte en una coordenada.

Sin esa mediación, el número 8 sigue siendo solo parte del formalismo.

11. Idealizaciones o simplificaciones. Entre otras:

1. representamos el carro mediante una única coordenada;
2. ignoramos su orientación y dimensiones;
3. tratamos los instantes como igualmente espaciados;
4. suponemos que el mismo incremento d continúa siendo adecuado;
5. ignoramos explícitamente causas físicas del movimiento.

Estas omisiones son aceptables solo respecto de la pregunta propuesta.

12. Régimen cualitativo. Podemos declarar provisionalmente:

> la regla se utiliza para los próximos registros mientras la pista, la preparación, el intervalo entre imágenes y el comportamiento observado permanezcan comparables con los de la serie inicial.

No es todavía un régimen cuantitativo sofisticado. Pero hace visible que no estamos autorizados a extrapolar indefinidamente.

13. Si observamos $x_4 = 8$. El nuevo dato es compatible con la predicción.

Podemos afirmar:

el modelo ha superado esta prueba adicional.

No podemos afirmar:

la regla ha sido demostrada como ley única del movimiento.

Proposición 1.1 ya nos enseñó que datos finitos no determinan una única ley funcional.

14. Si observamos $x_4 = 7.1$. Tenemos una discrepancia.

Debemos auditar, por ejemplo:

1. **regla del modelo:** quizá el incremento dejó de ser constante;
2. **condición o dato anterior:** quizá x_3 fue mal determinado;
3. **parámetro:** quizá d no era realmente 2;
4. **mediación observacional:** quizá la cámara o calibración introdujo un error;
5. **régimen:** quizá cambió alguna condición de la pista o preparación;
6. **idealización:** quizá un efecto omitido se volvió relevante.

La observación no identifica automáticamente cuál de estas alternativas es responsable.

15. Por qué no es todavía una teoría mecánica. El modelo: $x_{n+1} = x_n + 2$

describe una regularidad de posiciones.

No proporciona todavía:

- principios generales de movimiento;
- una estructura aplicable a muchas clases de sistemas;
- mecanismos;
- una teoría de interacciones;
- reglas generales para construir otros modelos.

Por tanto:

$$\boxed{\text{modelo empírico} \neq \text{teoría mecánica.}}$$

16. Nueva prueba. Podemos observar: x_5. El modelo predice: $x_5 = 10$. Pero una prueba más informativa podría también cambiar deliberadamente una condición del experimento y preguntar si d permanece constante. La elección depende de qué aspecto del modelo queramos poner a prueba.

17. Exactitud y adecuación. **Exactitud matemática:**

dentro de: $x_{n+1} = x_n + 2$,

la predicción: $x_4 = 8$

se obtiene exactamente.

Adecuación física:

solo puede evaluarse comparando la regla con nuevas observaciones dentro del régimen pertinente.

Por tanto:

$$\boxed{\text{predicción algebraicamente exacta} \neq \text{garantía de adecuación física.}}$$

18. Ficha formal. Podemos escribir esquemáticamente:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{S}, X, \theta, \mathcal{L}, I, B, \mathcal{R}),$$

con:

- $\mathcal{S}$: estados discretos (n, x);
- X: posición x y observable asociado;
- θ: $d = 2$;
- $\mathcal{L}$: regla $x_{n+1} = x_n + d$;
- I: $x_0 = 0$;
- B: no intervienen condiciones de frontera relevantes en este modelo mínimo;
- $\mathcal{R}$: serie de observaciones bajo condiciones comparables.

El diccionario: $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}$
declara que:

- n representa el índice de una imagen tomada a intervalos iguales;
- x representa una posición sobre la pista;
- d representa el incremento de posición entre registros;
- `[OBS]` conecta píxeles o marcas de la imagen con la coordenada física.

La unidad mínima de lectura es entonces:

$$\boxed{(\mathcal{M}, \mathfrak{I}_{\mathcal{M}}).}$$

El ejercicio ha recorrido prácticamente todo el protocolo del capítulo.

Cierre. Empezamos con una pregunta:

> **¿Qué convierte una pregunta sobre el mundo en un problema físico matemáticamente tratable?**

La respuesta no fue «una ecuación».
Fue una arquitectura.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{fenómeno} \to \text{pregunta} \\ \Downarrow \\ \text{sistema} \to \text{modelo} \\ \Downarrow \\ \text{matemática} \to \text{predicción} \\ \Downarrow \\ \text{observación} \to \text{revisión.} \end{array}}$$

Aprendimos que:

$$\boxed{\text{objeto físico} \neq \text{objeto matemático que lo representa;}}$$

que:

$$\boxed{\text{ley} \neq \text{modelo} \neq \text{teoría;}}$$

que:

$$\boxed{\text{ajuste} \neq \text{predicción} \neq \text{explicación;}}$$

que:

$$\boxed{\text{datos finitos} \not\Rightarrow \text{ley única;}}$$

que:

$$\boxed{\text{fallo predictivo} \not\Rightarrow \text{culpable único;}}$$

y, finalmente:

$$\boxed{\text{exactitud matemática} \neq \text{adecuación física.}}$$

Estas distinciones no pertenecen únicamente al capítulo inicial.

Constituyen la gramática del resto del tratado.

A partir del próximo capítulo comenzaremos a construir las primeras herramientas cuantitativas de esa gramática:

$$\boxed{\text{magnitudes, unidades y análisis dimensional.}}$$

Las ecuaciones podrán ser cada vez más sofisticadas.

La pregunta seguirá siendo la misma:

> **¿Qué relación existe entre el fenómeno, el modelo y la estructura matemática que estamos usando para comprenderlo?**

Referencias del capítulo

Las fuentes siguientes cumplen dos funciones distintas. Algunas sustentan atribuciones explícitas o ejemplos identificables del capítulo; otras actuaron como **fuentes de control** para el enfoque y la arquitectura, sin que el texto reproduzca su secuencia ni su prosa. Las formulaciones matemáticas proposición 1.1 y proposición 1.2 y el protocolo de lectura FPM son desarrollos propios de este tratado.

- Arnold, V. I. *Mathematical Understanding of Nature: Essays on Amazing Physical Phenomena and Their Understanding by Mathematicians*. Trad. Alexei Sossinsky y Olga Sipacheva. Providence, RI: American Mathematical Society, 2014. Para este capítulo: prefacio, p. xiii; cap. 1, «The Eccentricity of the Keplerian Orbit of Mars», pp. 1–2.
- Feynman, Richard P.; Leighton, Robert B.; Sands, Matthew. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. I. New Millennium Edition. New York: Basic Books, 2011. Para este capítulo: cap. 1, §1-1, pp. 1-1–1-2.
- Hassani, Sadri. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. 2.ª ed. Cham: Springer, 2013. Para este capítulo: «Preface to First Edition», pp. xi–xiii, especialmente p. xii.
- Schramm, Alec J. *Mathematical Methods and Physical Insights: An Integrated Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. Para este capítulo: cap. 1, «Prelude: Symbiosis», pp. 3–5.
- Shankar, R. *Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics*. Edición ampliada. New Haven: Yale University Press, 2019. Para este capítulo: cap. 1, §1.2, p. 3.
- Spivak, Michael. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Houston: Publish or Perish, 2010. Para este capítulo: prefacio, p. vii.

Capítulo 2

Magnitudes, unidades y análisis dimensional

Este capítulo desarrolla el tránsito desde la representación de una magnitud física hasta el análisis dimensional como herramienta de auditoría, reducción y modelización. Su hilo conductor distingue sistemáticamente:

$$\boxed{\text{fenómeno físico} \leftrightarrow \text{modelo matemático} \leftrightarrow \text{estructura matemática.}}$$

1. Un número no es todavía una magnitud física

El resultado «42». El capítulo anterior terminó con una regla que acompañará todo el tratado: un cálculo físico no se cierra cuando aparece un número. Debemos todavía interpretarlo respecto del sistema, las premisas, el régimen y la observación. Ahora haremos esa regla más concreta.

Supongamos que resolvemos un problema y escribimos:

$$42.$$

¿Es una respuesta física?

No podemos saberlo.

Podría significar:

- 42 m;
- 42 s;
- 42 kg;
- 42 partículas;
- un índice sin dimensión;
- un número puramente matemático que todavía no ha recibido ninguna interpretación física.

Shankar formula esta dificultad de manera pedagógica al introducir el movimiento unidimensional: una posición necesita una unidad de longitud y un tiempo necesita una unidad de tiempo; un resultado numérico sin esa información no permite siquiera decidir qué se está afirmando.[1]

La primera distinción del capítulo será, por tanto:

$$\boxed{\text{número} \neq \text{valor de una magnitud} \neq \text{magnitud física.}}$$

Esta separación parece elemental. Sin embargo, una gran cantidad de errores posteriores —conversiones mal hechas, ecuaciones dimensionalmente imposibles, argumentos de funciones con unidades incompatibles— puede rastrearse hasta su pérdida.

[1] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics*, expanded ed., Yale University Press, 2019, cap. 1, §1.3, p. 4.

Magnitud física. El vocabulario metrológico internacional llama **magnitud** a una propiedad de un fenómeno, cuerpo o sustancia cuya magnitud puede expresarse mediante un número y una referencia.[2]

Para nuestro tratado necesitaremos una formulación ligeramente orientada al modelado.

Definición 1 — Magnitud física Una **magnitud física** es una propiedad cuantificable de un fenómeno, sistema o proceso que el modelo trata como comparable y representable mediante valores de magnitud.

Ejemplos:

- longitud;
- duración;
- masa;
- temperatura termodinámica;
- velocidad;
- energía.

La definición no dice todavía **cómo** medir cada magnitud. Tampoco afirma que toda propiedad física sea una magnitud. El color nominal de una etiqueta, por ejemplo, puede ser una propiedad del sistema sin constituir por sí mismo una magnitud en el sentido metrológico adoptado aquí. En cambio, una longitud de onda asociada con cierta radiación sí es una magnitud.

Debemos separar entonces:

propiedad física

de:

propiedad cuantificable según una estructura de comparación.

Esta distinción prolonga el capítulo 1: antes de escribir una ecuación, el modelo ya ha seleccionado qué propiedades considera relevantes.

Una magnitud no es uno de sus valores particulares. Consideremos la **longitud**.

«Longitud» designa una clase o tipo de magnitud. Pero la longitud de una barra concreta puede tener un valor particular: 2 m. Otra barra puede tener: 0.30 m. Y una tercera: 1.7 m.

No debemos confundir:

la magnitud longitud

con:

el valor de longitud de un objeto particular.

Definición 2 — Valor de una magnitud Un **valor de una magnitud** es una especificación cuantitativa de una magnitud particular, expresada mediante un número y una referencia adecuada; cuando la referencia es una unidad de medida, el valor se expresa como número por unidad.

Así, la expresión

$$L = 2\,\mathrm{m}$$

contiene varios niveles:

[2] JCGM, *International Vocabulary of Metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.1, «quantity», DOI 10.59161/JCGM200-2012.

- L: símbolo que representa la longitud particular que estamos considerando;
- 2 m: valor de esa longitud;
- 2: valor numérico respecto de la unidad elegida;
- m: unidad.

El BIPM resume esta estructura mediante la idea de que el valor de una magnitud se expresa generalmente como producto de un número y una unidad.[3]

La unidad es una referencia, no un adorno tipográfico. ¿Qué trabajo realiza el metro en

$$L = 2\,\mathrm{m}?$$

No es una etiqueta decorativa colocada después del número.

Nos proporciona una referencia con la que comparamos el valor de longitud.

Definición 3 — Unidad de medida Una **unidad de medida** para una magnitud de cierto tipo es una cantidad particular de ese mismo tipo adoptada por convención como referencia para expresar valores de magnitudes comparables.

Si u representa una unidad apropiada para una magnitud Q, podemos escribir: $Q = q\,u$,

donde q es un número. Por ejemplo: $L = 2\,\mathrm{m}$.

Aquí: $u = 1\,\mathrm{m}$

y: $q = 2$. La unidad nos permite convertir una comparación física en una representación numérica.

No debemos leer: 2 m

como una yuxtaposición informal entre «el número 2» y «la palabra metro».

Dentro del cálculo de magnitudes, la unidad participa algebraicamente.

El valor numérico depende de la unidad. El BIPM escribe conceptualmente:

$$\text{valor de magnitud} = \text{valor numérico} \times \text{unidad}.$$

Podemos hacerlo explícito.

Definición 4 — Valor numérico relativo a una unidad Si un valor de magnitud Q se expresa respecto de una unidad u como

$$Q = q\,u,$$

llamaremos **valor numérico de Q respecto de u** al número q. Lo denotaremos

$$\{Q\}_u := q.$$

Equivalentemente: $\{Q\}_u = \frac{Q}{u}$.

Esta escritura es importante porque hace visible algo que la notación cotidiana suele ocultar:

$$\boxed{\text{el valor numérico depende de la unidad elegida.}}$$

La magnitud representada puede permanecer exactamente igual.

[3] BIPM, *The International System of Units (SI)*, 9.ª ed., versión 4.01, junio de 2026, §2.1, p. 123, DOI 10.59161/AUEZ1291.

La misma longitud, números diferentes. Consideremos una misma longitud física: $L = 2\,\mathrm{m}$.

Como: $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$,
también podemos escribir: $L = 200\,\mathrm{cm}$. Y como: $1\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{mm}$,
tenemos: $L = 2000\,\mathrm{mm}$.
Por tanto:

$$\boxed{2\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{cm} = 2000\,\mathrm{mm}.}$$

Pero: $2 \neq 200 \neq 2000$.
Los números cambian. La longitud no.

Unidad elegida	Valor numérico	Valor de la longitud
m	2	$2\,\mathrm{m}$
cm	200	$200\,\mathrm{cm}$
mm	2000	$2000\,\mathrm{mm}$

Principio 1 — No confundir magnitud, valor, número y unidad En una expresión física distinguiremos siempre la magnitud considerada, su valor particular, el valor numérico y la unidad o referencia usada para expresarlo.

Principio 2 — Cambiar la unidad cambia el número, no la magnitud representada Cuando dos unidades representan el mismo tipo de magnitud y están relacionadas por un cambio de escala, la misma magnitud física recibe valores numéricos diferentes de manera compensatoria.

Por qué aparece la compensación inversa. Supongamos que tenemos una unidad u y otra unidad u' del mismo tipo.

Sea: $u' = \lambda u, \qquad \lambda > 0$. Si u' es una unidad **más grande** que u, entonces: $\lambda > 1$. Por ejemplo: $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$. La misma longitud necesitará menos unidades grandes para expresarse. Si: $L = 3000\,\mathrm{m}$,

entonces: $L = 3\,\mathrm{km}$. El número disminuye exactamente en el factor en que aumentó el tamaño de la unidad. Esto no es una regla memorizada de conversión. Es una consecuencia algebraica de que estamos representando la **misma magnitud**.

Primera proposición formal. Proposición 1 — Covariancia del valor numérico bajo un cambio multiplicativo de unidad

Sea Q un valor de magnitud. Supongamos que

$$Q = q\,u = q'\,u'$$

y que las unidades del mismo tipo satisfacen

$$u' = \lambda u, \qquad \lambda > 0.$$

Entonces:

$$\boxed{q' = \frac{q}{\lambda}.}$$

Demostración. Partimos de: $Q = q\,u$.
También: $Q = q'\,u'$. Por tanto: $q\,u = q'\,u'$.
Usando: $u' = \lambda u$,
obtenemos: $q\,u = q'\lambda u$.
Como u es una unidad no nula, podemos dividir ambos miembros por u: $q = \lambda q'$.
Finalmente: $q' = \frac{q}{\lambda}$.
Por tanto:

$$\boxed{q' = \frac{q}{\lambda}.}$$

$$\boxed{\text{QED}}$$

Interpretación de la Proposición 1. Si agrandamos la unidad por un factor λ, el valor numérico disminuye por el mismo factor: $u \longrightarrow \lambda u$
implica: $q \longrightarrow \frac{q}{\lambda}$.
El producto permanece invariante:

$$q\,u = \left(\frac{q}{\lambda}\right)(\lambda u).$$

Ésta es una primera forma de covariancia de representación:

$$\boxed{\text{cambia la representación numérica} \quad \text{mientras permanece la magnitud física.}}$$

Más adelante veremos una idea análoga cuando cambiemos sistemas de coordenadas.

Ejemplo desarrollado 1 — Metros y kilómetros. Sea: $L = 7500\,\text{m}$.
Como: $1\,\text{km} = 1000\,\text{m}$,
tenemos $\lambda = 1000$. Por la Proposición 1: $q' = \frac{7500}{1000} = 7.5$.
Luego:

$$\boxed{7500\,\text{m} = 7.5\,\text{km}.}$$

La conversión no consistió en mover mecánicamente una coma.
Consistió en mantener fija la magnitud mientras cambiábamos la referencia utilizada para expresarla.

Ejemplo desarrollado 2 — Segundos y milisegundos. Consideremos: $T = 0.032\,\text{s}$.
Como: $1\,\text{ms} = 10^{-3}\,\text{s}$,
tenemos: $\lambda = 10^{-3}$. Por la Proposición 1: $q' = \frac{0.032}{10^{-3}} = 32$.
Por tanto:

$$\boxed{0.032\,\text{s} = 32\,\text{ms}.}$$

La unidad disminuyó por un factor 1000 y el valor numérico aumentó por un factor 1000.

No todas las conversiones son de escala pura. La Proposición 1 tiene una hipótesis explícita: $u' = \lambda u$.

No debemos extenderla fuera de ese caso. Hay escalas de uso físico en las que la relación entre los números incluye además un desplazamiento de origen. La temperatura Celsius y la temperatura termodinámica en kelvin ofrecen un ejemplo importante.

Por eso no diremos:

> «Toda conversión de unidades es una regla de tres».

La formulación correcta es:

> la Proposición 1 describe los cambios **multiplicativos de unidad**.

El tratamiento preciso de kelvin, grado Celsius y SI aparecerá en §3.

El símbolo de la magnitud no debería depender de la unidad. Si: $L = 2\,\mathrm{m}$
y: $L = 200\,\mathrm{cm}$,
el símbolo L no cambia.
Eso expresa:

la magnitud representada es independiente de cómo elijamos expresarla.

Podemos tener: $\{L\}_{\mathrm{m}} = 2$
y: $\{L\}_{\mathrm{cm}} = 200$,
pero ambos corresponden al mismo L. Una ley física no debería depender accidentalmente de que el investigador prefiera metros o centímetros.

Del número a la observación. En el capítulo 1 introdujimos relaciones `[OBS]`.
Ahora podemos refinar esa cadena:

sistema físico $\longrightarrow$ magnitud seleccionada
$\Downarrow$
procedimiento de comparación
$\Downarrow$
valor respecto de una referencia
$\Downarrow$
representación numérica.

Por ejemplo:

$$[\mathrm{OBS}] \qquad L \longleftrightarrow \text{procedimiento de medición de longitud.}$$

Después escogemos una unidad $u = \mathrm{m}$ y obtenemos: $L = \{L\}_{\mathrm{m}}\,\mathrm{m}$. En el capítulo 3 estudiaremos la incertidumbre del procedimiento de medida. Aquí construimos solamente la gramática que permitirá hablar de ella sin confundirla con la unidad.

Un número puro también puede tener significado físico. Debemos evitar el error contrario.

No toda cantidad físicamente significativa necesita llevar un símbolo de unidad distinto de 1.

Existen magnitudes de **dimensión uno**:

- cocientes entre magnitudes del mismo tipo;
- ciertas fracciones;
- conteos;
- ángulos expresados en radianes, bajo la convención del SI.

Su tratamiento requiere cuidado y se desarrollará en §8.

Por ahora conservamos:

un número aislado no determina por sí mismo su interpretación física.

No afirmamos:

todo número físicamente significativo debe llevar siempre una unidad con nombre.

La segunda afirmación sería falsa.

Ficha de lectura cuantitativa. Ficha de lectura de un valor 1. **Magnitud:** ¿qué propiedad física representa el símbolo? 2. **Valor:** ¿qué valor particular se atribuye? 3. **Unidad:** ¿qué referencia se utiliza? 4. **Número:** ¿cuál es el valor numérico respecto de esa unidad? 5. **Cambio de unidad:** ¿la transformación es multiplicativa? 6. **Observación:** ¿qué procedimiento conecta la magnitud con el dato? 7. **Interpretación:** ¿el número conserva sentido físico si borramos la referencia?

Ejercicios de §1. Ejercicio 1 — Número, valor o magnitud

Tipo: conceptual · **Nivel:** básico

Considera:

1. 3;
2. $3\,\mathrm{m}$;
3. $L = 3\,\mathrm{m}$;
4. «la longitud de la barra»;
5. $\{L\}_{\mathrm{m}} = 3$.

Explica qué representa cada expresión y cuáles no bastan, por sí solas, para identificar un valor físico completo.

Solución.

1. 3 es un número. Sin contexto no determina una magnitud.
2. $3\,\mathrm{m}$ es un valor de longitud, pero no identifica qué objeto posee esa longitud.
3. $L = 3\,\mathrm{m}$ asigna ese valor a la magnitud particular L.
4. «La longitud de la barra» identifica una magnitud particular, pero no su valor.
5. $\{L\}_{\mathrm{m}} = 3$ dice que el valor numérico de L respecto del metro es 3; equivale a $L = 3\,\mathrm{m}$.

La conclusión es:

magnitud, valor, número, unidad

son conceptos relacionados pero no intercambiables.

Ejercicio 2 — La misma longitud en tres unidades
Tipo: cálculo · **Nivel:** básico
Una barra tiene: $L = 2.35\,\mathrm{m}$.

1. Exprésala en centímetros.
2. Exprésala en milímetros.
3. Calcula $\{L\}_{\mathrm{m}}$, $\{L\}_{\mathrm{cm}}$ y $\{L\}_{\mathrm{mm}}$.
4. Explica qué cambia y qué permanece invariante.

Solución.
Como $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$: $2.35\,\mathrm{m} = 235\,\mathrm{cm}$.
Como $1\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{mm}$: $2.35\,\mathrm{m} = 2350\,\mathrm{mm}$.
Así:

$$\boxed{L = 2.35\,\mathrm{m} = 235\,\mathrm{cm} = 2350\,\mathrm{mm}.}$$

Y:

$$\{L\}_{\mathrm{m}} = 2.35,$$

$$\{L\}_{\mathrm{cm}} = 235,$$

$$\{L\}_{\mathrm{mm}} = 2350.$$

Cambian la unidad y el valor numérico. Permanece invariante la longitud física L.

Ejercicio 3 — Cambio de unidad y cambio de número
Tipo: demostración · **Nivel:** central
Una distancia se expresa como $D = q\,u$.
Introducimos

$$u' = 5u.$$

1. Demuestra que:

$$\{D\}_{u'} = \frac{1}{5}\{D\}_{u}.$$

2. Si $\{D\}_{u} = 60$, calcula $\{D\}_{u'}$.
3. Explica por qué sería incorrecto afirmar que la distancia se volvió cinco veces menor.

Solución.
Tenemos: $D = q\,u = q'\,u'$.
Como $u' = 5u$: $q\,u = q'(5u)$.
Dividiendo por u: $q = 5q'$.
Luego:

$$\boxed{q' = \frac{q}{5}.}$$

Por tanto:

$$\boxed{\{D\}_{u'} = \frac{1}{5}\{D\}_u.}$$

Si $\{D\}_u = 60$: $\{D\}_{u'} = \frac{60}{5} = 12$.
Así:

$$\boxed{60u = 12u'.}$$

La distancia no cambió. La unidad nueva es cinco veces mayor y por eso hacen falta cinco veces menos unidades para representar la misma distancia.

Cierre. Hemos construido la primera capa cuantitativa del tratado:

$$\boxed{Q = \{Q\}_u\, u.}$$

Esta escritura separa:

- la magnitud representada;
- el valor particular;
- la unidad;
- el valor numérico.

Y la Proposición 1 mostró que, bajo: $u' = \lambda u$,
el número transforma como: $\{Q\}_{u'} = \frac{\{Q\}_u}{\lambda}$.
Por tanto:

$$\boxed{\text{la física no está contenida en el número aislado.}}$$

La sección siguiente profundizará en una pregunta que aquí hemos tratado de manera operativa:

> **¿qué significa que dos magnitudes sean del mismo tipo y puedan compararse mediante una misma unidad?**

Entramos así en el §2.

2. Magnitudes, clases de magnitudes y referencias

Antes de comparar números, debemos saber qué estamos comparando. En §1 distinguimos cuatro niveles:

$$\text{magnitud} \neq \text{valor de magnitud} \neq \text{valor numérico} \neq \text{unidad.}$$

Ahora aparece una pregunta anterior incluso a la elección de unidad:

> ¿Cuándo tiene sentido decir que dos magnitudes pueden compararse entre sí?

Consideremos las expresiones: 5 m
y

$$8\,\text{m}.$$

Podemos preguntar cuál longitud es mayor, calcular su diferencia o formar, cuando el contexto lo permite, el cociente entre ambas. Pero comparemos ahora: 5 m

$$x = 2\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{cm}$$



Figura 2.1. Cambiar de metros a centímetros multiplica por cien el valor numérico y divide por cien la unidad empleada. El segmento físico representado permanece igual: $2\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{cm}$. Véase §2.

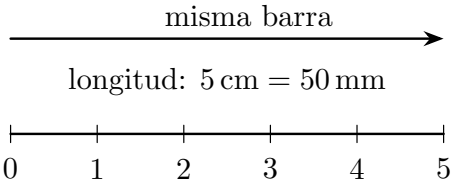


Figura 2.2. La longitud permanece fija al cambiar la unidad. Cada centímetro contiene diez milímetros; el valor numérico se multiplica por diez. Véase §2.

y

$$8\,\mathrm{s}.$$

Los números 5 y 8 sí son comparables como números.

Las magnitudes físicas representadas no lo son de la misma manera.

No tiene sentido físico ordinario afirmar: $5\,\mathrm{m} < 8\,\mathrm{s}$. La dificultad no está en los números. Está en que representan **clases distintas de magnitudes**. Ésta es una de las primeras restricciones estructurales que la física impone al álgebra que usamos para describirla.

Tipo de magnitud. El Vocabulario Internacional de Metrología introduce la noción de *kind of quantity* como el aspecto común a magnitudes mutuamente comparables.[4]

Adoptaremos una formulación operativa compatible con esa idea.

Definición 5 — Tipo de magnitud Un **tipo de magnitud** es la clase determinada por el aspecto cuantificable común que hace mutuamente comparables ciertas magnitudes físicas.

Ejemplos de magnitudes que normalmente consideramos del mismo tipo son:

- el diámetro de una esfera;
- la longitud de una cuerda;
- la longitud de onda de cierta radiación;
- la distancia entre dos puntos.

Todas pertenecen al tipo de magnitud:

$$\boxed{\text{longitud.}}$$

En cambio, una longitud y una masa no pertenecen al mismo tipo. La clasificación no depende de que los valores numéricos coincidan. Podemos tener: $L = 5\,\mathrm{m}$

y

$$T = 5\,\mathrm{s}.$$

[4]JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.2, «kind of quantity».

Entonces: $\{L\}_{\mathrm{m}} = 5$
y

$$\{T\}_{\mathrm{s}} = 5,$$

pero la igualdad entre los números no convierte longitud y duración en la misma magnitud física.
Por tanto:

$$\boxed{\text{mismo valor numérico} \not\Rightarrow \text{mismo tipo de magnitud.}}$$

Una clase física precede a la elección de unidad. En §1 escribimos: $Q = q\,u$.
Esa escritura tiene una condición silenciosa que ahora debemos hacer explícita:

$$Q$$

y

$$u$$

deben pertenecer al mismo tipo de magnitud.
No podemos usar un segundo como unidad de una longitud ni un metro como unidad de una masa. La unidad no crea el tipo de magnitud. Lo presupone.
La secuencia conceptual correcta es:

$$\boxed{\text{tipo de magnitud} \longrightarrow \text{elección de una referencia compatible} \longrightarrow \text{valor numérico.}}$$

No:

$$\boxed{\text{número} \longrightarrow \text{adición posterior de una etiqueta de unidad.}}$$

Este orden será esencial cuando estudiemos dimensiones.

La unidad como cantidad de referencia del mismo tipo. El VIM define una unidad de medida como una cantidad escalar real, adoptada por convención, con la cual puede compararse cualquier otra cantidad del mismo tipo para expresar la razón entre ambas como un número.[5]
Ésta es la estructura que ya utilizábamos implícitamente en §1. Si u es una unidad del mismo tipo que Q, escribimos: $Q = q\,u$. Entonces: $q = \frac{Q}{u}$. La división tiene aquí una interpretación física precisa: estamos preguntando cuántas veces la referencia u entra, en sentido de razón, en la magnitud Q.
Por ejemplo: $L = 2.5\,\mathrm{m}$
puede leerse como: $\frac{L}{1\,\mathrm{m}} = 2.5$. El metro no es un comentario sobre el número 2.5. Es la referencia que permite producir ese número a partir de una magnitud de longitud.

[5]JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.9, «measurement unit».

Comparabilidad no significa identidad física. Que dos magnitudes sean del mismo tipo no significa que sean la misma magnitud particular. La longitud de una mesa y la longitud de una habitación pueden compararse porque ambas son longitudes. Pero son propiedades de sistemas diferentes.

Podemos escribir: $L_{\text{mesa}} = 1.8\,\text{m}$

y

$$L_{\text{habitación}} = 4.5\,\text{m}.$$

Entonces tiene sentido formar:

$$\frac{L_{\text{habitación}}}{L_{\text{mesa}}} = \frac{4.5\,\text{m}}{1.8\,\text{m}} = 2.5.$$

La razón es numérica porque se canceló una referencia común de longitud. Pero esto no elimina la diferencia entre los objetos físicos representados.

Debemos distinguir:

$$\boxed{\text{mismo tipo} \neq \text{misma magnitud particular} \neq \text{mismo valor.}}$$

El tipo de magnitud tampoco está determinado por el símbolo algebraico. Supongamos que en dos problemas distintos aparece la letra:

$$x.$$

En un problema x puede representar una posición. En otro, una fracción sin unidad. En un tercero, un tiempo reescalado. La letra no determina la clase física del objeto.

El significado procede del modelo y del diccionario de interpretación introducido en el capítulo 1.

Por tanto:

$$\boxed{\text{misma letra} \not\Rightarrow \text{mismo tipo de magnitud.}}$$

Esto es una razón adicional para no manipular fórmulas físicas como si fueran expresiones algebraicas descontextualizadas.

¿Basta la expresión de unidad para identificar el tipo? Tampoco.

Éste es un punto más sutil. El VIM advierte que dos tipos de magnitud diferentes pueden compartir la misma expresión de unidad.[6]

Por ejemplo, tanto la **capacidad calorífica** como la **entropía** pueden expresarse mediante: J/K. Sin embargo, no se consideran generalmente magnitudes del mismo tipo. Otro ejemplo especialmente instructivo utiliza: s^{-1}. Una frecuencia puede expresarse con esa estructura de unidad y una actividad radiactiva también.

El SI utiliza nombres especiales distintos: $1\,\text{Hz} = 1\,\text{s}^{-1}$

para frecuencia, y: $1\,\text{Bq} = 1\,\text{s}^{-1}$

para actividad de radionúclidos. La igualdad de las expresiones algebraicas de unidad no significa identidad del concepto físico.

Por tanto:

[6]JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.9, «measurement unit».

$$\boxed{\text{misma expresión de unidad} \not\Rightarrow \text{mismo tipo de magnitud.}}$$

Todavía no hemos definido formalmente la dimensión física.

En §5 veremos una versión más profunda de esta advertencia:

> tener la misma dimensión tampoco basta para ser la misma clase de magnitud.

La física de una cantidad no cabe entera en sus unidades. La observación anterior tiene una consecuencia metodológica importante.

Consideremos una expresión como: $3\,\mathrm{s}^{-1}$.

Sin información adicional, no sabemos todavía si representa:

- una frecuencia;
- una actividad radiactiva;
- alguna otra tasa inversa de tiempo.

La unidad restringe el significado posible.

No lo determina completamente.

Necesitamos además:

- qué sistema estudiamos;
- qué observable se representa;
- cómo se define esa magnitud en el modelo;
- qué procedimiento `[OBS]` la conecta con datos.

Así reaparece la tesis del capítulo 1:

$$\boxed{\text{formalismo} + \text{interpretación física}}$$

son inseparables.

Comparar, ordenar, restar y formar razones. Cuando dos valores pertenecen al mismo tipo de magnitud, ciertas operaciones adquieren sentido natural. Si: $L_1 = 2\,\mathrm{m}$

y: $L_2 = 5\,\mathrm{m}$,

podemos comparar: $L_1 < L_2$,

restar: $L_2 - L_1 = 3\,\mathrm{m}$,

y formar la razón: $\frac{L_2}{L_1} = \frac{5}{2}$. En cambio, la expresión: $L_2 - T$

con T una duración no representa, sin una construcción física adicional, una magnitud ordinaria definida por resta. La regla no debe formularse de manera excesivamente fuerte. La física sí construye nuevas magnitudes combinando clases diferentes mediante productos y cocientes. Por ejemplo, más adelante aparecerán magnitudes cuya unidad contiene longitud dividida por tiempo.

Lo que no podemos hacer es **sumar o comparar por orden magnitudes de tipos incompatibles como si fueran homogéneas**. La combinación multiplicativa será objeto de §4.

Comparabilidad y ecuaciones físicas. Supongamos que alguien propone: $L_1 = L_2 + T$.

Antes de preguntar si la ecuación describe algún fenómeno real, ya tenemos un problema semántico:

- L_1 es una longitud;
- L_2 es una longitud;
- T es una duración.

La suma: $L_2 + T$

no está definida como suma de magnitudes del mismo tipo.

No necesitamos conocer todavía análisis dimensional para detectar el problema. La incompatibilidad aparece ya en el nivel de los tipos de magnitud. En §6 convertiremos esta intuición en una prueba sistemática mediante homogeneidad dimensional.

Primera regla metodológica de §2. Principio 3 — La comparabilidad física precede a la comparación numérica Antes de comparar, sumar o interpretar conjuntamente valores numéricos, debe establecerse qué magnitudes representan y si las operaciones propuestas son compatibles con sus tipos de magnitud.

Esto evita errores como: $3\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{s} = 7$. El problema no consiste en que $3 + 4 \neq 7$. De hecho: $3 + 4 = 7$. El problema es que la operación física propuesta no está bien tipada.

La palabra «referencia» es más amplia que «unidad». Hasta ahora hemos trabajado casi exclusivamente con valores del tipo: $Q = q\,u$. Pero el VIM define un valor de magnitud de manera más general como la combinación de un número y una referencia.[7]

En muchos casos, esa referencia es una unidad de medida.

Sin embargo, el VIM contempla también valores cuya referencia se da mediante:

- un procedimiento de medida especificado;
- un material de referencia.

Por ejemplo, determinadas escalas de dureza dependen de un procedimiento convencional, y algunas magnitudes de laboratorio pueden expresarse respecto de materiales de referencia internacionalmente establecidos. No desarrollaremos aquí esas ramas de la metrología. Pero debemos conservar la distinción conceptual.

Definición 6 — Referencia de un valor de magnitud Una **referencia de un valor de magnitud** es el elemento convencional respecto del cual el número asociado adquiere significado cuantitativo. En las magnitudes tratadas ordinariamente en este capítulo, la referencia será normalmente una unidad de medida; en contextos metrológicos más generales puede ser también un procedimiento o un material de referencia.

Por tanto:

$$\boxed{\text{unidad} \subset \text{clase más amplia de referencias usadas para expresar valores.}}$$

La expresión anterior es conceptual: no afirma una inclusión conjuntista formal entre objetos metrológicos.

Por qué en física elemental podemos concentrarnos en unidades. La mayor parte de las magnitudes de este tratado —longitud, masa, tiempo, velocidad, aceleración, energía, carga, temperatura termodinámica— se manipularán mediante unidades. Por eso nuestra notación principal seguirá siendo: $Q = \{Q\}_u\, u$.

La ampliación de §2.12 cumple otra función:

> impedir que confundamos una convención pedagógica útil con la definición más general de valor de magnitud.

En otras palabras:

$$\boxed{\text{nuestro cálculo con unidades es central} \quad \text{pero no agota toda la metrología.}}$$

[7] JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.19, «quantity value».

La teoría sistemática de medición, incertidumbre y trazabilidad pertenece al capítulo 3 y a tratamientos metrológicos especializados.

Una unidad no es cualquier cantidad elegida informalmente. Podemos comparar una mesa con otra mesa y obtener una razón de longitudes. Pero eso no convierte automáticamente la longitud de la segunda mesa en una **unidad de medida** institucionalizada. Para que una referencia funcione como unidad necesitamos una adopción convencional suficientemente clara y una forma de identificar o realizar esa referencia.

En un ejercicio escolar podemos decir:

> «Tomemos esta barra como una unidad provisional de longitud».

Eso construye un modelo sencillo de comparación. Pero el SI contemporáneo requiere una estructura metrológica mucho más precisa, que estudiaremos en §3.

La diferencia es:

usar algo como referencia local $\neq$ definir una unidad dentro de un sistema internacional de unidades.

El símbolo de cantidad debe permanecer físicamente estable. Volvamos a una longitud particular L.

Podemos escribir: $L = 2\,\mathrm{m}$

o: $L = 200\,\mathrm{cm}$.

La elección de unidad cambia:

$$\{L\}_{\mathrm{m}} = 2,$$

$$\{L\}_{\mathrm{cm}} = 200.$$

Pero la cantidad representada sigue siendo L.

Conviene por tanto que nuestra notación separe:

$$L$$

de: $\{L\}_u$. El primero representa la magnitud física particular. El segundo representa el número que obtenemos al expresarla respecto de una unidad concreta.

Esto nos permitirá más adelante distinguir entre:

- **ecuaciones entre magnitudes**;
- **ecuaciones entre valores numéricos**.

La primera clase tiene un grado de independencia respecto de la elección de unidad que la segunda puede no tener.

Mismo fenómeno, magnitudes diferentes. Un solo sistema físico puede portar muchas magnitudes diferentes.

Consideremos una barra.

Podemos asociarle:

- una longitud;
- una masa;
- una temperatura;
- una velocidad, si se mueve;
- una energía, según el modelo considerado.

No debemos pensar que «la barra tiene un número».

Tiene múltiples propiedades cuantificables, cada una perteneciente a un tipo diferente y cada una necesitada de una referencia apropiada.

La estructura correcta es:

$$\boxed{\text{sistema físico} \longrightarrow \text{familia de magnitudes seleccionadas por el modelo.}}$$

Esto vuelve a conectar el capítulo con el concepto de observable del capítulo 1.

Misma magnitud general, instancias diferentes. La palabra «longitud» puede aparecer en dos niveles.

Por un lado, hablamos del tipo general:

$$\text{longitud.}$$

Por otro, hablamos de una longitud concreta: L_{barra}. La primera organiza una clase de magnitudes comparables. La segunda es una instancia física particular. Para evitar una carga terminológica excesiva no construiremos una teoría formal de universales e instancias.

Pero mantendremos la distinción operativa:

$$\boxed{\text{tipo de magnitud} \neq \text{magnitud particular de un sistema.}}$$

Una advertencia sobre temperaturas y escalas. El lenguaje de comparación por razón funciona limpiamente para magnitudes como longitud y masa.

No todas las escalas cuantitativas se comportan de la misma manera. En particular, la temperatura Celsius introduce un desplazamiento convencional de origen respecto de la temperatura termodinámica expresada en kelvin.

Por eso debemos evitar inferencias del tipo:

«20 °C es el doble de 10 °C».

Esa afirmación no expresa una razón de temperaturas termodinámicas. El caso será tratado cuidadosamente en §3.

Aquí cumple una función conceptual:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{que algo se exprese con un número y una referencia}\\ \nRightarrow \\ \text{que todas las operaciones numéricas tengan interpretación física directa}\end{array}}\ .$$

Segunda regla metodológica de §2. Principio 4 — La notación de unidad no determina por sí sola el significado físico Una expresión de unidad restringe las magnitudes que puede representar, pero la identificación del tipo de magnitud exige además el contexto físico, la definición de la cantidad y su regla de interpretación.

Así, ante: $2\,\mathrm{s}^{-1}$,

no preguntaremos únicamente:

«¿qué unidad tiene?»

También preguntaremos:

«¿qué magnitud física representa?»

Ficha de lectura: identificar correctamente una cantidad física. A partir de ahora, cuando encontremos una cantidad en una fórmula, podemos aplicar esta ficha mínima.

1. **Sistema:** ¿de qué sistema o fenómeno es propiedad?
2. **Magnitud particular:** ¿qué cantidad concreta representa el símbolo?
3. **Tipo:** ¿a qué clase de magnitud pertenece?
4. **Referencia:** ¿respecto de qué se expresa su valor?
5. **Unidad:** si corresponde, ¿qué unidad se ha elegido?
6. **Valor numérico:** ¿qué número resulta respecto de esa unidad?
7. **Interpretación:** ¿cómo se conecta con el modelo y con `[OBS]`?

Esta secuencia impide reducir prematuramente la física a números.

Ejercicios de §2. Ejercicio 4 — Misma unidad, magnitudes diferentes

Tipo: conceptual · **Nivel:** central

Considera los siguientes casos conceptuales:

1. una frecuencia expresada en s^{-1};
2. una actividad radiactiva expresada en s^{-1};
3. la longitud de onda de una señal expresada en metros;
4. el diámetro de una esfera expresado en metros;
5. una duración expresada en segundos.

Responde:

a. ¿Qué pares pertenecen claramente al mismo tipo de magnitud?
b. ¿Qué ejemplo muestra que una misma expresión de unidad no basta para identificar el tipo de magnitud?
c. ¿Por qué tener el mismo valor numérico tampoco basta?
d. Explica por qué 2 Hz y 2 Bq no deben interpretarse como la misma magnitud física aunque ambas unidades sean algebraicamente equivalentes a s^{-1}.

Solución del ejercicio 4.

a. Magnitudes del mismo tipo. La longitud de onda y el diámetro son ambas longitudes.

Por tanto pertenecen al mismo tipo de magnitud:

$$\boxed{\text{longitud.}}$$

Pueden compararse mediante una misma familia de unidades de longitud. La frecuencia y la actividad radiactiva no se consideran, en general, magnitudes del mismo tipo. La duración pertenece al tipo tiempo o duración y tampoco coincide con los anteriores.

b. Misma expresión de unidad. Frecuencia y actividad ofrecen el ejemplo buscado:

$$[\text{frecuencia}] \sim \mathrm{s}^{-1},$$

$$[\text{actividad}] \sim \mathrm{s}^{-1}.$$

Sin embargo, representan conceptos físicos distintos. Por eso el SI usa nombres especiales diferentes: Hz

y: Bq.

La lección es:

$$\boxed{\text{misma expresión algebraica de unidad} \not\Rightarrow \text{mismo tipo de magnitud.}}$$

c. Mismo valor numérico. Supongamos: $L = 2\,\mathrm{m}$
y: $T = 2\,\mathrm{s}$.
Entonces ambos valores numéricos son 2, pero una cantidad es longitud y la otra duración.
Por tanto:

$$\boxed{\{L\}_{\mathrm{m}} = \{T\}_{\mathrm{s}} \not\Rightarrow L \text{ y } T \text{ son del mismo tipo.}}$$

d. Hertz frente a becquerel. Tenemos las igualdades de unidades:

$$1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1},$$

$$1\,\mathrm{Bq} = 1\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Pero los nombres especiales señalan usos físicos diferentes:
- hertz para frecuencia;
- becquerel para actividad de radionúclidos.

Así, aunque:

$$2 = 2$$

y las expresiones algebraicas de unidad coincidan, la interpretación física no coincide. La cantidad no queda identificada solo por el par «número + forma algebraica de unidad» si hemos perdido el tipo físico que el modelo asigna.

Ejercicio 5 — Diseñar una referencia de medida

Tipo: modelización · **Nivel:** central

Una comunidad aislada desea comparar longitudes antes de adoptar un sistema internacional. Decide conservar una barra y declarar su longitud como una unidad provisional u.

1. Explica qué debe significar la afirmación

$$L = 3.7\,u.$$

2. ¿Por qué u debe representar una longitud y no una masa o una duración?
3. Si otra barra u' tiene una longitud igual a la mitad de u, ¿qué valor numérico tendrá la misma longitud L respecto de u'?
4. Identifica qué partes del procedimiento son convencionales y qué parte expresa una comparación física.
5. Explica por qué este modelo local no equivale todavía a construir el SI contemporáneo.

Solución del ejercicio 5.

1. Significado de $L = 3.7u$. La expresión afirma que la longitud particular L tiene, respecto de la referencia de longitud u, el valor numérico: $\{L\}_u = 3.7$. Equivalentemente: $\frac{L}{u} = 3.7$. No significa que 3.7 sea la longitud. Significa que la longitud L se expresa como 3.7 veces la referencia elegida.

2. Compatibilidad de tipo. Para formar la razón: $\frac{L}{u}$,
L y u deben ser magnitudes comparables del mismo tipo.

Como L es una longitud, u debe ser también una longitud. Una masa o una duración no constituyen una unidad de longitud.

3. Nueva referencia. Tenemos: $u' = \frac{1}{2}u$. La unidad nueva es dos veces más pequeña. Por la Proposición 1, si: $u' = \lambda u$

con: $\lambda = \frac{1}{2}$,

entonces el nuevo valor numérico es: $q' = \frac{q}{\lambda} = \frac{3.7}{1/2} = 7.4$.

Por tanto:

$$\boxed{L = 7.4\,u'.}$$

La magnitud no cambió.

Cambió la referencia.

4. Convención y comparación física. Es convencional:

- elegir cierta barra como referencia;
- llamarla u;
- adoptar esa referencia de manera común.

La comparación física consiste en establecer la relación entre la longitud que queremos expresar y la longitud de referencia.

Podemos esquematizar:

$$\boxed{\text{convención de referencia} + \text{comparación física} \longrightarrow \text{valor numérico.}}$$

5. Por qué no es todavía el SI. El ejercicio construye un sistema local muy simple basado en una barra material. El SI contemporáneo es una estructura internacional mucho más precisa: sus unidades se definen mediante valores fijados de constantes definitorias y requieren procedimientos de realización y trazabilidad metrológica.

Por tanto:

$$\boxed{\text{referencia local mediante una barra} \neq \text{definición moderna del SI.}}$$

El SI será el objeto de §3.

Síntesis. §1 mostró que:

$$\boxed{Q = \{Q\}_u\, u.}$$

§2 ha añadido la condición estructural que esa escritura presupone:

$$\boxed{Q \text{ y } u \text{ deben pertenecer al mismo tipo de magnitud.}}$$

Definimos:

- la Definición 5 — tipo de magnitud;
- la Definición 6 — referencia de un valor de magnitud.

Y fijamos dos principios:

$$\boxed{\text{comparabilidad física antes que comparación numérica}}$$

y:

$$\boxed{\text{la unidad no determina por sí sola el significado físico.}}$$

Las cuatro negaciones que debemos conservar son:

$$\boxed{\text{mismo número} \not\Rightarrow \text{mismo tipo},}$$

$$\boxed{\text{misma letra} \not\Rightarrow \text{mismo tipo},}$$

$$\boxed{\text{misma expresión de unidad} \not\Rightarrow \text{mismo tipo},}$$

y:

$$\boxed{\text{misma clase de magnitud} \not\Rightarrow \text{misma magnitud particular}.}$$

El siguiente paso será construir el sistema de unidades que usaremos de manera predominante en el tratado (§3).

Allí distinguiremos cuidadosamente:

- las siete magnitudes base;
- las siete unidades base;
- las siete constantes definitorias;
- definición de una unidad;
- realización práctica;
- prefijos y escritura correcta de símbolos.

3. El Sistema Internacional contemporáneo

Una unidad local no basta para una ciencia global. En §1 vimos que un valor de magnitud puede escribirse, en los casos ordinarios que nos interesan, como $Q = \{Q\}_u\, u$. En §2 añadimos que la unidad u debe ser una referencia compatible con el tipo de magnitud de Q. Todavía queda un problema. Nada impide que dos comunidades elijan referencias diferentes para la misma clase de magnitud.

Una longitud puede expresarse en metros, millas, pulgadas o mediante cualquier otra referencia definida de manera suficientemente precisa. Matemáticamente podemos convertir entre esas elecciones si conocemos sus relaciones. Pero una ciencia experimental internacional necesita algo más que la posibilidad abstracta de convertir.

Necesita un sistema que permita que resultados obtenidos en laboratorios distintos sean comparables sin renegociar desde cero el significado de cada unidad. Ésta es una de las funciones del **Sistema Internacional de Unidades**. El SI no es simplemente una tabla de nombres.

Es una infraestructura convencional para expresar valores de magnitudes de forma coherente, reproducible y globalmente comparable.

Qué significa «SI» en 2026. La formulación contemporánea del SI debe leerse con cuidado. Antes de la revisión adoptada por la 26.ª CGPM en 2018 y efectiva desde el 20 de mayo de 2019, era habitual presentar el sistema diciendo que estaba definido mediante siete unidades base y que las demás unidades se derivaban de ellas.

Esa descripción histórica ya no es la definición fundamental vigente.

La formulación actual procede en la dirección inversa:

$$\boxed{\text{siete valores exactos de constantes definitorias} \longrightarrow \text{definición del SI} \longrightarrow \text{unidades del SI}.}$$

La 9.ª edición de la *SI Brochure*, en su versión 4.01 de junio de 2026, mantiene esta arquitectura.[8]

Definición 7 — Sistema Internacional de Unidades El **Sistema Internacional de Unidades (SI)** es el sistema de unidades definido fijando exactamente los valores numéricos de siete constantes definitorias cuando se expresan en las unidades especificadas por el propio SI.

Esta definición operativa conserva el rasgo que necesitaremos matemáticamente:

> el sistema se fija mediante relaciones exactas entre valores de constantes y unidades.

No debemos leer esta frase como si las constantes fueran «elegidas arbitrariamente». Algunas son constantes fundamentales de la naturaleza y otra, como K_{cd}, es de carácter técnico. Lo que fija convencionalmente el SI es **su valor numérico exacto en determinadas unidades**.

Las siete constantes definitorias. Las siete constantes son las siguientes.[9]

Constante definitoria	Símbolo	Valor numérico fijado exactamente	Unidad en la que se fija
frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del cesio-133	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9\,192\,631\,770$	Hz
velocidad de la luz en el vacío	c	$299\,792\,458$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
constante de Planck	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
carga elemental	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
constante de Boltzmann	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\mathrm{J\,K^{-1}}$
constante de Avogadro	N_{A}	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
eficacia luminosa de una radiación monocromática definida	K_{cd}	683	$\mathrm{lm\,W^{-1}}$

En esta tabla aparecen nombres de unidades derivadas —Hz, J, C, lm y W— que estudiaremos sistemáticamente en §4.

Por ahora basta registrar las relaciones:

$$\mathrm{Hz} = \mathrm{s^{-1}},$$

[8] BIPM, *The International System of Units (SI)*, 9.ª ed., versión 4.01, junio de 2026, §§2.2–2.3.2, pp. 123–132, DOI 10.59161/AUEZ1291.

[9] BIPM, *SI — Defining constants*; véase también *SI Brochure*, v4.01 (2026), §2.2, pp. 123–125.

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}},$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{A\,s},$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}.$$

La unidad lumen requerirá además la noción de estereorradián, que retomaremos al estudiar cantidades de dimensión uno.

«Exacto por definición» no significa «medido con incertidumbre cero». Esta distinción es fundamental. El valor numérico

$$299\,792\,458$$

asignado a c cuando se expresa en $\mathrm{m\,s^{-1}}$ no es en el SI actual el resultado de una nueva medición cuyo último decimal podría modificarse mañana. Es un valor fijado exactamente por definición. Lo mismo ocurre con los otros seis valores de la tabla.

Por eso la *SI Brochure* declara que los valores numéricos de las siete constantes definitorias no tienen incertidumbre.[10]

Pero sería un error inferir:

> «Entonces toda realización experimental del metro, del segundo o del kilogramo carece de incertidumbre.»

La definición y la realización son niveles distintos.

Podemos tener:

$$\boxed{\text{definición exacta} \quad + \quad \text{realización experimental con incertidumbre.}}$$

La incertidumbre pertenece al proceso mediante el cual materializamos, comparamos o medimos la unidad en condiciones reales. Su tratamiento sistemático pertenece al capítulo 3.

Constantes definitorias: no todas son del mismo carácter físico. Conviene evitar otra simplificación.

A veces se dice:

> «El SI está definido mediante siete constantes fundamentales de la naturaleza.»

La frase es demasiado fuerte. La propia *SI Brochure* distingue la naturaleza de las constantes definitorias. Algunas, como c y h, son propiamente constantes fundamentales; K_{cd} es una constante técnica asociada a una convención fotométrica.[11]

Por tanto, usaremos la expresión exacta:

$$\boxed{\text{siete constantes definitorias}}$$

y no:

$$\boxed{\text{siete constantes fundamentales}}$$

[10] BIPM, *SI — Defining constants*; véase también *SI Brochure*, v4.01 (2026), §2.2, pp. 123–125.

[11] BIPM, *The International System of Units (SI)*, 9.ª ed., versión 4.01, junio de 2026, §§2.2–2.3.2, pp. 123–132, DOI 10.59161/AUEZ1291.

como si ambas clases coincidieran.

Definición 8 — Constante definitoria del SI Una **constante definitoria del SI** es una de las siete constantes cuyo valor numérico se fija exactamente en la definición del SI cuando se expresa en la unidad correspondiente.

La palabra **definitoria** describe el papel que la constante cumple en el sistema de unidades.

Las siete magnitudes base y las siete unidades base. Aunque el SI ya no se define fundamentalmente «a partir de las unidades base», las siete magnitudes base y sus unidades siguen cumpliendo un papel estructural central.[12]

Magnitud base	Símbolo típico	Unidad base	Símbolo
tiempo	t	segundo	s
longitud	l, x, r, etc.	metro	m
masa	m	kilogramo	kg
corriente eléctrica	I, i	amperio	A
temperatura termodinámica	T	kelvin	K
cantidad de sustancia	n	mol	mol
intensidad luminosa	I_{v}	candela	cd

Definición 9 — Magnitud base del SI Una **magnitud base del SI** es una de las siete magnitudes elegidas convencionalmente como base para organizar el sistema de dimensiones y unidades del SI: tiempo, longitud, masa, corriente eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa.

Definición 10 — Unidad base del SI Una **unidad base del SI** es la unidad SI asociada a una de las siete magnitudes base: segundo, metro, kilogramo, amperio, kelvin, mol o candela.

La palabra **base** indica un papel dentro de la arquitectura del sistema.

No significa que una magnitud base sea «más real» o «más importante» que una magnitud derivada.

Las unidades base no son siete patrones materiales. La palabra «unidad» puede evocar una colección de objetos guardados en un laboratorio:

- una barra patrón;
- una masa patrón;
- un reloj patrón;
- y así sucesivamente.

Ésa no es la estructura conceptual del SI actual. El kilogramo, por ejemplo, ya no se define como la masa del Prototipo Internacional del Kilogramo. La unidad se define mediante las constantes del SI; después debe **realizarse** experimentalmente mediante métodos compatibles con esa definición.

Esto permite que los métodos de realización mejoren sin obligarnos a cambiar cada vez la definición de la unidad.

La separación es:

$$\boxed{\text{definición} \neq \text{artefacto particular} \neq \text{procedimiento concreto de realización.}}$$

[12] BIPM, *SI — Base units*; véase también *SI Brochure*, v4.01 (2026), §2.3.1, pp. 126–131.

No existe una correspondencia simple «una constante = una unidad base». La presencia de siete constantes y siete unidades base invita a imaginar siete parejas independientes:

$$c \leftrightarrow \mathrm{m}, \qquad h \leftrightarrow \mathrm{kg}, \qquad \ldots$$

Esta representación puede servir como recordatorio pedagógico muy aproximado, pero no describe fielmente la estructura lógica. La propia documentación del BIPM advierte que no existe una correspondencia uno a uno entre las siete constantes definitorias y las siete unidades base: la definición de varias unidades base utiliza más de una constante.[13]

Por ejemplo, el kilogramo se expresa mediante la constante de Planck, pero la unidad

$$\mathrm{J\,s}$$

que aparece en el valor de h contiene a su vez metro y segundo. Por tanto, el SI debe entenderse como una **red coherente de relaciones definitorias**, no como siete definiciones aisladas.

Definición y realización. El BIPM utiliza la expresión francesa *mise en pratique* para los documentos que describen maneras de realizar prácticamente las definiciones de las unidades.

Esto nos da una distinción permanente:

Principio 5 — No confundir definición y realización La definición de una unidad fija su significado dentro del SI; una realización es un procedimiento físico para materializar o acceder experimentalmente a esa definición. Una definición puede ser exacta aunque toda realización concreta posea incertidumbre.

Esta diferencia será decisiva cuando estudiemos medición.

En términos del capítulo anterior:

$$\text{definición de unidad}$$

pertenece a la infraestructura convencional del modelo de medida, mientras que

$$\text{realización}$$

introduce sistemas físicos, instrumentos, procedimientos y condiciones experimentales.

«Base» tampoco significa «fundamental en la ontología de la física». La elección de las siete magnitudes base posee una función organizativa e histórica.

No debemos inferir de ella una jerarquía ontológica. Por ejemplo, energía no es una magnitud base del SI. Eso no significa que la energía sea físicamente secundaria o poco importante.

La unidad de energía, el joule, puede expresarse mediante unidades base: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$. La clasificación «base/derivada» responde a cómo organizamos el sistema de unidades.

Principio 6 — «Base» es una función del sistema de unidades Que una magnitud o unidad sea base en el SI no implica que sea físicamente más fundamental que una magnitud o unidad derivada. La distinción organiza la representación metrológica.

Esta regla evitará confundir:

$$\text{fundamentalidad física}$$

con

[13] BIPM, *The International System of Units (SI)*, 9.ª ed., versión 4.01, junio de 2026, §§2.2–2.3.2, pp. 123–132, DOI 10.59161/AUEZ1291.

estatus metrológico de base.

Prefijos SI. El SI permite construir múltiplos y submúltiplos decimales mediante prefijos. La lista vigente llega desde

$$10^{-30}$$

hasta

$$10^{30}.$$

Los cuatro prefijos más recientes fueron adoptados por la 27.ª CGPM en 2022: **ronna**, **quetta**, **ronto** y **quecto**.[14]

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{30}	quetta	Q	10^{-30}	quecto	q
10^{27}	ronna	R	10^{-27}	ronto	r
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d

La tabla debe leerse algebraicamente.
Por ejemplo:

$$1\,\mathrm{km} = 10^{3}\,\mathrm{m},$$

$$1\,\mu\mathrm{s} = 10^{-6}\,\mathrm{s},$$

$$1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}\,\mathrm{m}.$$

[14]BIPM, *SI — Prefixes*; 27.ª CGPM, Resolución 3 (2022), «On the extension of the range of SI prefixes».

El prefijo forma parte de la unidad. Cuando escribimos

$$1\,\mathrm{cm},$$

la unidad completa es el **centímetro**. Su relación con el metro es: $1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$. Esto tiene una consecuencia importante cuando elevamos unidades a potencias.

Para área:

$$1\,\mathrm{cm}^2 = (1\,\mathrm{cm})^2 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2.$$

No: $1\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$.

Para volumen:

$$1\,\mathrm{mm}^3 = (10^{-3}\,\mathrm{m})^3 = 10^{-9}\,\mathrm{m}^3.$$

El exponente afecta a toda la unidad prefijada.

No se encadenan prefijos. Los prefijos SI no se apilan. Por ejemplo, no escribimos una supuesta unidad «milimicrómetro» mediante una cadena de prefijos. Se elige un único prefijo cuyo factor total represente la escala deseada.

Así: $10^{-9}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{nm}$,

no una composición de «mili» y «micro».

Esto mantiene unívoca la lectura de los símbolos.

La excepción histórica del kilogramo. El kilogramo tiene una peculiaridad nominal:

$$\boxed{\mathrm{kg}}$$

es la única unidad base del SI cuyo nombre ya contiene un prefijo. Por esa razón, los múltiplos y submúltiplos de masa se forman aplicando prefijos a **gramo**, no añadiendo un segundo prefijo a kilogramo.

Por ejemplo:

$$1\,\mathrm{mg} = 10^{-3}\,\mathrm{g} = 10^{-6}\,\mathrm{kg}.$$

Y:

$$1\,\mu\mathrm{g} = 10^{-6}\,\mathrm{g} = 10^{-9}\,\mathrm{kg}.$$

No escribimos: mkg

para representar miligramos. Esta regla es histórica y notacional, no una dificultad matemática.

Las mayúsculas importan. Los símbolos SI son sensibles a mayúsculas y minúsculas. Por ejemplo: m

es metro, mientras que

$$\mathrm{M}$$

es el prefijo mega cuando antecede a un símbolo de unidad.

Del mismo modo: k

es kilo, mientras que

$$\mathrm{K}$$

es kelvin. Por eso: 1 km
y

$$1\,\mathrm{Km}$$

no son escrituras equivalentes del SI. La segunda combina una grafía de prefijo incorrecta con el símbolo del metro.

Reglas elementales de escritura. Usaremos desde ahora las siguientes convenciones.
Regla 1 — Espacio entre número y símbolo de unidad. Escribiremos:

$$25\,\mathrm{m},$$

$$3.2\,\mathrm{s},$$

$$300\,\mathrm{K}.$$

En texto Markdown/LaTeX representaremos el espacio tipográfico dentro de la fórmula mediante `\,` cuando sea útil.
Regla 2 — Los símbolos de unidad no se pluralizan. Escribimos: 5 kg,
no: 5 kgs.
Regla 3 — El símbolo no lleva punto por ser abreviatura. Escribimos: 10 m
y no añadimos un punto a m salvo que el signo de puntuación corresponda al final de la oración.
Regla 4 — Los prefijos se unen al símbolo de unidad. Escribimos:

$$\mathrm{mm}, \qquad \mathrm{MHz}, \qquad \mu\mathrm{s}.$$

El prefijo no se separa mediante un espacio del símbolo de la unidad.
Regla 5 — Una potencia actúa sobre toda la unidad. Ya vimos: $\mathrm{cm}^2 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^2$. Esta regla será esencial en conversiones de área y volumen.

Unidades, símbolos y nombres no son intercambiables sin reglas. Consideremos: 5 m.
Aquí:

- 5 es valor numérico;
- m es símbolo de la unidad metro;
- «metro» es el nombre de esa unidad;
- el producto representa un valor de longitud.

El símbolo m no es una variable algebraica ordinaria cuyo significado pueda redefinirse libremente dentro de un cálculo. En este capítulo lo manipularemos formalmente de acuerdo con las relaciones del sistema de unidades. Esto permitirá más adelante escribir, por ejemplo: $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
sin perder de vista que estamos calculando con representaciones de unidades físicas.

Ejemplo desarrollado — La misma velocidad en dos unidades. Supongamos una rapidez: $v = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Queremos expresarla en kilómetros por hora.
Usamos: $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$
y: $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$.
Entonces:

$$25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(\frac{1\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{m}}\right)\left(\frac{3600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{h}}\right)=25\frac{3600}{1000}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Por tanto: $v = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. La magnitud física no cambió.

Cambió su representación numérica respecto de otras unidades.

Recuperamos así el Principio 2:

$$\boxed{25\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}.}$$

Ejemplo desarrollado — Por qué $1\,\mathrm{cm^2}$ no es $10^{-2}\,\mathrm{m^2}$. Tomemos un cuadrado de lado: $1\,\mathrm{cm}$.

Como: $1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$,

su área es: $A = (10^{-2}\,\mathrm{m})(10^{-2}\,\mathrm{m})$. Por tanto: $A = 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$. El error

$$1\,\mathrm{cm^2} = 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$$

aparece cuando se aplica el factor del prefijo una sola vez en lugar de elevarlo junto con la unidad. Este tipo de error será muy importante cuando trabajemos con densidades, presiones y otras magnitudes derivadas.

Ejercicios de §3. Ejercicio 6 — Leer correctamente el SI actual

Tipo: conceptual · **Nivel:** central

Decide si cada afirmación es correcta o incorrecta. Cuando sea incorrecta, reescríbela.

1. «El SI actual se define fundamentalmente eligiendo siete objetos que materializan las siete unidades base.»
2. «Los valores numéricos de las siete constantes definitorias son exactos dentro del SI.»
3. «Si el valor definitorio de una constante es exacto, cualquier realización experimental de la unidad correspondiente tiene incertidumbre exactamente cero.»
4. «Las siete unidades base siguen desempeñando una función estructural en el SI actual.»
5. «Cada una de las siete constantes definitorias corresponde de manera aislada y uno a uno a exactamente una unidad base.»
6. «Que el joule sea una unidad derivada significa que la energía es físicamente menos fundamental que la longitud.»
7. «La constante K_{cd} es una constante definitoria del SI, aunque no tenga el mismo carácter físico que c o h.»

Solución

1. Incorrecta.

El SI contemporáneo se define fijando exactamente los valores numéricos de siete constantes definitorias en unidades especificadas. Las unidades no se definen mediante siete objetos materiales.

2. Correcta.

En el SI esos valores no son resultados experimentales ajustables: forman parte de la definición.

3. Incorrecta.

Debemos distinguir:

$$\text{definición exacta} \neq \text{realización experimental exacta}.$$

Una realización concreta utiliza sistemas físicos e instrumentos y puede tener incertidumbre.

4. Correcta.

Segundo, metro, kilogramo, amperio, kelvin, mol y candela siguen siendo las siete unidades base y organizan la expresión de unidades derivadas y dimensiones.

5. Incorrecta.

No existe una correspondencia uno a uno simple. Varias definiciones de unidades base dependen de más de una constante definitoria.

6. Incorrecta.

«Base» y «derivada» son categorías de organización del sistema de unidades. No establecen por sí mismas una jerarquía ontológica de conceptos físicos.

7. Correcta.

K_{cd} pertenece al conjunto de siete constantes definitorias, pero la propia documentación del SI distingue constantes fundamentales y constantes de carácter técnico.

La conclusión conjunta es:

$$\boxed{\text{definición del SI} \neq \text{lista de siete artefactos}}$$

y:

$$\boxed{\text{unidad base} \neq \text{magnitud físicamente más fundamental.}}$$

Ejercicio 7 — Prefijos y potencias de diez

Tipo: cálculo · **Nivel:** central

Convierte:

1. $3.6\,\mathrm{km}$ a metros.
2. $250\,\mu\mathrm{s}$ a segundos.
3. $7.2\,\mathrm{nm}$ a metros.
4. $4.5\,\mathrm{cm}^2$ a metros cuadrados.
5. $2.0\,\mathrm{mm}^3$ a metros cúbicos.
6. $5\,\mathrm{mg}$ a kilogramos.
7. $2.4\,\mathrm{Rm}$ a metros.
8. $6\,\mathrm{qs}$ a segundos.

Explica además por qué: $1\,\mathrm{cm}^2 \neq 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$.

Solución

1. Kilómetros a metros

$$1\,\mathrm{km} = 10^3\,\mathrm{m}.$$

Entonces: $3.6\,\mathrm{km} = 3.6 \times 10^3\,\mathrm{m}$.

Por tanto:

$$\boxed{3.6\,\mathrm{km} = 3600\,\mathrm{m}.}$$

2. Microsegundos a segundos

$$1\,\mu\mathrm{s} = 10^{-6}\,\mathrm{s}.$$

Luego:

$$250\,\mu\mathrm{s} = 250 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} = 2.50 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}.$$

3. Nanómetros a metros

$$1\,\text{nm} = 10^{-9}\,\text{m}.$$

Así:

$$\boxed{7.2\,\text{nm} = 7.2 \times 10^{-9}\,\text{m}.}$$

4. Centímetros cuadrados a metros cuadrados

$$1\,\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}.$$

Elevamos toda la unidad al cuadrado:

$$1\,\text{cm}^2 = (10^{-2}\,\text{m})^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2.$$

Entonces:

$$\boxed{4.5\,\text{cm}^2 = 4.5 \times 10^{-4}\,\text{m}^2.}$$

5. Milímetros cúbicos a metros cúbicos

$$1\,\text{mm} = 10^{-3}\,\text{m}.$$

Por tanto:

$$1\,\text{mm}^3 = (10^{-3}\,\text{m})^3 = 10^{-9}\,\text{m}^3.$$

Así:

$$\boxed{2.0\,\text{mm}^3 = 2.0 \times 10^{-9}\,\text{m}^3.}$$

6. Miligramos a kilogramos

$$1\,\text{mg} = 10^{-3}\,\text{g}.$$

Además: $1\,\text{g} = 10^{-3}\,\text{kg}$.
Entonces: $1\,\text{mg} = 10^{-6}\,\text{kg}$.
Por tanto:

$$\boxed{5\,\text{mg} = 5 \times 10^{-6}\,\text{kg}.}$$

7. Ronnametros a metros
El prefijo ronna, símbolo R, representa: 10^{27}.
Entonces:

$$\boxed{2.4\,\text{Rm} = 2.4 \times 10^{27}\,\text{m}.}$$

8. Quectosegundos a segundos
El prefijo quecto, símbolo q, representa: 10^{-30}.
Luego:

$$\boxed{6\,\text{qs} = 6 \times 10^{-30}\,\text{s}.}$$

Finalmente:

$$1\,\mathrm{cm}^2 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2,$$

porque el exponente 2 actúa tanto sobre el metro como sobre el factor 10^{-2}.
Por eso:

$$\boxed{1\,\mathrm{cm}^2 \neq 10^{-2}\,\mathrm{m}^2.}$$

Síntesis. El SI contemporáneo se organiza mediante dos capas que no debemos confundir.
La capa definitoria:

$$\boxed{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}, c, h, e, k, N_{\mathrm{A}}, K_{\mathrm{cd}}}$$

con valores numéricos fijados exactamente.
Y la capa organizativa de las unidades base:

$$\boxed{\text{s, m, kg, A, K, mol, cd.}}$$

Las dos están relacionadas, pero no mediante siete parejas aisladas.
Además:

$$\boxed{\text{definición} \neq \text{realización}}$$

y:

$$\boxed{\text{base} \neq \text{más fundamental físicamente.}}$$

Los prefijos SI permiten cambiar cómodamente de escala decimal, pero deben manipularse algebraicamente con cuidado:

$$\boxed{(pu)^n = p^n u^n.}$$

Por eso las conversiones de área y volumen exigen elevar también el factor del prefijo. Con esta infraestructura ya podemos avanzar al siguiente nivel. Hasta ahora hemos trabajado principalmente con unidades escogidas para clases de magnitudes ya conocidas.

En §4 construiremos nuevas magnitudes mediante productos y cocientes y veremos cómo aparecen sistemáticamente las **unidades derivadas coherentes** (§4).

---

4. Magnitudes derivadas y unidades coherentes

Las unidades también obedecen relaciones. En §1 distinguimos una magnitud de su valor numérico y de la unidad elegida para expresarla. En §2 vimos que la comparabilidad física precede a la comparación numérica. En §3 fijamos la arquitectura contemporánea del Sistema Internacional.

Ahora aparece una cuestión nueva: las magnitudes físicas no se presentan siempre de manera aislada. Un modelo puede relacionarlas mediante productos, cocientes y potencias. Por ejemplo,

$$v = \frac{\ell}{t},$$

$$\rho = \frac{m}{V},$$

o

$$A = xy.$$

Estas relaciones entre magnitudes inducen relaciones entre las unidades utilizadas para expresarlas.

La idea rectora será:

estructura algebraica entre magnitudes $\longrightarrow$ estructura correspondiente entre unidades

Pero no toda combinación de unidades es **coherente** con el sistema elegido, y una misma expresión de unidad puede corresponder a tipos de magnitud físicamente distintos.

Magnitud derivada. Definición 11 — Magnitud derivada Una **magnitud derivada** es una magnitud definida, dentro de un sistema de magnitudes, mediante una relación algebraica con otras magnitudes del sistema, en particular con las magnitudes tomadas como base.

Ejemplos elementales son: $A = xy$,
para un área rectangular; $V = xyz$,
para un volumen; $v = \frac{\ell}{t}$,
para una rapidez o velocidad escalar en un modelo elemental;
y

$$\rho = \frac{m}{V},$$

para densidad de masa. La palabra **derivada** no significa que la magnitud sea menos física, menos importante o menos observable. Describe su papel dentro de la arquitectura elegida.

Así,

base/derivada = papel dentro de un sistema de magnitudes

y no una jerarquía ontológica.

Producto, cociente y potencia. Sean

$$Q_1 = q_1 u_1, \qquad Q_2 = q_2 u_2.$$

Si

$$Q = Q_1 Q_2,$$

entonces $Q = (q_1 q_2)(u_1 u_2)$. La unidad producto natural es $u = u_1 u_2$.
Si

$$Q = \frac{Q_1}{Q_2},$$

entonces $Q = \frac{q_1}{q_2}\frac{u_1}{u_2}$,
de modo que aparece

$$u = \frac{u_1}{u_2}.$$

Y si

$$Q = Q_1^n,$$

para un exponente entero n, entonces $Q = q_1^n u_1^n$. Por tanto, producto, cociente y potencia de magnitudes inducen producto, cociente y potencia de unidades. Todavía no estamos hablando formalmente de dimensiones. Eso corresponde a §5.

Unidad derivada. Definición 12 — Unidad derivada Una **unidad derivada** es una unidad asociada a una magnitud derivada y expresable, dentro del sistema de unidades considerado, mediante productos de potencias de unidades base.

En el SI:

$$\text{área} \longrightarrow \mathrm{m}^2,$$

$$\text{volumen} \longrightarrow \mathrm{m}^3,$$

$$\text{rapidez o velocidad} \longrightarrow \mathrm{m\,s^{-1}},$$

$$\text{aceleración} \longrightarrow \mathrm{m\,s^{-2}},$$

$$\text{densidad de masa} \longrightarrow \mathrm{kg\,m^{-3}}.$$

La *SI Brochure* vigente incluye precisamente estas expresiones entre sus ejemplos de unidades derivadas coherentes.[15]

Unidad derivada coherente. Definición 13 — Unidad derivada coherente Una **unidad derivada coherente**, respecto de un sistema de magnitudes y un conjunto elegido de unidades base, es una unidad derivada que se obtiene como producto de potencias de las unidades base sin introducir ningún factor de proporcionalidad distinto de 1.

Así, $\mathrm{m\,s^{-1}}$
es la unidad coherente SI de rapidez o velocidad, $\mathrm{m\,s^{-2}}$
la de aceleración, y

$$\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

la de densidad de masa. En cambio, $\mathrm{cm\,s^{-1}}$
puede ser una unidad perfectamente válida para expresar una rapidez, pero no es la unidad derivada coherente de rapidez **en el SI**, porque

$$1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

introduce un factor distinto de 1 respecto de la unidad base metro. La coherencia no significa «unidad correcta frente a unidad incorrecta». Significa que la unidad se obtiene de la base elegida sin factores adicionales.

[15] BIPM, *The International System of Units (SI)*, 9.ª ed., versión 4.01 (2026), §2.3.4, pp. 133–137.

Por qué importa la coherencia. Consideremos

$$v = \frac{\ell}{t}.$$

Escribamos

$$\ell = \{\ell\}_{\mathrm{m}}\,\mathrm{m},$$

$$t = \{t\}_{\mathrm{s}}\,\mathrm{s},$$

$$v = \{v\}_{\mathrm{m\,s^{-1}}}\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Sustituyendo:

$$\{v\}_{\mathrm{m\,s^{-1}}}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{\{\ell\}_{\mathrm{m}}\,\mathrm{m}}{\{t\}_{\mathrm{s}}\,\mathrm{s}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\{v\}_{\mathrm{m\,s^{-1}}} = \frac{\{\ell\}_{\mathrm{m}}}{\{t\}_{\mathrm{s}}}}.$$

La ecuación entre valores numéricos conserva exactamente la forma de la ecuación entre magnitudes. Éste es el sentido técnico de coherencia empleado por el BIPM.[16]

Principio 7 — La coherencia preserva la forma numérica de las ecuaciones de magnitudes Cuando todas las magnitudes de una relación se expresan mediante unidades pertenecientes a un sistema coherente, la ecuación entre sus valores numéricos tiene la misma forma que la ecuación entre las magnitudes, sin factores de conversión adicionales.

Ejemplo: rapidez en unidades coherentes. Si

$$\ell = 120\,\mathrm{m}$$

y

$$t = 30\,\mathrm{s},$$

entonces

$$v = \frac{120\,\mathrm{m}}{30\,\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

La ecuación numérica es simplemente

$$4 = \frac{120}{30}.$$

No aparece ningún factor extra.

[16]BIPM, *SI Brochure*, v4.01 (2026), §2.3.4, pp. 133–137; compárese JCGM, *VIM*, entrada 1.12, «coherent derived unit».

Qué ocurre cuando mezclamos unidades no coherentes. Expresemos la misma longitud como $\ell = 12\,000\,\mathrm{cm}$. Si mantenemos t en segundos y queremos v en $\mathrm{m\,s^{-1}}$, entonces $1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$ y

$$v = \frac{12\,000 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{30\,\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

La ecuación numérica se vuelve

$$\boxed{\{v\}_{\mathrm{m\,s^{-1}}} = 10^{-2}\frac{\{\ell\}_{\mathrm{cm}}}{\{t\}_{\mathrm{s}}}}.$$

El factor 10^{-2} no pertenece a la física de la relación. Pertenece a nuestra mezcla de unidades. Ésa es una ventaja práctica de la coherencia: separa la estructura física de los factores de conversión.

Área, volumen y potencias de unidades. Si un cuadrado tiene lado

$$\ell = 3\,\mathrm{m},$$

entonces $A = \ell^2 = (3\,\mathrm{m})^2 = 9\,\mathrm{m}^2$. La potencia actúa sobre el número y sobre la unidad. Análogamente, si

$$\ell = 2\,\mathrm{m},$$

entonces $V = \ell^3 = (2\,\mathrm{m})^3 = 8\,\mathrm{m}^3$. Por eso

$$1\,\mathrm{cm}^2 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2,$$

y

$$1\,\mathrm{cm}^3 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^3 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^3.$$

Densidad de masa. Para

$$\rho = \frac{m}{V},$$

las unidades coherentes dan

$$\rho = \frac{\{m\}_{\mathrm{kg}}}{\{V\}_{\mathrm{m^3}}}\mathrm{kg\,m^{-3}}.$$

Así,

$$\boxed{\{\rho\}_{\mathrm{kg\,m^{-3}}} = \frac{\{m\}_{\mathrm{kg}}}{\{V\}_{\mathrm{m^3}}}}.$$

Si

$$m = 6\,\mathrm{kg}$$

y

$$V = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3,$$

entonces $\rho = 3 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Prefijos y coherencia. En §3 vimos que los prefijos introducen factores decimales.

Aunque el centímetro sea una unidad construida correctamente mediante un prefijo SI, $1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$,

y por tanto no pertenece al conjunto de unidades SI coherentes respecto de la base cuyo representante de longitud es el metro. La *SI Brochure* indica expresamente que una unidad prefijada deja de ser coherente porque aparece un factor numérico distinto de 1.[17]

Unidades coherentes con nombres especiales. Ciertas combinaciones aparecen tan frecuentemente que el SI les asigna nombres y símbolos especiales.

Por ejemplo:

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}},$$

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}},$$

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}},$$

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-3}}.$$

El nombre especial no cambia la estructura algebraica de la unidad.

Principio 8 — Un nombre especial no crea una nueva clase algebraica de unidad Una unidad SI con nombre especial sigue siendo una unidad coherente expresable mediante productos de potencias de unidades base. El nombre especial mejora la lectura y puede ayudar a distinguir contextos físicos, pero no altera la estructura algebraica de la unidad.

Las 22 unidades SI con nombres especiales. La *SI Brochure* vigente enumera 22 unidades SI con nombres y símbolos especiales.[18]

Magnitud asociada	Nombre	Símbolo	Expresión o relación coherente
ángulo plano	radián	rad	1
ángulo sólido	estereorradián	sr	1
frecuencia	hercio	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$
fuerza	newton	N	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
presión, tensión mecánica	pascal	Pa	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$
energía, trabajo, calor	joule	J	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}}$
potencia, flujo radiante	watt	W	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-3}}$
carga eléctrica	coulomb	C	$\mathrm{A\,s}$
diferencia de potencial	volt	V	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-3}\,A^{-1}}$
capacitancia	farad	F	$\mathrm{kg^{-1}\,m^{-2}\,s^{4}\,A^{2}}$

[17] BIPM, *The International System of Units (SI)*, 9.ª ed., versión 4.01 (2026), §2.3.4, pp. 133–137.

[18] BIPM, *SI Brochure*, v4.01 (2026), §2.3.4, tabla 4, pp. 133–136.

Magnitud asociada	Nombre	Símbolo	Expresión o relación coherente
resistencia eléctrica	ohm	Ω	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-2}}$
conductancia eléctrica	siemens	S	$\mathrm{kg^{-1}\,m^{-2}\,s^3\,A^2}$
flujo magnético	weber	Wb	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-1}}$
densidad de flujo magnético	tesla	T	$\mathrm{kg\,s^{-2}\,A^{-1}}$
inductancia	henry	H	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-2}}$
temperatura Celsius	grado Celsius	°C	mismo tamaño de intervalo que K
flujo luminoso	lumen	lm	$\mathrm{cd\,sr}$
iluminancia	lux	lx	$\mathrm{lm\,m^{-2}}$
actividad de un radionúclido	becquerel	Bq	$\mathrm{s^{-1}}$
dosis absorbida	gray	Gy	$\mathrm{m^2\,s^{-2}}$
dosis equivalente	sievert	Sv	$\mathrm{m^2\,s^{-2}}$
actividad catalítica	katal	kat	$\mathrm{mol\,s^{-1}}$

No necesitamos memorizar la tabla. Debemos reconocer su arquitectura.

Misma expresión de unidad, distinta magnitud. Tenemos: $\mathrm{Hz} = \mathrm{s^{-1}}$, pero también

$$\mathrm{Bq} = \mathrm{s^{-1}}.$$

Frecuencia y actividad de un radionúclido no son el mismo tipo de magnitud.
Análogamente, $\mathrm{Gy} = \mathrm{m^2\,s^{-2}}$,
y

$$\mathrm{Sv} = \mathrm{m^2\,s^{-2}},$$

pero dosis absorbida y dosis equivalente no son la misma magnitud física.
Por tanto:

misma expresión de unidad $\not\Rightarrow$ mismo tipo de magnitud.

Los nombres especiales pueden ayudar a conservar la distinción semántica.

Energía y torque. La unidad coherente de energía puede escribirse

$$\mathrm{J} = \mathrm{N\,m}.$$

El torque o momento de una fuerza también utiliza una unidad expresable como N m. Sin embargo, no se acostumbra llamar joule a la unidad de torque. La razón es semántica: `J` señala magnitudes como energía o trabajo, mientras que `N m` conserva visible una interpretación distinta.
Así,

estructura dimensional $\neq$ significado físico completo.

Coherencia no significa una única escritura. Una misma unidad coherente puede escribirse, por ejemplo,

$$\mathrm{Pa} = \mathrm{N\,m^{-2}} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}.$$

Las tres expresiones representan la misma unidad coherente. La elección puede resaltar distintos aspectos de la estructura.

Ejemplo: expandir nombres especiales. Como $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$,
tenemos

$$\mathrm{Pa} = \mathrm{N\,m^{-2}} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}.$$

Además,

$$\mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}},$$

y

$$\mathrm{W} = \mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}.$$

Los nombres especiales forman parte de la misma álgebra coherente.

Conversión de densidad. Calculemos

$$1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

en unidades coherentes SI.
Tenemos $1\,\mathrm{g} = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$,
y

$$1\,\mathrm{cm^3} = 10^{-6}\,\mathrm{m^3}.$$

Por tanto,

$$1\,\mathrm{g\,cm^{-3}} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}}{10^{-6}\,\mathrm{m^3}} = 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}.$$

Así,

$$\boxed{1\,\mathrm{g\,cm^{-3}} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}.}$$

El álgebra de unidades no elige la física. Podemos formar matemáticamente

$$\frac{m}{t},$$

pero la teoría de unidades no decide por sí sola si esa combinación representa una magnitud relevante para el problema. Para eso necesitamos una definición, una ley, una hipótesis de modelo o alguna otra razón física.
Por tanto:

$$\boxed{\text{álgebra de unidades} \neq \text{selección automática de variables físicas.}}$$

Esta limitación reaparecerá en el análisis dimensional.

Ficha de construcción de una unidad derivada. Ficha FPM — Construcción de una unidad derivada 1. **Magnitud:** ¿qué cantidad estamos definiendo? 2. **Ecuación de magnitudes:** ¿qué relación la conecta con otras magnitudes? 3. **Tipos:** ¿qué tipos de magnitud intervienen? 4. **Unidades de entrada:** ¿qué unidades usamos? 5. **Álgebra:** ¿qué producto, cociente o potencia resulta? 6. **Factor:** ¿aparece un factor distinto de 1? 7. **Coherencia:** ¿la unidad resultante es coherente en el SI? 8. **Nombre especial:** ¿existe uno? 9. **Semántica:** ¿otras magnitudes comparten la misma expresión? 10. **Modelo:** ¿qué justifica físicamente esta combinación?

Ejercicios. Ejercicio 8 — Construir unidades derivadas coherentes Tipo: análisis dimensional · **Nivel:** básico

Determina la unidad derivada coherente SI para:

1. $A = xy$.
2. $V = xyz$.
3. $v = \ell/t$.
4. $a = v/t$.
5. $\rho = m/V$.

Solución

1.
$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{m} = \boxed{\mathrm{m}^2}.$$
2.
$$\mathrm{m}^3 = \boxed{\mathrm{m}^3}.$$
3.
$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \boxed{\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$
4.
$$\frac{\mathrm{m\,s^{-1}}}{\mathrm{s}} = \boxed{\mathrm{m\,s^{-2}}}.$$
5.
$$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \boxed{\mathrm{kg\,m^{-3}}}.$$

Todas se obtienen con factor 1 respecto de las unidades base del SI.

Ejercicio 9 — Coherencia y factor de conversión Tipo: cálculo · **Nivel:** central

Sea
$$\ell = 750\,\mathrm{cm}, \qquad t = 25\,\mathrm{s}.$$

1. Calcula $v = \ell/t$ en $\mathrm{cm\,s^{-1}}$.
2. Convierte el resultado a $\mathrm{m\,s^{-1}}$.
3. Escribe la relación entre $\{v\}_{\mathrm{m\,s^{-1}}}$, $\{\ell\}_{\mathrm{cm}}$ y $\{t\}_{\mathrm{s}}$.
4. Explica el factor de conversión.

Solución

1.

$$v = \frac{750\,\mathrm{cm}}{25\,\mathrm{s}} = 30\,\mathrm{cm\,s^{-1}}.$$

2.

$$30\,\mathrm{cm\,s^{-1}} = 30 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \boxed{0.30\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

3.

$$\boxed{\{v\}_{\mathrm{m\,s^{-1}}} = 10^{-2}\frac{\{\ell\}_{\mathrm{cm}}}{\{t\}_{\mathrm{s}}}}.$$

4. El factor 10^{-2} aparece porque el centímetro introduce una escala distinta de la unidad base metro.

Ejercicio 10 — Nombres especiales, expansión y significado

1. Expande en unidades base:

$$\mathrm{N}, \qquad \mathrm{Pa}, \qquad \mathrm{J}, \qquad \mathrm{W}.$$

2. Demuestra:

$$\mathrm{Pa} = \mathrm{N\,m^{-2}}, \qquad \mathrm{J} = \mathrm{N\,m}.$$

3. Explica por qué

$$\mathrm{Hz} = \mathrm{Bq} = \mathrm{s^{-1}}$$

no implica que frecuencia y actividad sean la misma magnitud.

4. Convierte

$$2.5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

a $\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Solución

1.

$$\mathrm{N} = \boxed{\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}},$$

$$\mathrm{Pa} = \boxed{\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}},$$

$$\mathrm{J} = \boxed{\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}}},$$

$$\mathrm{W} = \boxed{\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-3}}}.$$

2.

$$\mathrm{N\,m^{-2}} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}m^{-2}} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}} = \mathrm{Pa},$$

y

$$\mathrm{N\,m} = \mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}} = \mathrm{J}.$$

3. La igualdad algebraica de las expresiones de unidad no identifica el tipo de magnitud. `Hz` conserva la interpretación de frecuencia; `Bq` la de actividad.
4.

$$2.5\,\mathrm{g\,cm^{-3}} = 2.5 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} = \boxed{2500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}.$$

Síntesis. Las relaciones entre magnitudes generan relaciones entre unidades:

$$Q = Q_1 Q_2 \quad \Rightarrow \quad u = u_1 u_2,$$

$$Q = \frac{Q_1}{Q_2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{u_1}{u_2},$$

$$Q = Q_1^n \quad \Rightarrow \quad u = u_1^n.$$

Definimos magnitud derivada, unidad derivada y unidad derivada coherente.
La propiedad central es:

$$\boxed{\text{coherencia} \Longrightarrow \text{misma forma de la ecuación para magnitudes y valores numéricos.}}$$

Pero conservamos dos límites:

$$\boxed{\text{misma expresión de unidad} \not\Rightarrow \text{mismo tipo de magnitud}}$$

y

$$\boxed{\text{álgebra de unidades} \not\Rightarrow \text{selección automática de las variables físicas correctas.}}$$

La siguiente sección construirá una estructura que no depende de la unidad concreta elegida (§5).

5. Dimensión física

La unidad concreta no es la dimensión. En §4 vimos que una misma magnitud derivada puede expresarse mediante unidades diferentes. Una rapidez puede escribirse como $72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$,
o como $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Los números son distintos y las unidades son distintas, pero la estructura física que relaciona longitud y tiempo es la misma.
Esto sugiere separar dos niveles:

$$\boxed{\text{unidad} \neq \text{dimensión}}$$

La unidad especifica una referencia concreta de medida. La dimensión registra cómo una magnitud depende, dentro de un sistema de magnitudes, de las magnitudes tomadas como base. Así, $\mathrm{m\,s^{-1}}$

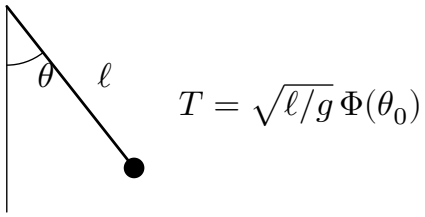


Figura 2.3. Para un péndulo ideal, el análisis de dimensiones permite escribir $T = \sqrt{\ell/g}\,\Phi(\theta_0)$. No determina la función de la amplitud. En oscilaciones pequeñas, la dinámica da $\Phi(0) = 2\pi$. Véase §5.

y

$$\mathrm{km\,h^{-1}}$$

son unidades diferentes, pero ambas representan magnitudes con la misma estructura dimensional: LT^{-1}. Esta separación será la base del análisis dimensional.

Dimensión de una magnitud. El Vocabulario Internacional de Metrología define la dimensión de una magnitud como la expresión de su dependencia respecto de las magnitudes base de un sistema mediante un producto de potencias, omitiendo cualquier factor numérico.[19]

Definición 14 — Dimensión de una magnitud La **dimensión** de una magnitud Q, respecto de un sistema elegido de magnitudes base, es la expresión simbólica que registra su dependencia respecto de esas magnitudes base como producto de potencias, sin incluir factores numéricos.

Usaremos la notación

$$[Q]$$

para la dimensión de Q. La documentación metrológica suele escribir también

$$\dim Q.$$

Ambas notaciones expresan la misma idea; en este libro utilizaremos preferentemente corchetes porque resultan compactos en los cálculos.

Las siete dimensiones base del SI. El SI organiza las magnitudes físicas mediante siete magnitudes base. A cada una se asocia convencionalmente un símbolo dimensional.[20]

Magnitud base	Símbolo dimensional
tiempo	T
longitud	L
masa	M
corriente eléctrica	I
temperatura termodinámica	Θ
cantidad de sustancia	N
intensidad luminosa	J

Debemos leer estos símbolos con cuidado.

[19] JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.7, «quantity dimension».

[20] BIPM, *SI Brochure*, v4.01 (2026), §2.3.3, pp. 132–133.

Por ejemplo:

- T como dimensión significa **tiempo**;
- Θ significa **temperatura termodinámica**;
- J como dimensión significa **intensidad luminosa** y no debe confundirse con el símbolo J del joule.

Los símbolos dimensionales no son unidades. Por tanto,

$$L \neq \mathrm{m},$$

$$T \neq \mathrm{s},$$

$$M \neq \mathrm{kg}.$$

El lado izquierdo representa una dimensión; el lado derecho, una unidad concreta.

Principio 9 — La dimensión es independiente de la unidad particular Cambiar la unidad utilizada para expresar una magnitud puede cambiar su valor numérico y el símbolo de unidad, pero no cambia su dimensión dentro del sistema de magnitudes fijado.

El producto dimensional general. En el sistema dimensional utilizado por el SI, una magnitud Q puede representarse dimensionalmente mediante

$$\boxed{[Q] = T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} N^{\zeta} J^{\eta}}$$

donde los exponentes

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$$

son los **exponentes dimensionales** de Q respecto de la base elegida.

Definición 15 — Exponente dimensional Un **exponente dimensional** es el exponente con el que aparece una dimensión base en la expresión dimensional de una magnitud.

Por ejemplo, para una velocidad, $[v] = LT^{-1}$.

Podemos escribirla en la forma completa: $[v] = T^{-1}L^{1}M^{0}I^{0}\Theta^{0}N^{0}J^{0}$. Por tanto, sus exponentes dimensionales son $(-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$

si usamos el orden

$$(T, L, M, I, \Theta, N, J).$$

Esta representación como lista de exponentes será útil más adelante en el teorema II de Buckingham.

Producto, cociente y potencia de dimensiones. Las operaciones dimensionales siguen la estructura algebraica de las magnitudes.

Si

$$Q = Q_1 Q_2,$$

entonces $[Q] = [Q_1][Q_2]$.

Si

$$Q = \frac{Q_1}{Q_2},$$

entonces $[Q] = \frac{[Q_1]}{[Q_2]}$. Y si

$$Q = Q_1^n,$$

entonces $[Q] = [Q_1]^n$.
No estamos manipulando unidades concretas.
Estamos manipulando la dependencia estructural respecto de las magnitudes base.

Área y volumen. Si

$$A = xy,$$

con

$$[x] = L$$

y

$$[y] = L,$$

entonces $[A] = [x][y] = L^2$. Por tanto,

$$\boxed{[A] = L^2.}$$

Análogamente, si

$$V = xyz,$$

entonces $[V] = L^3$. Por eso metro cuadrado, centímetro cuadrado y kilómetro cuadrado son unidades distintas de magnitudes cuya dimensión es L^2.

Rapidez y velocidad. Para una relación elemental

$$v = \frac{\ell}{t},$$

tenemos $[\ell] = L$
y

$$[t] = T.$$

Entonces $[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$.
Así,

$$\boxed{[v] = LT^{-1}.}$$

Esta expresión no contiene metro, kilómetro, segundo ni hora. Por eso vale igualmente si la velocidad se expresa en

$$\mathrm{m\,s^{-1}},$$

$$\mathrm{km\,h^{-1}},$$

o cualquier otra unidad compatible.

Aceleración. Si una aceleración se modela como cambio de velocidad por intervalo de tiempo, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$,
entonces $[a] = \frac{[v]}{[t]}$.
Como $[v] = LT^{-1}$
y

$$[t] = T,$$

obtenemos $[a] = LT^{-2}$. Por tanto,

$$\boxed{[a] = LT^{-2}.}$$

Densidad de masa. Para

$$\rho = \frac{m}{V},$$

tenemos $[m] = M$
y

$$[V] = L^3.$$

Luego

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}.$$

Así,

$$\boxed{[\rho] = ML^{-3}.}$$

Las unidades

$$\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

y

$$\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

son diferentes, pero comparten esta misma dimensión.

Magnitud	Relación elemental	Dimensión

Algunas dimensiones frecuentes. A partir de las relaciones físicas que las definen dentro del modelo correspondiente podemos obtener:

Magnitud	Relación elemental	Dimensión
área	$A = xy$	L^2
volumen	$V = xyz$	L^3
velocidad	$v = \ell/t$	LT^{-1}
aceleración	$a = v/t$	LT^{-2}
densidad de masa	$\rho = m/V$	ML^{-3}
frecuencia	$f = 1/t$	T^{-1}
fuerza	$F = ma$	MLT^{-2}
energía mecánica típica	$E = F\ell$	ML^2T^{-2}
potencia	$P = E/t$	ML^2T^{-3}
presión	$p = F/A$	$ML^{-1}T^{-2}$
carga eléctrica	$q = It$	IT

Esta tabla no debe memorizarse como una lista arbitraria.
Cada entrada se reconstruye a partir de una relación entre magnitudes.

La dimensión no es una unidad abreviada. Es tentador pensar:

«LT^{-1} es una manera abstracta de escribir $\mathrm{m\,s^{-1}}$.»

La frase es incompleta. La dimensión

$$LT^{-1}$$

no selecciona una unidad concreta.
Muchas unidades pueden corresponder a esa dimensión:

$$\mathrm{m\,s^{-1}},$$

$$\mathrm{km\,h^{-1}},$$

$$\mathrm{cm\,s^{-1}},$$

etc.
La relación correcta es:

$$\boxed{\text{una dimensión} \longrightarrow \text{muchas unidades posibles}}$$

mientras que un sistema coherente selecciona una forma privilegiada de construir unidades a partir de su base.

Cambiar unidades no cambia exponentes dimensionales. Consideremos una velocidad. En SI: $v = q\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Podemos cambiar las unidades base de longitud y tiempo:

$$\mathrm{m} \longrightarrow \mathrm{cm},$$

$$\mathrm{s} \longrightarrow \mathrm{min}.$$

El valor numérico de v cambia. La unidad cambia.

Pero la relación estructural sigue siendo:

$$\text{longitud/tiempo}.$$

Por tanto, $[v] = LT^{-1}$

antes y después del cambio. Lo mismo ocurre para cualquier magnitud cuya dimensión sea

$$[Q] = T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} N^{\zeta} J^{\eta}.$$

Un cambio de las unidades concretas asociadas a las magnitudes base altera factores numéricos, pero no los exponentes

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta.$$

Ésta es la razón algebraica del Principio 9.

Una demostración elemental de la invariancia. Supongamos, para simplificar, que una magnitud depende solo de longitud y tiempo y tiene la forma $Q = C\,\ell^{\beta} t^{\alpha}$,

donde C es un factor numérico que no introduce dimensión adicional.

Sean las unidades originales

$$u_L, \qquad u_T,$$

y nuevas unidades

$$u'_L = \lambda_L u_L,$$

$$u'_T = \lambda_T u_T,$$

con

$$\lambda_L > 0, \qquad \lambda_T > 0.$$

Por la Proposición 1, los valores numéricos de longitud y tiempo cambian inversamente:

$$\{\ell\}_{u'_L} = \frac{\{\ell\}_{u_L}}{\lambda_L},$$

$$\{t\}_{u'_T} = \frac{\{t\}_{u_T}}{\lambda_T}.$$

Entonces el valor numérico de Q adquiere factores

$$\lambda_L^{-\beta} \lambda_T^{-\alpha}.$$

Cambian los números. Pero la forma de dependencia continúa siendo

$$L^{\beta}T^{\alpha}.$$

Por tanto, los exponentes dimensionales no dependen del tamaño concreto de las unidades elegidas. No elevaremos este resultado a una nueva proposición numerada porque su función aquí es preparar la Proposición 2, que en §6 formalizará una consecuencia más fuerte: la homogeneidad dimensional necesaria de las ecuaciones físicas.

Misma dimensión no significa mismo tipo de magnitud. En §2 aprendimos que la comparabilidad física es más exigente que compartir una notación de unidad. Ahora podemos formular la versión dimensional de esa cautela.

El VIM establece:

- magnitudes del mismo tipo tienen la misma dimensión;
- magnitudes con dimensiones diferentes son necesariamente de tipos distintos;
- magnitudes con la misma dimensión no son necesariamente del mismo tipo.[21]

Por tanto,

$$\boxed{\text{mismo tipo} \Longrightarrow \text{misma dimensión}}$$

pero no:

$$\boxed{\text{misma dimensión} \Longrightarrow \text{mismo tipo.}}$$

Principio 10 — La igualdad dimensional no identifica el significado físico Que dos magnitudes posean la misma dimensión es una condición estructural importante, pero no basta para concluir que pertenecen al mismo tipo de magnitud ni que son físicamente intercambiables.

Ejemplo: frecuencia y actividad radionúclida. En ambos casos aparece

$$T^{-1}.$$

Para frecuencia, $[f] = T^{-1}$. Para actividad radionúclida, $[A] = T^{-1}$.

Sin embargo, el SI utiliza nombres especiales distintos:

$$1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1},$$

$$1\,\mathrm{Bq} = 1\,\mathrm{s}^{-1}.$$

La igualdad dimensional no borra la diferencia física entre frecuencia y número de desintegraciones por unidad de tiempo.

[21] JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.7, «quantity dimension».

Ejemplo: presión y densidad de energía. Para presión, $p = \frac{F}{A}$.
Como $[F] = MLT^{-2}$
y

$$[A] = L^2,$$

tenemos $[p] = ML^{-1}T^{-2}$. Ahora consideremos una densidad de energía

$$u = \frac{E}{V}.$$

Como $[E] = ML^2T^{-2}$
y

$$[V] = L^3,$$

obtenemos $[u] = ML^{-1}T^{-2}$. Por tanto, $[p] = [u]$. Pero esto no demuestra que presión y densidad de energía sean la misma magnitud. Solo demuestra que ocupan la misma posición en el sistema dimensional.

Dimensión y forma vectorial. El VIM señala además que, al obtener la dimensión de una magnitud, no se toma en cuenta su carácter escalar, vectorial o tensorial.[22]

Esto será importante más adelante.

Dos objetos matemáticos con naturaleza geométrica distinta pueden compartir dimensión. Por ejemplo, una posición y un desplazamiento vectorial pueden poseer dimensión

$$L,$$

aunque su estructura matemática no sea la de un escalar arbitrario.

Por tanto:

$$\boxed{\text{dimensión} \neq \text{estructura matemática completa de la magnitud.}}$$

El análisis dimensional conserva cierta información y descarta otra.

La dimensión depende del sistema de magnitudes. También debemos evitar presentar la dimensión como una etiqueta metafísica adherida a cada magnitud de manera independiente de toda elección. El BIPM y el VIM hablan de dimensiones **respecto de un sistema de magnitudes**. La elección de magnitudes base es convencional.

Una vez fijada la base, la expresión dimensional de las magnitudes derivadas queda determinada por las relaciones adoptadas en ese sistema.

Así:

$$\boxed{\text{dimensión} = \text{estructura relativa a un sistema de magnitudes}}$$

aunque, una vez fijado el sistema, resulte extremadamente estable y útil.

Definición 16 — Sistema de dimensiones Un **sistema de dimensiones** es la organización de las magnitudes de un sistema mediante dimensiones base elegidas y expresiones dimensionales derivadas construidas como productos de potencias de esas dimensiones base.

En el SI trabajaremos con la base

[22]JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.7, «quantity dimension».

$$(T, L, M, I, \Theta, N, J).$$

Zorich y el cambio de base de unidades. Zorich organiza su teoría dimensional precisamente alrededor del cambio de tamaños de las unidades base y de la manera en que cambian los valores numéricos de las magnitudes mientras se conserva su estructura dimensional.[23]

Esta perspectiva es especialmente adecuada para nuestro proyecto porque conecta directamente con la Proposición 1.

La secuencia conceptual es:

$$\boxed{\text{magnitud} \longrightarrow \text{elección de unidades} \longrightarrow \text{valores numéricos}}$$

y, al cambiar las unidades,

$$\boxed{\text{cambian los números} \quad \text{pero no} \quad \text{la dependencia dimensional.}}$$

En §6 usaremos exactamente esta invariancia para detectar qué sumas e igualdades pueden conservar significado físico bajo cambios de escala de las unidades base.

Ejercicios. Ejercicio 11 — Reconstruir dimensiones

Tipo: análisis dimensional · **Nivel:** básico

Calcula las dimensiones de:

1. área;
2. volumen;
3. velocidad;
4. aceleración;
5. densidad de masa;
6. fuerza, usando $F = ma$;
7. energía, usando $E = F\ell$;
8. potencia, usando $P = E/t$;
9. presión, usando $p = F/A$.

No uses una tabla memorizada: deriva cada resultado.

Solución

1. Para área:

$$[A] = L \cdot L = L^2.$$

2. Para volumen:

$$[V] = L^3.$$

3. Para velocidad:

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

4. Para aceleración:

[23] V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, §§1.1–1.2, pp. 5–8, DOI 10.1007/978-3-642-14813-2.

$$[a] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}.$$

5. Para densidad:

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}.$$

6. Para fuerza:

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}.$$

7. Para energía:

$$[E] = [F]L = ML^2T^{-2}.$$

8. Para potencia:

$$[P] = \frac{[E]}{T} = ML^2T^{-3}.$$

9. Para presión:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}.$$

El procedimiento es siempre el mismo:

$$\boxed{\text{relación entre magnitudes} \longrightarrow \text{relación entre dimensiones.}}$$

Ejercicio 12 — Cambiar unidades sin cambiar dimensión
Una rapidez vale $v = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

1. Exprésala en $\mathrm{m\,s^{-1}}$.
2. Escribe su dimensión antes y después de la conversión.
3. Explica por qué el cambio de valor numérico no modifica los exponentes dimensionales.
4. Repite el argumento de manera simbólica si

$$u'_L = \lambda_L u_L, \qquad u'_T = \lambda_T u_T.$$

Solución
Como $1\,\mathrm{km} = 10^3\,\mathrm{m}$
y

$$1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s},$$

tenemos

$$90\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 90\frac{10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}.$$

Por tanto, $v = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. El valor numérico cambió: $90 \longrightarrow 25$.
La unidad cambió:

$$\mathrm{km\,h^{-1}} \longrightarrow \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Pero en ambos casos

$$[v] = LT^{-1}.$$

En forma simbólica, si

$$u'_L = \lambda_L u_L$$

y

$$u'_T = \lambda_T u_T,$$

entonces los valores numéricos de longitud y tiempo adquieren factores inversos:

$$\ell' \sim \lambda_L^{-1} \ell,$$

$$t' \sim \lambda_T^{-1} t.$$

Por ello la rapidez numérica adquiere el factor

$$\lambda_L^{-1} \lambda_T,$$

pero la estructura de dependencia continúa siendo

$$L^1 T^{-1}.$$

Los factores de conversión afectan números; los exponentes dimensionales registran la estructura y permanecen iguales.

Ejercicio 13 — Misma dimensión, distinto significado

Considera los pares:

1. frecuencia y actividad radionúclida;
2. presión y densidad de energía;
3. longitud de una barra y longitud de onda;
4. masa y tiempo.

Para cada par:

a. determina si las dimensiones son iguales;
b. decide si la igualdad dimensional basta para afirmar que son magnitudes del mismo tipo;
c. explica qué conclusión es legítima.

Solución

1. Frecuencia y actividad radionúclida

Ambas tienen

$$T^{-1}.$$

Sin embargo, no son del mismo tipo de magnitud.

La conclusión legítima es:

$$\boxed{\text{misma dimensión, distinto significado físico.}}$$

2. Presión y densidad de energía

Para presión: $[p] = ML^{-1}T^{-2}$.

Para densidad de energía:

$$\left[\frac{E}{V}\right] = \frac{ML^2T^{-2}}{L^3} = ML^{-1}T^{-2}.$$

Las dimensiones coinciden.

Esto no demuestra que ambas magnitudes sean del mismo tipo.

3. Longitud de una barra y longitud de onda

Ambas pertenecen al tipo longitud y tienen

$$L.$$

Aquí la igualdad dimensional es compatible con que sean del mismo tipo. Pero no es la igualdad dimensional por sí sola la que establece esa clasificación: necesitamos además la interpretación física.

4. Masa y tiempo

Tenemos

$$[m] = M,$$

$$[t] = T.$$

Como las dimensiones son diferentes, necesariamente se trata de tipos de magnitud distintos.

En conjunto:

$$\boxed{\text{dimensiones diferentes} \Longrightarrow \text{tipos diferentes},}$$

pero

$$\boxed{\text{dimensiones iguales} \not\Longrightarrow \text{mismo tipo}.}$$

Síntesis. La sección introduce la abstracción decisiva:

$$\boxed{\text{unidad concreta} \longrightarrow \text{dimensión}}$$

La dimensión de una magnitud se expresa, respecto de la base dimensional del SI, como

$$\boxed{[Q] = T^{\alpha}L^{\beta}M^{\gamma}I^{\delta}\Theta^{\varepsilon}N^{\zeta}J^{\eta}.}$$

Los exponentes describen la estructura dimensional y no dependen del tamaño de las unidades concretas elegidas.

Por eso:

$$\boxed{\text{cambiar unidad} \not\Rightarrow \text{cambiar dimensión}.}$$

Y debemos conservar otra cautela:

$$\boxed{\text{misma dimensión} \not\Rightarrow \text{mismo tipo de magnitud}.}$$

Con este lenguaje ya podemos formular la siguiente pregunta.

Si una ecuación física debe seguir teniendo sentido cuando cambiamos las unidades base, ¿qué restricciones impone eso a los términos que sumamos o igualamos?

Ése será el objeto de (§6).

6. Homogeneidad dimensional

Una igualdad física debe sobrevivir al cambio de unidades. En §5 vimos que una magnitud conserva su dimensión cuando cambiamos las unidades concretas con que expresamos sus magnitudes base.[24]

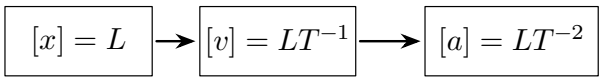


Figura 2.4. La posición, su primera derivada y su segunda derivada pertenecen a clases dimensionales distintas. Una suma exige homogeneidad de sus términos. Véase §6.

Por ejemplo, $[v] = LT^{-1}$
tanto si escribimos una velocidad en

$$\mathrm{m\,s^{-1}}$$

como si la escribimos en

$$\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

Ahora preguntaremos qué ocurre con una **ecuación física completa**.
Consideremos

$$x = x_0 + vt.$$

Dimensionalmente,

$$[x] = L,$$

$$[x_0] = L,$$

y

$$[vt] = [v][t] = LT^{-1}T = L.$$

Todos los términos poseen dimensión L. En cambio, si alguien escribiera

$$x = x_0 + vt^2,$$

tendríamos

$$[vt^2] = LT^{-1}T^2 = LT.$$

La suma intentaría combinar:

$$L$$

con

[24]BIPM, *SI Brochure*, v4.01 (2026), §2.3.3, pp. 132–133.

$$LT.$$

El problema aparece antes de sustituir números. La expresión no conserva una interpretación física coherente bajo cambios de unidades.

Homogeneidad dimensional. Definición 17 — Ecuación dimensionalmente homogénea Una ecuación física es **dimensionalmente homogénea** cuando todos los términos que se suman o se igualan poseen la misma dimensión, una vez incorporadas las dimensiones de todos los parámetros y constantes físicas que aparecen en ellos.

Por ejemplo, $x = x_0 + vt$

es dimensionalmente homogénea porque

$$[x] = [x_0] = [vt] = L.$$

La expresión

$$x = x_0 + vt^2$$

no lo es porque

$$[x] = [x_0] = L$$

mientras

$$[vt^2] = LT.$$

La homogeneidad dimensional es una condición estructural sobre la ecuación. No depende de los valores numéricos particulares que sustituyamos.[25]

Sumar magnitudes exige compatibilidad. En §2 distinguimos **tipo de magnitud** y **dimensión**.

Dos magnitudes del mismo tipo tienen la misma dimensión.[26]

La recíproca, como vimos en §5, no es cierta.

Esto nos obliga a formular dos niveles de control.

Nivel 1 — Condición dimensional. Para que una suma física

$$A + B$$

pueda tener sentido, es necesario que

$$[A] = [B].$$

[25]V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, §1.2, pp. 6–8.

[26]JCGM, *VIM*, 3.ª ed., entradas 1.2, 1.4 y 1.7.

Nivel 2 — Compatibilidad física. La igualdad dimensional no basta por sí sola.

También debemos saber que A y B representan magnitudes que el modelo permite combinar mediante esa operación. Por ejemplo, presión y densidad de energía tienen la misma dimensión: $ML^{-1}T^{-2}$. Pero la igualdad dimensional por sí sola no autoriza cualquier suma entre ambas fuera de una relación física que le otorgue significado.

Principio 11 — La homogeneidad dimensional es necesaria para la suma física Los términos que se suman o se comparan mediante una igualdad física deben poseer dimensiones compatibles. Si sus dimensiones difieren, la ecuación no puede representar una relación física independiente de la elección de unidades.

De la dimensión al factor de reescalado. En §5 escribimos

$$[Q] = T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} N^{\zeta} J^{\eta}.$$

Supongamos ahora que cambiamos independientemente los tamaños de las siete unidades base:

$$u'_T = \lambda_T u_T,$$

$$u'_L = \lambda_L u_L,$$

$$u'_M = \lambda_M u_M,$$

$$u'_I = \lambda_I u_I,$$

$$u'_\Theta = \lambda_\Theta u_\Theta,$$

$$u'_N = \lambda_N u_N,$$

$$u'_J = \lambda_J u_J,$$

con todos los factores positivos. Por la Proposición 1, el valor numérico de una magnitud base cambia de manera inversa al tamaño de su unidad. Por tanto, una magnitud con dimensión

$$T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} N^{\zeta} J^{\eta}$$

adquiere el factor numérico

$$\lambda_T^{-\alpha} \lambda_L^{-\beta} \lambda_M^{-\gamma} \lambda_I^{-\delta} \lambda_\Theta^{-\varepsilon} \lambda_N^{-\zeta} \lambda_J^{-\eta}.$$

Definiremos, solo como notación auxiliar,

$$\chi_Q(\lambda) = \lambda_T^{-\alpha} \lambda_L^{-\beta} \lambda_M^{-\gamma} \lambda_I^{-\delta} \lambda_\Theta^{-\varepsilon} \lambda_N^{-\zeta} \lambda_J^{-\eta}.$$

Entonces, bajo el cambio de unidades, $\{Q\}' = \chi_Q(\lambda)\{Q\}$. La función χ_Q codifica cómo cambia el **valor numérico** de Q al reescalar las unidades base. No es una nueva magnitud física. Es una herramienta algebraica para la demostración.

Por qué una suma obliga a un mismo factor. Consideremos una relación física

$$A + B = C.$$

En cierto sistema de unidades, sus valores numéricos satisfacen

$$a + b = c.$$

Después de reescalar las unidades base, obtendríamos

$$\chi_A a + \chi_B b = \chi_C c.$$

Como $c = a + b$,
la ecuación transformada es $\chi_A a + \chi_B b = \chi_C(a + b)$.
Reordenando: $(\chi_A - \chi_C)a + (\chi_B - \chi_C)b = 0$. Si la relación física pretende ser una ley y no una coincidencia numérica para un único par especial (a, b), debe mantener su forma para las realizaciones admisibles del modelo. En particular, si a y b pueden variar independientemente dentro de una familia no degenerada de realizaciones, la igualdad anterior solo puede mantenerse para todas ellas si

$$\chi_A = \chi_C$$

y

$$\chi_B = \chi_C.$$

Por tanto, $\chi_A = \chi_B = \chi_C$. La suma exige que todos sus términos transformen de la misma manera al cambiar las unidades.

Igualdad de factores implica igualdad de exponentes. Supongamos ahora que

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$$

para **todo** cambio independiente de unidades base.
Escribamos

$$[A] = T^{\alpha_A} L^{\beta_A} M^{\gamma_A} I^{\delta_A} \Theta^{\varepsilon_A} N^{\zeta_A} J^{\eta_A},$$

y

$$[B] = T^{\alpha_B} L^{\beta_B} M^{\gamma_B} I^{\delta_B} \Theta^{\varepsilon_B} N^{\zeta_B} J^{\eta_B}.$$

Entonces

$$\lambda_T^{-\alpha_A} \lambda_L^{-\beta_A} \cdots \lambda_J^{-\eta_A} = \lambda_T^{-\alpha_B} \lambda_L^{-\beta_B} \cdots \lambda_J^{-\eta_B}$$

para todo conjunto de factores positivos.
Mantengamos todas las λ iguales a 1 salvo λ_T.
Obtenemos $\lambda_T^{-\alpha_A} = \lambda_T^{-\alpha_B}$
para todo

$$\lambda_T > 0.$$

Por tanto, $\alpha_A = \alpha_B$.

Repitiendo el argumento una dimensión base a la vez,

$$\beta_A = \beta_B,$$

$$\gamma_A = \gamma_B,$$

$$\delta_A = \delta_B,$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_B,$$

$$\zeta_A = \zeta_B,$$

$$\eta_A = \eta_B.$$

Luego

$$[A] = [B].$$

Esta observación completa la idea necesaria para nuestro segundo resultado formal.

Segunda proposición formal del capítulo. Proposición 2 — Homogeneidad dimensional necesaria bajo cambios independientes de unidades base

Considérese una relación física de la forma $Q_1 + \cdots + Q_r = R_1 + \cdots + R_s$,

donde cada término tiene una dimensión bien definida respecto de un sistema de magnitudes base.

Supongamos:

1. que la relación representa una ley o familia de realizaciones no degenerada, y no una igualdad numérica accidental;
2. que su forma numérica debe conservarse bajo cambios multiplicativos independientes de las unidades base;
3. que existe una realización de la relación en la cual podemos variar cualquier par de términos, manteniendo los restantes fijos, de modo que la igualdad siga siendo válida: si ambos términos están en el mismo miembro, sus variaciones numéricas son h y $-h$; si están en miembros distintos, ambas son h. Para cada par se admiten valores no nulos de h suficientemente pequeños.

Entonces todos los términos que participan aditivamente deben poseer la misma dimensión:

$$[Q_1] = \cdots = [Q_r] = [R_1] = \cdots = [R_s].$$

Demostración. Fijemos un sistema inicial de unidades y llamemos $z_1, \ldots, z_{r+s}$ a los valores numéricos de todos los términos, tomando con signo negativo los del segundo miembro. La relación se escribe entonces $\sum_{i=1}^{r+s} z_i = 0$. Un cambio multiplicativo de las unidades base multiplica cada valor numérico por un factor positivo χ_i, determinado por la dimensión del término. La invariancia de forma exige, para cada realización de la familia, $\sum_{i=1}^{r+s} \chi_i z_i = 0$.

Tomemos dos índices distintos i, j. La tercera hipótesis permite cambiar los valores firmados a $z_i + h$ y $z_j - h$, con $h \neq 0$, sin alterar los restantes. La relación reescalada vale tanto antes como después de esa variación. Restar ambas igualdades da $h(\chi_i - \chi_j) = 0$.

Por tanto $\chi_i = \chi_j$. Como el par era arbitrario, todos los términos tienen el mismo factor de reescalado para cada elección de unidades. Al variar una sola unidad base por un factor positivo arbitrario, la igualdad de sus potencias obliga a que coincidan los exponentes dimensionales correspondientes. Repetirlo con cada unidad base prueba

$$[Q_1] = \cdots = [Q_r] = [R_1] = \cdots = [R_s].$$

La hipótesis de variación excluye, por ejemplo, una suma de dos identidades independientes escritas juntas, cuyos términos podrían cancelarse por grupos de dimensiones distintas. La independencia respecto de las unidades, sin esa condición adicional, no bastaría para la conclusión sobre todos los sumandos. □

Qué demuestra exactamente la Proposición 2. La Proposición 2 establece una **condición necesaria** para una ecuación física aditiva que deba conservar su forma bajo cambios de unidades. No demuestra que toda ecuación dimensionalmente homogénea sea físicamente correcta. Por ejemplo, $x = x_0 + vt$

y

$$x = x_0 + 2vt$$

son ambas dimensionalmente homogéneas.

También lo es $x = x_0 - 17vt$. La dimensión no decide cuál, si alguna, describe un sistema físico concreto.

Por tanto:

$$\boxed{\text{homogeneidad dimensional} \not\Rightarrow \text{verdad física.}}$$

Principio 12 — Pasar el control dimensional no prueba una ley La homogeneidad dimensional es una condición necesaria de consistencia para una amplia clase de ecuaciones físicas, pero no constituye una demostración de su corrección empírica, de su interpretación ni de su dominio de validez.

Un error dimensional sí puede ser decisivo. La asimetría es importante. Si una ecuación falla el control dimensional, entonces tenemos una razón estructural para rechazarla **tal como está escrita**. Si una ecuación pasa el control dimensional, solo sabemos que ha superado una prueba necesaria.

En símbolos:

$$\boxed{\text{inhomogeneidad} \Longrightarrow \text{ecuación físicamente inadmisible tal como está escrita,}}$$

mientras que

$$\boxed{\text{homogeneidad} \not\Longrightarrow \text{ecuación físicamente correcta.}}$$

Esta asimetría convierte el análisis dimensional en una excelente herramienta de auditoría.

Ejemplo: cinemática elemental. Consideremos

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Sin derivarla todavía desde una teoría del movimiento, podemos auditarla dimensionalmente. Tenemos:

$$[x] = L,$$

$$[x_0] = L.$$

Además, $[v_0 t] = LT^{-1}T = L$,
y

$$[at^2] = LT^{-2}T^2 = L.$$

El factor

$$\frac{1}{2}$$

es un número puro y no modifica la dimensión. Por tanto,

$$\boxed{[x] = [x_0] = [v_0 t] = [at^2] = L.}$$

La ecuación pasa el control de homogeneidad.
Esto no constituye todavía una derivación física de la fórmula.
Solo demuestra que su estructura aditiva es dimensionalmente compatible.

Ejemplo de ecuación defectuosa. Supongamos que aparece

$$x = x_0 + v_0 t + at.$$

Los dos primeros términos tienen dimensión:

$$L.$$

Pero

$$[at] = LT^{-2}T = LT^{-1}.$$

Por tanto, $[at] \neq L$. La suma intenta combinar longitud con velocidad. La ecuación no puede ser correcta tal como está escrita. No necesitamos datos experimentales para detectar este problema.

Unidades iguales no bastan para justificar una suma. En §5 vimos que presión y densidad de energía poseen la misma dimensión: $ML^{-1}T^{-2}$. En SI ambas pueden incluso expresarse mediante unidades algebraicamente equivalentes: $\mathrm{Pa} = \mathrm{J\,m^{-3}}$.

Sin embargo, la Proposición 2 no dice:

> «Toda magnitud con la misma dimensión puede sumarse físicamente con cualquier otra.»

Dice únicamente que una suma físicamente significativa debe superar el control dimensional.

Después debemos verificar también:

- el tipo de magnitud;

- la interpretación del modelo;
- la procedencia de cada término;
- el estatus físico de la ecuación.

Así, la homogeneidad es un filtro estructural, no un diccionario semántico completo.

Constantes numéricas y constantes físicas. Consideremos

$$Q = 2X.$$

El factor 2 es un número puro. Por tanto, $[Q] = [X]$. Pero en

$$Q = kX,$$

no podemos suponer que k sea adimensional. Su dimensión debe satisfacer

$$[k] = \frac{[Q]}{[X]}.$$

Por ejemplo, si

$$F = kx,$$

y queremos

$$[F] = MLT^{-2},$$

mientras

$$[x] = L,$$

entonces $[k] = MT^{-2}$. La letra k no trae consigo una dimensión universal. Su dimensión depende del papel que desempeña en la relación física.

Las constantes pueden reparar una ecuación solo si pertenecen al modelo. Supongamos que alguien propone

$$x = t.$$

Dimensionalmente, $L \neq T$. La ecuación falla.

Podríamos introducir una constante c con dimensión

$$[c] = LT^{-1}$$

y escribir

$$x = ct.$$

Ahora: $[ct] = LT^{-1}T = L$. La nueva ecuación es homogénea. Pero no hemos demostrado que exista físicamente una constante c apropiada ni que la relación describa el sistema. Solo hemos construido una forma dimensionalmente admisible.

Por tanto:

restaurar dimensiones $\neq$ derivar una ley física.

Igualdades entre magnitudes y ecuaciones numéricas. Una ecuación física puede leerse en dos niveles.

Nivel de magnitudes.

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

Nivel de valores numéricos en un sistema de unidades coherente.

$$q_1 + q_2 = q_3.$$

La coherencia estudiada en §4 permite que ambas formas se parezcan.

Pero la Proposición 2 nos recuerda por qué esa semejanza no es accidental:

si los términos tuvieran dimensiones distintas, cambiarían con factores distintos al cambiar las unidades base y la forma numérica dejaría de ser estable. La homogeneidad es, por tanto, una manifestación de la independencia física respecto de la convención de unidades.

Ecuaciones multiplicativas. La exigencia de igualdad dimensional término a término se refiere especialmente a **sumas e igualdades aditivas**. En una relación multiplicativa, $Q = AB$,

no exigimos

$$[Q] = [A] = [B].$$

Exigimos

$$[Q] = [A][B].$$

Por ejemplo, $E = F\ell$

satisface $[E] = [F][\ell] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$.

Así, una auditoría dimensional debe respetar la estructura algebraica de la ecuación:

- en productos, las dimensiones se multiplican;
- en cocientes, se dividen;
- en potencias, se elevan;
- en sumas, los términos deben ser homogéneos.

La dimensión de una derivada o cociente incremental. Todavía no necesitamos cálculo diferencial formal para comprender un patrón. Si una magnitud Q cambia durante un intervalo temporal Δt, el cociente

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

posee dimensión

$$\frac{[Q]}{T}.$$

Así, si

$$[Q] = L,$$

entonces

$$\left[\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right] = LT^{-1}.$$

Más adelante, cuando introduzcamos derivadas, el mismo razonamiento dimensional se conservará: $\left[\frac{dQ}{dt}\right] = [Q]T^{-1}$. La dimensión no sustituye al concepto de derivada. Solo registra qué estructura dimensional debe tener el resultado.

La dimensión de una integral. De manera análoga, cuando más adelante encontremos una cantidad definida mediante una integral temporal,

$$R = \int Q\, dt,$$

la dimensión esperada será $[R] = [Q]T$.

No desarrollaremos aquí integración. El objetivo es mostrar que el análisis dimensional es compatible con las operaciones matemáticas que aparecerán después. Cada operación modifica la dimensión de una manera controlable.

Funciones no algebraicas: frontera de esta sección. ¿Qué ocurre con expresiones como

$$\sin x,$$

$$e^x,$$

o

$$\log x?$$

La respuesta exige tratar cuidadosamente las **cantidades de dimensión uno**.

Ése será el objeto de §8.

No adelantaremos ahora la discusión.

Solo registramos que no debemos aplicar reglas algebraicas de manera mecánica a funciones no polinómicas sin examinar la dimensión de sus argumentos.

Ejercicios. Ejercicio 14 — Auditoría de ecuaciones

Tipo: análisis dimensional · **Nivel:** central

Decide cuáles de las siguientes ecuaciones son dimensionalmente homogéneas. No juzgues todavía si son físicamente correctas.

1.
$$x = x_0 + vt.$$

2.
$$x = x_0 + vt^2.$$

3.
$$v = v_0 + at.$$

4.
$$v = v_0 + at^2.$$

5.
$$E = F\ell.$$

6.
$$p = \frac{F}{A}.$$

Solución
1.

$$[x] = L,$$

$$[x_0] = L,$$

$$[vt] = LT^{-1}T = L.$$

Es homogénea.
2.

$$[vt^2] = LT^{-1}T^2 = LT.$$

No es homogénea.
3.

$$[v_0] = LT^{-1},$$

y

$$[at] = LT^{-2}T = LT^{-1}.$$

Es homogénea.
4.

$$[at^2] = LT^{-2}T^2 = L.$$

No puede sumarse con una velocidad: $L \neq LT^{-1}$.
No es homogénea.
5.

$$[F\ell] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}.$$

La ecuación es homogénea si E tiene dimensión de energía.
6.

$$\left[\frac{F}{A}\right] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}.$$

La ecuación es homogénea si p representa una magnitud de esa dimensión.
Resultado:

$$\boxed{1,\ 3,\ 5,\ 6 \text{ pasan el control dimensional;} \quad 2,\ 4 \text{ fallan.}}$$

Ejercicio 15 — Determinar la dimensión de una constante

En cada relación, determina la dimensión que debe tener la constante indicada para que la ecuación sea homogénea.

1.

$$F = kx.$$

2.

$$E = \kappa t.$$

3.

$$x = ct.$$

4.

$$v^2 = \alpha x.$$

Solución
1.
Queremos

$$[F] = [k][x].$$

Entonces $[k] = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$.
2.

$$[E] = [\kappa]T.$$

Luego

$$[\kappa] = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}.$$

3.

$$L = [c]T.$$

Por tanto

$$[c] = LT^{-1}.$$

4.

$$[v^2] = L^2T^{-2}.$$

Como $[\alpha x] = [\alpha]L$,
necesitamos

$$[\alpha] = LT^{-2}.$$

En conjunto:

$$\boxed{[k] = MT^{-2}, \quad [\kappa] = ML^2T^{-3}, \quad [c] = LT^{-1}, \quad [\alpha] = LT^{-2}.}$$

Ejercicio 16 — Homogénea pero no determinada
Considera la familia de ecuaciones

$$x = x_0 + Cvt,$$

donde C es una constante numérica.
1. Demuestra que la ecuación es dimensionalmente homogénea para todo número real C.
2. Explica por qué el análisis dimensional no puede determinar el valor de C.
3. ¿Qué tipo de información adicional sería necesaria para determinarlo físicamente?
4. ¿Qué enseña el ejercicio acerca de la Proposición 2?

Solución
Tenemos

$$[x] = L,$$

$$[x_0] = L,$$

y

$$[vt] = LT^{-1}T = L.$$

Un número puro C no modifica la dimensión: $[Cvt] = L$. Por tanto, $[x] = [x_0] = [Cvt] = L$ para cualquier

$$C \in \mathbb{R}.$$

La ecuación es dimensionalmente homogénea para todo C. El análisis dimensional solo exige compatibilidad de dimensiones. No distingue entre

$$C = 1,$$

$$C = 2,$$

$$C = -17,$$

o cualquier otro valor.

Para determinar C necesitaríamos información adicional, por ejemplo:

- una ley física más específica;
- una derivación a partir de postulados del modelo;
- una condición experimental;
- datos empíricos;
- una simetría u otra restricción estructural.

El ejercicio muestra exactamente el alcance de la Proposición 2:

$$\boxed{\text{homogeneidad} = \text{condición necesaria},}$$

pero

$$\boxed{\text{homogeneidad} \neq \text{determinación completa de la ley}.}$$

Síntesis. La idea central de la sección es:

$$\boxed{\text{una ecuación física no debe depender de la convención usada para medir}.}$$

Al cambiar independientemente las unidades base, cada término adquiere un factor controlado por su dimensión. Para que una suma conserve su forma física, todos los términos aditivos deben transformarse con el mismo factor.

De ahí la Proposición 2:

$$\boxed{Q_1 + \cdots + Q_r = R_1 + \cdots + R_s}$$

implica, bajo las hipótesis declaradas,

$$\boxed{[Q_1] = \cdots = [Q_r] = [R_1] = \cdots = [R_s].}$$

La homogeneidad permite detectar errores estructurales. Pero no selecciona por sí sola la ley correcta.

Por tanto:

$$\boxed{\text{inhomogeneidad} \Rightarrow \text{problema},}$$

mientras

$$\boxed{\text{homogeneidad} \not\Rightarrow \text{verdad física}.}$$

La siguiente sección convertirá esta condición necesaria en una herramienta de trabajo sistemática (§7).

---

7. El análisis dimensional como auditoría

Por qué aparece: una ecuación puede parecer razonable y estar mal construida. Consideremos la expresión

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t.$$

A primera vista tiene una apariencia familiar:

- posición inicial;
- velocidad;
- aceleración;
- tiempo.

Incluso contiene los símbolos que esperaríamos encontrar en un problema de movimiento.

Sin embargo, antes de sustituir un solo número podemos preguntar:

$$\boxed{\text{¿pueden sumarse físicamente estos términos?}}$$

Tenemos

$$[x] = L,$$

$$[x_0] = L,$$

$$[v_0 t] = L T^{-1} T = L,$$

pero

$$[at] = L T^{-2} T = L T^{-1}.$$

El último término tiene dimensión de velocidad, no de longitud. Por tanto, la expresión falla antes de cualquier cálculo numérico.

Ésta es la función práctica que comenzaremos a atribuir al análisis dimensional:

usar la estructura dimensional para auditar una expresión física.

La palabra **auditar** es deliberada.

No significa derivar toda la física de las dimensiones. Significa someter una fórmula, un cálculo o un modelo a una prueba estructural que puede descubrir ciertos errores antes de continuar.[27]

Qué podríamos pensar inicialmente. Un lector puede formular una primera intuición:

«Si las unidades finales son correctas, la ecuación está bien.»

Esta intuición contiene una parte útil y una parte peligrosa. La parte útil es que una incompatibilidad de unidades puede revelar un problema. La parte peligrosa es creer que una coincidencia dimensional certifica la física.

Por ejemplo, $E = \frac{1}{2}mv^2$

y

$$E = 37mv^2$$

tienen exactamente la misma dimensión: ML^2T^{-2}.

También la tiene $E = -mv^2$. El análisis dimensional no puede decidir, por sí solo, cuál de estas expresiones describe una energía física en un modelo determinado.

Por eso la intuición inicial debe corregirse:

las dimensiones pueden refutar ciertas formas, pero no verificar por sí solas una ley.

Esta asimetría ya apareció en el Principio 12. En §7 la convertiremos en un procedimiento de trabajo.

Primera representación: la ecuación como colección de términos. Cuando vemos

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = R,$$

la primera representación útil no es todavía numérica.

Separamos la ecuación en términos: $Q_1, \quad Q_2, \quad \dots, \quad Q_n, \quad R.$

Después reemplazamos cada término por su dimensión: $[Q_1], \quad [Q_2], \quad \dots, \quad [Q_n], \quad [R].$

Por la Proposición 2, si la relación pretende ser una ecuación física aditiva independiente de la elección de unidades, necesitamos:

$$[Q_1] = [Q_2] = \cdots = [Q_n] = [R].$$

Este cambio de representación transforma una expresión física en un problema algebraico sobre exponentes dimensionales.

[27] V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, §§1.1–1.2, pp. 5–8.

Segunda representación: la firma dimensional. En §5 escribimos, para una magnitud Q,

$$[Q] = T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} N^{\zeta} J^{\eta}.$$

Podemos registrar los mismos datos mediante el vector

$$\mathbf{d}(Q) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta),$$

usando el orden fijo

$$(T, L, M, I, \Theta, N, J).$$

Definición 18 — Firma dimensional La **firma dimensional** de una magnitud Q es el vector ordenado de exponentes de sus dimensiones base:

$$\mathbf{d}(Q) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta)$$

cuando

$$[Q] = T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} N^{\zeta} J^{\eta}.$$

Por ejemplo, $[v] = LT^{-1}$
corresponde a

$$\mathbf{d}(v) = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Para una aceleración, $[a] = LT^{-2}$,
por lo que

$$\mathbf{d}(a) = (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Para una fuerza, $[F] = MLT^{-2}$,
de modo que

$$\mathbf{d}(F) = (-2, 1, 1, 0, 0, 0, 0).$$

La firma dimensional no añade nueva física.

Solo reorganiza la información de una manera que facilitará:

- auditorías;
- comparación de términos;
- sistemas de ecuaciones para exponentes;
- el teorema II de Buckingham en §12.

Leer operaciones mediante firmas. La notación vectorial convierte las reglas dimensionales en operaciones muy simples.

Producto. Si

$$Q = AB,$$

entonces $[Q] = [A][B]$. Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{d}(Q) = \mathbf{d}(A) + \mathbf{d}(B).}$$

Cociente. Si

$$Q = \frac{A}{B},$$

entonces

$$\boxed{\mathbf{d}(Q) = \mathbf{d}(A) - \mathbf{d}(B).}$$

Potencia. Si

$$Q = A^n,$$

entonces

$$\boxed{\mathbf{d}(Q) = n\,\mathbf{d}(A).}$$

Suma. Si

$$Q = A + B$$

representa una suma física admisible, entonces necesitamos

$$\boxed{\mathbf{d}(Q) = \mathbf{d}(A) = \mathbf{d}(B).}$$

La suma es diferente de las otras operaciones.
No combina firmas: exige igualdad de firmas.

Precisar el método: qué es una auditoría dimensional. Definición 19 — Auditoría dimensional Una **auditoría dimensional** es el procedimiento de analizar una expresión, ecuación o cadena de cálculo reemplazando sus magnitudes por dimensiones o firmas dimensionales para comprobar la compatibilidad estructural exigida por sus operaciones y localizar posibles inconsistencias.

La definición contiene tres verbos:

1. **analizar**;
2. **comprobar**;
3. **localizar**.

Una auditoría no se limita a pronunciar «correcto» o «incorrecto».
Debe intentar identificar **dónde** aparece la incompatibilidad.

Principio 13 — Auditar la estructura antes de sustituir números Cuando una relación física contiene varios términos, parámetros o conversiones, conviene verificar primero su estructura dimensional. Una incompatibilidad detectada en esta etapa evita cálculos numéricos que no pueden reparar el problema.

Protocolo FPM de auditoría dimensional. Aplicaremos el siguiente procedimiento.
Paso 1 — Declarar el significado de los símbolos. No comenzamos con letras desnudas.
Escribimos, por ejemplo:

$$x : \text{ posición},$$

$$v : \text{ velocidad},$$

$$t: \text{ tiempo.}$$

Esta etapa evita asignar una dimensión incorrecta a una letra por hábito.

Paso 2 — Registrar dimensiones conocidas. Por ejemplo:

$$[x] = L,$$

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[t] = T.$$

Paso 3 — Descomponer cada término. Si aparece

$$v^2 t,$$

calculamos: $[v^2 t] = [v]^2[t]$.

No intentamos adivinar el resultado visualmente.

Paso 4 — Simplificar dimensiones o firmas. Tenemos $[v^2 t] = (LT^{-1})^2 T = L^2 T^{-1}$.

Paso 5 — Aplicar la regla algebraica pertinente.

- producto: multiplicar dimensiones;
- cociente: dividir;
- potencia: elevar;
- suma o igualdad aditiva: exigir igualdad dimensional.

Paso 6 — Si falla, localizar el primer punto incompatible. No basta decir:

> «las unidades no dan».

Debemos señalar, por ejemplo: $[at] = LT^{-1} \neq L = [x_0]$.

Paso 7 — Si pasa, no detener la revisión física. Después del control dimensional todavía debemos preguntar:

- ¿la manipulación algebraica es correcta?;
- ¿los símbolos representan lo que creemos?;
- ¿la ecuación tiene el estatus físico declarado?;
- ¿las hipótesis del modelo son adecuadas?;
- ¿estamos dentro del régimen de validez?;
- ¿la relación está apoyada por una ley, derivación o evidencia?

La auditoría dimensional es una capa de control dentro de una auditoría física más amplia.

Ejemplo desarrollado 1 — Encontrar el término defectuoso. Consideremos: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at$.

Intuir. Sabemos que todos los términos sumados a una posición deberían representar contribuciones a una posición.

Representar. Asignamos:

$$[x] = [x_0] = L,$$

$$[v_0] = LT^{-1},$$

$$[a] = LT^{-2},$$

$$[t] = T.$$

Precisar. Calculamos: $[v_0 t] = LT^{-1}T = L$,
pero: $[at] = LT^{-2}T = LT^{-1}$.

Poner a prueba. Comparamos las firmas:

$$\mathbf{d}(x) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{d}(v_0 t) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{d}(at) = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

El último término no pertenece a la misma clase dimensional.

Diagnóstico. La ecuación falla por **inhomogeneidad dimensional**. La auditoría no nos dice automáticamente cuál era la fórmula pretendida. Podría faltar, por ejemplo, otro factor de tiempo.

Pero reconstruir ese factor requiere información adicional.

Pausa de autoexplicación Antes de continuar, explica sin mirar las ecuaciones:

¿por qué sustituir valores numéricos de a y t no puede corregir el defecto dimensional de at dentro de una suma de longitudes?

Una respuesta adecuada debe mencionar que cambiar números no cambia la dimensión del término.

Ejemplo desarrollado 2 — Una fórmula que pasa y puede seguir siendo falsa. Consideremos: $E = 7mv^2$.

Tenemos $[m] = M$

y

$$[v^2] = L^2T^{-2}.$$

Por tanto, $[7mv^2] = ML^2T^{-2}$. La fórmula posee dimensión de energía.

Pasa el control dimensional. Pero el análisis dimensional no demuestra que el coeficiente 7 tenga justificación física. Tampoco demuestra que la dependencia exacta en v^2 sea la ley apropiada en cualquier teoría o régimen.

La fórmula puede ser:

- algebraicamente homogénea;
- dimensionalmente admisible;
- físicamente incorrecta.

Éste es un **no-ejemplo** crucial de la inferencia:

$$\text{«es homogénea»} \Longrightarrow \text{«es una ley correcta»}.$$

La inferencia es inválida.

Tres clases de fallo que no debemos confundir. La auditoría dimensional ayuda a separar errores distintos.

A. Fallo dimensional. Ejemplo: $x = x_0 + at$.

Tenemos $L \neq LT^{-1}$. El problema es estructural y puede detectarse sin conocer los valores.

B. Fallo algebraico. Supongamos una ecuación dimensionalmente correcta: $v = v_0 + at$. Si alguien parte de ella y escribe $v - v_0 = a + t$,

la nueva expresión puede contener un error algebraico aunque el problema original fuera dimensionalmente correcto. El análisis dimensional puede detectar además que

$$[a + t]$$

intenta sumar

$$LT^{-2}$$

y

$$T,$$

pero la causa inmediata del fallo fue una manipulación algebraica ilegítima.

C. Fallo físico o de modelización. Una fórmula puede ser dimensionalmente homogénea y algebraicamente impecable, pero utilizar:

- una ley inaplicable;
- una aproximación fuera de régimen;
- una condición inicial incorrecta;
- una interpretación equivocada;
- una idealización físicamente insuficiente.

Por eso necesitamos una jerarquía de auditorías.

Representación por capas. Organizaremos el diagnóstico así:

$$\boxed{\text{dimensional} \to \text{algebraica} \to \text{semántica} \to \text{física}}$$

Capa 1 — Auditoría dimensional. Pregunta:

¿las operaciones combinan dimensiones compatibles?

Capa 2 — Auditoría algebraica. Pregunta:

¿las transformaciones matemáticas son válidas?

Capa 3 — Auditoría semántica. Pregunta:

¿cada símbolo conserva el significado físico que le asignamos?

Capa 4 — Auditoría física. Pregunta:

¿las leyes, hipótesis, idealizaciones y aproximaciones son adecuadas para el sistema y el régimen?

Principio 14 — Identificar el nivel del fallo Detectar que una expresión es incorrecta no basta. Siempre que sea posible distinguiremos si el problema es dimensional, algebraico, semántico o físico, porque cada clase de fallo exige una corrección diferente.

Este principio extiende el protocolo de revisión del capítulo 1.

Conflicto típico: «las unidades se cancelan, así que está bien». Consideremos: $Q = \frac{ab}{c}$. Un estudiante sustituye números y obtiene finalmente una unidad esperada.

¿Basta eso para validar todo el cálculo?

No necesariamente.

Dos errores de conversión pueden compensarse. Una constante dimensional puede haberse interpretado mal. Una manipulación algebraica previa puede ser incorrecta.

Incluso una fórmula físicamente falsa puede producir la dimensión esperada. La revisión correcta no observa únicamente la unidad de la última línea. Debe seguir la estructura de los términos relevantes.

Por eso:

$$\boxed{\text{unidad final plausible} \not\Rightarrow \text{cálculo íntegro correcto.}}$$

Conflicto típico: «si falla, puedo arreglarlo con una constante». Supongamos: $x = t^2$. La expresión es inhomogénea: $L \neq T^2$.

Podemos introducir una constante α con dimensión

$$[\alpha] = LT^{-2}$$

y escribir: $x = \alpha t^2$. Ahora la ecuación es homogénea. Pero la operación solo muestra que **existe una manera dimensional de completar la forma**.

No demuestra:

- que α sea constante físicamente;
- que x dependa de t^2;
- que el modelo describa un sistema real.

La reparación dimensional genera una **familia admisible de formas**, no una ley verificada.

Variación: detectar la dimensión que falta. Aunque §7 no está dedicado todavía a inferir leyes, la auditoría puede localizar información ausente. Supongamos: $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Sin interpretar todavía la ecuación como una ley concreta, podemos preguntar qué dimensión necesitaría k para que la relación fuera homogénea.

Tenemos: $[F] = MLT^{-2}$,

y

$$\left[\frac{m_1 m_2}{r^2}\right] = \frac{M^2}{L^2} = M^2 L^{-2}.$$

Por tanto,

$$[k] = \frac{MLT^{-2}}{M^2 L^{-2}} = M^{-1} L^3 T^{-2}.$$

La auditoría ha determinado una restricción necesaria sobre k.

No ha demostrado la relación. Esta forma de razonamiento prepara §§10–12.

Variación: usar firmas para localizar un error. Sea

$$R = A + B + C.$$

Supongamos:

$$\mathbf{d}(A) = (-2, 2, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{d}(B) = (-2, 2, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{d}(C) = (-3, 2, 1, 0, 0, 0, 0),$$

y

$$\mathbf{d}(R) = (-2, 2, 1, 0, 0, 0, 0).$$

No necesitamos reconstruir inmediatamente los nombres físicos de las magnitudes.

Vemos que C difiere solo en el exponente temporal:

$$-3$$

en lugar de

$$-2.$$

Esto orienta el diagnóstico:

> el término sospechoso contiene probablemente un factor temporal adicional o faltante.

La firma dimensional funciona así como una herramienta de **localización**, no solo de clasificación.

Qué no puede detectar el análisis dimensional. Una auditoría dimensional puede no advertir:

Coeficientes numéricos incorrectos.

$$E = 2mv^2$$

y

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

tienen la misma dimensión.

Signos incorrectos.

$$A + B = C$$

y

$$A - B = C$$

pueden ser igualmente homogéneas.

Dependencias funcionales distintas con igual dimensión. Dos funciones diferentes pueden producir la misma dimensión final.

Hipótesis físicas incorrectas. Una ecuación puede utilizar una aproximación fuera de régimen y seguir siendo homogénea.

Confusión entre magnitudes de igual dimensión. Presión y densidad de energía pueden compartir dimensión sin ser intercambiables en cualquier contexto. Ésta es la frontera conceptual de la herramienta.

Lectura de una auditoría: estrategia global y pasos locales. práctica guiada exige distinguir la estrategia de las manipulaciones.

En una auditoría dimensional:

Estrategia global. Queremos comprobar si la estructura de la ecuación puede permanecer independiente de la elección de unidades.

Pasos locales. Calculamos dimensiones, sumamos exponentes y comparamos firmas.

No debemos confundir ambos niveles.

Las operaciones algebraicas son el mecanismo. La razón física de hacerlas es la invariancia estructural expresada por la Proposición 2.

Pausa de autoexplicación Explica en tus propias palabras:

1. por qué una firma dimensional diferente detecta un problema en una suma;
2. por qué una firma dimensional igual no basta para probar una ley;
3. qué papel cumple la Proposición 2 dentro del protocolo de auditoría.

Si las tres respuestas pueden darse sin recurrir a una fórmula memorizada, la herramienta empieza a estar comprendida y no solo aplicada.

Conectar con el protocolo general de Física para matemáticos. En el capítulo 1 fijamos la cadena:

$$\text{fenómeno} \to \text{modelo} \to \text{predicción} \to \text{contraste} \to \text{revisión}.$$

La auditoría dimensional se inserta dentro de la construcción y revisión del modelo:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{representación} \to \text{ecuaciones} \\ \Downarrow \\ \text{auditoría dimensional} \to \text{derivación matemática} \\ \Downarrow \\ \text{interpretación física.}\end{array}}$$

No sustituye:

- observaciones;
- teoría;
- modelización;
- prueba matemática;
- contraste experimental.

Cumple una función más específica:

$$\boxed{\text{descartar incompatibilidades estructurales baratas de detectar.}}$$

Práctica guiada. Ejercicio 17 — Auditoría dimensional completa
Objetivo: `Síntesis - auditoría`
Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.
Los cuatro apartados siguen la secuencia:

$$\text{Recuperación} \to \text{Consolidación} \to \text{Diagnóstico} \to \text{Síntesis}.$$

A. Recuperación. Calcula las firmas dimensionales de: v, a, F, E.
Usa el orden

$$(T, L, M, I, \Theta, N, J).$$

B. Consolidación. Audita: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.
Verifica la dimensión de cada término y explica por qué el factor $1/2$ no interviene en el control dimensional.

C. Diagnóstico. Un estudiante propone: $v = v_0 + at^2$.
Otro responde:

> «La fórmula puede arreglarse cambiando el valor numérico de a.»

Identifica el error dimensional y explica por qué la respuesta no puede repararlo.

D. Síntesis. Considera: $Q = C\, m^\alpha v^\beta$,
donde C es un número puro y queremos que Q tenga dimensión de energía.

1. Determina las condiciones sobre α y β.
2. Decide si esas condiciones determinan completamente una ley física para la energía.
3. Clasifica qué parte de tu razonamiento es dimensional y qué información adicional sería física.

Solución

A. Recuperación. Para velocidad: $[v] = LT^{-1}$,
por tanto

$$\boxed{\mathbf{d}(v) = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0).}$$

Para aceleración: $[a] = LT^{-2}$,
entonces

$$\boxed{\mathbf{d}(a) = (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0).}$$

Para fuerza: $[F] = MLT^{-2}$,
de modo que

$$\boxed{\mathbf{d}(F) = (-2, 1, 1, 0, 0, 0, 0).}$$

Para energía: $[E] = ML^2T^{-2}$,
luego

$$\boxed{\mathbf{d}(E) = (-2, 2, 1, 0, 0, 0, 0).}$$

B. Consolidación. Tenemos: $[x] = [x_0] = L$.
Además: $[v_0 t] = LT^{-1}T = L$.
Y: $[at^2] = LT^{-2}T^2 = L$.
Por tanto:

$$\boxed{[x] = [x_0] = [v_0 t] = [at^2] = L.}$$

La expresión es dimensionalmente homogénea. El factor

$$\frac{1}{2}$$

es un número puro y no introduce ninguna potencia de las dimensiones base.

C. Diagnóstico. La velocidad tiene dimensión: $[v] = LT^{-1}$.

También: $[v_0] = LT^{-1}$.

Pero: $[at^2] = LT^{-2}T^2 = L$. Por tanto: $LT^{-1} \neq L$. La ecuación intenta sumar una velocidad y una longitud. Cambiar el valor numérico de a no altera: $[a] = LT^{-2}$. Luego ningún ajuste numérico puede convertir

$$at^2$$

en una velocidad. El fallo es dimensional, no numérico.

D. Síntesis. Queremos: $[Q] = ML^2T^{-2}$.

Como: $[m^\alpha v^\beta] = M^\alpha (LT^{-1})^\beta$,

obtenemos: $[Q] = M^\alpha L^\beta T^{-\beta}$.

Igualamos exponentes con: $M^1L^2T^{-2}$. Para masa: $\alpha = 1$. Para longitud: $\beta = 2$. Para tiempo: $-\beta = -2$,

que es compatible con: $\beta = 2$.

Por tanto:

$$\boxed{\alpha = 1, \qquad \beta = 2.}$$

La forma dimensional es: $Q = Cmv^2$. Sin embargo, el análisis dimensional no determina C. Tampoco demuestra que una magnitud física concreta llamada energía deba depender exactamente de mv^2 en todo modelo y régimen. El razonamiento dimensional determinó los exponentes compatibles con la dimensión objetivo bajo las hipótesis dadas.

La identificación física de Q, el valor de C y el régimen de validez requieren información adicional.

Esta separación es el objetivo de la práctica:

$$\boxed{\text{restricción dimensional} \neq \text{ley física completa.}}$$

Variar el método. El ejercicio anterior usó una dimensión objetivo conocida.

Podemos variar el problema de tres maneras.

Variación 1 — Ocultar una dimensión. Dar una ecuación y pedir la dimensión de una constante desconocida.

Variación 2 — Ocultar un exponente. Dar una forma como $Q = AX^\alpha Y^\beta$

y usar homogeneidad para restringir α, β.

Variación 3 — Insertar un término defectuoso. Dar una ecuación casi correcta y pedir localizar exactamente el primer término incompatible.

Las tres variaciones practican actividades cognitivas distintas:

- reconstrucción;
- inferencia;
- diagnóstico.

El análisis dimensional se vuelve más potente cuando el lector puede pasar de una a otra sin depender de una plantilla memorizada.

Red conceptual. §7 conecta directamente con lo ya construido:

$$\boxed{\text{§1 cambio de unidad} \to \text{§5 dimensión} \to \text{§6 homogeneidad} \to \text{§7 auditoría.}}$$

Y prepara:

$$\boxed{\text{§8 cantidades de dimensión uno}}$$

porque funciones como seno, exponencial y logaritmo requieren un análisis especial de sus argumentos;

$$\boxed{\text{§10–§12 inferencia dimensional y semejanza}}$$

porque las firmas dimensionales pueden organizarse como ecuaciones lineales entre exponentes. La firma dimensional introducida aquí será, por tanto, una herramienta reutilizable y no una notación decorativa.

Qué debe haber cambiado en la comprensión. Al cerrar la sección, el lector no debería limitarse a saber «comprobar unidades».

Debe poder:

1. representar una magnitud mediante su firma dimensional;
2. traducir productos, cocientes y potencias a operaciones con firmas;
3. auditar sumas e igualdades usando la Proposición 2;
4. localizar un término dimensionalmente incompatible;
5. distinguir un fallo dimensional de uno algebraico o físico;
6. explicar por qué pasar el control dimensional no demuestra una ley;
7. reconocer cuándo el análisis dimensional solo restringe una forma y cuándo se necesita información física adicional.

Podemos condensar el método completo:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{significado} \to \text{dimensión} \\ \Downarrow \\ \text{firma} \to \text{operación} \\ \Downarrow \\ \text{comparación} \to \text{diagnóstico} \\ \Downarrow \\ \text{control físico.}\end{array}}$$

La siguiente sección aborda la frontera que hemos pospuesto desde §6 (§8).

Allí veremos por qué «adimensional» no significa «sin significado físico» y por qué los argumentos de ciertas funciones requieren un tratamiento especial.

8. Cantidades de dimensión uno

Intuir: «adimensional» no significa «sin física». Consideremos estas cantidades:

- el índice de refracción de un medio;
- el número de Mach;
- una fracción de masa;
- un ángulo plano;
- el número de vueltas de una bobina.

Todas tienen una característica común: su dimensión es

$$1.$$

Pero no significan lo mismo. Un índice de refracción no es un ángulo. Un ángulo no es un conteo. Una fracción de masa no es un número de Mach.

Por tanto, la primera intuición que debemos corregir es:

$$\boxed{\text{dimensión uno} \neq \text{ausencia de significado físico.}}$$

El VIM conserva históricamente el término «cantidad adimensional», pero recomienda entenderlo como una **cantidad de dimensión uno**: todos sus exponentes dimensionales son cero. Además, advierte que estas cantidades transmiten más información que un número desnudo.[28]

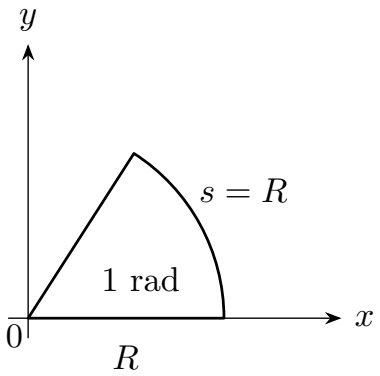


Figura 2.5. En radianes, $\theta = s/R$. Un arco de longitud igual al radio determina un radián. Ser una razón de longitudes no vuelve intercambiables el ángulo y cualquier otra cantidad de dimensión uno. Véase §8.

Precisar: cantidad de dimensión uno. Definición 20 — Cantidad de dimensión uno Una **cantidad de dimensión uno** es una magnitud cuya expresión dimensional tiene todos sus exponentes iguales a cero:

$$[Q] = T^0 L^0 M^0 I^0 \Theta^0 N^0 J^0 = 1.$$

En términos de firmas dimensionales, $\mathbf{d}(Q) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Esta definición no dice que Q carezca de contenido físico. Dice que su valor no cambia mediante factores asociados a una reescala independiente de las unidades base.

[28] JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.8, «quantity of dimension one».

Principio 15 — Dimensión uno no borra la semántica Dos cantidades pueden tener dimensión uno y, sin embargo, pertenecer a tipos físicos diferentes, requerir convenciones distintas y desempeñar papeles distintos dentro de un modelo.

Representar: cociente de magnitudes del mismo tipo. Una fuente frecuente de cantidades de dimensión uno es el cociente de dos magnitudes del mismo tipo. Si

$$R = \frac{Q_1}{Q_2}$$

y

$$[Q_1] = [Q_2],$$

entonces $[R] = \frac{[Q_1]}{[Q_2]} = 1$. Por ejemplo, si

$$R = \frac{\ell_1}{\ell_2},$$

entonces $[R] = \frac{L}{L} = 1$.

Esto explica muchas razones relativas. Pero no toda cantidad de dimensión uno debe interpretarse simplemente como «una división entre dos números parecidos».

El VIM incluye también:

- ángulo plano;
- ángulo sólido;
- conteos;
- número de Mach;
- índice de refracción.

La igualdad dimensional no colapsa estas interpretaciones.

Una razón conserva información sobre qué se comparó. Supongamos $R = \frac{2\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = 2$. El valor final es numéricamente 2.

Pero la construcción física fue:

$$\text{longitud} \div \text{longitud}.$$

Si en cambio contamos dos partículas, obtenemos también el número

$$2,$$

pero la procedencia conceptual es diferente.

Así:

$$\boxed{\text{mismo número} \not\Rightarrow \text{misma cantidad física.}}$$

Esta observación generaliza §2: la semántica no puede reconstruirse desde el valor numérico final.

La unidad coherente es uno. Para una cantidad de dimensión uno, la unidad SI derivada coherente es

$$1.$$

Normalmente el símbolo 1 no se escribe. Por ejemplo, un índice de refracción puede aparecer como $n = 1.50$

y no como $n = 1.50\,1$. Sin embargo, el hecho de que la unidad coherente sea uno no significa que cualquier convención de representación sea irrelevante. El VIM señala que algunas cantidades de dimensión uno emplean unidades especiales o cocientes convencionales.[29]

Porcentajes y razones escaladas. Una fracción

$$r = 0.25$$

puede expresarse también como $25\,\%$. El símbolo

$$\%$$

representa el factor

$$10^{-2}.$$

Por tanto, $25\,\% = 25 \times 10^{-2} = 0.25$.

Análogamente, $1\,\mathrm{mmol/mol} = 10^{-3}$.

Aquí aparece una distinción útil:

unidad de dimensión uno $\neq$ factor numérico necesariamente igual a 1.

La unidad coherente es uno, pero podemos emplear unidades o convenciones escaladas para comunicar mejor ciertos valores.

El ángulo plano: el caso que obliga a pensar. El ángulo plano es una cantidad de dimensión uno en el SI. Su unidad coherente es el **radián**: rad. Geométricamente, para un círculo de radio r y arco de longitud s, $\theta = \frac{s}{r}\,\mathrm{rad}$. Como $[s] = [r] = L$,

la razón

$$\frac{s}{r}$$

tiene dimensión uno. Pero la SI Brochure advierte que identificar sin más

$$\mathrm{rad} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}$$

puede ser engañoso: un ángulo no es simplemente cualquier razón de dos longitudes.[30]

Por eso conviene mantener explícitamente

$$\mathrm{rad}$$

cuando ayuda a conservar el significado físico.

[29] JCGM, *VIM*, 3.ª ed., entradas 1.9, 1.12 y 1.20.

[30] BIPM, *SI Brochure*, v4.01 (2026), §§2.3.3–2.3.4, pp. 132–136, y §5.4.7, pp. 146–147.

Definición 21 — Ángulo plano en radianes Para una circunferencia de radio r, el valor angular en radianes asociado a un arco de longitud s es la razón

$$\theta = \frac{s}{r},$$

acompañada por la interpretación geométrica de ángulo plano y expresada coherentemente en radianes. La definición no identifica «ángulo» con «razón de longitudes» como tipos de magnitud. La razón construye su medida radian.

El radián es dimensión uno, pero no es semánticamente vacío. Tenemos $[\theta] = 1$. Sin embargo, 30°

y

$$\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$$

representan el mismo ángulo con convenciones distintas. La relación exacta es $360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}$. El grado no es unidad SI, aunque su uso está ampliamente establecido. El valor numérico depende de la unidad angular: $30 \neq \frac{\pi}{6}$. Así, incluso una cantidad de dimensión uno puede presentar una transformación no trivial de valor numérico al cambiar su unidad.

Esto refuerza una idea de §1:

$$\boxed{\text{dimensión} \neq \text{unidad} \neq \text{valor numérico.}}$$

Ángulo sólido. El ángulo sólido también tiene dimensión uno. Su unidad coherente es el estereorradián: sr. Para una esfera de radio r, si una región de su superficie tiene área A, puede escribirse

$$\Omega = \frac{A}{r^2}\,\mathrm{sr}.$$

Dimensionalmente, $[\Omega] = \frac{L^2}{L^2} = 1$.

Pero, igual que con el radián, la SI Brochure advierte que

$$\mathrm{sr} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2}$$

no debe interpretarse como si cualquier razón de áreas fuese automáticamente un ángulo sólido.[31] La interpretación geométrica sigue siendo indispensable.

Poner a prueba una intuición: ¿«1» significa intercambiable? Consideremos: $n = 1.50$ para un índice de refracción, y

$$M = 1.50$$

para un número de Mach.

Ambos tienen dimensión uno.

Ambos pueden tener el mismo valor numérico. Sin embargo,

$$n = M$$

[31] BIPM, *SI Brochure*, v4.01 (2026), §§2.3.3–2.3.4, pp. 132–136, y §5.4.7, pp. 146–147.

no constituye automáticamente una igualdad física significativa. El número coincide. La dimensión coincide. El tipo de magnitud no necesariamente.

Por tanto:

$$\boxed{\text{mismo valor} + \text{misma dimensión} \nRightarrow \text{misma magnitud.}}$$

Funciones no algebraicas: aparece una nueva exigencia. En §6 dejamos pendiente expresiones como

$$\sin x,$$

$$e^x,$$

$$\log x.$$

Consideremos la serie formal

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Para poder sumar los términos, la Proposición 2 exige que todos tengan la misma dimensión. El primer término,

$$1,$$

tiene dimensión uno. Por tanto necesitamos

$$[x] = 1.$$

La misma lógica aparece en las expansiones de seno y coseno.

Principio 16 — Los argumentos de funciones trascendentes deben ser dimensionalmente apropiados En expresiones físicas con funciones como exponencial, logaritmo, seno o coseno, el argumento debe construirse como una cantidad de dimensión uno, o mediante una convención equivalente que haga explícita la normalización necesaria.

Exponencial: por qué aparece t/τ. Consideremos

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}.$$

Aquí

$$[t] = T$$

y

$$[\tau] = T.$$

Por tanto, $\left[\frac{t}{\tau}\right] = 1$. El exponente es dimensionalmente admisible. En cambio, $Q(t) = Q_0 e^{-t}$ es una escritura incompleta si t representa un tiempo dimensional y no se ha declarado una normalización. Cambiar segundos por minutos alteraría el número introducido en la exponencial de una manera que no representa la misma relación física.

Logaritmo: no tomar logaritmos de una magnitud desnuda. Supongamos que escribimos

$$\log p,$$

donde p es una presión. Si cambiamos de pascales a kilopascales, el valor numérico de p cambia por un factor. La expresión depende de la unidad elegida.

En cambio, $\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

utiliza una razón de presiones: $\left[\frac{p}{p_0}\right] = 1$. Al cambiar coherentemente la unidad de ambas, $\frac{\{p\}'}{\{p_0\}'} = \frac{\{p\}}{\{p_0\}}$,

de modo que el argumento permanece invariante.

Seno y coseno: el papel especial del radián. En matemática escribimos

$$\sin\theta.$$

Si θ representa un ángulo físico, el número que entra en la función matemática debe corresponder a su medida coherente, normalmente en radianes. Por ejemplo, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad. La función matemática recibe entonces el número $\frac{\pi}{6}$.

Esto explica por qué el radián ocupa una posición especial en cálculo y física.

No porque el grado sea «incorrecto», sino porque las fórmulas analíticas estándar de derivación, series y límites utilizan naturalmente la medida angular coherente en radianes.

No toda cantidad de dimensión uno es una razón continua. El VIM incluye entre las cantidades de dimensión uno los **números de entidades**.[32]

Por ejemplo, $N = 20$

puede representar un conteo. La dimensión es uno. Pero este objeto no tiene la misma estructura operacional que una fracción continua como 0.20.

La dimensión no codifica:

- discreción;
- continuidad;
- carácter angular;
- interpretación probabilística;
- interpretación geométrica.

De nuevo:

$$\boxed{\text{dimensión} \neq \text{estructura física completa.}}$$

Mapa conceptual.

Cantidad	Origen conceptual	Dimensión	Representación frecuente
razón de longitudes	cociente de mismo tipo	1	número
fracción de masa	cociente de masas	1	número, %
índice de refracción	relación física	1	número
número de Mach	cociente de velocidades	1	número
ángulo plano	estructura geométrica	1	rad, °

[32] JCGM, *VIM*, 3.ª ed., JCGM 200:2012, entrada 1.8, «quantity of dimension one».

Cantidad	Origen conceptual	Dimensión	Representación frecuente
ángulo sólido	estructura geométrica	1	sr
conteo	número de entidades	1	entero

La tabla evita dos simplificaciones:
1. creer que todas son «solo ratios»;
2. creer que, por ser adimensionales, son intercambiables.

Autoexplicación. Pausa de autoexplicación Explica sin consultar la tabla:
1. por qué 30° y $\pi/6\,\mathrm{rad}$ tienen valores numéricos diferentes pero representan el mismo ángulo;
2. por qué $\log(p)$ es problemático si p conserva dimensión de presión;
3. por qué dos cantidades con firma dimensional nula no tienen por qué pertenecer al mismo tipo físico.

Una respuesta satisfactoria debe distinguir:

$$\text{dimensión}, \quad \text{unidad}, \quad \text{valor numérico}, \quad \text{significado físico}.$$

Práctica guiada. Ejercicio 18 — Reconocer dimensión uno
Objetivo: `Recuperación → Consolidación`
Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.
Determina cuáles tienen dimensión uno:
1. ℓ_1/ℓ_2;
2. v/c, con v, c velocidades;
3. m/V;
4. p/p_0;
5. A/r^2;
6. t/τ;
7. $F/(ma)$.

Para cada caso explica además qué estructura física podría representar.
Solución
1.

$$\left[\frac{\ell_1}{\ell_2}\right] = 1.$$

Razón de longitudes.
2.

$$\left[\frac{v}{c}\right] = 1.$$

Razón de velocidades.
3.

$$\left[\frac{m}{V}\right] = ML^{-3}.$$

No tiene dimensión uno.
4.

$$\left[\frac{p}{p_0}\right] = 1.$$

Razón entre presiones.

5.

$$\left[\frac{A}{r^2}\right] = 1.$$

Con interpretación geométrica adecuada puede intervenir en un ángulo sólido.

6.

$$\left[\frac{t}{\tau}\right] = 1.$$

Escala temporal normalizada.

7.

Como $[F] = [ma] = MLT^{-2}$,

tenemos $\left[\frac{F}{ma}\right] = 1$. El punto común es dimensional, pero las interpretaciones siguen siendo distintas.

Ejercicio 19 — Diagnóstico de argumentos de funciones

Objetivo: `Diagnóstico - transferencia`

Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.

Examina:

1. e^{-t};
2. $e^{-t/\tau}$;
3. $\log p$;
4. $\log(p/p_0)$;
5. $\sin(\omega t)$, con $[\omega] = T^{-1}$;
6. $\sin(vt)$, con $[v] = LT^{-1}$.

Decide cuáles son dimensionalmente admisibles tal como están escritas.

Solución

1. Si $[t] = T$, el argumento conserva dimensión temporal. No está normalizado.

2.

$$\left[\frac{t}{\tau}\right] = 1.$$

Es admisible.

3. $\log p$ depende de la unidad usada para representar p. No es una forma física completa tal como está escrita.

4.

$$\left[\frac{p}{p_0}\right] = 1.$$

Es admisible.

5.

$$[\omega t] = 1.$$

Es admisible.

6.

$$[vt] = L.$$

No es admisible como argumento directo del seno sin una escala adicional de longitud. Por ejemplo: $\sin\left(\frac{vt}{\ell_0}\right)$

sí posee argumento de dimensión uno.

Regla:

antes de una función trascendente, auditar la dimensión de su argumento.

Variar. Si aparece

$$e^{-kx},$$

la homogeneidad del argumento exige

$$[kx] = 1.$$

Por tanto, $[k] = [x]^{-1}$.

Si

$$[x] = L,$$

entonces $[k] = L^{-1}$. Lo mismo ocurre en

$$\sin(kx).$$

El análisis dimensional no determina el valor de k, pero sí la dimensión necesaria.

Conectar. Las cantidades de dimensión uno permiten construir **parámetros que comparan escalas**. En §9 estudiaremos órdenes de magnitud y estimaciones. En §§10–11 aparecerán razones que controlan aproximaciones y semejanza.

En §12, Buckingham Π reorganizará problemas mediante combinaciones

$$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$$

de dimensión uno.

Por tanto:

la física compara escalas mediante combinaciones de dimensión uno.

Síntesis. Una cantidad de dimensión uno satisface $[Q] = 1$,

o

$$\mathbf{d}(Q) = \mathbf{0}.$$

Pero:

$[Q] = 1 \not\Rightarrow Q$ es semánticamente vacío.

Puede representar una razón, un ángulo, un conteo, una fracción, un índice o un parámetro de semejanza. Además, e^x, $\log x$, $\sin x$

exigen argumentos construidos de manera dimensionalmente apropiada.

La regla práctica queda:

función trascendente ⟶ auditar primero el argumento.

El siguiente paso será el §9.

---

9. Escalas características y órdenes de magnitud

Intuir: una magnitud puede ser grande o pequeña solo respecto de una escala. Decir que

$$\ell = 2\,\mathrm{mm}$$

es «pequeño» no tiene todavía un significado físico completo.

Dos milímetros pueden ser enormes frente al espesor de una membrana y diminutos frente al tamaño de una habitación.

La afirmación correcta necesita una referencia:

grande o pequeño respecto de una escala.

Ésta es la función de una **escala característica**.

Escala característica. Definición 32 — Escala característica Una **escala característica** de una magnitud Q en un modelo es un valor de referencia Q_*, del mismo tipo de magnitud, elegido para representar el tamaño relevante de Q en el fenómeno o régimen considerado.

La escala puede proceder de:

- una dimensión geométrica del sistema;
- un parámetro del modelo;
- una condición inicial;
- un valor experimental representativo;
- una escala impuesta externamente.

No tiene por qué ser un promedio ni el valor máximo. Su elección depende de la pregunta física.

Principio 27 — Una escala característica pertenece al modelo Una escala característica no se deduce únicamente de la dimensión de una magnitud. Debe justificarse por la geometría, el régimen, los datos o la estructura física del problema.

Representar una magnitud respecto de su escala. Si Q_* es una escala característica de Q, la razón

$$\widehat{Q} = \frac{Q}{Q_*}$$

tiene dimensión uno: $[\widehat{Q}] = 1$.

Entonces podemos interpretar: $\widehat{Q} \ll 1$
como «Q es pequeño respecto de Q_*», $\widehat{Q} \sim 1$
como «Q es comparable con Q_*», y

$$\widehat{Q} \gg 1$$

como «Q es grande respecto de Q_*». La escala convierte una comparación cualitativa en una afirmación cuantitativa.

Varias escalas características pueden coexistir. Un sistema puede contener más de una longitud relevante. Por ejemplo: L, ℓ.

Si

$$\ell \ll L,$$

la razón

$$\varepsilon = \frac{\ell}{L}$$

es pequeña. Pero no existe una regla universal que obligue a elegir L como escala y no ℓ. La elección depende de la representación que resulte útil.

Si normalizamos con L: $\frac{\ell}{L} = \varepsilon$. Si normalizamos con ℓ: $\frac{L}{\ell} = \varepsilon^{-1}$. Ambas descripciones contienen la misma comparación.

Década decimal. Conservaremos una herramienta numérica de la primera redacción.

Definición 22 — Década decimal Si

$$x = a \times 10^n, \qquad 1 \le a < 10,$$

llamaremos **década decimal** de x al intervalo

$$[10^n, 10^{n+1}).$$

La década registra una escala decimal gruesa.

Orden de magnitud. Definición 23 — Orden de magnitud Para $x > 0$, el **orden de magnitud decimal** de x será la potencia de diez más cercana en escala logarítmica.

Si

$$x = a \times 10^n, \qquad 1 \le a < 10,$$

entonces:

$$\mathrm{OM}(x) = \begin{cases} 10^n, & 1 \le a < \sqrt{10}, \\ 10^{n+1}, & \sqrt{10} < a < 10. \end{cases}$$

En el caso frontera

$$a = \sqrt{10},$$

declararemos explícitamente la convención utilizada. El umbral aparece porque el punto medio multiplicativo satisface: $\frac{x}{10^n} = \frac{10^{n+1}}{x}$,

de donde: $x = \sqrt{10}\,10^n$.

Principio 17 — Un orden de magnitud describe escala, no precisión Informar un orden de magnitud identifica una escala multiplicativa dominante. No equivale a conocer con precisión el coeficiente numérico ni sus cifras significativas.

Escala característica y orden de magnitud no son lo mismo. Una escala característica es una **elección física del modelo**. Un orden de magnitud es una **clasificación numérica aproximada**. Por ejemplo, podemos adoptar: $L_* = 2.4\,\mathrm{m}$

como escala geométrica relevante. Su orden de magnitud puede ser: $10^0\,\mathrm{m}$. Pero reemplazar sistemáticamente L_* por $1\,\mathrm{m}$ puede perder información física útil.

Así:

$$\boxed{\text{escala característica} \neq \text{orden de magnitud.}}$$

Escalas derivadas. Si elegimos una escala de longitud: L_*

y una escala de tiempo: T_*,

aparece naturalmente una escala de velocidad: $V_* = \frac{L_*}{T_*}$.

También una escala de aceleración: $A_* = \frac{L_*}{T_*^2}$. La estructura dimensional permite construir escalas coherentes a partir de las escalas básicas seleccionadas por el modelo.

Ejemplo: movimiento en una pista. Supongamos que una pista tiene longitud característica: $L_* = 400\,\mathrm{m}$

y que el fenómeno que estudiamos dura típicamente: $T_* = 50\,\mathrm{s}$.

La escala de velocidad asociada es:

$$V_* = \frac{400\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{s}} = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Una velocidad: $v = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

corresponde a: $\hat{v} = \frac{v}{V_*} = 0.25$. Una velocidad: $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

corresponde a: $\hat{v} = 1.25$. La comparación no depende de memorizar si 2 o 10 son números «grandes». Depende del fenómeno y de su escala.

Parámetros pequeños y grandes. Las razones de escala permiten identificar regímenes.

Si: $\varepsilon = \frac{\ell}{L} \sim 10^{-3}$,

entonces: $\varepsilon \ll 1$.

Esa información puede justificar más adelante aproximaciones del tipo:

$$\text{corrección de orden } \varepsilon$$

o:

$$\text{efecto dominante frente a uno pequeño.}$$

El análisis dimensional no decide por sí solo qué términos pueden descartarse. Pero ayuda a construir el parámetro que hace cuantitativa la pregunta.

Estimación física: puente hacia el capítulo siguiente. Conservamos el concepto ya activado:

Definición 24 — Estimación física Una **estimación física** es una inferencia cuantitativa aproximada construida a partir de un modelo simplificado, valores representativos, cotas o escalas plausibles, con las hipótesis y la precisión pretendida explícitas.

Principio 18 — Toda estimación debe exponer su modelo Una estimación es auditable solo si hace visibles las cantidades intermedias, los valores representativos y las simplificaciones utilizadas.

En este capítulo usaremos esta idea solo para **identificar escalas**.

El desarrollo sistemático de:

- estimaciones tipo Fermi;
- cifras significativas;
- cotas experimentales;
- incertidumbre;
- propagación de incertidumbres;
- precisión de resultados;

pertenece al capítulo 3.

Práctica guiada. Ejercicio 20 — Elegir y usar escalas características

Objetivo: `Consolidación → Diagnóstico → Síntesis`

Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.

Un movimiento ocurre en una región cuya longitud relevante es $L_* = 100\,\mathrm{m}$ y durante un tiempo característico

$$T_* = 20\,\mathrm{s}.$$

1. Construye la escala de velocidad V_*.
2. Para $x = 5\,\mathrm{m}$, $t = 4\,\mathrm{s}$ y $v = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, calcula

$$\hat{x} = \frac{x}{L_*}, \qquad \hat{t} = \frac{t}{T_*}, \qquad \hat{v} = \frac{v}{V_*}.$$

3. Clasifica cada razón como pequeña, de orden uno o grande respecto de la escala elegida.
4. Explica por qué cambiar metros por centímetros no cambia $\hat{x}$.
5. Si elegimos por error una escala $L_* = 1\,\mathrm{mm}$ para el mismo fenómeno, explica qué se vuelve pedagógicamente poco útil aunque la razón siga siendo matemáticamente válida.

Solución

La escala de velocidad es:

$$V_* = \frac{L_*}{T_*} = \frac{100\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Entonces:

$$\hat{x} = \frac{5}{100} = 0.05,$$

$$\hat{t} = \frac{4}{20} = 0.2,$$

y: $\hat{v} = \frac{15}{5} = 3$.

Respecto de las escalas elegidas:

- $\hat{x} = 0.05$ es pequeño;
- $\hat{t} = 0.2$ es menor que uno pero no extremadamente pequeño;
- $\hat{v} = 3$ es de orden uno en sentido de escala: difiere de la referencia solo por un factor de pocos.

Si escribimos: $x = 500\,\mathrm{cm}$

y: $L_* = 10\,000\,\mathrm{cm}$,

la razón sigue siendo: $\hat{x} = \frac{500}{10\,000} = 0.05$. La variable reducida es independiente de la unidad coherentemente utilizada. Finalmente, elegir: $L_* = 1\,\mathrm{mm}$

daría: $\hat{x} = 5000$. La razón es correcta, pero la escala elegida no representa bien el tamaño característico del fenómeno y oculta en lugar de revelar su estructura.

Autoexplicación. Pausa de autoexplicación Explica:
1. por qué una escala característica no es una unidad;
2. por qué una escala característica no es necesariamente un orden de magnitud;
3. qué información añade la razón Q/Q_*;
4. por qué una mala elección de escala puede ser matemáticamente válida y físicamente poco informativa.

Conectar. Hemos construido razones: $\widehat{Q} = \frac{Q}{Q_*}$
de dimensión uno.

La siguiente sección convertirá esta idea en un procedimiento sistemático para reescribir modelos completos (§10).

La pregunta dejará de ser únicamente:

> ¿cuál es el tamaño característico de cada variable?

y pasará a ser:

> ¿cómo reescribimos todo el problema en variables de dimensión uno y qué parámetros sobreviven a esa reducción?

10. Adimensionalización e inferencia dimensional

Intuir: cambiar de unidades no debería cambiar la forma esencial del problema. En §9 elegimos escalas características. Ahora utilizaremos esas escalas para construir variables de dimensión uno.

Si:

$$x$$

es una longitud y: L_*
una escala característica de longitud, definimos: $\hat{x} = \frac{x}{L_*}$.
El número $\hat{x}$ ya no pregunta «¿cuántos metros mide x?».
Pregunta:

> ¿qué tamaño tiene x respecto de la escala física elegida?

Variable adimensionalizada. Definición 33 — Variable adimensionalizada Dada una magnitud Q y una escala característica Q_* del mismo tipo, la variable

$$\widehat{Q} = \frac{Q}{Q_*}$$

es una **variable adimensionalizada** o **variable reducida** asociada a esa escala.
Tenemos: $[\widehat{Q}] = 1$. Pero $\widehat{Q}$ conserva una interpretación: expresa el tamaño relativo de Q.

Adimensionalización. Definición 34 — Adimensionalización La **adimensionalización** de una relación o modelo es el procedimiento de elegir escalas características para sus magnitudes y reescribirlo en términos de variables de dimensión uno, de modo que queden explícitos los parámetros adimensionales que controlan su forma.

La operación tiene dos objetivos:

1. separar unidades y escalas convencionales de la estructura esencial;
2. identificar los parámetros de dimensión uno que no pueden eliminarse mediante una simple elección de escalas.

Principio 28 — Adimensionalizar reorganiza la física; no la elimina Al adimensionalizar desaparecen las unidades explícitas de las variables reducidas, pero permanecen las relaciones físicas y los parámetros de dimensión uno que controlan el modelo.

Ejemplo elemental: una relación cinemática. Consideremos: $x = x_0 + vt$.

Elegimos: L_*, T_*,

y construimos: $V_* = \frac{L_*}{T_*}$.

Definimos:

$$\hat{x} = \frac{x}{L_*}, \qquad \hat{x}_0 = \frac{x_0}{L_*},$$
$$\hat{t} = \frac{t}{T_*}, \qquad \hat{v} = \frac{v}{V_*}.$$

Sustituyendo:

$$L_*\hat{x} = L_*\hat{x}_0 + V_*T_*\hat{v}\hat{t}.$$

Como: $V_*T_* = L_*$,

obtenemos:

$$\boxed{\hat{x} = \hat{x}_0 + \hat{v}\hat{t}.}$$

La ecuación conserva su forma y todas las variables son de dimensión uno.

Qué puede quedar después de adimensionalizar. No siempre podemos absorber todos los parámetros. Si una relación contiene varias escalas independientes, aparecerán razones como: $\varepsilon = \frac{\ell}{L}$

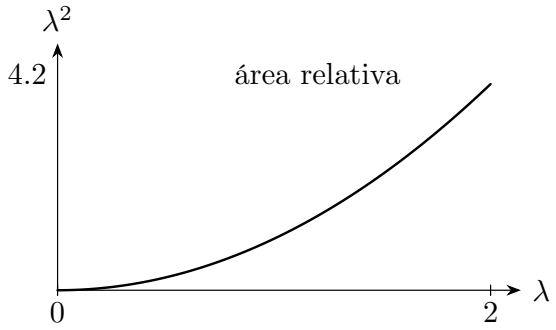


Figura 2.6. Si $L = L_*\lambda$, una familia de áreas semejantes satisface $A/A_* = \lambda^2$. Ambas razones son adimensionales; su interpretación conserva las referencias físicas L_* y A_*. Véase §10.

o combinaciones más complejas.

Esos parámetros son importantes precisamente porque **sobreviven** al cambio de unidades y a la elección de escalas.

La adimensionalización prepara así el camino hacia:

- inferencia dimensional;
- semejanza;
- grupos II de Buckingham.

Inferir: ¿puede la dimensión ayudarnos a construir una fórmula? Hasta ahora hemos usado la dimensión principalmente como herramienta de control.

Dada una expresión como $x = x_0 + vt$,

podemos preguntar si es homogénea.

Pero supongamos ahora que conocemos solamente esto:

- una magnitud objetivo Q;
- varias magnitudes relevantes $X_1, \dots, X_n$;
- sus dimensiones.

¿Podemos obtener alguna información sobre la forma de Q antes de conocer una ley completa?

La respuesta es sí, con una restricción importante. Si suponemos que la dependencia puede escribirse como un producto de potencias, $Q = CX_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$,

la homogeneidad dimensional produce ecuaciones para los exponentes

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Esto no deriva toda la física. Pero puede restringir fuertemente la forma posible.

Representar: del problema físico a un ansatz. La palabra **ansatz** designará aquí una forma propuesta de solución o dependencia que todavía debe justificarse.

Definición 25 — Ansatz dimensional monomial Un **ansatz dimensional monomial** para una magnitud Q en función de magnitudes $X_1, \dots, X_n$ es una expresión de la forma

$$Q = CX_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n},$$

donde C tiene dimensión uno y los exponentes α_i son desconocidos que se determinan, cuando es posible, imponiendo homogeneidad dimensional. La hipótesis monomial no es una consecuencia automática de la física. Es una elección de clase funcional.

Por tanto, el razonamiento correcto tiene dos capas:

$$\boxed{\text{hipótesis de forma} + \text{restricciones dimensionales}}$$

Precisar: convertir dimensiones en ecuaciones para exponentes. Supongamos que

$$[Q] = T^a L^b M^c,$$

y

$$[X_i] = T^{a_i} L^{b_i} M^{c_i}.$$

Si

$$Q = CX_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n},$$

entonces $[Q] = [X_1]^{\alpha_1} \cdots [X_n]^{\alpha_n}$. Por tanto,

$$T^a L^b M^c = T^{\sum a_i \alpha_i} L^{\sum b_i \alpha_i} M^{\sum c_i \alpha_i}.$$

La igualdad de dimensiones exige igualdad de exponentes base a base:

$$a = \sum_i a_i \alpha_i,$$

$$b = \sum_i b_i \alpha_i,$$

$$c = \sum_i c_i \alpha_i.$$

Aparece así un **sistema lineal de ecuaciones para los exponentes**.
No necesitamos todavía teoría formal de espacios vectoriales para utilizarlo.

Firma dimensional y sistema lineal. Con la firma de §7, $\mathbf{d}(Q) = (a, b, c, ...)$, la relación anterior puede escribirse conceptualmente como

$$\boxed{\mathbf{d}(Q) = \alpha_1 \mathbf{d}(X_1) + \cdots + \alpha_n \mathbf{d}(X_n).}$$

Ésta es la razón por la que introdujimos las firmas dimensionales. El problema de inferir potencias se convierte en un problema de combinar vectores de exponentes.

Principio 19 — La inferencia dimensional restringe exponentes dentro de una clase funcional elegida El análisis dimensional puede determinar o restringir los exponentes de un ansatz monomial, pero no justifica por sí solo que la dependencia física real pertenezca a esa clase funcional.

Primer ejemplo: período de un péndulo simple. Supongamos que buscamos una escala temporal T_p para un péndulo y aceptamos, como modelo dimensional mínimo, que depende de:

- una longitud ℓ;
- una aceleración gravitatoria g.

Proponemos

$$T_p = C \ell^\alpha g^\beta.$$

Sabemos:

$$[T_p] = T,$$

$$[\ell] = L,$$

$$[g] = LT^{-2}.$$

Entonces $T = L^\alpha (LT^{-2})^\beta$. Por tanto, $T = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta}$.

Igualamos exponentes. Para longitud: $\alpha + \beta = 0$. Para tiempo: $-2\beta = 1$. De la segunda, $\beta = -\frac{1}{2}$. Luego

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{T_p = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}.}$$

El análisis dimensional ha fijado la dependencia en ℓ y g.
No ha determinado C.

Qué falta en el ejemplo del péndulo. La teoría del péndulo simple para oscilaciones pequeñas conduce a

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Pero la dimensión solo produjo

$$T_p = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{C = 2\pi}$$

no es una conclusión del análisis dimensional.
Debe provenir de información adicional:

- ecuación de movimiento;
- aproximación de ángulo pequeño;
- solución matemática del modelo;
- o evidencia experimental.

Éste es un ejemplo limpio de la frontera del método.

Poner a prueba una intuición: ¿la dimensión determina siempre una única forma? No.

Supongamos que queremos una cantidad Q con dimensión

$$[Q] = L$$

a partir de dos longitudes x e y. Un ansatz monomial sería

$$Q = Cx^{\alpha}y^{\beta}.$$

La dimensión exige solamente

$$\alpha + \beta = 1.$$

Hay infinitas soluciones:

$$(\alpha, \beta) = (1, 0),$$

$$(0, 1),$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

y muchas más. Por tanto, la información dimensional es insuficiente para elegir una sola dependencia.

La aparición de una libertad adimensional. Escribamos

$$\beta = 1 - \alpha.$$

Entonces $Q = Cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$.
Factorizamos y: $Q = y\,C\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}$. La razón

$$\frac{x}{y}$$

tiene dimensión uno.
Esto sugiere una forma mucho más general:

$$\boxed{Q = y\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right),}$$

donde Φ es una función de dimensión uno. La dimensión no determina Φ. Este fenómeno será central en Buckingham Π.

Segunda definición: libertad funcional adimensional. Definición 26 — Libertad funcional adimensional Existe **libertad funcional adimensional** cuando las restricciones dimensionales permiten multiplicar una forma dimensionalmente admisible por una función arbitraria de una o más combinaciones de dimensión uno sin alterar la dimensión total.
Por ejemplo, si

$$[Q] = L$$

y

$$[x] = [y] = L,$$

entonces $Q = y\,\Phi(x/y)$
es dimensionalmente admisible para cualquier función adecuada Φ. La física debe determinar cuál, si alguna, es la función correcta.
Principio 20 — Toda libertad adimensional marca información física aún no determinada Cuando el análisis dimensional deja una función arbitraria de cantidades de dimensión uno, esa libertad no es un defecto del método: identifica exactamente la parte de la relación que las dimensiones no pueden fijar.

Resultado formal: condición para un ansatz monomial. Proposición 3 — Criterio de homogeneidad para un ansatz monomial

Sea

$$Q = C \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i},$$

con $[C] = 1$. Escribamos las dimensiones respecto de una base dimensional $D_1, \dots, D_r$ como $[Q] = \prod_{j=1}^{r} D_j^{q_j}$,

y

$$[X_i] = \prod_{j=1}^{r} D_j^{a_{ji}}.$$

Entonces el ansatz es dimensionalmente homogéneo si y solo si, para cada j,

$$\boxed{q_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\alpha_i.}$$

Demostración. Partimos de

$$Q = C \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i}.$$

Como $[C] = 1$,
obtenemos $[Q] = \prod_{i=1}^{n} [X_i]^{\alpha_i}$.
Sustituyendo

$$[X_i] = \prod_{j=1}^{r} D_j^{a_{ji}},$$

resulta

$$[Q] = \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{r} D_j^{a_{ji}} \right)^{\alpha_i}.$$

Reagrupando por dimensión base, $[Q] = \prod_{j=1}^{r} D_j^{\sum_i a_{ji}\alpha_i}$. Pero también

$$[Q] = \prod_{j=1}^{r} D_j^{q_j}.$$

Dos expresiones dimensionales son iguales exactamente cuando coinciden los exponentes de cada dimensión base. Por tanto, $q_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\alpha_i$
para todo j.

Recíprocamente, si estas igualdades se cumplen, entonces las dos expresiones dimensionales coinciden y el ansatz es homogéneo.

QED

Lectura de la Proposición 3. La Proposición 3 no dice que toda ley física tenga forma monomial.

Dice algo más preciso:

> **si** elegimos una forma monomial, **entonces** la homogeneidad es equivalente a resolver un sistema lineal para sus exponentes.

La hipótesis y la conclusión deben permanecer separadas.

Hipótesis estructural.

$$Q = C \prod_i X_i^{\alpha_i}.$$

Restricción dimensional.

$$q_j = \sum_i a_{ji} \alpha_i.$$

Información no obtenida.

- validez física del ansatz;
- valor de C;
- presencia de funciones adimensionales adicionales;
- régimen de validez;
- signos o correcciones aditivas.

Pausa de autoexplicación Explica por qué la Proposición 3 es un teorema matemático correcto y, al mismo tiempo, no constituye una ley física.

Una respuesta adecuada debe distinguir la hipótesis monomial de la información dimensional.

Segundo ejemplo: período orbital. Siguiendo un ejemplo clásico de teoría dimensional,[33] supongamos que una escala temporal orbital T_o depende de:

- radio orbital r;
- masa central M;
- constante gravitacional G.

Proponemos

$$T_o = C r^{\alpha} M^{\beta} G^{\gamma}.$$

Las dimensiones son:

$$[T_o] = T,$$

$$[r] = L,$$

$$[M] = M,$$

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

Entonces

$$T = L^{\alpha} M^{\beta} \left(L^3 M^{-1} T^{-2} \right)^{\gamma}.$$

Agrupando:

[33] V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, §§1.2–1.3, pp. 6–10, y cap. 2, §§2.1–2.3, pp. 11–14.

$$T = L^{\alpha+3\gamma} M^{\beta-\gamma} T^{-2\gamma}.$$

Igualamos exponentes:

$$\alpha + 3\gamma = 0,$$

$$\beta - \gamma = 0,$$

$$-2\gamma = 1.$$

De la última: $\gamma = -\frac{1}{2}$.
Entonces $\beta = -\frac{1}{2}$,
y

$$\alpha = \frac{3}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{T_o = C\sqrt{\frac{r^3}{GM}}.}$$

La dimensión fija los exponentes dentro del ansatz.
No fija C ni demuestra que r, M, G sean las únicas variables físicamente relevantes.

El problema de las variables omitidas. Ésta es una limitación decisiva. El análisis dimensional opera sobre **las variables que le damos**. Si omitimos una magnitud relevante, podemos obtener una fórmula dimensionalmente impecable y físicamente incompleta.

Por ejemplo, si un fenómeno depende además de una viscosidad μ y no la incluimos, ningún cálculo dimensional posterior puede recuperar mágicamente esa variable.

Por eso la inferencia debe empezar con una pregunta física:

$$\boxed{\text{¿qué variables son plausiblemente relevantes para el fenómeno?}}$$

La selección de variables es parte de la modelización, no del álgebra dimensional.

Un no-ejemplo: deducir demasiado de una solución única. Supongamos que el sistema dimensional produce una única pareja

$$(\alpha, \beta).$$

Sería incorrecto concluir:

> «Hemos demostrado la ley física.»

Lo único demostrado es:

> dentro del ansatz monomial elegido y con las variables incluidas, existe una única combinación de exponentes compatible con las dimensiones.

Todavía puede faltar:

- una constante numérica;
- una función de parámetros adimensionales no incluidos explícitamente;
- otra clase funcional;

- una variable relevante omitida.

Variar: si añadimos una variable de dimensión uno. Volvamos al péndulo. Si además del largo ℓ y de g incluimos un ángulo inicial θ_0, con

$$[\theta_0] = 1,$$

la dimensión ya no puede fijar completamente la dependencia.
Podemos escribir

$$\boxed{T_p = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\Phi(\theta_0).}$$

Para oscilaciones pequeñas, $\Phi(\theta_0) \approx 2\pi$. Para amplitudes mayores, la función cambia. La dimensión no puede decidir esa dependencia porque θ_0 ya es de dimensión uno. Este ejemplo muestra por qué los parámetros adimensionales concentran información física que el análisis dimensional deja libre.

Ejercicios práctica guiada. Ejercicio 21 — Adimensionalizar una relación cinemática

Objetivo: `Consolidación`

Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.

Considera: $x = x_0 + vt$.

Elige escalas L_* y T_* y define: $V_* = \frac{L_*}{T_*}$.

1. Introduce

$$\hat{x} = \frac{x}{L_*}, \quad \hat{x}_0 = \frac{x_0}{L_*}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T_*}, \quad \hat{v} = \frac{v}{V_*}.$$

2. Demuestra que la relación se convierte en

$$\boxed{\hat{x} = \hat{x}_0 + \hat{v}\,\hat{t}.}$$

3. Explica por qué todas las variables con sombrero tienen dimensión uno.
4. Explica qué ocurriría si se eligiera una escala de velocidad distinta de L_*/T_*.

Solución

Sustituimos:

$$x = L_*\hat{x}, \qquad x_0 = L_*\hat{x}_0,$$

$$v = V_*\hat{v}, \qquad t = T_*\hat{t}.$$

Entonces:

$$L_*\hat{x} = L_*\hat{x}_0 + V_*T_*\hat{v}\hat{t}.$$

Como: $V_*T_* = L_*$,
obtenemos:

$$L_*\hat{x} = L_*\left(\hat{x}_0 + \hat{v}\hat{t}\right).$$

Dividiendo por L_*:

$$\boxed{\hat{x} = \hat{x}_0 + \hat{v}\hat{t}.}$$

Además: $[\hat{x}] = \frac{L}{L} = 1$,
y análogamente:

$$[\hat{x}_0] = [\hat{t}] = [\hat{v}] = 1.$$

Si eligiéramos una escala de velocidad arbitraria V_*', aparecería el parámetro

$$\frac{V_*' T_*}{L_*}.$$

La elección

$$V_* = L_*/T_*$$

absorbe ese factor y revela una forma reducida más simple.

Ejercicio 22 — Qué sobrevive a la adimensionalización

Objetivo: `Diagnóstico → Síntesis`

Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.

Sean x e y dos longitudes y Q otra longitud. Buckingham y la homogeneidad permiten una forma $Q = y\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$.

1. Define:

$$\widehat{Q} = \frac{Q}{y}, \qquad \xi = \frac{x}{y}.$$

2. Reescribe la relación en forma adimensional.
3. Explica qué información ha desaparecido y cuál permanece.
4. ¿Puede el análisis dimensional determinar Φ?
5. Aplica la misma lectura al péndulo:

$$P = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\Psi(\varphi_0).$$

Solución

Dividiendo por y:

$$\boxed{\widehat{Q} = \Phi(\xi).}$$

Tanto: $\widehat{Q}$
como:

$$\xi$$

tienen dimensión uno. La unidad concreta de longitud ha desaparecido de la forma reducida. Pero no ha desaparecido la física: permanece en la función Φ y en el significado de la razón x/y.

El análisis dimensional no determina Φ. Para el péndulo podemos definir: $\widehat{P} = P\sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Entonces:

$$\boxed{\widehat{P} = \Psi(\varphi_0).}$$

La adimensionalización ha aislado exactamente la dependencia que no puede fijarse solo con dimensiones.

Autoexplicación. Pausa de autoexplicación Sin revisar los ejemplos, responde:
1. ¿qué hipótesis adicional introducimos al escribir un ansatz monomial?;
2. ¿por qué una solución única para los exponentes no equivale a una ley física única?;
3. ¿qué significa que aparezca una función Φ de una cantidad de dimensión uno?;
4. ¿qué información proviene de las dimensiones y cuál proviene de la modelización?

Conectar con Buckingham Π. La estructura que acabamos de encontrar puede resumirse así. A veces las dimensiones fijan una combinación monomial básica: Q_0. Pero si existen combinaciones independientes de dimensión uno,

$$\Pi_1, \dots, \Pi_k,$$

la forma más general puede contener

$$\boxed{Q = Q_0\, \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_k).}$$

Ésta es precisamente la dirección que formalizará el teorema Π.

No lo demostramos todavía.

§10 ha construido el problema que ese teorema resolverá.

Síntesis. La inferencia dimensional comienza con una elección física de variables y una hipótesis de forma. Para un ansatz

$$Q = C \prod_i X_i^{\alpha_i},$$

la homogeneidad se convierte en un sistema lineal para los exponentes:

$$\boxed{\mathbf{d}(Q) = \sum_i \alpha_i \mathbf{d}(X_i).}$$

La Proposición 3 demuestra que resolver ese sistema es exactamente la condición de homogeneidad del ansatz monomial.

Pero la dimensión no determina por sí sola:
- la selección correcta de variables;
- la validez del ansatz;
- constantes numéricas adimensionales;
- funciones de parámetros de dimensión uno;
- el régimen físico de validez.

Por tanto:

$$\boxed{\text{inferencia dimensional} = \text{restricción estructural}, \not\equiv \text{derivación completa de una ley.}}$$

El siguiente paso será el §11.

11. Semejanza, escalamiento y cambio de escala

Intuir: hacer un sistema más grande no significa multiplicarlo todo por el mismo número. Imaginemos dos modelos geométricamente semejantes de una misma figura. Si todas las longitudes del segundo son λ

veces las del primero, es natural escribir

$$L' = \lambda L.$$

Pero el área no cambia por el mismo factor: $A' = \lambda^2 A$. Y el volumen cambia como $V' = \lambda^3 V$. Por tanto,

cambiar de escala $\neq$ multiplicar todas las magnitudes por el mismo factor.

Cada magnitud responde al reescalado según su estructura.

Ésta es la idea básica de una **ley de escalamiento**.

Representar: una familia de sistemas relacionados por un parámetro. Introduciremos un parámetro positivo

$$\lambda > 0.$$

Una magnitud X puede transformarse según

$$X(\lambda) = \lambda^s X_0,$$

donde s describe cómo responde al cambio de escala. Por ejemplo: $L(\lambda) = \lambda L_0$

tiene exponente de escalamiento 1; $A(\lambda) = \lambda^2 A_0$

tiene exponente 2; $V(\lambda) = \lambda^3 V_0$

tiene exponente 3.

Definición 27 — Ley de escalamiento Una **ley de escalamiento** para una magnitud Q respecto de un parámetro positivo λ es una relación que describe cómo cambia Q al variar λ. Cuando tiene la forma

$$Q(\lambda) = \lambda^s Q(1),$$

llamaremos s **exponente de escalamiento** de Q respecto de esa transformación.

Dimensión y escalamiento no son lo mismo. Debemos separar dos ideas.

La **dimensión** responde:

¿cómo depende una magnitud de las magnitudes base del sistema dimensional?

El **escalamiento** responde:

¿cómo cambia una magnitud dentro de una familia concreta de transformaciones?

Una longitud tiene dimensión

$$L.$$

Pero no toda longitud física debe escalar necesariamente como λ^1

en cualquier problema. Por ejemplo, en una transformación podríamos duplicar el radio de un objeto y mantener fija otra longitud externa. Ambas tienen dimensión L, pero sus leyes de escalamiento son distintas.

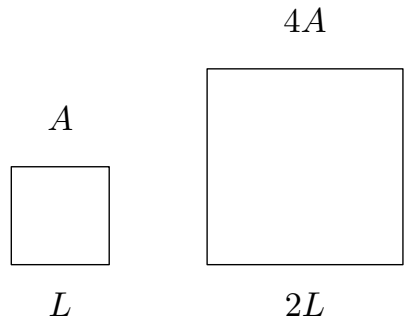


Figura 2.7. En figuras semejantes, duplicar todas las longitudes multiplica el área por cuatro y el volumen por ocho. La comparación exige conservar la forma; el dibujo ilustra la relación de áreas. Véase §11.

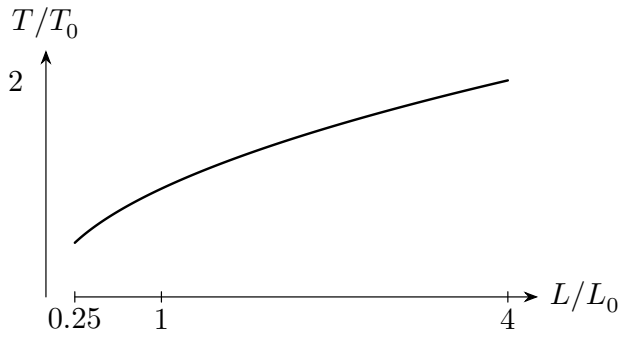


Figura 2.8. Para el péndulo ideal a pequeña amplitud y g fijo, $T/T_0 = \sqrt{L/L_0}$. Duplicar la longitud multiplica el período por $\sqrt{2}$, dentro de ese régimen. Véase §11.

Por tanto,

$$\boxed{\text{misma dimensión} \not\Rightarrow \text{mismo exponente de escalamiento.}}$$

Principio 21 — El escalamiento pertenece al modelo de transformación La dimensión de una magnitud es una propiedad relativa al sistema dimensional; su exponente de escalamiento depende además de qué familia de sistemas o transformación física estamos comparando.

Escalamiento geométrico uniforme. Consideremos una familia de cuerpos geométricamente semejantes en la que toda longitud lineal se multiplica por λ. Entonces: $L' = \lambda L$. Un área construida como producto de dos longitudes satisface $A' = (\lambda L_1)(\lambda L_2) = \lambda^2 A$.

Un volumen construido como producto de tres longitudes satisface $V' = \lambda^3 V$.

Así obtenemos:

$$\boxed{L \sim \lambda, \qquad A \sim \lambda^2, \qquad V \sim \lambda^3.}$$

Aquí el símbolo

$$\sim$$

indica dependencia de escala, no igualdad exacta entre magnitudes.

Consecuencia: superficie frente a volumen. Para objetos geométricamente semejantes, $\frac{A}{V} \sim \frac{\lambda^2}{\lambda^3}$. Por tanto,

$$\boxed{\frac{A}{V} \sim \lambda^{-1}.}$$

Al aumentar el tamaño lineal de un objeto, disminuye su razón superficie/volumen. Si duplicamos la escala lineal, $\lambda = 2$,

entonces $\frac{(A/V)'}{A/V} = \frac{1}{2}$. Esta conclusión es geométrica.

No necesitamos todavía afirmar ninguna consecuencia biológica, térmica o mecánica concreta.

Esas aplicaciones requerirían modelos físicos adicionales.

Masa bajo densidad constante. Supongamos ahora que comparamos objetos semejantes fabricados con un material de densidad constante

$$\rho.$$

Como $m = \rho V$,

si

$$\rho' = \rho$$

y

$$V' = \lambda^3 V,$$

entonces $m' = \rho V' = \lambda^3 m$. Por tanto,

$$\boxed{m \sim \lambda^3}$$

bajo las hipótesis:

- semejanza geométrica;
- misma densidad.

Si cambia el material o la densidad, esta ley deja de seguirse automáticamente.

Precisar: semejanza respecto de un modelo. Dos objetos pueden tener la misma forma geométrica y no comportarse físicamente de manera semejante. Para hablar de semejanza física necesitamos declarar qué estructura queremos preservar.[34]

Definición 28 — Semejanza respecto de un modelo Dos realizaciones de un modelo son **semejantes respecto de un conjunto declarado de variables y relaciones** cuando pueden relacionarse mediante transformaciones de escala que preservan la forma de esas relaciones y los parámetros de dimensión uno relevantes para la comparación.

Esta definición es deliberadamente relativa.

No existe una única noción universal de «ser semejante» para todos los propósitos físicos.

Podemos estudiar:

- semejanza geométrica;
- semejanza cinemática;
- semejanza dinámica;

[34] V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, §1.3.2, p. 10, y cap. 2, pp. 11–18.

- semejanza térmica;

según las variables y relaciones que el modelo conserve.

Un ejemplo temporal: péndulos semejantes. En §10 obtuvimos, para el modelo elemental, $T_p = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Supongamos ahora que mantenemos fijo g y cambiamos

$$\ell' = \lambda \ell.$$

Entonces

$$T_p' = C\sqrt{\frac{\lambda \ell}{g}} = \lambda^{1/2} T_p.$$

Por tanto,

$$\boxed{T_p \sim \lambda^{1/2}.}$$

Un péndulo cuatro veces más largo tiene, dentro de este modelo, $T_p' = 2T_p$. La longitud creció por un factor 4. El período solo creció por un factor 2.

Otro ejemplo: escala orbital. En §10 obtuvimos

$$T_o = C\sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

Si mantenemos fijos G y M y reescalamos

$$r' = \lambda r,$$

entonces

$$T_o' = C\sqrt{\frac{\lambda^3 r^3}{GM}} = \lambda^{3/2} T_o.$$

Así,

$$\boxed{T_o \sim r^{3/2}}$$

cuando M permanece fija dentro del modelo.

Ésta es una ley de escala más informativa que una simple afirmación dimensional.

Nos dice cómo comparar dos miembros de una familia física.

Teorema elemental de escalamiento monomial. Proposición 4 — Escalamiento de un ansatz monomial

Sea

$$Q = C \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i},$$

donde C permanece invariante bajo una transformación parametrizada por $\lambda > 0$.

Supongamos que cada variable escala como $X_i(\lambda) = \lambda^{s_i} X_i(1)$.

Entonces

$$\boxed{Q(\lambda) = \lambda^{\sum_i \alpha_i s_i} Q(1).}$$

Por tanto, el exponente de escalamiento de Q es

$$\boxed{s_Q = \sum_i \alpha_i s_i.}$$

Demostración. Sustituimos las leyes de escala de las variables:

$$Q(\lambda) = C \prod_i \left(\lambda^{s_i} X_i(1)\right)^{\alpha_i}.$$

Separando los factores de λ,

$$Q(\lambda) = C \left(\prod_i \lambda^{\alpha_i s_i}\right) \left(\prod_i X_i(1)^{\alpha_i}\right).$$

Como

$$\prod_i \lambda^{\alpha_i s_i} = \lambda^{\sum_i \alpha_i s_i},$$

obtenemos

$$Q(\lambda) = \lambda^{\sum_i \alpha_i s_i} C \prod_i X_i(1)^{\alpha_i}.$$

Pero

$$C \prod_i X_i(1)^{\alpha_i} = Q(1).$$

Luego

$$\boxed{Q(\lambda) = \lambda^{\sum_i \alpha_i s_i} Q(1).}$$

$$\boxed{\text{QED}}$$

Leer la Proposición 4 correctamente. La Proposición 4 no afirma que toda magnitud física siga una potencia de λ.

La conclusión depende de dos hipótesis:

1. que la relación tenga la forma monomial indicada;
2. que conozcamos cómo escala cada variable X_i.

Así, la Proposición 4 traduce una ley monomial en una ley de escala.

No crea por sí sola la relación física.

Cantidades de dimensión uno e invariantes de semejanza. Supongamos que bajo una transformación

$$X' = \lambda^a X$$

y

$$Y' = \lambda^b Y.$$

La combinación

$$\Pi = X^p Y^q$$

será invariante bajo el reescalado si

$$ap + bq = 0.$$

Entonces $\Pi' = \Pi$.

Esto es distinto de decir solamente que

$$[\Pi] = 1.$$

Una cantidad puede tener dimensión uno y aun cambiar durante una transformación física concreta. Para que funcione como **invariante de semejanza**, debe además conservar su valor bajo la familia de escalamiento elegida.

Principio 22 — Semejanza exige preservar los parámetros adimensionales relevantes En una comparación por semejanza, no basta con que una combinación tenga dimensión uno: los parámetros adimensionales que controlan el modelo deben conservar valores compatibles entre los sistemas comparados.

Esta idea anticipa directamente los grupos Π de §12.

Poner a prueba: dimensión uno no implica invariancia de escala. Sea

$$R = \frac{x}{y},$$

con

$$[x] = [y] = L.$$

Entonces $[R] = 1$. Pero supongamos que

$$x' = 2x$$

y

$$y' = 3y.$$

Entonces $R' = \frac{2x}{3y} = \frac{2}{3}R$. Por tanto, $R' \neq R$. La cantidad es de dimensión uno, pero no es invariante bajo ese reescalado. En cambio, si

$$x' = \lambda x$$

y

$$y' = \lambda y,$$

entonces $R' = R$. La semejanza depende del patrón de transformación.

Diagnóstico: miniatura geométrica no equivale automáticamente a modelo físico. Supongamos que construimos una maqueta a escala

$$1 : 10.$$

Todas las longitudes se reducen por $\lambda = \frac{1}{10}$.
Geométricamente, $A' = 10^{-2}A$,
y

$$V' = 10^{-3}V.$$

Si conservamos densidad, $m' = 10^{-3}m$. Pero de aquí no sigue que todos los tiempos, fuerzas o velocidades deban reducirse también por 10^{-1}. Cada una requiere su propia ley de escala. Una maqueta geométricamente semejante puede no ser dinámicamente semejante.
Esta distinción es central en modelos experimentales.

Ejemplo: velocidad bajo escalamiento de longitud y tiempo. La velocidad satisface $v = \frac{L}{T}$. Si una familia transforma

$$L' = \lambda^a L$$

y

$$T' = \lambda^b T,$$

entonces

$$v' = \frac{\lambda^a L}{\lambda^b T} = \lambda^{a-b} v.$$

Así,

$$\boxed{s_v = a - b.}$$

La dimensión de v sigue siendo

$$LT^{-1},$$

pero su exponente de escalamiento depende de los valores concretos

$$a,\ b.$$

Éste es otro modo de ver por qué dimensión y escalamiento no son sinónimos.

Ejemplo: aceleración bajo un escalamiento general. Como $a_{\mathrm{f}} \sim \frac{L}{T^2}$, si

$$L' = \lambda^p L$$

y

$$T' = \lambda^q T,$$

entonces $a'_{\mathrm{f}} = \lambda^{p-2q} a_{\mathrm{f}}$. Por tanto,

$$\boxed{s_{a_{\mathrm{f}}} = p - 2q.}$$

Si queremos preservar una aceleración externa fija, debemos imponer

$$p - 2q = 0.$$

Entonces $q = \frac{p}{2}$.
Para

$$p = 1,$$

obtenemos $T \sim \lambda^{1/2}$,
exactamente como en el escalamiento temporal del péndulo bajo gravedad fija.

Autoexplicación. Pausa de autoexplicación Responde sin volver a los ejemplos:

1. ¿por qué dos magnitudes con la misma dimensión pueden tener exponentes de escalamiento diferentes?;
2. ¿qué hipótesis permiten deducir $m \sim \lambda^3$ para objetos semejantes?;
3. ¿por qué una cantidad de dimensión uno puede no ser invariante bajo un cambio de escala?;
4. ¿qué diferencia hay entre semejanza geométrica y semejanza física?

Práctica guiada. Ejercicio 23 — Escalar una familia de modelos
Objetivo: `Síntesis`
Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.
Considera una familia de cuerpos geométricamente semejantes construidos con el mismo material. La escala lineal cambia según

$$L' = \lambda L.$$

A. Recuperación. Determina cómo escalan:

1. área A;
2. volumen V;
3. masa m;
4. razón A/V.

B. Consolidación. Si una cantidad característica satisface $Q = Cm^{\alpha} L^{\beta}$, demuestra usando la Proposición 4 que

$$Q' = \lambda^{3\alpha+\beta} Q.$$

C. Diagnóstico. Un estudiante afirma:

> «Una maqueta diez veces más pequeña tiene todas sus magnitudes físicas diez veces más pequeñas.»

Identifica el error.

D. Síntesis. Supón además que un proceso posee una escala temporal

$$T = C\sqrt{\frac{L}{g}},$$

con g fijo.
Determina cómo cambia T cuando

$$\lambda = \frac{1}{100}.$$

Explica por qué la respuesta no es $T' = \frac{1}{100}T$.
Solución

A. Recuperación. Por semejanza geométrica,

$$A' = \lambda^2 A,$$

$$V' = \lambda^3 V.$$

Con el mismo material, $\rho' = \rho$.
Como $m = \rho V$,
resulta $m' = \lambda^3 m$.
Finalmente,

$$\frac{A'}{V'} = \frac{\lambda^2 A}{\lambda^3 V} = \lambda^{-1}\frac{A}{V}.$$

Por tanto:

$$\boxed{A \sim \lambda^2, \quad V \sim \lambda^3, \quad m \sim \lambda^3, \quad A/V \sim \lambda^{-1}.}$$

B. Consolidación. Tenemos $Q = Cm^\alpha L^\beta$.
Como $m' = \lambda^3 m$
y

$$L' = \lambda L,$$

entonces $Q' = C(\lambda^3 m)^\alpha (\lambda L)^\beta$.
Así, $Q' = \lambda^{3\alpha+\beta} C m^\alpha L^\beta$.
Luego

$$\boxed{Q' = \lambda^{3\alpha+\beta} Q.}$$

C. Diagnóstico. El estudiante confunde una escala **lineal** con una regla universal para todas las magnitudes. Las áreas cambian como λ^2,
los volúmenes y masas bajo densidad fija como λ^3,
y otras magnitudes dependen de las relaciones físicas del modelo.
No existe una regla

$$Q' = \lambda Q$$

válida para toda magnitud.

D. Síntesis. Si

$$T = C\sqrt{\frac{L}{g}}$$

y g permanece fijo, entonces $T' = \lambda^{1/2} T$.
Con

$$\lambda = \frac{1}{100},$$

tenemos $\lambda^{1/2} = \frac{1}{10}$. Por tanto,

$$\boxed{T' = \frac{1}{10} T.}$$

El tiempo no disminuye cien veces porque su ley de escala no es lineal en L: $T \propto L^{1/2}$.
La conclusión sintetiza la sección:

el escalamiento de una magnitud viene de la estructura del modelo, no del tamaño lineal por sí solo

.

Variar: escalamiento simultáneo de varias magnitudes. Supongamos ahora que

$$r' = \lambda r$$

y

$$M' = \lambda^{\mu} M$$

en la relación orbital

$$T_o = C\sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

Con G fijo,

$$T_o' = \sqrt{\frac{\lambda^3 r^3}{G\lambda^{\mu} M}}\, C.$$

Por tanto,

$$\boxed{T_o' = \lambda^{(3-\mu)/2} T_o.}$$

Distintos valores de μ producen familias de semejanza distintas.

Por ejemplo:

- si $\mu = 0$, $T_o \sim \lambda^{3/2}$;
- si $\mu = 3$, T_o permanece invariante;
- si $\mu = 1$, $T_o \sim \lambda$.

Esto muestra que una ley dimensional puede contener muchas reglas de escalamiento según qué variables se transformen conjuntamente.

Conectar con el teorema Π. §10 mostró que una relación dimensional puede dejar funciones arbitrarias de cantidades de dimensión uno.

§11 añade una nueva lectura:

esas cantidades pueden actuar como **invariantes de semejanza** cuando sus valores permanecen fijos a través de una familia de sistemas.

La estructura que buscamos es:

$$\boxed{\text{variables dimensionales} \longrightarrow \text{combinaciones de dimensión uno} \longrightarrow \text{familias semejantes.}}$$

Buckingham Π hará sistemática esta reducción.

En §12 preguntaremos:

> Dadas n variables físicas construidas a partir de r dimensiones independientes, ¿cuántas combinaciones de dimensión uno independientes podemos esperar?

Síntesis. El cambio de escala se describe mediante leyes como $Q(\lambda) = \lambda^s Q(1)$.

El exponente s depende de:

- la relación física;
- las variables que cambian;
- las variables que permanecen fijas;
- el modelo de semejanza adoptado.

Para un ansatz monomial, $Q = C \prod_i X_i^{\alpha_i}$,

si

$$X_i(\lambda) = \lambda^{s_i} X_i(1),$$

La Proposición 4 demuestra:

$$\boxed{s_Q = \sum_i \alpha_i s_i.}$$

Además,

$$\boxed{\text{dimensión uno} \not\Rightarrow \text{invariante de escala,}}$$

y

$$\boxed{\text{semejanza geométrica} \not\Rightarrow \text{semejanza física completa.}}$$

La semejanza exige declarar qué relaciones e invariantes queremos preservar.

El siguiente paso es el §12.

12. El teorema Π de Buckingham

Intuir: muchas variables, pocas combinaciones esenciales. Supongamos que un fenómeno se describe mediante $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Cada variable puede tener unidades y dimensiones distintas. A primera vista, una relación $F(q_1, \dots, q_n) = 0$

parece depender de las n variables por separado.

Sin embargo, §§8–11 nos han mostrado algo importante:

- las combinaciones de dimensión uno sobreviven al cambio de unidades;
- esas combinaciones pueden funcionar como invariantes de semejanza;
- una libertad adimensional contiene precisamente información que las dimensiones no fijan.

La pregunta natural es:

$$\boxed{\text{¿cuántas combinaciones adimensionales independientes podemos construir?}}$$

El teorema Π de Buckingham responde, bajo hipótesis precisas:[35]

$$[v] = LT^{-1} \qquad [g] = LT^{-2}$$

$$\Pi = \frac{v}{\sqrt{g\ell}}$$

$$[\Pi] = 1$$

Figura 2.9. Con las magnitudes v, g y ℓ, la combinación $\Pi = v/\sqrt{g\ell}$ tiene dimensión uno. El control dimensional no fija su valor ni garantiza que esas tres magnitudes describan por completo el fenómeno. Véase §12.

$$\boxed{n - r,}$$

donde r es el **rango dimensional** de las variables. La clave está en entender qué significa ese rango.

Representar: columnas de exponentes dimensionales. Fijemos un orden de dimensiones base relevantes: $D_1, \dots, D_d$. Para cada variable q_i, escribimos

$$[q_i] = D_1^{a_{1i}} D_2^{a_{2i}} \cdots D_d^{a_{di}}.$$

La firma dimensional de q_i es la columna

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{di} \end{pmatrix}.$$

Colocamos todas las columnas juntas:

[35] V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, §1.3.1, pp. 9–10; §1.3.2, p. 10.

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Definición 29 — Matriz dimensional La **matriz dimensional** de las variables $q_1, \ldots, q_n$, respecto de una lista ordenada de dimensiones base, es la matriz cuyas columnas son sus firmas dimensionales.

La matriz dimensional no contiene los valores de las variables.

Contiene solamente sus exponentes dimensionales.

Rango dimensional sin presuponer álgebra lineal avanzada. Aplicamos eliminación gaussiana a A. El número de columnas pivote —equivalentemente, el número de filas no nulas de una forma escalonada— mide cuántas direcciones dimensionales independientes aparecen realmente entre las variables.

Definición 30 — Rango dimensional El **rango dimensional** de un conjunto de variables es el rango r de su matriz dimensional, calculado por eliminación gaussiana. Es el número de restricciones dimensionales independientes que intervienen en el problema.

Siempre: $r \leq d$

y

$$r \leq n.$$

El número relevante en Buckingham no es simplemente «cuántos símbolos $M, L, T, \ldots$ vemos». Es el número de combinaciones dimensionales **independientes**.

Principio 23 — La cuenta de Buckingham usa rango, no conteo superficial de dimensiones Para determinar el número de grupos adimensionales independientes debemos calcular el rango de la matriz de exponentes. Contar símbolos dimensionales sin verificar su independencia puede producir una cuenta incorrecta.

Un monomio es adimensional exactamente cuando resuelve un sistema homogéneo. Consideremos un producto de potencias:

$$\Pi = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_n^{\alpha_n}.$$

Su firma dimensional es

$$\mathbf{d}(\Pi) = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n.$$

En forma matricial: $\mathbf{d}(\Pi) = A\alpha$,

donde

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Por tanto: $[\Pi] = 1$

si y solo si

$$\boxed{A\alpha = 0.}$$

Así, construir combinaciones adimensionales equivale a resolver un sistema lineal homogéneo.

¿Por qué aparecen $n-r$ parámetros libres? Sea A una matriz con n columnas y rango r. Al reducir

$$A\alpha = 0$$

por eliminación gaussiana, aparecen:

- r variables pivote;
- $n-r$ variables libres.

Cada elección independiente de las variables libres produce una solución del sistema. Por tanto, el conjunto de exponentes que generan monomios adimensionales posee

$$\boxed{n-r}$$

grados de libertad independientes.

Éste es el núcleo algebraico de la cuenta de Buckingham.

No necesitamos todavía una teoría abstracta del espacio nulo.

Basta la lógica de los sistemas lineales:

$$\boxed{n \text{ incógnitas} - r \text{ pivotes} = n - r \text{ variables libres.}}$$

Grupo Π. Definición 31 — Grupo Π Un **grupo** Π es una combinación monomial de las variables pertinentes,

$$\Pi = \prod_{i=1}^{n} q_i^{\alpha_i},$$

cuya dimensión es uno: $[\Pi] = 1$. Un conjunto de grupos $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ será llamado **independiente** cuando ninguno pueda obtenerse como producto de potencias de los demás. Esta independencia es multiplicativa. Al pasar a los vectores de exponentes, se convierte en la independencia ordinaria de soluciones de

$$A\alpha = 0.$$

Variables repetidoras. Si

$$\operatorname{rank} A = r,$$

podemos escoger r columnas independientes.

Después de reordenar variables, llamémoslas: $q_1, \dots, q_r$.

La submatriz formada por esas columnas será:

$$B.$$

Como las columnas son independientes, B posee rango de columnas r. En general B es una matriz $d \times r$ y no tiene por qué ser cuadrada. Lo que necesitaremos es que sus columnas formen una base del espacio generado por todas las columnas de A.

Llamaremos a

$$q_1, \dots, q_r$$

variables repetidoras.

No porque aparezcan físicamente «más veces», sino porque se reutilizan para construir cada grupo adimensional.

Construcción de los grupos. Tomemos una variable no repetidora: q_{r+k}.
Buscamos un grupo de la forma

$$\Pi_k = q_{r+k} q_1^{c_{1k}} \cdots q_r^{c_{rk}}.$$

Queremos: $[\Pi_k] = 1$.
Si

$$\mathbf{a}_{r+k}$$

es la columna dimensional de q_{r+k}, la condición es: $Bc^{(k)} + \mathbf{a}_{r+k} = 0$,
donde

$$c^{(k)} = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{rk} \end{pmatrix}.$$

Como cada columna de A pertenece al espacio generado por las columnas independientes de B, existe una solución de

$$Bc^{(k)} = -\mathbf{a}_{r+k}.$$

Esa solución es única porque las columnas de B son independientes: si

$$Bc = Bc',$$

entonces $B(c - c') = 0$,
y la independencia obliga a

$$c = c'.$$

No escribiremos B^{-1}, porque B puede ser rectangular cuando el número de dimensiones base d es mayor que el rango r. En la práctica resolveremos el sistema por eliminación. Como existen

$$n - r$$

variables no repetidoras, esta construcción produce $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}$.

Por qué esos grupos son independientes. Cada grupo construido tiene exponente 1 en una variable no repetidora distinta:

$$\Pi_k = q_{r+k} \times \text{potencias de las variables repetidoras.}$$

Supongamos que

$$\Pi_1^{\lambda_1} \cdots \Pi_{n-r}^{\lambda_{n-r}} = 1$$

como identidad monomial.
Miremos el exponente de

$$q_{r+k}.$$

Esa variable aparece con exponente λ_k y no aparece en los otros grupos. Por tanto: $\lambda_k = 0$. Esto vale para todo k. Luego los grupos son independientes.

Por qué generan todos los monomios adimensionales. Sea

$$\Pi = q_1^{\alpha_1} \cdots q_n^{\alpha_n}$$

cualquier monomio adimensional.

Queremos mostrar que se obtiene a partir de los grupos construidos.

Formemos:

$$\widetilde{\Pi} = \Pi \Pi_1^{-\alpha_{r+1}} \cdots \Pi_{n-r}^{-\alpha_n}.$$

Por construcción, se cancelan todos los exponentes de las variables no repetidoras. Por tanto,

$$\widetilde{\Pi} = q_1^{\beta_1} \cdots q_r^{\beta_r}.$$

Además, $\widetilde{\Pi}$ sigue siendo adimensional porque es producto y cociente de cantidades de dimensión uno. Entonces: $B\beta = 0$. Pero las columnas de B son independientes. La única solución es: $\beta = 0$. Por tanto: $\widetilde{\Pi} = 1$.

Luego:

$$\boxed{\Pi = \Pi_1^{\alpha_{r+1}} \cdots \Pi_{n-r}^{\alpha_n}.}$$

Toda combinación monomial adimensional se genera mediante los

$$n - r$$

grupos construidos.

La parte física: invariancia frente a cambios de unidades. Hasta aquí hemos probado un hecho algebraico.

Para llegar al teorema de Buckingham debemos añadir una hipótesis física:

> la relación entre las cantidades no debe depender de la elección arbitraria de las unidades base.

Supongamos: $F(q_1, \dots, q_n) = 0$.

Cambiamos independientemente las unidades base.

Los valores numéricos de los q_i cambian según sus firmas dimensionales. La relación física, sin embargo, debe describir la misma situación. Por tanto, debe ser constante a lo largo de las transformaciones numéricas inducidas únicamente por cambios de unidades.

Los grupos Π_k, al ser adimensionales, permanecen invariantes bajo esas transformaciones. La información que sobrevive al cambio de unidades puede organizarse entonces mediante ellos.

Normalizar las variables repetidoras. Hay una forma concreta de verlo.

Trabajemos con valores positivos para poder usar logaritmos y potencias reales sin discutir signos.

Queremos cambiar las unidades base de modo que los valores numéricos de las r variables repetidoras adopten valores de referencia, por ejemplo: $1, \dots, 1$. Sea

$$u = \begin{pmatrix} \log \lambda_1 \\ \vdots \\ \log \lambda_d \end{pmatrix}$$

el vector de logaritmos de los factores de reescalado de las d unidades base.
Si

$$b = \begin{pmatrix} \log q_1 \\ \vdots \\ \log q_r \end{pmatrix}$$

contiene los logaritmos de los valores numéricos de las variables repetidoras, la condición de llevar esos valores a 1 se escribe: $B^{\mathsf{T}} u = b$. Como B tiene rango de columnas r, la matriz B^{T} tiene rango de filas r. Por tanto, el sistema es compatible para todo b.

Si $d > r$, la solución u no tiene por qué ser única: quedan cambios de unidades que no afectan a las variables repetidoras. Esa no unicidad es irrelevante para la reducción, porque basta con que exista una normalización.

Después de esta normalización:

- las variables repetidoras ya no aportan parámetros numéricos libres;
- los valores normalizados de las variables restantes quedan representados por combinaciones adimensionales equivalentes a los grupos Π_k.

Por tanto, una relación invariante bajo cambios de unidades puede describirse únicamente mediante esos invariantes.

Teorema Π de Buckingham. Teorema 5 — Π de Buckingham, forma elemental
Sean

$$q_1, \dots, q_n > 0$$

variables físicas pertinentes, y sea A su matriz dimensional, de rango

$$r.$$

Supongamos que:

1. las dimensiones de las variables están expresadas respecto de un sistema fijo de dimensiones base;
2. la relación física

$$F(q_1, \dots, q_n) = 0$$

es independiente de la elección multiplicativa de las unidades base; 3. el conjunto de variables es el declarado por el modelo y la relación se considera en una región positiva donde las potencias reales utilizadas están bien definidas. Entonces pueden construirse

$$\boxed{n - r}$$

grupos adimensionales independientes

$$\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r},$$

tales que:

1. toda combinación monomial adimensional de las q_i es producto de potencias de esos grupos;
2. la relación física puede reescribirse en la forma

$$\boxed{\Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 0}$$

para alguna función Φ.

Demostración. Como $\operatorname{rank} A = r$,
elegimos r columnas independientes y, reordenando las variables si es necesario, las llamamos

$$q_1, \dots, q_r.$$

Para cada una de las

$$n - r$$

variables restantes construimos:

$$\Pi_k = q_{r+k} q_1^{c_{1k}} \cdots q_r^{c_{rk}},$$

eligiendo los exponentes mediante: $Bc^{(k)} = -\mathbf{a}_{r+k}$.

Esto es posible porque las columnas de B generan el espacio de columnas de A, y determina de manera única cada $c^{(k)}$ porque esas columnas son independientes. Así: $[\Pi_k] = 1$. Los grupos son independientes porque cada uno contiene una variable no repetidora distinta con exponente 1.

La argumentación de §12.10 muestra además que cualquier otro monomio adimensional es un producto de potencias de estos grupos. Queda demostrar la reducción funcional. Denotemos por $z_i > 0$ los valores numéricos iniciales de las variables, para distinguirlos de las magnitudes físicas. Si las unidades base se multiplican por $\lambda_1, \dots, \lambda_d > 0$, y $u_j = \log \lambda_j$, sus nuevos valores satisfacen

$$\log z_i' = \log z_i - \mathbf{a}_i^{\mathsf{T}} u.$$

Queremos llevar las r variables repetidoras a $z_1' = \cdots = z_r' = 1$. Esto equivale a resolver

$$B^{\mathsf{T}} u = (\log z_1, \dots, \log z_r)^{\mathsf{T}}.$$

La matriz B^{T} tiene rango de filas r, así que este sistema admite solución para cualquier vector real de logaritmos. Si $d > r$, la solución puede no ser única; basta su existencia. Los factores $\lambda_j = e^{u_j}$ son positivos.

En las unidades así elegidas, cada valor no repetidor coincide con el valor de su grupo adimensional, pues los factores repetidores de Π_k valen uno. Por tanto, toda lista inicial tiene un representante normalizado

$$(1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}).$$

La hipótesis de invariancia significa aquí que la validez de la relación, es decir, su conjunto de soluciones, se conserva bajo esos cambios de unidades. No exige que el valor numérico de F sea invariante fuera de su conjunto de ceros. Escribiendo F en la representación numérica inicial, definimos $\Phi(p_1, \dots, p_{n-r}) = F(1, \dots, 1, p_1, \dots, p_{n-r})$.

La relación inicial vale si y sólo si vale en su representante normalizado, esto es, si y sólo si $\Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 0$. Cuando el modelo se limita a una región positiva, usamos su saturación por los cambios de unidades y la correspondiente imagen en los grupos; no se impone la relación en estados ajenos al dominio físico. Así queda justificada la reducción funcional.

QED

Qué significa exactamente $n-r$. La fórmula:

$$n-r$$

no significa:

> «el problema físico ha quedado completamente resuelto».

Significa:

> la dependencia de unidades permite reducir una relación entre n variables a una relación entre $n-r$ parámetros adimensionales independientes.

Todavía queda por determinar: Φ.

Esa función puede requerir:

- teoría física;
- ecuaciones diferenciales;
- experimentos;
- simulaciones;
- datos;
- aproximaciones adicionales.

Principio 24 — Buckingham reduce variables, no determina la función adimensional El teorema Π identifica una representación mediante parámetros adimensionales, pero no determina en general la función que relaciona esos parámetros.

Los grupos Π no son únicos. Supongamos que: Π_1, Π_2 son dos grupos independientes.

Entonces también pueden servir, por ejemplo:

$$\widetilde{\Pi}_1 = \Pi_1 \Pi_2,$$

$$\widetilde{\Pi}_2 = \Pi_2.$$

O:

$$\widehat{\Pi}_1 = \Pi_1^2,$$

$$\widehat{\Pi}_2 = \frac{\Pi_2}{\Pi_1},$$

si la transformación entre conjuntos conserva independencia y puede invertirse en la región considerada.

Por tanto:

el conjunto de grupos Π no es canónico.

Lo canónico es la cantidad de grados de libertad: $n-r$. La elección práctica debe favorecer grupos con interpretación física clara.

Ejemplo elemental: número de Reynolds dimensional. Consideremos las variables: $v, \quad L, \quad \rho, \quad \mu,$
con:

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[L] = L,$$

$$[\rho] = ML^{-3},$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}.$$

Usaremos el orden: (T, L, M).
La matriz dimensional es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su rango es: $r = 3$.
Como: $n = 4$,
esperamos: $n - r = 1$
grupo independiente.
Buscamos: $\Pi = v^{\alpha} L^{\beta} \rho^{\gamma} \mu^{\delta}$.
La condición:

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = 0$$

produce:

$$-\alpha - \delta = 0,$$

$$\alpha + \beta - 3\gamma - \delta = 0,$$

$$\gamma + \delta = 0.$$

Tomando: $\alpha = 1$,
obtenemos:

$$\delta = -1,$$

$$\gamma = 1,$$

$$\beta = 1.$$

Por tanto:

$$\boxed{\Pi = \frac{\rho v L}{\mu}.}$$

Éste es el grupo que, en mecánica de fluidos, se denomina número de Reynolds.

Aquí nos interesa primero su estructura dimensional. Su interpretación física detallada pertenecerá a capítulos posteriores de fluidos.

Poner a prueba: contar dimensiones sin calcular rango. Supongamos que las variables tienen dimensiones:

$$[x] = L,$$

$$[y] = L^2T^{-1},$$

$$[z] = L^3T^{-2}.$$

Alguien dice:

> «Aparecen L y T, así que el rango es 2.»

No necesariamente.

Miremos las columnas en el orden (L, T):

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

Las dos primeras son independientes.

La tercera satisface:

$$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

Por tanto: $r = 2$. En este caso el conteo superficial acertó. Pero acertó porque las columnas realmente alcanzan rango 2. Si todas las columnas fueran múltiplos de una sola, el rango sería 1 aunque aparecieran varios exponentes numéricos.

La eliminación gaussiana es el control fiable.

Ejercicios práctica guiada. Ejercicio 24 — Construir un grupo Π por eliminación

Objetivo: `Consolidación`

Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.

Usa: $v, \quad L, \quad \rho, \quad \mu$

con las dimensiones de §12.16.

1. Construye la matriz dimensional.
2. Comprueba que su rango es 3.
3. Resuelve $A\alpha = 0$.
4. Construye un grupo Π.
5. Verifica directamente que $[\Pi] = 1$.

Solución
La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las columnas de v, L, ρ son independientes, por lo que: $r = 3$. Con $n = 4$: $n - r = 1$.
El sistema homogéneo es:

$$-\alpha - \delta = 0,$$

$$\alpha + \beta - 3\gamma - \delta = 0,$$

$$\gamma + \delta = 0.$$

Tomando: $\alpha = 1$,
resulta: $\delta = -1, \qquad \gamma = 1, \qquad \beta = 1.$
Así:

$$\boxed{\Pi = \frac{\rho v L}{\mu}.}$$

Verificación:

$$[\rho v L] = ML^{-3} \cdot LT^{-1} \cdot L = ML^{-1}T^{-1}.$$

Como: $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$,
obtenemos:

$$\boxed{[\Pi] = 1.}$$

Ejercicio 25 — Reconstruir la cuenta $n - r$
Objetivo: `Demostración - consolidación`
Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.
Sea A una matriz dimensional con n columnas y rango r.
1. Explica mediante eliminación gaussiana por qué el sistema

$$A\alpha = 0$$

tiene $n - r$ variables libres. 2. Explica por qué cada solución produce un monomio adimensional. 3. Explica por qué una elección de $n - r$ soluciones independientes genera todos los monomios adimensionales. 4. Señala qué paso adicional hace falta para pasar de este resultado algebraico al teorema físico de Buckingham.

Solución
1.
El rango r significa que una forma escalonada de A posee:

$$r$$

pivotes.

Como existen:

$$n$$

incógnitas, quedan:

$$\boxed{n-r}$$

variables libres.

2.

Si: $A\alpha = 0$,

entonces la firma dimensional de: $\Pi = \prod_i q_i^{\alpha_i}$

es cero. Por tanto: $[\Pi] = 1$.

3.

Las soluciones del sistema homogéneo se obtienen asignando valores a las variables libres y resolviendo las pivote. Una base de soluciones independientes permite escribir cualquier solución como combinación de ellas. Al volver a los monomios, la suma de vectores de exponentes se convierte en producto de potencias de grupos Π.

Por tanto, los grupos asociados generan todos los monomios adimensionales.

4.

Falta la hipótesis física de que la relación sea independiente de la elección de unidades.

Solo entonces podemos concluir que la información de la relación puede reorganizarse mediante los invariantes adimensionales.

Esta separación es esencial:

$$\boxed{\text{álgebra dimensional} + \text{invariancia física} \Longrightarrow \text{Buckingham } \Pi.}$$

Ejercicio 26 — Variables redundantes y rango dimensional

Objetivo: `Diagnóstico → Síntesis`

Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.

Considera: $F, \quad m, \quad a, \quad \ell_1, \quad \ell_2,$

con:

$$[F] = MLT^{-2},$$

$$[m] = M,$$

$$[a] = LT^{-2},$$

$$[\ell_1] = [\ell_2] = L.$$

1. Construye la matriz dimensional usando (T, L, M).
2. Determina su rango.
3. ¿Cuántos grupos Π independientes deben existir?
4. Encuentra dos.
5. Explica por qué añadir ℓ_2 aumenta n pero no el rango.
6. Explica qué enseña esto sobre la expresión $n - r$.

Solución
Las columnas son:

$$F : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad m : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$a : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas de: $m, \quad a, \quad \ell_1$
son independientes.
Luego:

$$\boxed{r = 3.}$$

Como: $n = 5$,
tenemos:

$$\boxed{n - r = 2.}$$

Dos grupos independientes son:

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{F}{ma}}$$

y:

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{\ell_1}{\ell_2}.}$$

Verificación: $[ma] = MLT^{-2} = [F]$,
por lo que: $[\Pi_1] = 1$.
Además: $[\Pi_2] = \frac{L}{L} = 1$.
Añadir ℓ_2 aumenta el número de variables: $4 \to 5$,
pero su columna dimensional es idéntica a la de ℓ_1. Por tanto, no añade una nueva dirección dimensional independiente. El rango permanece: $r = 3$. Sin embargo, aparece una nueva razón adimensional: $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.
Esto muestra el significado de:

$$\boxed{n - r :}$$

variables adicionales que no aumentan el rango producen nuevas libertades adimensionales.

Autoexplicación. Pausa de autoexplicación Responde sin volver a la demostración:
1. ¿por qué un grupo Π corresponde a una solución de $A\alpha = 0$?;
2. ¿por qué el número de grupos independientes es $n - r$?;
3. ¿por qué los grupos no son únicos?;
4. ¿qué hipótesis física convierte el resultado algebraico en el teorema de Buckingham?;
5. ¿qué información sigue faltando después de escribir

$$\Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 0?$$

Variar: cambiar las variables repetidoras. En el ejemplo: $v, \quad L, \quad \rho, \quad \mu,$

podemos construir el grupo usando diferentes conjuntos de tres variables repetidoras, siempre que sus columnas dimensionales sean independientes. Las formas intermedias cambiarán. El resultado puede aparecer como: $\Pi = \frac{\rho v L}{\mu}$,

o como su inverso: $\Pi^{-1} = \frac{\mu}{\rho v L}$.

Ambos contienen la misma información. En general, si: $\widetilde{\Pi} = \Pi^{-1}$,

entonces: $\Phi(\Pi) = 0$

puede reescribirse como otra relación: $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\Pi}) = 0$. La física no depende de nuestra elección particular de coordenadas adimensionales.

Conectar con semejanza. §11 definió semejanza como preservación de las relaciones relevantes y de los parámetros adimensionales que controlan el modelo. Buckingham explica ahora por qué esos parámetros aparecen. Si dos sistemas tienen los mismos valores de un conjunto completo de: $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}$,

entonces ocupan el mismo punto en la descripción adimensional del problema.

Bajo las hipótesis del modelo, esto constituye la base algebraica de una comparación por semejanza.

Pero debemos conservar la cautela:

$$\boxed{\text{mismos grupos } \Pi + \text{mismo modelo}}$$

es la afirmación relevante.

Los grupos solos no garantizan que dos sistemas físicos distintos compartan todas las leyes, condiciones de frontera o regímenes necesarios.

Qué hemos ganado. Partimos de una relación con:

$$n$$

variables dimensionales.

Buckingham la reorganiza mediante:

$$n - r$$

parámetros de dimensión uno. La reducción puede ser enorme.

Por ejemplo, si:

$$n = 8$$

y: $r = 3$,

pasamos conceptualmente de ocho variables dimensionales a:

5

grupos adimensionales.

Esto no resuelve la función física.

Pero reduce el espacio en que debemos:

- experimentar;
- ajustar datos;
- comparar modelos;
- realizar simulaciones;
- buscar semejanzas.

Ésta es una de las razones por las que el análisis dimensional es una herramienta de modelización y no solamente de comprobación de unidades.

Síntesis. El procedimiento completo es:

$$\boxed{\text{variables} \to \text{firmas} \to A \to r \to A\alpha = 0 \to \Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}.}$$

La parte algebraica establece:

$$\boxed{\dim(\text{libertad adimensional}) = n - r}$$

en el sentido elemental de:

$$n - r$$

variables libres del sistema homogéneo.

La parte física añade invariancia bajo cambios de unidades y permite escribir:

$$\boxed{F(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 0.}$$

Pero:

$$\boxed{\text{Buckingham } \Pi \not\Rightarrow \text{función } \Phi \text{ conocida.}}$$

El siguiente paso será usar todo el aparato en problemas físicos completos (§13).

Allí volveremos al péndulo y añadiremos un segundo caso de semejanza para separar con precisión:

- lo que obliga la dimensión;
- lo que debe aportar la física;
- lo que queda para experimento o teoría.

13. Ejemplos de modelización dimensional

Intuir: ahora importa tanto elegir variables como manipular dimensiones. Hasta §12 hemos construido un aparato poderoso:

- dimensión;
- homogeneidad;
- firmas dimensionales;
- inferencia de exponentes;
- escalamiento;
- semejanza;
- teorema Π de Buckingham.

Pero una herramienta formal solo trabaja con las variables que el modelo le entrega. Si seleccionamos mal esas variables, podemos hacer álgebra impecable sobre un modelo incompleto. Por eso esta sección no introduce un nuevo teorema.

Introduce un modo de **usar** los teoremas.

La pregunta rectora será:

¿qué parte de la conclusión proviene de la dimensión y qué parte proviene de la física?

Trabajaremos dos casos:

1. período de un péndulo;
2. fuerza de arrastre de una esfera en un medio.

Ambos aparecen en la tradición clásica del análisis dimensional y están tratados como aplicaciones por Zorich.[36]

Caso I — El péndulo: empezar por la lista de variables. Consideremos un péndulo idealizado:

- masa puntual m;
- suspensión sin masa de longitud ℓ;
- ángulo inicial φ_0;
- aceleración gravitatoria g;
- período P.

Queremos modelar:

$$P.$$

Una primera lista incompleta sería: $P = f(\ell, m, \varphi_0)$. Pero esta lista no distingue, por ejemplo, un péndulo situado en campos gravitatorios de distinta intensidad. Zorich utiliza precisamente esta observación para justificar que debe incluirse g.[37]

La lista mínima considerada pasa entonces a:

$$\boxed{P = f(\ell, m, g, \varphi_0).}$$

Principio 25 — La selección de variables es una hipótesis de modelización Buckingham Π puede reorganizar una lista de variables pertinente, pero no decide por sí solo si esa lista está

[36] V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, cap. 2, «Examples of applications», pp. 11–21.

[37] Zorich, op. cit., §2.3, «Period of oscillation of a heavy pendulum (inclusion of g)», pp. 13–14.

físicamente completa. Incluir u omitir una variable es una decisión del modelo que debe justificarse por separado.

Representar: matriz dimensional del péndulo. Usaremos el orden de dimensiones: (T, L, M).

Las firmas son:

$$\mathbf{d}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d}(\ell) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d}(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d}(g) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, porque el ángulo tiene dimensión uno,

$$\mathbf{d}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos: $n = 5$.

Las tres primeras columnas son independientes, por lo que: $r = 3$.

Buckingham predice:

$$\boxed{n - r = 2}$$

grupos adimensionales independientes.

Construir los dos grupos Π. Uno es inmediato:

$$\boxed{\Pi_2 = \varphi_0.}$$

Para el otro buscamos: $\Pi_1 = P\ell^\alpha g^\beta$. La dimensión es: $[\Pi_1] = TL^\alpha (LT^{-2})^\beta$. Entonces: $[\Pi_1] = L^{\alpha+\beta} T^{1-2\beta}$.

Exigimos dimensión uno:

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$1 - 2\beta = 0.$$

De aquí:

$$\beta = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto:

$$\boxed{\Pi_1 = P\sqrt{\frac{g}{\ell}}.}$$

Buckingham aplicado al péndulo. El teorema permite escribir: $\Phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$.
Es decir:

$$\Phi\left(P\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \varphi_0\right) = 0.$$

Localmente, cuando la relación puede resolverse respecto del primer grupo, podemos escribir: $P\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \Psi(\varphi_0)$.
Por tanto:

$$\boxed{P = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\Psi(\varphi_0).}$$

Ésta es una conclusión mucho más precisa que: $P = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. La constante C aparece solo si Ψ puede tratarse como aproximadamente constante en el régimen físico considerado.

¿Dónde quedó la masa? La masa m estaba incluida en la lista. Sin embargo, no aparece en la forma reducida: $P = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\Psi(\varphi_0)$. Esto no ocurrió porque decidiéramos de antemano «ignorar la masa». Ocurrió porque, dentro de este conjunto de variables y dimensiones, no puede construirse una dependencia adimensional independiente en m compatible con el período.

La dimensión impide que m aparezca no trivialmente en la forma reducida.

Pero debemos leer la conclusión correctamente:

> dentro del modelo idealizado y de la lista de variables declarada, la masa no aparece como parámetro independiente del período.

No estamos afirmando que la masa sea irrelevante para toda propiedad física de un péndulo real.

Lo que la dimensión no determina en el péndulo. La expresión: $P = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\Psi(\varphi_0)$
todavía contiene información desconocida: Ψ.

El análisis dimensional no dice:

- cuál es la función exacta;
- si es constante;
- cómo depende de φ_0;
- para qué amplitudes puede aproximarse;

- cuál es el error de una aproximación.

Para oscilaciones de pequeña amplitud, la teoría dinámica permite obtener: $\Psi(\varphi_0) \approx 2\pi$. Entonces: $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Pero el símbolo: $\approx$

marca información física adicional: una aproximación de régimen pequeño, no una consecuencia del teorema Π.

Autoexplicación del primer caso. Pausa de autoexplicación Explica con tus propias palabras:

1. por qué fue necesario incluir g;
2. por qué φ_0 sobrevive como argumento de una función;
3. por qué la masa desaparece;
4. por qué Buckingham no produce 2π;
5. qué afirmación depende del modelo idealizado y no solo del álgebra.

Caso II — Arrastre en un medio: empezar por el modelo más austero. Consideremos una esfera de radio r que se mueve con velocidad característica v en un medio de densidad ρ. Queremos estudiar una fuerza de arrastre F.

Comencemos con el modelo dimensional:

$$\boxed{F = f(\rho, v, r).}$$

Zorich utiliza precisamente este conjunto de variables para su ejemplo de una esfera en un medio no viscoso.[38]

Las dimensiones son:

$$[F] = MLT^{-2},$$

$$[\rho] = ML^{-3},$$

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[r] = L.$$

Tenemos cuatro variables: $n = 4$. Y las dimensiones M, L, T aparecen independientemente, de modo que: $r_{\dim} = 3$. Por tanto: $n - r_{\dim} = 1$. Solo existe un grupo adimensional independiente.

Construir el grupo de fuerza. Buscamos: $\Pi_F = F\rho^{\alpha}v^{\beta}r^{\gamma}$.

Su dimensión es:

$$MLT^{-2} \cdot (ML^{-3})^{\alpha} \cdot (LT^{-1})^{\beta} \cdot L^{\gamma}.$$

Agrupando:

$$M^{1+\alpha}L^{1-3\alpha+\beta+\gamma}T^{-2-\beta}.$$

Exigimos exponente cero para cada dimensión.

Masa: $1 + \alpha = 0$,

[38] Zorich, op. cit., §2.5, «Drag force for the motion of a ball in a non-viscous medium», pp. 14–15, y §2.6, «...in a viscous medium», pp. 15–16.

luego: $\alpha = -1$.
Tiempo: $-2 - \beta = 0$,
luego: $\beta = -2$.
Longitud: $1 - 3(-1) - 2 + \gamma = 0$. Por tanto: $2 + \gamma = 0$,
y: $\gamma = -2$.
Así:

$$\boxed{\Pi_F = \frac{F}{\rho v^2 r^2}.}$$

Qué concluye Buckingham en el modelo de tres variables explicativas. Como solo existe un grupo adimensional independiente, la relación reducida tiene la forma: $\Phi(\Pi_F) = 0$. En una rama física donde esta ecuación selecciona un valor constante: $\Pi_F = C$.
Entonces:

$$\boxed{F = C\rho v^2 r^2.}$$

Ésta es precisamente la estructura obtenida en el ejemplo dimensional de Zorich.[39]
Pero:

$$\boxed{C}$$

no viene determinado por la dimensión. La dimensión tampoco prueba que el modelo de variables: $\rho,\ v,\ r$
sea suficiente para un fluido real.

Poner a prueba el modelo: introducir viscosidad. Supongamos ahora que el medio posee una viscosidad dinámica relevante: μ.
La lista se amplía:

$$\boxed{F = f(\rho, v, r, \mu).}$$

Tenemos ahora: $n = 5$. El rango dimensional continúa siendo: $r_{\dim} = 3$.
Por tanto:

$$\boxed{n - r_{\dim} = 2.}$$

Debemos esperar dos grupos adimensionales independientes.
Uno puede seguir siendo: $\Pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 r^2}$. El segundo puede tomarse como: $\Pi_2 = \frac{\rho v r}{\mu}$.
Verifiquemos:

$$[\rho v r] = ML^{-3} \cdot LT^{-1} \cdot L = ML^{-1}T^{-1}.$$

Y: $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$. Por tanto: $[\Pi_2] = 1$.

[39] Zorich, op. cit., §2.5, pp. 14–15, ecuación (2.1).

La función reaparece. Buckingham produce ahora: $\Phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$. Cuando podemos despejar Π_1: $\Pi_1 = \Psi(\Pi_2)$.

Así:

$$\boxed{\frac{F}{\rho v^2 r^2} = \Psi\left(\frac{\rho v r}{\mu}\right).}$$

O:

$$\boxed{F = \rho v^2 r^2\, \Psi\left(\frac{\rho v r}{\mu}\right).}$$

La combinación: $\frac{\rho v r}{\mu}$

es una forma del número de Reynolds basada en la escala r. La sección no necesita todavía interpretar en detalle todos los regímenes de flujo.

Lo importante es observar qué ocurrió al añadir una variable físicamente relevante:

$$\boxed{\text{constante adimensional} \longrightarrow \text{función de un parámetro adimensional.}}$$

Qué enseña el segundo caso. Con el modelo: $F = f(\rho, v, r)$,

la dimensión obliga a una forma: $F = C\rho v^2 r^2$. Con el modelo ampliado: $F = f(\rho, v, r, \mu)$,

la dimensión solo obliga a: $F = \rho v^2 r^2 \Psi(\rho v r/\mu)$.

No hay contradicción.

Cambió el modelo. La diferencia muestra por qué la elección de variables es una decisión física previa a Buckingham. Si omitimos μ, el teorema no puede advertir que la viscosidad era importante.

Semejanza en el problema de arrastre. Supongamos dos experimentos con: $(\rho_1, v_1, r_1, \mu_1)$ y: $(\rho_2, v_2, r_2, \mu_2)$.

Si queremos que ambos ocupen el mismo punto en la descripción adimensional del modelo viscoso, debemos mantener:

$$\boxed{\frac{\rho_1 v_1 r_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 r_2}{\mu_2}.}$$

Entonces el mismo valor del argumento de Ψ produce, dentro del modelo, el mismo valor del coeficiente adimensional: $\frac{F}{\rho v^2 r^2}$.

Ésta es la lógica de semejanza:

$$\boxed{\text{igualar parámetros adimensionales relevantes} \longrightarrow \text{comparar sistemas a escalas distintas.}}$$

Ejemplo de escalamiento de un modelo. Supongamos:

- mismo fluido, de modo que ρ y μ son iguales;
- radios relacionados por:

$$r_2 = \lambda r_1.$$

Para conservar: $\frac{\rho v r}{\mu}$,

necesitamos: $v_2 r_2 = v_1 r_1$.

Entonces: $v_2 = \lambda^{-1} v_1$.

Así, si el modelo es diez veces más pequeño: $\lambda = \frac{1}{10}$,
la velocidad necesaria para conservar este parámetro sería: $v_2 = 10v_1$. La semejanza física no sigue automáticamente la escala geométrica. Puede exigir reescalar otras variables en sentido contrario.

Diagnóstico comparado de los dos casos. El péndulo y el arrastre muestran dos mecanismos distintos.

Péndulo. Una variable ya adimensional: φ_0
sobrevive directamente como argumento funcional: $P = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\Psi(\varphi_0)$.

Arrastre viscoso. La variable adicional μ no es adimensional.
Pero, al combinarse con: $\rho,\ v,\ r$,
genera: $\frac{\rho v r}{\mu}$.
Entonces: $F = \rho v^2 r^2 \Psi(\rho v r/\mu)$. En ambos casos, la función adimensional contiene física no resuelta por las dimensiones.

Qué puede decir la dimensión y qué no. Podemos ordenar los resultados.

La dimensión sí puede.

- detectar variables incompatibles;
- construir grupos adimensionales;
- restringir exponentes;
- eliminar dependencias imposibles dentro de un modelo;
- identificar escalas naturales;
- reducir el número de variables;
- formular criterios de semejanza.

La dimensión no puede, por sí sola.

- decidir qué variables son físicamente relevantes;
- demostrar que una idealización es válida;
- determinar funciones adimensionales generales;
- fijar todos los coeficientes numéricos;
- establecer regímenes de aproximación;
- reemplazar experimentos o ecuaciones dinámicas.

La herramienta es poderosa precisamente cuando mantenemos visible esta frontera.

Práctica guiada. Ejercicio 27 — Modelización dimensional completa
Objetivo: `Síntesis`
Intenta primero: 3–5 min antes de leer la solución.

Queremos estudiar una fuerza F asociada al movimiento de un objeto de tamaño característico L con velocidad v en un medio de densidad ρ y viscosidad dinámica μ.

A. Recuperación. Usa:

$$[F] = MLT^{-2},$$

$$[L] = L,$$

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[\rho] = ML^{-3},$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}.$$

Construye la matriz dimensional en el orden (T, L, M) y determina su rango.

B. Consolidación. Usa Buckingham para justificar que deben existir dos grupos adimensionales independientes.

Encuentra un conjunto posible.

C. Diagnóstico. Un estudiante omite μ y obtiene: $F = C\rho v^2 L^2$.

Explica:

1. por qué la deducción dimensional es correcta para la lista reducida;
2. por qué eso no demuestra que la viscosidad sea físicamente irrelevante.

D. Síntesis. Para dos modelos en el mismo fluido, con tamaños: $L_2 = \frac{1}{4}L_1$,

determina cómo debe cambiar la velocidad para conservar: $\frac{\rho v L}{\mu}$.

Luego explica qué cantidad adimensional de fuerza debería coincidir entre ambos modelos si la semejanza es válida.

E. Autoexplicación. Señala en tu solución:

- qué vino de las dimensiones;
- qué vino de la selección de variables;
- qué sigue dependiendo de una función o de datos físicos.

Solución

A. Recuperación. Las columnas dimensionales son:

$$F : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho : \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mu : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hay tres columnas independientes, por ejemplo las de: $L,\ v,\ \rho$.

Así:

$$\boxed{r = 3.}$$

B. Consolidación. Como: $n = 5$,
Buckingham da:

$$\boxed{n - r = 2.}$$

Un conjunto posible es:

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 L^2}}$$

y:

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{\rho v L}{\mu}.}$$

Ambas tienen dimensión uno. La relación reducida puede escribirse: $\Phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$,
o, cuando puede despejarse:

$$\frac{F}{\rho v^2 L^2} = \Psi\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right).$$

C. Diagnóstico. Si omitimos μ, quedan cuatro variables: F, ρ, v, L. Su rango sigue siendo 3. Por tanto: $n-r = 1$. El único grupo independiente puede tomarse como: $\frac{F}{\rho v^2 L^2}$. De ahí: $F = C\rho v^2 L^2$. La deducción es dimensionalmente correcta **para ese modelo de variables**.

El error sería concluir que μ es irrelevante en la física real.
Buckingham no selecciona las variables.

D. Síntesis. En el mismo fluido: $\rho_2 = \rho_1$, $\mu_2 = \mu_1$. Para conservar: $\frac{\rho v L}{\mu}$,
necesitamos: $v_2 L_2 = v_1 L_1$.
Como: $L_2 = \frac{1}{4} L_1$,
obtenemos: $v_2 \frac{1}{4} L_1 = v_1 L_1$.
Por tanto:

$$\boxed{v_2 = 4v_1.}$$

Si la semejanza física del modelo es válida, debería coincidir también:

$$\boxed{\frac{F_1}{\rho_1 v_1^2 L_1^2} = \frac{F_2}{\rho_2 v_2^2 L_2^2}.}$$

E. Autoexplicación. De las dimensiones obtuvimos:

- el rango;
- el número de grupos;
- las combinaciones posibles;
- las reglas de escalamiento necesarias para preservar los grupos.

De la modelización vino:

- la decisión de incluir F, L, v, ρ, μ;
- la hipótesis de que esos son los parámetros pertinentes;
- la comparación en el mismo fluido.

No quedó determinado por dimensiones:

$$\Psi.$$

Su forma concreta exige física adicional, teoría, datos o experimentos.

Variar: volver al péndulo con una variable omitida. Supongamos que alguien comienza con: $P = f(\ell, m, \varphi_0)$

y aplica Buckingham correctamente. El resultado será matemáticamente consistente con esa lista.

Pero no contendrá:

$$g.$$

El problema no está en la reducción dimensional.

Está **antes** de ella. La pregunta física fue incompleta.

Esta variación muestra una regla general:

una inferencia formal no puede recuperar una variable que el modelo nunca declaró.

Conectar con el cierre del capítulo. Después de trece secciones podemos ver el análisis dimensional como una cadena completa:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{magnitudes} \to \text{unidades} \\ \Downarrow \\ \text{dimensiones} \to \text{homogeneidad} \\ \Downarrow \\ \text{auditoría} \to \text{escalamiento} \\ \Downarrow \\ \text{grupos } \Pi \to \text{modelización.}\end{array}}$$

El valor del método no está únicamente en encontrar potencias correctas.

Está en hacer visibles las preguntas:

- ¿qué variables elegimos?;
- ¿qué supuestos estamos introduciendo?;
- ¿qué información es dimensional?;
- ¿qué información sigue siendo física?;
- ¿qué debe decidir un experimento o una teoría más completa?

Síntesis.

Péndulo. Buckingham produce:

$$\boxed{P = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\Psi(\varphi_0).}$$

La dimensión explica:

- la escala temporal $\sqrt{\ell/g}$;
- la ausencia de una dependencia independiente en m;
- la supervivencia de φ_0 como parámetro adimensional.

No produce:

- la función Ψ;
- el valor 2π;
- el régimen de pequeña amplitud.

Arrastre viscoso. Buckingham produce:

$$\boxed{F = \rho v^2 r^2 \Psi\left(\frac{\rho v r}{\mu}\right).}$$

La dimensión explica:

- la escala de fuerza;
- el grupo adimensional de flujo;
- la estructura de semejanza.

No produce:

- la función Ψ;
- qué regímenes físicos existen;
- la validez del modelo para un medio concreto.

La lección común es:

$$\boxed{\text{análisis dimensional} = \text{estructura rigurosa dentro de un modelo,}}$$

no:

$$\boxed{\text{análisis dimensional} = \text{física completa.}}$$

Solo queda cerrar el capítulo mediante (§14).

14. Qué puede y qué no puede decir el análisis dimensional

Intuir: una herramienta poderosa puede ser peligrosa si olvidamos qué información contiene. A lo largo del capítulo hemos obtenido resultados sorprendentemente fuertes a partir de información aparentemente modesta.

Con dimensiones pudimos:

- detectar ecuaciones imposibles;
- inferir exponentes;
- construir escalas;
- comparar sistemas semejantes;
- reducir problemas con muchas variables;
- aislar parámetros adimensionales.

Esto puede producir una ilusión:

> si el análisis dimensional funciona tan bien, quizá pueda reemplazar la física detallada.

No puede. La razón es estructural.

Las dimensiones conservan cierta información sobre las magnitudes, pero descartan otra. Por eso el análisis dimensional es potente **porque comprime información**, y limitado **por la misma compresión**.

La pregunta final del capítulo será:

¿qué información conserva la dimensión y qué información pierde?

Lo que conserva. Una firma dimensional como

$$\mathbf{d}(Q) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta)$$

conserva cómo una magnitud depende de las dimensiones base.

Esto permite reconstruir:

- cómo cambia su valor numérico al cambiar unidades base;
- qué productos y cocientes son dimensionalmente admisibles;
- qué términos pueden aparecer en una suma homogénea;
- qué combinaciones monomiales tienen dimensión uno;
- qué exponentes puede tener un ansatz monomial;
- qué parámetros pueden actuar como grupos de semejanza.

En este sentido, la dimensión conserva **estructura de escala**.

Lo que pierde. La misma firma no registra, por sí sola:

- el significado físico completo;
- el tipo de magnitud;
- si un objeto es escalar, vector o tensor;
- el signo;
- la dirección;
- coeficientes numéricos;
- condiciones iniciales;
- condiciones de frontera;
- geometría detallada;

- régimen de aproximación;
- causalidad;
- estabilidad;
- mecanismo dinámico;
- dependencia funcional entre parámetros adimensionales.

Dos cantidades pueden compartir dimensión y diferir en muchas de estas propiedades.
Por tanto:

$$\boxed{\text{misma dimensión} \neq \text{misma física.}}$$

Primera capacidad — detectar incompatibilidades. Si una ecuación propone: $x = x_0 + at$,
entonces: $[x] = L$,
mientras: $[at] = LT^{-1}$. La ecuación falla.
Ésta es una conclusión fuerte:

$$\boxed{\text{una inhomogeneidad dimensional real invalida la expresión tal como está escrita.}}$$

No necesitamos medir el sistema.
No necesitamos resolver una ecuación diferencial.
No necesitamos conocer el valor de a. La contradicción está en la estructura.

Primera limitación — pasar la auditoría no prueba la ley. Consideremos: $E = Cmv^2$. Para cualquier número puro C: $[E] = ML^2T^{-2}$.
Por tanto, todas estas expresiones son dimensionalmente admisibles:

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$E = mv^2,$$

$$E = 17mv^2,$$

$$E = -3mv^2.$$

Las dimensiones no distinguen entre ellas.
Así:

$$\boxed{\text{homogeneidad es necesaria en muchos modelos, pero no suficiente para la verdad física.}}$$

Esta fue la lección del Principio 12.

Segunda capacidad — inferir escalas y exponentes. Si aceptamos un ansatz: $Q = CX_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, La Proposición 3 convierte la homogeneidad en un sistema lineal. Por ejemplo, para el péndulo: $P = C\ell^{\alpha} g^{\beta}$,

obtenemos:

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

$$\beta = -\frac{1}{2},$$

y por tanto: $P = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. La inferencia es rigurosa **dentro del ansatz declarado**.

Segunda limitación — la clase funcional fue una hipótesis. El análisis dimensional no demostró que el período fuera monomial.

Nosotros propusimos esa clase funcional. Al incorporar el ángulo inicial: φ_0,

Buckingham mostró que la forma más general es: $P = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\Psi(\varphi_0)$. La función: Ψ

no es determinada por las dimensiones.

Por tanto:

restricción dimensional $\neq$ determinación funcional completa.

Tercera capacidad — descubrir grupos adimensionales. Con n variables y matriz dimensional de rango r, el Teorema 5 permite encontrar:

$$n - r$$

grupos independientes: $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}$. La relación física puede reorganizarse como: $\Phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}) = 0$. Esto puede reducir drásticamente un problema experimental o numérico. En lugar de explorar cada variable dimensional por separado, podemos explorar el espacio reducido de parámetros adimensionales.

Tercera limitación — Buckingham no determina Φ. El teorema produce: $\Phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_k) = 0$,

pero no suele producir: Φ. La función restante puede contener casi toda la física interesante del problema.

En el arrastre viscoso obtuvimos:

$$F = \rho v^2 L^2 \Psi\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right).$$

El análisis dimensional identifica:

- la escala de fuerza;
- el parámetro adimensional;
- la reducción de variables.

No determina la función: Ψ.

Cuarta capacidad — construir semejanza. Si dos sistemas preservan los mismos grupos adimensionales relevantes, pueden compararse dentro de una misma descripción reducida.

Por ejemplo, en un modelo viscoso:

$$\frac{\rho_1 v_1 L_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 L_2}{\mu_2}.$$

Esto permite diseñar:

- modelos a escala;
- comparaciones experimentales;
- familias de sistemas dinámicamente semejantes.

La semejanza es una de las aplicaciones más profundas del método.

Cuarta limitación — semejanza dimensional no significa identidad física. Dos sistemas pueden compartir ciertos grupos Π y, sin embargo, diferir en:

- geometría no incluida en el modelo;
- condiciones de frontera;
- rugosidad;
- propiedades constitutivas;
- campos externos;
- mecanismos adicionales;
- transiciones de régimen;
- variables omitidas.

Por eso la afirmación correcta siempre tiene la forma:

semejanza respecto de un modelo declarado.

No:

identidad física absoluta.

Quinta capacidad — revelar variables omitidas indirectamente. El análisis dimensional no puede inventar una variable que no incluimos. Pero puede producir señales de que el modelo es insuficiente. Por ejemplo, si experimentos realizados con la misma combinación dimensional predicha muestran comportamientos sistemáticamente diferentes, debemos preguntar si falta un parámetro.

La discrepancia puede sugerir:

- una viscosidad omitida;
- una longitud característica adicional;
- temperatura;
- elasticidad;
- una condición geométrica;
- otro mecanismo físico.

Así, el fracaso de una reducción dimensional puede funcionar como herramienta diagnóstica.

Quinta limitación — ninguna inferencia formal recupera una premisa ausente. Este punto merece quedar como principio final del capítulo.

Principio 26 — Ninguna conclusión dimensional puede exceder las premisas del modelo El análisis dimensional puede deducir consecuencias rigurosas de una lista de magnitudes,

dimensiones e hipótesis de invariancia, pero no puede establecer por sí solo la corrección física de esas premisas ni recuperar variables, mecanismos o regímenes que el modelo haya omitido.

Podemos escribir:

$$\boxed{\text{premisas incompletas} + \text{álgebra correcta} = \text{conclusión correctamente deducida de un modelo incompleto.}}$$

Éste es uno de los riesgos más importantes del método.

La advertencia de Zorich. Zorich cierra sus ejemplos dimensionales señalando que la eficacia del método depende principalmente de comprender correctamente la naturaleza del fenómeno al que se aplica.[40]

Esta observación resume nuestra arquitectura. El análisis dimensional es especialmente valioso cuando aún no conocemos toda la ley física, porque puede revelar conexiones generales y orientar la investigación.

Pero precisamente en esos casos debemos ser más cuidadosos con:

- la selección de variables;
- las idealizaciones;
- las escalas;
- el dominio físico.

No basta con «hacer cuadrar las dimensiones».

Tabla de decisión del análisis dimensional. Ante un problema nuevo, usaremos esta secuencia.

Pregunta	Si la respuesta es sí	Si la respuesta es no
¿Están definidas las magnitudes?	seguir	precisar significado
¿Las unidades y referencias son coherentes?	seguir	corregir representación
¿La ecuación es homogénea?	seguir	localizar error
¿Los argumentos de funciones son de dimensión uno?	seguir	normalizar/corregir
¿La lista de variables es físicamente plausible?	aplicar inferencia	revisar modelo
¿Hay grupos Π?	reducir variables	revisar rango/lista
¿Se preservan los Π relevantes entre sistemas?	comparar por semejanza	no afirmar semejanza
¿La función adimensional está determinada?	usarla	teoría/datos necesarios
¿El resultado está dentro del régimen del modelo?	interpretar	no extrapolar

Esta tabla no es un algoritmo que reemplace el juicio físico. Es una lista de control para organizarlo.

[40] V. Zorich, *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*, Springer, 2011, Parte I, §2.8, «Concluding remarks», pp. 18–21.

Qué distingue una demostración dimensional de una afirmación física. A lo largo de FPM mantendremos dos capas.

Capa matemática. Ejemplos:

$$A\alpha = 0,$$

$$\operatorname{rank} A = r,$$

$$n - r,$$

$$s_Q = \sum_i \alpha_i s_i.$$

Estas conclusiones pueden demostrarse exactamente bajo hipótesis formales.

Capa física. Ejemplos:

- estas son las variables relevantes;
- esta aproximación es adecuada;
- esta constante puede ignorarse;
- estos dos sistemas son comparables;
- este régimen experimental corresponde al modelo.

Estas afirmaciones deben justificarse físicamente. La separación no debilita el rigor. Lo aumenta.

Exactitud matemática y adecuación física. Volvemos así a una idea del capítulo 1.

Podemos resolver exactamente un modelo inadecuado.

También podemos trabajar con una aproximación controlada de un modelo mucho más adecuado. El análisis dimensional participa de esta misma distinción. Una matriz dimensional puede ser impecable.

Un sistema de exponentes puede estar perfectamente resuelto.

Los grupos Π pueden ser correctos.

Y, sin embargo, la representación física inicial puede ser insuficiente.

Por eso:

exactitud matemática relativa al modelo $\neq$ adecuación física del modelo.

Autoexplicación final. Pausa de autoexplicación Sin consultar las secciones anteriores, explica:

1. una cosa que una incompatibilidad dimensional puede demostrar de manera concluyente;
2. una cosa que la homogeneidad nunca demuestra por sí sola;
3. qué información aporta Buckingham Π;
4. qué información deja sin determinar;
5. por qué la selección de variables pertenece a la física y no solamente al álgebra;
6. qué significa decir que dos sistemas son semejantes «respecto de un modelo».

Práctica final. Ejercicio 28 — Auditoría integral de un modelo dimensional

Objetivo: `Síntesis final`

Intenta primero: 5–10 min antes de leer la solución.

Un investigador propone que el tiempo característico τ de cierto fenómeno depende de: $L, \quad v, \quad \rho, \quad \mu,$

donde:

$$[L] = L,$$

$$[v] = LT^{-1},$$

$$[\rho] = ML^{-3},$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}.$$

Propone además:

$$\tau = \frac{L}{v}\left[1 + \frac{\rho v L}{\mu}\right].$$

A. Recuperación. Audita dimensionalmente la fórmula.

B. Consolidación. Construye la matriz dimensional de: $\tau,\ L,\ v,\ \rho,\ \mu$.

Determina n, r y $n - r$.

C. Buckingham. Construye dos grupos adimensionales independientes y escribe la forma general que Buckingham permite para τ.

D. Diagnóstico. Decide si la fórmula propuesta por el investigador queda demostrada por el análisis dimensional.

E. Variación. Supón que nuevos experimentos muestran que dos sistemas con el mismo valor de: $\frac{\rho v L}{\mu}$

tienen valores distintos de: $\frac{\tau v}{L}$.

Da al menos tres explicaciones físicamente plausibles que deberían investigarse antes de concluir que Buckingham falla.

F. Síntesis epistemológica. Clasifica cada afirmación como:

- consecuencia dimensional;
- hipótesis de modelización;
- información física adicional.

1. $\tau v/L$ tiene dimensión uno.
2. $\rho v L/\mu$ tiene dimensión uno.
3. solo las variables L, v, ρ, μ son relevantes.
4. existe una función Ψ tal que

$$\frac{\tau v}{L} = \Psi\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right).$$

5. $\Psi(x) = 1 + x$.

6. dos sistemas con igual argumento de Ψ deben compararse dentro del mismo modelo.

Solución

A. Recuperación. Primero: $\left[\frac{L}{v}\right] = \frac{L}{LT^{-1}} = T$.

Además: $\left[\frac{\rho v L}{\mu}\right] = 1$. Por tanto: $\left[1 + \frac{\rho v L}{\mu}\right] = 1$. Entonces: $[\tau] = T$. La expresión es dimensionalmente homogénea.

B. Consolidación. En el orden (T, L, M):

$$\tau : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho : \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mu : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así: $n = 5$.

Hay tres columnas dimensionalmente independientes, de modo que: $r = 3$.

Por tanto:

$$\boxed{n - r = 2.}$$

C. Buckingham. Dos grupos posibles son:

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{\tau v}{L}}$$

y:

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{\rho v L}{\mu}.}$$

Buckingham permite: $\Phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$.

Si podemos resolver para Π_1:

$$\boxed{\frac{\tau v}{L} = \Psi\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right).}$$

Equivalentemente:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{v}\Psi\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right).}$$

D. Diagnóstico. La fórmula propuesta:

$$\tau = \frac{L}{v}\left[1 + \frac{\rho v L}{\mu}\right]$$

corresponde a elegir: $\Psi(x) = 1 + x$.
Buckingham no determina esa función.
Por tanto:

la fórmula pasa el control dimensional, pero no queda demostrada por él.

E. Variación. Si dos sistemas con el mismo: $\frac{\rho v L}{\mu}$
producen distinto: $\frac{\tau v}{L}$,
antes de culpar al teorema debemos revisar, por ejemplo:

1. **variables omitidas**: rugosidad, geometría adicional, temperatura u otro parámetro relevante;
2. **diferentes condiciones de frontera o iniciales**;
3. **regímenes físicos distintos** no capturados por el modelo;
4. errores experimentales o definición no equivalente de τ;
5. hipótesis constitutivas distintas para el medio.

Buckingham trabaja sobre el modelo declarado. Una discrepancia puede indicar que el modelo no contiene toda la física pertinente.

F. Síntesis epistemológica. 1.

$$\frac{\tau v}{L}$$

tiene dimensión uno:
consecuencia dimensional.
2.

$$\frac{\rho v L}{\mu}$$

tiene dimensión uno:
consecuencia dimensional.
3.
Solo L, v, ρ, μ son relevantes:
hipótesis de modelización.
4.

$$\frac{\tau v}{L} = \Psi\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right)$$

es la reducción dimensional derivada de Buckingham **condicionada a esa lista de variables y a sus hipótesis de invariancia**.
5.

$$\Psi(x) = 1 + x$$

es **información física adicional** o una hipótesis funcional que requiere justificación.
6.

Comparar sistemas con el mismo argumento adimensional es una consecuencia del marco de semejanza **dentro del mismo modelo**.

La distinción final queda:

álgebra dimensional	premisas del modelo	contenido físico adicional.

Mapa final del capítulo. El capítulo comenzó con una advertencia sencilla:

un número no es todavía una magnitud física.

Desde allí construimos:

$$\text{número} \to \text{valor}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{unidad} \to \text{tipo de magnitud}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{SI} \to \text{unidad derivada}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{dimensión} \to \text{homogeneidad}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{auditoría} \to \text{dimensión uno}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{escala característica} \to \text{adimensionalización}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{inferencia} \to \text{semejanza}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Buckingham } \Pi \to \text{modelización}.$$

La cadena no termina en una fórmula.

Termina en una disciplina de lectura:

¿qué sabemos? ¿qué suponemos? ¿qué demostramos? ¿qué sigue siendo físico?

Cierre. El análisis dimensional es una herramienta extraordinaria porque detecta estructura sin exigir conocer todos los detalles de una teoría. Puede decir mucho con poca información. Pero no puede decir más de lo que esa información contiene.

Por eso su uso riguroso exige dos movimientos simultáneos:

explotar al máximo las consecuencias dimensionales

y

no atribuirles contenido físico que no poseen.

Con esto queda cerrado el capítulo:

Magnitudes, unidades y análisis dimensional.

El siguiente capítulo del tratado será:

el capítulo 3 — Medición, incertidumbre, estimación y órdenes de magnitud.

Allí cambiaremos de pregunta.

Hasta ahora estudiamos principalmente cómo **representar y estructurar magnitudes**, elegir escalas y construir variables de dimensión uno. A continuación cambiaremos desde la estructura del modelo hacia la **obtención experimental de valores**: mediciones finitas, incertidumbre, cifras significativas y estimaciones cuantitativas. El desarrollo detallado de estimaciones tipo Fermi y de precisión experimental queda deliberadamente allí, para no duplicar el alcance de este capítulo.

Bibliografía y fuentes normativas

Fuentes normativas. Bureau International des Poids et Mesures (BIPM). *The International System of Units (SI)*. 9.ª edición, versión 4.01, junio de 2026. DOI: 10.59161/AUEZ1291. Se utilizaron especialmente §§2.1–2.3.4, capítulo 3 y §5.4.7.

Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM). *International Vocabulary of Metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM)*. 3.ª edición, JCGM 200:2012, versión 2008 con correcciones menores. DOI: 10.59161/JCGM200-2012. Se utilizaron especialmente las entradas 1.1, 1.2, 1.7–1.9, 1.12, 1.19 y 1.20.

BIPM. «SI — Defining constants», «SI — Base units» y «SI — Prefixes». Fuentes web oficiales utilizadas para controlar la formulación vigente del SI y la lista contemporánea de prefijos.

Fuentes matemático-físicas. Zorich, Vladimir. *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences*. Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-14813-2. Parte I, especialmente cap. 1, §§1.1–1.3, pp. 5–10; cap. 2, pp. 11–21.

Shankar, Ramamurti. *Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics*. Expanded edition. Yale University Press, 2019. Cap. 1, §1.3, p. 4.

Capítulo 3

Medición, incertidumbre, estimación y órdenes de magnitud

1. Medir no es leer un número

Intuir: una regla parece simple hasta que preguntamos qué significa el número. Coloquemos una regla milimetrada junto a una pequeña barra metálica. A primera vista, el problema parece trivial: alineamos uno de los extremos de la barra con el cero, miramos dónde cae el otro extremo y escribimos un número. Supongamos que obtenemos 12.4 cm.

¿Qué hemos hecho exactamente?

Una respuesta apresurada sería:

> «Hemos leído la longitud de la barra.»

Pero esa frase comprime varias decisiones distintas.

Primero tuvimos que decidir **qué longitud** queríamos medir. ¿La distancia entre qué dos puntos de la barra? Si los extremos no son perfectamente planos, ¿qué superficie cuenta como extremo? ¿La barra está a temperatura ambiente? ¿Está comprimida por el dispositivo de medida? ¿La regla está alineada con el eje de la barra o ligeramente inclinada?

Después elegimos un **procedimiento**: apoyar una regla, hacer coincidir un extremo con una marca de referencia y estimar la posición del otro extremo sobre una escala graduada. Luego obtuvimos una **indicación**: cierta posición visual respecto de las marcas.

Finalmente convertimos esa indicación en una afirmación cuantitativa: $L \approx 12.4\,\text{cm}$. El número no apareció solo. Es el extremo visible de una cadena física y conceptual.

Principio 3.1 — Medir exige declarar qué magnitud se pretende medir Antes de interpretar un número como resultado físico debemos identificar la magnitud que se pretende medir, el sistema al que pertenece y las condiciones relevantes bajo las cuales se realiza el procedimiento.

Esta exigencia continúa la gramática del capítulo 1. Allí distinguimos el sistema físico de su representación matemática. Ahora añadimos un nuevo puente:

sistema físico → mensurando → procedimiento → indicación → resultado de medición.

El resto del capítulo estudia qué información se conserva y qué limitaciones aparecen en cada flecha.

Representar: del fenómeno al mensurando. En metrología se llama **mensurando** a la magnitud que se pretende medir.[1]

La palabra es útil porque obliga a formular una pregunta que suele quedar implícita:

¿Qué magnitud, exactamente, queremos atribuir al sistema?

Por ejemplo, frente a una barra metálica podemos interesarnos por:

- su longitud entre dos caras determinadas;

[1] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.3, *measurand*.

- su diámetro medio;
- su masa;
- su temperatura;
- su resistividad eléctrica;
- el tiempo que tarda una perturbación mecánica en atravesarla.

Todos estos son mensurandos diferentes.

Incluso la frase «la longitud de la barra» puede ser insuficiente si las condiciones importan. Una barra se dilata térmicamente. Por tanto, una especificación suficientemente precisa puede requerir algo como:

> longitud entre las dos caras terminales, a una temperatura especificada y bajo determinadas condiciones de apoyo.

No siempre necesitaremos ese nivel de detalle. Pero debemos saber que la definición del mensurando forma parte del problema físico.

Definición operativa 3.1 — Medición Una **medición** es un proceso experimental mediante el cual obtenemos información cuantitativa que permite atribuir uno o más valores a una magnitud. La medición incluye un procedimiento, instrumentos o sistemas de medición, condiciones de operación y un modelo de interpretación; no se reduce a copiar un número de una pantalla.[2]

Definición operativa 3.2 — Mensurando El **mensurando** es la magnitud que se pretende medir. Identificarlo exige especificar con suficiente claridad qué propiedad del sistema físico está siendo cuantificada.[3]

La palabra «pretende» es importante. El instrumento no decide por nosotros qué estamos midiendo. Un sensor puede producir una señal eléctrica. Para interpretarla como temperatura, presión, aceleración o cualquier otra magnitud necesitamos un modelo de medición que conecte la señal con el mensurando.

No-ejemplo: un número sin mensurando. Supongamos que una pantalla muestra

$$3.72.$$

¿Es un resultado físico?

Todavía no.

No sabemos:

- qué magnitud representa;
- en qué unidad está expresada;
- bajo qué condiciones se obtuvo;
- qué procedimiento produjo la indicación;
- con qué resolución trabaja el dispositivo;
- qué incertidumbre acompaña la atribución del valor.

El mismo número podría significar

$$3.72\,\mathrm{V}, \qquad 3.72\,\mathrm{m/s}, \qquad 3.72\,\mathrm{K}, \qquad 3.72\,\mathrm{kg},$$

o muchas otras cosas.

El capítulo 2 nos enseñó que una cantidad física no es un número desnudo. Ahora añadimos que incluso una cantidad con unidad puede no ser todavía un **resultado de medición completo**.

[2] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.1, *measurement*.

[3] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.3, *measurand*.

Una indicación tampoco es todavía el resultado completo. El VIM llama **indicación** al valor proporcionado por un instrumento o sistema de medición.[4]

En una balanza digital podríamos leer

$$152.37\,\mathrm{g}.$$

Ésa es una indicación. Pero un resultado de medición puede requerir más información. Puede haber una corrección de calibración, una contribución debida a la resolución, variación entre repeticiones o influencia de la temperatura.

Por eso debemos distinguir:

$$\boxed{\text{indicación} \neq \text{resultado de medición completo.}}$$

Principio 3.2 — Una indicación instrumental no es todavía un resultado de medición completo La lectura mostrada por un dispositivo es una entrada del proceso de interpretación. Para convertirla en resultado debemos saber qué representa, qué correcciones o modelo intervienen y qué incertidumbre acompaña a los valores atribuidos al mensurando.

Definir: resultado de medición. El VIM formula el resultado de medición de una manera deliberadamente más rica que «un número obtenido al medir». Un resultado es un conjunto de valores atribuidos al mensurando junto con la información relevante disponible; en muchos casos se expresa mediante un valor medido acompañado por una incertidumbre.[5]

Para el nivel de este capítulo usaremos la siguiente formulación operacional.

Definición operativa 3.3 — Resultado de medición Un **resultado de medición** es una atribución cuantitativa al mensurando que incluye el valor o los valores representativos obtenidos y la información necesaria para interpretar su alcance. En el caso usual que estudiaremos, se expresará mediante un valor medido, una unidad y una declaración de incertidumbre.

Esquemáticamente,

$$\boxed{\text{resultado} = \text{valor atribuido} + \text{unidad} + \text{información de incertidumbre.}}$$

Esta escritura es conceptual, no una suma algebraica.

Matemática exacta sobre datos no exactos. Supongamos que una mesa tiene lados medidos como $a = 1.24\,\mathrm{m}$, $b = 0.73\,\mathrm{m}$. La multiplicación decimal puede hacerse exactamente: $1.24 \times 0.73 = 0.9052$. Pero de ello no se sigue que el área física sea conocida exactamente como $A = 0.9052\,\mathrm{m}^2$.

La operación matemática puede ser exacta **relativamente a los números introducidos**, mientras que esos números provienen de mediciones de alcance finito.

Esta distinción será central en todo el capítulo:

$$\boxed{\text{cálculo exacto sobre los datos} \neq \text{conocimiento físico exacto del mensurando.}}$$

La calculadora puede producir más dígitos que los que la experiencia justifica.

Principio 3.3 — Más dígitos no implican más información física La cantidad de cifras producidas por una operación matemática o una calculadora no determina la información contenida

[4] JCGM 200:2012 (VIM3), término 4.1, *indication*.

[5] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.9, *measurement result*. El VIM señala que un resultado suele expresarse mediante un valor medido acompañado por una incertidumbre.

en las mediciones de entrada. El reporte final debe conservar la precisión físicamente justificada, no la longitud de la expansión decimal calculada.

Representar: resolución finita. Volvamos a la regla milimetrada. Si la menor división visible de la escala es 1 mm,

no podemos tratar la lectura como si el instrumento distinguiera arbitrariamente pequeñas diferencias. El VIM define la **resolución** como el menor cambio de la magnitud medida que produce un cambio perceptible en la indicación correspondiente.[6]

En instrumentos digitales aparece una idea semejante. Si una balanza muestra valores en pasos de

$$0.01\,\mathrm{g},$$

entonces muchas masas físicas cercanas pueden producir la misma indicación visible. Por ejemplo, dos objetos podrían mostrar ambos

$$25.37\,\mathrm{g},$$

aunque sus masas no sean físicamente idénticas.

Lo importante es lógico:

$$\boxed{\text{misma indicación} \nRightarrow \text{mismo valor físico exacto.}}$$

Este hecho no es una imperfección accidental. Surge de que la interacción experimental y el dispositivo poseen capacidad finita de discriminación.

Ejemplo: una lectura analógica y una lectura digital.

Caso A — regla. Una regla tiene marcas cada

$$1\,\mathrm{mm}.$$

El extremo de un objeto cae aproximadamente entre las marcas de

$$12.3\,\mathrm{cm} \quad \text{y} \quad 12.4\,\mathrm{cm}.$$

El observador puede intentar interpolar visualmente, pero esa interpolación no convierte la regla en un instrumento de resolución infinita.

Caso B — pantalla digital. Un termómetro muestra

$$21.7\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

La cifra decimal no implica que la temperatura real del cuerpo sea exactamente $21.7000\ldots\,^{\circ}\mathrm{C}$. Además, la resolución de la pantalla no agota la incertidumbre. Pueden intervenir calibración, estabilidad, gradientes térmicos, contacto imperfecto o respuesta temporal.

Este ejemplo anticipa una distinción que formalizaremos después:

$$\boxed{\text{resolución} \neq \text{incertidumbre total.}}$$

[6] JCGM 200:2012 (VIM3), términos 4.14–4.15, *resolution* y *resolution of a displaying device*.

Variar: repetir la medición. Midamos diez veces el período de un mismo péndulo bajo condiciones nominalmente iguales. Podríamos obtener, en segundos, 2.01, 2.03, 2.00, 2.02, 2.01, ...

¿Hay una contradicción?

No. Una medición real puede variar entre repeticiones porque las condiciones nunca se reproducen de manera absolutamente idéntica, porque existe ruido, porque el procedimiento tiene resolución finita o porque intervienen efectos no controlados. La dispersión no convierte automáticamente la experiencia en «mala». Es información acerca del proceso de medición.

En §§3–5 estudiaremos cómo describir esa dispersión y cómo contribuye a la incertidumbre. Por ahora basta observar que un resultado de medición no debe tratarse como si el único problema experimental consistiera en revelar más y más decimales de un número exacto mediante una pantalla imperfecta.

Espacio de ejemplos y no-ejemplos. Clasifiquemos varias expresiones.

Ejemplo 1.

$$L = 24.6\,\text{cm}.$$

Podría ser una indicación o un valor medido, pero sin contexto no sabemos todavía cómo interpretar su alcance.

Ejemplo 2.

$$L = (24.6 \pm 0.1)\,\text{cm}.$$

Ahora aparece una información adicional, pero todavía debemos preguntar qué significa 0.1 cm: ¿resolución?, ¿incertidumbre estándar?, ¿incertidumbre expandida?, ¿una cota adoptada?

La notación $\pm$ por sí sola no explica su semántica.

No-ejemplo 1.

> «La longitud verdadera es exactamente 24.6 cm porque eso mostró la regla.»

La conclusión excede la información disponible.

No-ejemplo 2.

> «Como dos mediciones dieron números diferentes, una de las dos está necesariamente mal.»

También es falso. Una serie de mediciones puede dispersarse aun cuando el procedimiento sea adecuado.

No-ejemplo 3.

> «Una balanza que muestra cinco decimales es necesariamente más exacta que una que muestra tres.»

El número de dígitos visibles no basta para evaluar la exactitud del sistema de medición.

Primera noción de incertidumbre. El VIM define la **incertidumbre de medición** como un parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos al mensurando sobre la base de la información utilizada.[7]

Todavía no desarrollaremos la definición técnica completa. Pero sí podemos fijar desde ahora su función conceptual.

La incertidumbre responde, de forma cuantitativa, a la pregunta:

> **¿qué tan estrechamente queda determinada la atribución de valores al mensurando por la información disponible?**

[7] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.26, *measurement uncertainty*.

No debe confundirse con ignorancia absoluta ni con un error que conocemos pero decidimos ocultar.

Tampoco debemos imaginar que toda incertidumbre proviene de fluctuaciones aleatorias. Algunas contribuciones se evalúan estadísticamente; otras provienen de calibraciones, especificaciones instrumentales, resoluciones, modelos o información previa. El VIM distingue precisamente evaluaciones de tipo A y tipo B.[8]

Estas distinciones se desarrollarán en §§4–5.

Red: la cadena completa. Podemos ahora ampliar la cadena metodológica del capítulo 1 y capítulo 2.

En el capítulo 1 teníamos:

$$\text{fenómeno} \to \text{sistema} \to \text{modelo}.$$

En el capítulo 2 aprendimos a representar magnitudes mediante valores y unidades, y a controlar dimensiones y escalas.

Ahora añadimos la capa experimental:

$$\begin{array}{c} \text{fenómeno} \to \text{mensurando} \\ \Downarrow \\ \text{procedimiento} \to \text{indicación} \\ \Downarrow \\ \text{modelo de medición} \to \text{resultado} + \text{incertidumbre}. \end{array}$$

Esta cadena no es puramente matemática. El paso de una indicación a un resultado exige conocimiento físico del instrumento, del procedimiento y de las condiciones experimentales.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.1 — ¿Qué falta para que haya un resultado?

Un dispositivo muestra `7.42`.

A. Enumera al menos cinco datos conceptuales que faltan antes de interpretar esa indicación como resultado de medición.

B. Explica por qué añadir la unidad `V` mejora la información pero todavía no resuelve completamente el problema.

C. Propón una formulación mínima de mensurando para una medición eléctrica sencilla.

Solución

A. Faltan, entre otros: la magnitud que se pretende medir, la unidad, el objeto o sistema, el procedimiento, el intervalo/rango de operación relevante, la resolución, las condiciones de medición y la información de incertidumbre.

B. Escribir 7.42 V identifica una unidad compatible con diferencia de potencial, pero no especifica entre qué puntos se mide, con qué instrumento, bajo qué condiciones ni con qué incertidumbre.

C. Por ejemplo: «diferencia de potencial entre los terminales A y B de la fuente, medida con el voltímetro X bajo régimen estacionario». La formulación aún puede perfeccionarse, pero ya identifica mucho mejor el mensurando.

Ejercicio 3.2 — Dígitos de calculadora y conocimiento físico

[8] JCGM 200:2012 (VIM3), términos 2.28–2.29, evaluaciones tipo A y tipo B de la incertidumbre de medición. Véase también JCGM 100:2008 (GUM) y JCGM GUM-1:2023.

Se miden los lados de una placa rectangular: $a = 1.24\,\mathrm{m}$, $b = 0.73\,\mathrm{m}$. Una calculadora entrega

$$ab = 0.9052\,\mathrm{m}^2.$$

A. ¿Qué parte de esta igualdad es matemáticamente exacta?

B. ¿Por qué no se sigue automáticamente que el área física sea conocida con cuatro cifras decimales?

C. Formula en una frase la diferencia entre exactitud del cálculo y alcance de los datos.

Solución

A. La multiplicación $1.24 \times 0.73 = 0.9052$ es exacta como operación sobre esos números decimales.

B. Los números 1.24 y 0.73 representan resultados de medición con información finita. Las cifras de salida no pueden crear información que no estaba contenida en las entradas.

C. El cálculo puede ser exacto respecto de los datos numéricos y, al mismo tiempo, el valor físico inferido seguir siendo incierto.

Ejercicio 3.3 — Misma indicación, ¿misma magnitud?

Una balanza digital con paso de indicación de $0.01\,\mathrm{g}$ muestra $25.37\,\mathrm{g}$ para dos pequeños objetos.

A. ¿Podemos concluir que sus masas son exactamente iguales?

B. ¿Qué sí podemos afirmar a partir de la información disponible?

C. Explica por qué la resolución de la pantalla no debe identificarse sin más con la incertidumbre total.

Solución

A. No. Diferentes valores físicos suficientemente cercanos pueden producir la misma indicación visible.

B. Podemos afirmar que, bajo ese procedimiento y en ese momento, ambos objetos produjeron la misma indicación mostrada por la balanza.

C. La incertidumbre puede incluir otras contribuciones: calibración, estabilidad, repetibilidad, condiciones ambientales, modelo de corrección, etc. La resolución es una contribución posible, no una descripción completa del resultado.

Cierre. La pregunta inicial parecía elemental:

¿qué significa medir una longitud con una regla?

La respuesta ya no puede ser «leer un número».

Medir exige construir una relación controlada entre un sistema físico y una atribución cuantitativa. La unidad mínima de lectura será, por tanto,

$$\boxed{(\text{mensurando},\ \text{procedimiento},\ \text{indicación},\ \text{modelo},\ \text{resultado},\ \text{incertidumbre}).}$$

En la siguiente sección examinaremos el componente que primero hace visible el carácter finito de toda medición instrumental (§2).

2. Instrumentos, escalas y resolución

Intuir: dos pantallas iguales no garantizan dos mediciones igualmente informativas. Imaginemos dos termómetros digitales colocados en el mismo laboratorio. Ambos muestran

$$21.7\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

A primera vista podríamos pensar que proporcionan exactamente la misma información.

Pero supongamos ahora que:

- el primero actualiza su pantalla en pasos de $0.1\,^{\circ}\mathrm{C}$;
- el segundo también muestra una décima de grado, pero internamente utiliza un sensor con una respuesta mucho más estable;
- el primero no ha sido calibrado recientemente;
- el segundo posee un certificado de calibración;
- uno tarda varios minutos en alcanzar equilibrio térmico y el otro responde con rapidez.

La coincidencia de las pantallas no basta para concluir que los dos sistemas de medición se comportan de la misma manera. Tampoco basta el número de cifras visibles.

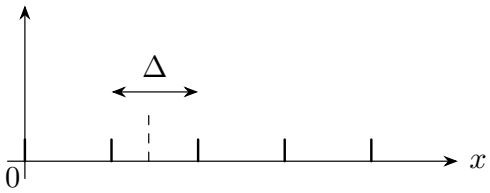


Figura 3.1. Las marcas vecinas están separadas por Δ. La posición entre marcas exige un procedimiento de lectura y una evaluación de incertidumbre; la resolución no determina por sí sola toda la incertidumbre de la medición. Véase §2.

Este capítulo necesita, por tanto, separar varias preguntas:

1. ¿qué magnitud entra en interacción con el instrumento?;
2. ¿qué señal produce esa interacción?;
3. ¿cómo se transforma la señal en una indicación?;
4. ¿qué cambios puede distinguir el sistema?;
5. ¿qué parte de la información disponible queda oculta por la representación final?

La idea central de esta sección será:

$$\boxed{\text{instrumento} \neq \text{pantalla}}$$

y, más precisamente,

$$\boxed{\text{número mostrado} \neq \text{capacidad total del sistema de medición.}}$$

Representar: un instrumento como parte de una cadena. Un instrumento de medición no es una caja que «contiene» el valor del mensurando. En una medición típica ocurre una cadena de interacciones.

Por ejemplo, en un termómetro electrónico podemos representar esquemáticamente:

temperatura

$$\Downarrow$$

propiedad sensible del sensor

$$\Downarrow$$

señal eléctrica $\longrightarrow$ procesamiento

$$\Downarrow$$

indicación.

En una balanza digital:

$$\text{fuerza sobre el sensor} \longrightarrow \text{deformación o señal} \longrightarrow \text{conversión} \longrightarrow \text{indicación de masa.}$$

En una regla graduada, la cadena es menos electrónica, pero no desaparece:

posición del extremo

$$\Downarrow$$

comparación con marcas

$$\Downarrow$$

percepción/interpolación $\longrightarrow$ indicación.

El instrumento forma parte del **procedimiento de medición**. Su salida debe interpretarse dentro de un modelo que conecta lo que el dispositivo responde con el mensurando que queremos determinar.

Definir: indicación. En §1 utilizamos la palabra *indicación* de manera preliminar. Ahora la fijamos como término técnico.

Definición operativa 3.4 — Indicación Una **indicación** es el valor de una magnitud proporcionado por un instrumento o sistema de medición. Es una salida del sistema de medición; no debe confundirse automáticamente con el resultado final atribuido al mensurando.[9]

Por ejemplo, una balanza puede indicar

$$m_{\text{ind}} = 152.37\,\text{g}.$$

Si existe una corrección de calibración c, el valor utilizado en el resultado podría modelarse, en un caso elemental, como $m = m_{\text{ind}} + c$.

Esta ecuación no es universal. Es un **modelo de medición** muy simple que ilustra una idea importante:

indicación puede ser una entrada del modelo de medición.

La indicación es observable en el dispositivo. El mensurando, en cambio, es la magnitud que queremos determinar.

[9] JCGM 200:2012 (VIM3), término 4.1, *indication*. La formulación del texto es una adaptación pedagógica del vocabulario metrológico.

Escalas analógicas: leer implica comparar. Consideremos una regla cuyas marcas están separadas por 1 mm. Si el extremo de un objeto cae entre dos marcas, la lectura no consiste en encontrar una marca que coincida mágicamente con el extremo. El observador compara posiciones e interpola. Podemos tener, por ejemplo, $x \approx 37.4\,\text{mm}$.

aunque la escala sólo marque milímetros enteros.

¿Significa esto que la regla posee una resolución de 0.1 mm?

No necesariamente. La posibilidad de **interpolar** visualmente y la capacidad efectiva del sistema para distinguir cambios son cuestiones relacionadas, pero no idénticas. La anchura de las marcas, el paralaje, el contraste, la alineación y el procedimiento del observador influyen.

Por eso no adoptaremos la regla ingenua

> «la incertidumbre es siempre la mitad de la división mínima».

En algunos ejercicios introductorios esa convención puede ser una aproximación útil bajo hipótesis explícitas. No es una ley universal de la medición.

Resolución: capacidad de distinguir cambios. El VIM define la resolución mediante la respuesta del sistema: es el menor cambio en la magnitud medida que produce un cambio perceptible en la indicación correspondiente.[10]

Definición operativa 3.5 — Resolución La **resolución** de un sistema de medición caracteriza el menor cambio de la magnitud medida que puede producir un cambio perceptible en la indicación, bajo las condiciones consideradas.[11]

La palabra **perceptible** debe interpretarse de acuerdo con el tipo de sistema. En una pantalla digital cuya última cifra cambia en pasos de

$$0.01\,\text{g},$$

la resolución de visualización está vinculada a esa separación entre indicaciones posibles.[12]

En una escala analógica, el problema incluye la capacidad de distinguir desplazamientos de una aguja o de una posición respecto de las divisiones. No debemos, sin embargo, reducir la resolución a una propiedad tipográfica de la pantalla. El sistema completo puede tener limitaciones anteriores a la visualización.

Una primera separación conceptual. Conviene fijar desde ahora cuatro conceptos que más adelante estudiaremos por separado:

$$\boxed{\text{resolución} \neq \text{precisión} \neq \text{exactitud} \neq \text{incertidumbre}.}$$

Por ahora basta una caracterización preliminar.

- **Resolución:** capacidad de distinguir cambios en la indicación.
- **Precisión:** se relacionará con la proximidad entre resultados o indicaciones repetidos bajo condiciones especificadas.

---

[10] JCGM 200:2012 (VIM3), término 4.14, *resolution*: menor cambio de la magnitud medida que causa un cambio perceptible en la indicación correspondiente.

[11] JCGM 200:2012 (VIM3), término 4.14, *resolution*: menor cambio de la magnitud medida que causa un cambio perceptible en la indicación correspondiente.

[12] JCGM 200:2012 (VIM3), término 4.15, *resolution of a displaying device*. Se usa aquí para distinguir la granularidad de la visualización de otras propiedades del sistema de medición.

- **Exactitud:** se relacionará con la proximidad entre un valor medido y un valor verdadero del mensurando; el VIM no la trata como una cantidad a la que simplemente asignamos un número.[13]
- **Incertidumbre:** caracterizará cuantitativamente la dispersión de valores atribuidos al mensurando a partir de la información disponible.

Estas distinciones impiden varios razonamientos incorrectos.

Error plausible A.

> «El instrumento tiene muchas cifras, luego es muy exacto.»

No se sigue.

Error plausible B.

> «La pantalla cambia de 0.01 en 0.01, luego la incertidumbre es exactamente 0.01.»

Tampoco se sigue.

Error plausible C.

> «Dos objetos dan la misma indicación, luego tienen exactamente el mismo valor del mensurando.»

Tampoco. La última afirmación admite una formulación matemática particularmente clara.

Modelar: una pantalla digital como cuantizador. Para entender qué información pierde una indicación digital, construyamos un modelo idealizado.

Supongamos que un instrumento muestra valores separados por un paso fijo

$$\Delta > 0.$$

Podemos representar una regla de redondeo mediante

$$Q_\Delta(x) = \Delta \,\mathrm{round}\Big(\frac{x}{\Delta}\Big).$$

La función

$$Q_\Delta : \mathbb{R} \to \Delta\mathbb{Z}$$

asigna a muchos valores reales la misma indicación. Por ejemplo, con

$$\Delta = 0.01\,\mathrm{g},$$

todos los valores de un intervalo apropiado alrededor de

$$25.37\,\mathrm{g}$$

pueden producir la misma indicación

$$25.37\,\mathrm{g}.$$

Este modelo no pretende describir todos los detalles electrónicos de una balanza real. Su función es aislar una estructura:

la representación de la indicación puede ser muchos-a-uno.

[13] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.13, *measurement accuracy*. Se adelanta sólo la distinción terminológica; el tratamiento conceptual detallado aparece en §4.

La información mostrada es entonces una **representación más gruesa** o discretización de un conjunto más fino de posibles entradas.

Proposición: igualdad de indicaciones no implica igualdad física exacta. Proposición 3.1 — No inyectividad de una indicación cuantizada

Sea $\Delta > 0$ y definamos

$$Q_\Delta(x) = \Delta \,\mathrm{round}\Big(\frac{x}{\Delta}\Big).$$

Entonces existen $x \neq y$ tales que

$$Q_\Delta(x) = Q_\Delta(y).$$

Por tanto, dentro de este modelo, la igualdad de indicaciones no permite inferir la igualdad exacta de los valores de entrada.

Demostración.

Tomemos, por ejemplo,

$$x = 0$$

y

$$y = \frac{\Delta}{4}.$$

Como

$$\Big|\frac{y}{\Delta}\Big| = \frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

ambos valores se redondean al mismo múltiplo de Δ: $Q_\Delta(0) = 0$,

y

$$Q_\Delta\Big(\frac{\Delta}{4}\Big) = 0.$$

Pero

$$0 \neq \frac{\Delta}{4}.$$

Por tanto,

$$Q_\Delta(x) = Q_\Delta(y) \not\Rightarrow x = y. \qquad \square$$

La proposición es matemática y exacta **dentro del modelo de cuantización elegido**. Su interpretación física requiere recordar que un instrumento real puede incluir ruido, histéresis, filtros, calibración, saturación y otros efectos. No estamos afirmando que toda pantalla real implemente exactamente Q_Δ.

El valor pedagógico del modelo consiste en hacer visible el salto lógico incorrecto:

misma representación $\not\Rightarrow$ misma realidad física exacta.

Intervalo de medición y saturación. Todo instrumento funciona dentro de un dominio operativo. Una balanza diseñada para medir hasta

$$200\,\mathrm{g}$$

no debe tratarse como si siguiera proporcionando información fiable para una masa de

$$5\,\mathrm{kg}.$$

Un voltímetro puede saturarse. Un sensor puede abandonar su región lineal. Una cámara puede registrar una zona completamente blanca aunque la intensidad de luz siga aumentando.

En estos casos, el problema no es simplemente que «falte un decimal». La relación entre entrada física e indicación ha alcanzado una región donde el sistema ya no discrimina de la forma prevista. Una indicación situada fuera del intervalo de funcionamiento especificado puede carecer del significado que tendría dentro de él.

Esto anticipa una regla general de modelización:

una medición también posee un dominio de validez.

La idea enlaza directamente con el capítulo 1: un sistema de medición es también un modelo físico con condiciones de aplicación.

Umbral de discriminación. El VIM distingue la resolución del **umbral de discriminación**, relacionado con el mayor cambio en la magnitud medida que todavía no produce un cambio detectable en la indicación.[14]

La distinción es útil porque obliga a preguntar:

> **¿qué cambio debe ocurrir antes de que el sistema responda de manera observable?**

En un instrumento ideal de escalones perfectos, resolución y umbral pueden parecer casi la misma cuestión. En sistemas reales pueden intervenir fricción, histéresis, ruido, filtros o umbrales electrónicos. No necesitamos todavía formalizar todos esos efectos. Basta reconocer que una especificación como $0.01\,\mathrm{g}$

no describe por sí sola toda la capacidad discriminante del instrumento.

Variar: cambiar el modo de mostrar sin cambiar el sensor. Supongamos un sensor cuya electrónica interna produce una señal numérica con muchos dígitos.

El fabricante puede decidir mostrar:

Modo A.

$$21.7\,^{\circ}\mathrm{C}$$

o

[14] JCGM 200:2012 (VIM3), término 4.16, *discrimination threshold*. La sección lo utiliza para evitar identificar toda capacidad de discriminación con un único número de pantalla.

Modo B.

$$21.70\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

¿Ha mejorado necesariamente el sistema de medición?

No.

Cambiar el formato de la pantalla puede añadir una cifra visible sin mejorar:

- la calibración;
- la estabilidad;
- el contacto térmico;
- la repetibilidad;
- el modelo de corrección;
- la incertidumbre total.

La interfaz puede mostrar más dígitos de los que el resto del sistema justifica.

Ésta es otra forma de la advertencia de §1:

$$\boxed{\text{resolución de visualización} \neq \text{información física total.}}$$

Ejemplo trabajado: una balanza con paso de $0.01\,\mathrm{g}$**.** Supongamos una balanza cuyo modelo idealizado de visualización es $Q_{\Delta}(m)$, $\Delta = 0.01\,\mathrm{g}$. La pantalla indica

$$25.37\,\mathrm{g}.$$

Si el dispositivo redondea al valor más cercano, entonces una entrada dentro del intervalo

$$25.365\,\mathrm{g} \leq m < 25.375\,\mathrm{g}$$

puede representarse como $25.37\,\mathrm{g}$,

salvo la convención exacta adoptada para resolver los casos en los puntos medios. Este intervalo **no es todavía un intervalo de incertidumbre de medición**. Sólo expresa qué entradas son compatibles con una regla de cuantización idealizada.

Ésta es una distinción esencial:

$$\boxed{\text{intervalo de cuantización} \neq \text{intervalo de incertidumbre.}}$$

En una medición real podrían existir además contribuciones por calibración, deriva, temperatura, repetibilidad u otros efectos.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.4 — Leer una escala sin inventar información

Función pedagógica: `Consolidación → Diagnóstico`.

Una regla posee marcas cada $1\,\mathrm{mm}$. Un estudiante observa que el extremo de una pieza se encuentra aproximadamente a 4 décimas de la distancia entre las marcas de $37\,\mathrm{mm}$ y $38\,\mathrm{mm}$.

1. Propón una indicación razonable.
2. ¿Permite la interpolación afirmar que la resolución física del sistema completo es exactamente $0.1\,\mathrm{mm}$?
3. Enumera al menos tres efectos que podrían limitar la lectura.
4. Explica por qué no es correcto concluir que la incertidumbre total vale automáticamente $\pm 0.05\,\mathrm{mm}$.

Solución

1. Una indicación razonable es

$$x_{\text{ind}} \approx 37.4\,\text{mm}.$$

2. No. La interpolación visual permite construir una estimación entre marcas, pero la capacidad efectiva de distinguir cambios depende del sistema completo y del procedimiento.
3. Entre los efectos posibles están:
   - anchura de las marcas;
   - paralaje;
   - alineación de la pieza;
   - resolución visual del observador;
   - definición geométrica del extremo;
   - deformación o temperatura de la pieza.
4. La regla $\pm$ media división puede usarse como modelo elemental cuando se declara explícitamente, pero no constituye una ley universal. La incertidumbre puede incluir otras contribuciones y su interpretación debe especificarse.

Ejercicio 3.5 — Una pantalla como función muchos-a-uno
Función pedagógica: `Reconstrucción → Prueba de estrés`.
Considera

$$Q_\Delta(x) = \Delta\,\text{round}\Big(\frac{x}{\Delta}\Big), \qquad \Delta = 0.01\,\text{g}.$$

1. Determina un intervalo de valores que se muestren como 25.37 g bajo redondeo al más cercano.
2. Encuentra dos valores diferentes de masa que produzcan esa misma indicación.
3. ¿Puede interpretarse ese intervalo directamente como la incertidumbre de la medición?
4. ¿Qué conclusión lógica sí puede extraerse con seguridad del modelo?

Solución
1. Ignorando la convención especial de desempate en los puntos medios, el intervalo es

$$25.365\,\text{g} \le m < 25.375\,\text{g}.$$

2. Por ejemplo,

$$m_1 = 25.368\,\text{g}, \qquad m_2 = 25.372\,\text{g}$$

producen ambos

$$Q_\Delta(m_1) = Q_\Delta(m_2) = 25.37\,\text{g}.$$

3. No. El intervalo proviene únicamente del modelo de cuantización. La incertidumbre de una medición real puede incorporar más información y más fuentes de variabilidad.
4. Sí podemos concluir que, bajo este modelo,

$$\boxed{Q_\Delta(m_1) = Q_\Delta(m_2) \not\Rightarrow m_1 = m_2.}$$

La igualdad de indicaciones no demuestra igualdad física exacta.

Autoexplicación: cuatro preguntas antes de confiar en una cifra. Ante una lectura instrumental, el lector debería aprender a preguntar:

1. **¿qué mensurando se intenta determinar?**
2. **¿qué parte del sistema produce esta indicación?**
3. **¿qué cambios puede distinguir el dispositivo?**
4. **¿qué otras contribuciones podrían afectar al resultado?**

Estas preguntas impiden que la pantalla sustituya al razonamiento físico. Una medición no es buena porque tenga muchos decimales. Es informativa cuando comprendemos qué relación existe entre el mensurando, el instrumento, la indicación y las limitaciones del procedimiento.

Conectar: la resolución no explica la dispersión entre repeticiones. Hasta ahora hemos examinado principalmente la capacidad de un sistema para **distinguir cambios**. Pero incluso un instrumento de resolución fija puede producir una serie como

$$10.02, \quad 10.04, \quad 10.01, \quad 10.03, \quad 10.02.$$

La siguiente pregunta será distinta:

¿qué información contiene la dispersión de mediciones repetidas?

Eso nos lleva a (§3).

Allí podremos distinguir por primera vez la resolución del instrumento de la variabilidad observada en una serie de mediciones.

---

3. Repetición, dispersión y precisión

Intuir: repetir no significa obtener el mismo número. Supongamos que medimos cinco veces el período de un péndulo bajo condiciones que intentamos mantener tan semejantes como sea razonable. Obtenemos, en segundos,

$$2.01, \quad 2.03, \quad 2.00, \quad 2.02, \quad 2.01.$$

La primera tentación puede ser preguntar:

¿Cuál de estos números es el correcto?

Pero esa pregunta ya presupone que cuatro de los cinco deben ser descartados.

Una lectura más informativa es distinta:

¿Qué nos dice el conjunto completo de resultados sobre el procedimiento de medición?

La variación entre repeticiones contiene información.

No es simplemente «ruido que hay que borrar».

Puede revelar:

- sensibilidad del procedimiento a pequeñas diferencias de condiciones;
- fluctuaciones del sistema;
- limitaciones del instrumento;
- variación en la intervención del observador;
- efectos ambientales;
- componentes aleatorias del proceso de medición.

El cambio de perspectiva es fundamental:

$$\boxed{\text{una serie de mediciones} \neq \text{varias oportunidades de acertar el mismo número.}}$$

Una serie es un objeto de estudio.

Representar: una serie de mediciones. Escribamos una serie de n valores medidos como $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Podemos pensarla como un vector de datos

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

cuando todos los valores están expresados en la misma unidad.

Esta representación nos permite formular dos preguntas diferentes:

1. ¿dónde se encuentra aproximadamente el centro de la serie?;
2. ¿cuánto se dispersan los valores alrededor de ese centro?

La primera pregunta conduce a medidas de localización, como la media aritmética. La segunda conduce a medidas de dispersión. Ambas son necesarias.

Dos series pueden tener la misma media y comportarse de manera muy distinta.

Definir: precisión de medición. El VIM utiliza **precisión de medición** para describir la cercanía entre indicaciones o valores medidos obtenidos mediante mediciones repetidas del mismo objeto o de objetos similares bajo condiciones especificadas.[15]

Definición operativa 3.6 — Precisión de medición La **precisión de medición** caracteriza cuán próximos se encuentran entre sí los resultados o indicaciones de mediciones repetidas realizadas bajo condiciones especificadas. Una dispersión menor corresponde, en ese sentido, a una mayor precisión.[16]

La frase **bajo condiciones especificadas** es indispensable.

No tiene sentido comparar precisión sin declarar si las mediciones se realizaron:

- con el mismo instrumento;
- por el mismo observador;
- en un intervalo de tiempo corto;
- bajo condiciones ambientales semejantes;
- mediante el mismo procedimiento.

El VIM llama **repetibilidad de medición** a la precisión bajo un conjunto de condiciones de repetibilidad especificadas.[17]

No necesitamos todavía clasificar todas las posibles condiciones metrológicas. Basta retener:

$$\boxed{\text{precisión es una propiedad de la concordancia entre repeticiones,}}$$

no una afirmación acerca de cuán cerca estamos del valor verdadero.

[15] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.15, *measurement precision*. El VIM la define mediante la proximidad entre indicaciones o valores medidos obtenidos por mediciones repetidas bajo condiciones especificadas y advierte que no debe utilizarse como sinónimo de exactitud.

[16] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.15, *measurement precision*. El VIM la define mediante la proximidad entre indicaciones o valores medidos obtenidos por mediciones repetidas bajo condiciones especificadas y advierte que no debe utilizarse como sinónimo de exactitud.

[17] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.21, *measurement repeatability*. Se usa aquí para conectar la precisión con condiciones de repetibilidad sin desarrollar todavía toda la taxonomía metrológica de condiciones.

Principio: la dispersión también es información. Principio 3.4 — Repetición y dispersión contienen información sobre el procedimiento Una serie de mediciones repetidas no debe reducirse a elegir un único número y descartar el resto. La localización y la dispersión de la serie describen aspectos diferentes del comportamiento del procedimiento de medición.

Este principio evita dos extremos.

Extremo A — ignorar la dispersión. Promediamos los datos y reportamos sólo

$$\bar{x} = 2.014\,\mathrm{s}$$

como si la variabilidad observada no existiera.

Extremo B — tratar toda variación como fracaso. Vemos que los números no coinciden exactamente y concluimos que el experimento «salió mal».

Ambas lecturas pierden información.

El centro: media aritmética. Para una serie

$$x_1, \dots, x_n,$$

definimos la media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

En el ejemplo del péndulo,

$$\bar{x} = \frac{2.01 + 2.03 + 2.00 + 2.02 + 2.01}{5}\,\mathrm{s} = 2.014\,\mathrm{s}.$$

La media resume la localización de la serie. Pero no dice por sí sola cuánto varían los datos.

Consideremos: $A:\quad 9.99,\ 10.00,\ 10.01,$

y

$$B:\quad 9.50,\ 10.00,\ 10.50.$$

Ambas series tienen media

$$10.00.$$

Sin embargo, la segunda está mucho más dispersa.

Por eso:

$$\boxed{\text{media} \neq \text{descripción completa de una serie.}}$$

Desviaciones respecto de la media. Definimos las desviaciones

$$d_i = x_i - \bar{x}.$$

Por construcción,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = 0.$$

Esta identidad explica por qué no podemos medir la dispersión simplemente sumando desviaciones con signo: las positivas y negativas se cancelan. Necesitamos una operación que no destruya la magnitud de las desviaciones.

Dos posibilidades elementales son:

- usar valores absolutos;
- usar cuadrados.

La estadística metrológica utiliza extensamente la segunda opción.

Rango: una primera medida de dispersión. Una medida sencilla es el rango

$$R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}.$$

Para los datos

$$2.01,\ 2.03,\ 2.00,\ 2.02,\ 2.01,$$

tenemos $R = 2.03 - 2.00 = 0.03\,\text{s}$. El rango es intuitivo, pero utiliza sólo dos observaciones. Dos conjuntos muy distintos pueden tener el mismo rango. Por eso es útil como diagnóstico inicial, no como descripción única de la dispersión.

Desviación estándar muestral. Para una serie finita introducimos la desviación estándar muestral

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

En este capítulo usaremos s como una medida de la dispersión observada de una muestra de mediciones repetidas. El denominador $n-1$ no es un detalle decorativo. Aparece en el tratamiento estadístico de una muestra cuando la media se estima a partir de los mismos datos. No desarrollaremos todavía toda la teoría probabilística que lo justifica.

Para nuestros fines inmediatos debemos distinguir dos afirmaciones:

$$\boxed{s = \text{medida de dispersión de las observaciones}}$$

y

$$\boxed{s \neq \text{automáticamente la incertidumbre final del resultado.}}$$

Más adelante, al estudiar evaluación tipo A, veremos cómo una serie de datos contribuye a una incertidumbre estándar y por qué la incertidumbre asociada a una media no debe confundirse con la dispersión de las observaciones individuales.[18]

[18] JCGM 100:2008 (GUM) y JCGM 200:2012 (VIM3), términos 2.28–2.30. La relación entre análisis estadístico de series, evaluación tipo A e incertidumbre estándar se desarrolla en §5.

Ejemplo: calcular centro y dispersión. Volvamos a

$$2.01, \quad 2.03, \quad 2.00, \quad 2.02, \quad 2.01.$$

Ya obtuvimos

$$\bar{x} = 2.014\,\mathrm{s}.$$

Las desviaciones, en segundos, son

$$-0.004, \quad 0.016, \quad -0.014, \quad 0.006, \quad -0.004.$$

La suma de cuadrados es

$$(0.004)^2 + (0.016)^2 + (0.014)^2 + (0.006)^2 + (0.004)^2 = 0.000520.$$

Entonces

$$s = \sqrt{\frac{0.000520}{4}}\,\mathrm{s} \approx 0.0114\,\mathrm{s}.$$

La pareja

$$(\bar{x}, s) \approx (2.014\,\mathrm{s},\ 0.011\,\mathrm{s})$$

resume dos características diferentes:

- el centro de la serie;
- su dispersión.

Todavía **no** estamos declarando que el resultado final de la medición sea

$$(2.014 \pm 0.011)\,\mathrm{s}.$$

Esa notación requeriría especificar qué representa el término que sigue a $\pm$.

Precisión no es exactitud. Imaginemos ahora un instrumento que, al medir repetidamente una referencia, produce

$$9.801, \quad 9.802, \quad 9.801, \quad 9.802, \quad 9.801.$$

La dispersión es pequeña. La serie es muy precisa bajo esas condiciones. Pero supongamos que el valor de referencia relevante está próximo a

$$10.000.$$

La serie puede ser muy estrecha y, al mismo tiempo, estar desplazada respecto de la referencia. Por tanto,

$$\boxed{\text{alta precisión} \not\Rightarrow \text{alta exactitud.}}$$

Y también puede ocurrir lo contrario: mediciones individualmente dispersas pueden distribuirse alrededor de un valor de referencia correcto. El VIM insiste en no usar **precisión** como sinónimo de **exactitud**.[19]

La distinción es física y lógica, no meramente terminológica.

Una analogía geométrica. Representemos resultados de medición como puntos sobre una recta.

Serie A — estrecha.

$$\cdots \quad 9.99 \quad 10.00 \quad 10.01 \quad \cdots$$

Serie B — ancha.

$$\cdots \quad 9.7 \quad 10.0 \quad 10.3 \quad \cdots$$

La precisión se relaciona con la **anchura del agrupamiento**. La exactitud, en cambio, exige comparar el agrupamiento con el valor que corresponde al mensurando dentro de un marco de referencia adecuado.

Geométricamente son preguntas distintas:

- **dispersión interna** del conjunto;
- **posición del conjunto** respecto de una referencia.

Esta imagen será útil cuando introduzcamos error y sesgo en §4.

Repetibilidad y condiciones. Supongamos que repetimos una medición cinco veces en pocos minutos y obtenemos una dispersión pequeña.

¿Podemos concluir que el procedimiento será igual de preciso si:

- cambiamos de instrumento?;
- cambia el operador?;
- medimos un mes después?;
- cambia la temperatura del laboratorio?;
- cambiamos el procedimiento de preparación?

No. La precisión siempre está asociada a condiciones. Una serie obtenida bajo condiciones muy controladas puede describir bien la **repetibilidad** sin describir toda la variabilidad que aparecería bajo condiciones más amplias.

Por eso una afirmación como

> «este método tiene una precisión de...»

es incompleta si no queda claro qué condiciones y qué medida de dispersión se están utilizando.

Resolución y dispersión tampoco son lo mismo. Consideremos dos casos.

Caso A — dispersión visible. Una balanza con resolución de visualización

$$0.01\,\mathrm{g}$$

produce

$$25.36, \quad 25.38, \quad 25.37, \quad 25.36, \quad 25.38.$$

La variación excede el simple hecho de que la pantalla esté cuantizada.

[19] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.15, *measurement precision*. El VIM la define mediante la proximidad entre indicaciones o valores medidos obtenidos por mediciones repetidas bajo condiciones especificadas y advierte que no debe utilizarse como sinónimo de exactitud.

Caso B — todas las indicaciones coinciden. La misma balanza produce

$$25.37, \quad 25.37, \quad 25.37, \quad 25.37, \quad 25.37.$$

¿Significa esto dispersión física nula?

No necesariamente. La resolución puede ocultar variaciones menores que el paso visible. Por tanto,

$$\boxed{\text{ausencia de dispersión visible} \not\Rightarrow \text{ausencia de variabilidad física.}}$$

La cuantización estudiada en §2 puede enmascarar parte de la dispersión.

Diagnóstico: tres errores frecuentes.

Error 1.

«Tomé muchas mediciones; por eso el resultado es exacto.»

La repetición aporta información sobre variabilidad, pero no elimina por sí sola todas las demás contribuciones.

Error 2.

«Los datos están muy juntos; por eso el instrumento mide correctamente.»

Datos muy juntos indican buena precisión bajo las condiciones especificadas. No garantizan ausencia de desplazamiento sistemático.

Error 3.

«La desviación estándar es la incertidumbre.»

No automáticamente. La desviación estándar de una serie describe dispersión. La incertidumbre de medición se construirá a partir de la información disponible y puede incluir múltiples contribuciones.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.6 — Centro y dispersión de una serie

Función pedagógica: `Consolidación → Cálculo → Interpretación`.

Cinco mediciones del período de un péndulo, en segundos, son 2.01, 2.03, 2.00, 2.02, 2.01.

1. Calcula la media $\bar{x}$.
2. Calcula el rango R.
3. Calcula la desviación estándar muestral s.
4. Explica qué información aporta cada cantidad.
5. ¿Está justificado escribir sin más $(\bar{x} \pm s)\,\mathrm{s}$ como resultado final?

Solución

1. La media es

$$\bar{x} = \frac{10.07}{5}\,\mathrm{s} = 2.014\,\mathrm{s}.$$

2. El rango es

$$R = 2.03 - 2.00 = 0.03\,\mathrm{s}.$$

3. Las desviaciones son

$$-0.004, \quad 0.016, \quad -0.014, \quad 0.006, \quad -0.004$$

y la suma de sus cuadrados es $0.000520\,\mathrm{s}^2$. Por tanto,

$$s = \sqrt{\frac{0.000520}{4}}\,\mathrm{s} \approx 0.0114\,\mathrm{s}.$$

4. $\bar{x}$ describe la localización central; R usa los extremos; s resume la dispersión de todos los datos alrededor de la media.
5. No sin especificar qué significado se asigna al término tras $\pm$. En esta sección s es una medida de dispersión muestral, no una declaración completa de incertidumbre de medición.

Ejercicio 3.7 — Misma media, distinta precisión

Función pedagógica: `Comparación → Diagnóstico`.

Dos procedimientos producen:

$$A: \quad 10.00,\ 10.01,\ 9.99,\ 10.00,\ 10.00,$$

$$B: \quad 9.90,\ 10.10,\ 9.95,\ 10.05,\ 10.00.$$

1. Calcula la media de cada serie.
2. Compara sus rangos.
3. Calcula aproximadamente sus desviaciones estándar muestrales.
4. ¿Cuál es más preciso bajo estas condiciones?
5. ¿Puedes decidir cuál es más exacto sin información adicional?

Solución

1. Ambas medias son

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 10.00.$$

2. Los rangos son

$$R_A = 10.01 - 9.99 = 0.02,$$

$$R_B = 10.10 - 9.90 = 0.20.$$

3. Para A,

$$s_A = \sqrt{\frac{0.0002}{4}} \approx 0.0071.$$

Para B, $s_B = \sqrt{\frac{0.025}{4}} \approx 0.079$.

4. A es más preciso bajo las condiciones de la comparación porque presenta mucha menor dispersión.
5. No. Para hablar de exactitud necesitamos información sobre el valor verdadero o una referencia metrológicamente adecuada; la dispersión interna no basta.

Ejercicio 3.8 — Muy preciso y desplazado

Función pedagógica: `Contraejemplo → Distinción conceptual`.

Un procedimiento aplicado repetidamente a una referencia produce 4.98, 4.99, 4.98, 4.99, 4.98. Para el ejercicio, la referencia posee un valor asignado de

$$5.00$$

con una incertidumbre despreciable frente a la dispersión observada.

1. Describe cualitativamente la precisión de la serie.
2. Calcula la media.
3. Compara la media con el valor asignado a la referencia.
4. Explica por qué este ejemplo muestra que precisión y exactitud no son sinónimos.
5. ¿Qué tipo de fenómeno conceptual anticipa la diferencia persistente respecto de la referencia?

Solución

1. La dispersión es pequeña; la serie es bastante precisa bajo las condiciones especificadas.
2. La media es

$$\bar{x} = \frac{24.92}{5} = 4.984.$$

3. La diferencia respecto del valor asignado es

$$4.984 - 5.00 = -0.016.$$

4. Las mediciones están muy juntas entre sí, pero el agrupamiento está desplazado respecto de la referencia. La precisión describe la concordancia interna; la exactitud exige otra comparación.
5. Anticipa la idea de una contribución sistemática o sesgo, que estudiaremos en §4. Todavía no identificamos su causa ni lo convertimos automáticamente en una corrección.

Autoexplicación: qué sabemos después de repetir. Después de una serie de mediciones podemos responder preguntas que una sola indicación no permitía:

- ¿dónde se concentra la serie?;
- ¿cuánto varían los resultados?;
- ¿aparecen valores atípicos?;
- ¿la resolución oculta parte de la variación?;
- ¿las condiciones de repetición están suficientemente controladas?

Pero todavía quedan preguntas abiertas:

- ¿existe un desplazamiento sistemático?;
- ¿qué diferencia hay entre error e incertidumbre?;
- ¿cómo incorporamos información no obtenida por repetición?;
- ¿qué significa una corrección de calibración?

Estas preguntas requieren una nueva distinción conceptual.

Conectar: de la dispersión al error y la incertidumbre. La repetición nos enseñó a mirar la dispersión.

Ahora debemos evitar otra confusión muy común:

$$\boxed{\text{error} \neq \text{incertidumbre.}}$$

El siguiente paso será el §4.

Allí separaremos la diferencia —conceptual— entre un valor medido y un valor verdadero de la cuantificación de la información disponible sobre los valores atribuidos al mensurando.

4. Error, sesgo e incertidumbre

Intuir: «error» no significa simplemente «algo salió mal». En el lenguaje cotidiano, la palabra *error* suele significar equivocación.

Decimos:

> «Cometí un error al leer la escala.»

En metrología, sin embargo, **error de medición** posee un significado técnico distinto.

Supongamos que un sistema de medición produce el valor

$$x_{\mathrm{m}} = 9.96\,\mathrm{V}$$

y que disponemos de un valor de referencia

$$x_{ref} = 10.00\,\mathrm{V}.$$

Podemos formar la diferencia

$$e = x_{\mathrm{m}} - x_{ref} = -0.04\,\mathrm{V}.$$

Esta diferencia es un **error de medición relativo a la referencia adoptada**.

No significa necesariamente que alguien haya trabajado mal. El sistema puede haber sido utilizado exactamente según el procedimiento previsto y, aun así, producir una indicación desplazada.

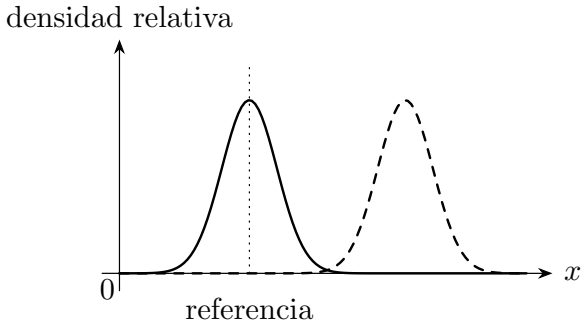


Figura 3.2. Dos distribuciones de igual anchura pueden estar centradas en lugares diferentes. La curva discontinua representa una serie desplazada respecto de la referencia. La anchura ilustra dispersión; el desplazamiento de su centro ilustra sesgo. Véase §4.

Por eso debemos separar desde el comienzo:

$$\boxed{\text{error técnico} \neq \text{equivocación humana.}}$$

Definir: error de medición. El VIM define el error de medición como un valor medido menos un valor de referencia.[20]

Definición operativa 3.7 — Error de medición Dado un valor medido x_{m} y un valor de referencia x_{ref} apropiado para la comparación, llamaremos **error de medición**, en ese contexto, a

$$e = x_{\mathrm{m}} - x_{ref}.$$

[20] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.16, *measurement error*: valor medido menos un valor de referencia.

El error es una diferencia entre valores; no debe confundirse con la incertidumbre asociada al resultado.[21]

La expresión «valor de referencia apropiado» es importante.

En algunos contextos puede provenir de:

- un patrón calibrado;
- un valor asignado a un material de referencia;
- un procedimiento de referencia;
- una realización metrológica de mayor jerarquía.

El error no es una etiqueta metafísica que podamos conocer automáticamente. Si el valor de referencia también posee incertidumbre, esa información debe mantenerse en el análisis.

Un error conocido puede corregirse. Supongamos que una balanza, al medir una referencia, presenta un desplazamiento estimado de

$$b = +0.12\,\mathrm{g}.$$

Si interpretamos b como una estimación del error sistemático de la indicación, una corrección elemental puede escribirse

$$c = -b.$$

Para una indicación

$$m_{\mathrm{ind}} = 52.48\,\mathrm{g},$$

el valor corregido sería

$$m_{\mathrm{corr}} = m_{\mathrm{ind}} + c = 52.36\,\mathrm{g}.$$

Pero aquí aparece una idea crucial:

$$\boxed{\text{corregir un efecto conocido} \not\Rightarrow \text{eliminar toda incertidumbre.}}$$

La propia corrección puede ser incierta. El patrón utilizado para estimarla puede tener incertidumbre. El desplazamiento puede variar con temperatura o tiempo.

Por tanto, la corrección modifica el valor atribuido, pero no convierte la medición en exacta. El VIM utiliza **corrección** para una compensación aplicada por un efecto sistemático estimado.[22]

Componentes sistemáticas y aleatorias. El VIM distingue componentes del error que se comportan de manera diferente en mediciones repetidas.[23]

---

[21] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.16, *measurement error*: valor medido menos un valor de referencia.

[22] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.53, *correction*. Se utiliza aquí en el sentido de compensación por un efecto sistemático estimado.

[23] JCGM 200:2012 (VIM3), términos 2.17 y 2.19, *systematic measurement error* y *random measurement error*.

Componente sistemática. Una componente sistemática permanece constante o varía de forma predecible bajo determinadas condiciones.

Ejemplos posibles:

- desplazamiento de cero;
- factor de escala incorrecto;
- corrección de calibración mal aplicada;
- dependencia conocida con la temperatura.

Componente aleatoria. Una componente aleatoria varía de manera no predecible entre repeticiones.

Ejemplos posibles:

- ruido electrónico;
- fluctuaciones de lectura;
- pequeñas variaciones no controladas del procedimiento.

Esta distinción no implica que podamos observar directamente cada componente por separado. Es una estructura de análisis. Una serie muy dispersa sugiere variabilidad entre repeticiones.

Una serie muy estrecha pero desplazada respecto de una referencia puede sugerir un efecto sistemático.

Sesgo: estimar una componente sistemática. El VIM utiliza **sesgo de medición** (*measurement bias*) para una estimación del error sistemático.[24]

Consideremos resultados repetidos con media

$$\bar{x} = 9.84$$

frente a una referencia

$$x_{\mathrm{r}ef} = 10.00.$$

Una estimación elemental del sesgo puede escribirse

$$\hat{b} = \bar{x} - x_{\mathrm{r}ef} = -0.16.$$

La notación con sombrero recuerda que estamos **estimando** un efecto.

No debemos confundir

$$\hat{b}$$

con una cantidad conocida sin incertidumbre. Una corrección basada en ese sesgo debe transportar también la incertidumbre asociada a su estimación.

Definir: incertidumbre de medición. La incertidumbre responde a una pregunta distinta del error. El VIM la define como un parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos al mensurando sobre la base de la información utilizada.[25]

Definición operativa 3.8 — Incertidumbre de medición La **incertidumbre de medición** es información cuantitativa que caracteriza la dispersión de los valores que pueden atribuirse

[24] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.18, *measurement bias*: estimación del error sistemático.

[25] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.26, *measurement uncertainty*. La formulación operativa del texto se mantiene deliberadamente compatible con la definición normativa sin introducir todavía toda la maquinaria GUM.

razonablemente al mensurando a partir del modelo, los datos y las demás fuentes de información utilizadas. No es el error de medición ni una estimación automática de «cuánto nos equivocamos».[26]

Esta definición cambia el foco. El error compara dos valores. La incertidumbre caracteriza la información disponible para atribuir valores al mensurando.

Por tanto,

$$\boxed{\text{error} \neq \text{incertidumbre.}}$$

Principio: no intercambiar error e incertidumbre. Principio 3.5 — Incertidumbre y error no son sinónimos El error expresa una diferencia respecto de un valor de referencia; la incertidumbre caracteriza la dispersión de valores atribuibles al mensurando a partir de la información disponible. Un valor de incertidumbre no debe interpretarse automáticamente como el error cometido.

Esta distinción evita expresiones frecuentes pero defectuosas como:

«El error de la medición es $\pm 0.2\,\text{cm}$.»

Tal escritura puede querer decir muchas cosas:

- una cota adoptada;
- una incertidumbre estándar;
- una incertidumbre expandida;
- una tolerancia;
- simplemente media división de una escala.

Sin especificar el significado, la notación no es suficiente.

Ejemplo: mismo error estimado, incertidumbres distintas. Consideremos dos procedimientos que producen el mismo valor medido: $x_A = x_B = 10.20$.

Supongamos además que ambos se comparan con una referencia de

$$10.00.$$

Entonces la diferencia respecto de esa referencia es $e_A = e_B = 0.20$. Pero el procedimiento A podría estar respaldado por una calibración reciente y una serie muy estable, mientras B podría usar un instrumento con deriva importante y alta variabilidad. Podríamos tener, esquemáticamente,

$$u_A = 0.03, \qquad u_B = 0.30.$$

El error comparativo es el mismo. La incertidumbre no. De forma inversa, dos resultados pueden tener incertidumbres semejantes y errores comparativos diferentes.

Por eso son coordenadas conceptuales distintas.

Ejemplo inverso: error comparativo cero no implica incertidumbre cero. Supongamos una indicación

$$x_{\mathrm{m}} = 10.00$$

y una referencia

$$x_{ref} = 10.00.$$

Entonces $e = 0$.

[26] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.26, *measurement uncertainty*. La formulación operativa del texto se mantiene deliberadamente compatible con la definición normativa sin introducir todavía toda la maquinaria GUM.

¿Concluimos que la incertidumbre es cero?

No.

La coincidencia puede coexistir con:

- resolución finita;
- dispersión entre repeticiones;
- incertidumbre del patrón;
- correcciones imperfectamente conocidas;
- efectos ambientales.

Así,

$$\boxed{e = 0 \nRightarrow u = 0.}$$

La igualdad numérica con una referencia no elimina las limitaciones del proceso de medición.

Una advertencia sobre el «valor verdadero». En §3 hablamos de exactitud mediante la cercanía a un valor verdadero del mensurando. Pero en una medición real ese valor no está generalmente disponible como un número conocido de forma exacta. Si estuviera perfectamente conocido, muchas mediciones perderían su propósito.

Por eso, en la práctica metrológica trabajamos con referencias, calibraciones, modelos y cadenas de trazabilidad. La frase

> «el error verdadero es exactamente...»

debe utilizarse con cuidado.

Podemos calcular una diferencia respecto de una referencia.

Podemos estimar componentes sistemáticas.

Podemos evaluar incertidumbres.

No debemos fingir conocimiento que el procedimiento no proporciona.

La incertidumbre no es un intervalo mágico alrededor de la verdad. Es común escribir

$$x \pm u.$$

Pero esta notación, por sí sola, no significa:

> «el valor verdadero está garantizado dentro de este intervalo».

El significado depende de qué sea u. Si u es una **incertidumbre estándar**, se expresa con la escala de una desviación estándar. Si se utiliza una **incertidumbre expandida** U, debe declararse el factor o la información de cobertura utilizada.

Estas ideas se formalizarán más adelante.

Por ahora fijamos una disciplina de lenguaje:

$$\boxed{\text{símbolo } \pm \text{ sin definición} = \text{información incompleta.}}$$

Modelo de medición: dónde pueden entrar las correcciones. Supongamos un modelo elemental

$$Y = X + C,$$

donde:

- X es una indicación;
- C es una corrección;

- Y es el valor atribuido al mensurando.

Incluso si el cálculo

$$y = x + c$$

es exacto para los números introducidos, tanto X como C pueden estar asociados a incertidumbres.

Éste será el punto de partida para §§5–7:

no basta propagar valores; también debemos propagar la información sobre su incertidumbre.

Diagnóstico: cuatro confusiones frecuentes.

Confusión A.

«Incertidumbre = error desconocido.»

Demasiado impreciso. La incertidumbre es un parámetro construido a partir de la información utilizada para caracterizar la dispersión de valores atribuidos.

Confusión B.

«Si corrijo el sesgo, ya no queda incertidumbre.»

Falso. La corrección y su propia evaluación pueden contribuir a la incertidumbre.

Confusión C.

«Si una medición coincide con el patrón, es exacta.»

La coincidencia observada no establece incertidumbre nula ni ausencia de otros efectos.

Confusión D.

«Si conozco la incertidumbre, conozco el error.»

No en general.

Son objetos conceptuales diferentes.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.9 — Error comparativo, corrección e incertidumbre

Función pedagógica: `Consolidación → Distinción conceptual`.

Un instrumento aplicado a una referencia de

$$50.00\,\mathrm{g}$$

produce una media de indicaciones de

$$50.12\,\mathrm{g}.$$

1. Calcula la diferencia respecto de la referencia.
2. Propón una corrección elemental para compensar ese desplazamiento.
3. Si otra medición indica 73.41 g, calcula el valor corregido bajo ese modelo.
4. Explica por qué el valor corregido no debe tratarse como exacto.
5. Distingue en palabras: error comparativo, sesgo estimado, corrección e incertidumbre.

Solución

1. La diferencia es

$$e = 50.12 - 50.00 = +0.12\,\mathrm{g}.$$

2. Una corrección elemental sería

$$c = -0.12\,\mathrm{g}.$$

3. Entonces

$$m_{\mathrm{corr}} = 73.41 - 0.12 = 73.29\,\mathrm{g}.$$

4. La corrección ha sido inferida a partir de una referencia y de un modelo. Puede haber incertidumbre en la referencia, variación temporal, resolución, repetibilidad y dependencia de otras condiciones.
5. El **error comparativo** es la diferencia respecto de la referencia; el **sesgo estimado** resume una componente sistemática inferida; la **corrección** es la compensación aplicada; la **incertidumbre** cuantifica la dispersión de valores atribuibles a partir de la información disponible.

Ejercicio 3.10 — Tres afirmaciones que parecen iguales

Función pedagógica: `Diagnóstico → Contraejemplo`.

Un resultado se presenta como $x = 12.4\,\mathrm{cm}, \qquad u = 0.2\,\mathrm{cm}$.

Analiza las afirmaciones:

A. «El error es exactamente 0.2 cm.»

B. «El valor verdadero está garantizado entre 12.2 y 12.6 cm.»

C. «La medición posee una incertidumbre declarada de 0.2 cm, pero debemos saber qué tipo de incertidumbre es y cómo fue evaluada para interpretar completamente el reporte.»

Decide cuál está justificada únicamente por la información dada.

Solución

A no está justificada. Un valor de incertidumbre no es automáticamente el error.

B tampoco está justificada. Sin especificar el significado de u, un intervalo de cobertura o una garantía no se sigue de la notación.

C es la única formulación compatible con la información dada.

La lección es:

$$\boxed{\text{valor de incertidumbre} \not\equiv \text{error conocido} \not\equiv \text{garantía absoluta.}}$$

Autoexplicación: un mapa conceptual. El lector debería poder reconstruir la siguiente red:

$$\text{medición repetida} \longrightarrow \text{dispersión} \longrightarrow \text{precisión},$$

mientras que

$$\text{valor medido} - \text{valor de referencia} \longrightarrow \text{error comparativo}.$$

Una componente sistemática estimada conduce a un posible

$$\text{sesgo} \longrightarrow \text{corrección},$$

y toda la información disponible contribuye a evaluar

$$\text{incertidumbre}.$$

No hay una única flecha que convierta automáticamente uno de estos conceptos en otro.

Conectar: ¿de dónde sale numéricamente una incertidumbre? Ya sabemos qué **no** es la incertidumbre. Ahora necesitamos aprender a evaluarla.

Algunas contribuciones provendrán de series de datos.

Otras vendrán de:

- certificados de calibración;
- resolución;
- especificaciones;
- experiencia previa;
- modelos de distribución.

Esto conduce a la distinción entre evaluaciones de tipo A y tipo B.

El siguiente paso será el §5.

---

5. Evaluación elemental de la incertidumbre

Intuir: una incertidumbre no aparece por decreto. En §4 distinguimos error e incertidumbre.

Ahora aparece la pregunta operativa:

¿De dónde sale numéricamente una incertidumbre?

Consideremos una medición sencilla de masa.

Podemos disponer de información procedente de fuentes muy diferentes:

- una serie de indicaciones repetidas;
- la resolución de la balanza;
- un certificado de calibración;
- una corrección por temperatura;
- especificaciones del fabricante;
- datos obtenidos previamente con el mismo sistema.

Todas estas piezas pueden contribuir a la incertidumbre del resultado. La evaluación no consiste en elegir «el error más grande» ni en escribir arbitrariamente

$$\pm \frac{\text{menor división}}{2}.$$

Debemos construir un **modelo de medición** y preguntarnos qué información poseemos sobre cada cantidad que interviene.

La estructura general será:

$$\boxed{\text{modelo} + \text{datos} + \text{información previa} \longrightarrow \text{evaluación de incertidumbre.}}$$

El modelo de medición. Supongamos que el mensurando se representa mediante una cantidad de salida

$$Y$$

relacionada con cantidades de entrada

$$X_1, \dots, X_N$$

por una función

$$Y = f(X_1, \dots, X_N).$$

El VIM denomina **modelo de medición** a una relación matemática entre todas las magnitudes que sabemos que intervienen en una medición.[27]

En un caso muy simple, $Y = X + C$,

donde:

- X es la indicación;
- C es una corrección;
- Y es el valor atribuido al mensurando.

En otro caso, $\rho = \frac{m}{V}$,

donde la densidad depende de una masa y un volumen medidos. La elección de las cantidades de entrada forma parte del modelado físico. Si una variable relevante queda fuera del modelo, ninguna manipulación posterior de cifras puede recuperar automáticamente la información perdida.

Dos métodos de evaluación, no dos clases de error. La familia GUM y el VIM distinguen dos métodos de evaluación de componentes de incertidumbre:

- **evaluación de tipo A**;
- **evaluación de tipo B**.[28]

La distinción se refiere al **método de evaluación**.

No debemos traducirla erróneamente como

$$\text{tipo A} = \text{error aleatorio},$$

y

$$\text{tipo B} = \text{error sistemático}.$$

Tampoco significa que una evaluación tipo A sea «científica» y una tipo B sea «subjetiva».

Ambas utilizan información. La diferencia está en cómo se evalúa la componente.

Definir: evaluación tipo A. Definición operativa 3.9 — Evaluación tipo A de la incertidumbre Una **evaluación tipo A** es una evaluación de una componente de incertidumbre mediante análisis estadístico de valores medidos obtenidos bajo condiciones definidas.[29]

La situación elemental es una serie

$$x_1, \dots, x_n.$$

Calculamos $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

y la desviación estándar muestral

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

[27] JCGM 200:2012 (VIM3), términos 2.48–2.52, sobre modelo de medición, cantidades de entrada y salida e influencia. JCGM GUM-6:2020 amplía sistemáticamente la construcción y uso de modelos de medición.

[28] JCGM 200:2012 (VIM3), términos 2.28–2.29; JCGM 100:2008 (GUM), marco de evaluación de componentes de incertidumbre.

[29] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.28, *Type A evaluation of measurement uncertainty*.

Si utilizamos la media como estimación del mensurando y las observaciones pueden tratarse, dentro del modelo adoptado, como repeticiones independientes bajo condiciones comparables, la incertidumbre estándar asociada a la media se estima mediante $u_A(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$.

Esta fórmula no dice que la dispersión «desaparezca» al repetir.

Dice algo más específico: bajo las hipótesis estadísticas adoptadas, la incertidumbre estándar asociada a la estimación de la media disminuye como $1/\sqrt{n}$. Las hipótesis importan. Si las observaciones están fuertemente correlacionadas o si el sistema deriva durante la serie, la fórmula puede dejar de representar adecuadamente la información disponible.

Ejemplo tipo A. Supongamos cuatro mediciones, en segundos, 10.0, 10.2, 9.8, 10.0. La media es $\bar{x} = 10.0\,\mathrm{s}$. Las desviaciones son 0, 0.2, −0.2, 0,

y

$$s = \sqrt{\frac{0.2^2 + (-0.2)^2}{3}}\,\mathrm{s} = \sqrt{\frac{0.08}{3}}\,\mathrm{s} \approx 0.163\,\mathrm{s}.$$

Entonces, bajo las hipótesis anteriores,

$$u_A(\bar{x}) = \frac{0.163}{2}\,\mathrm{s} \approx 0.082\,\mathrm{s}.$$

Observemos la distinción: $s \approx 0.163\,\mathrm{s}$

describe la dispersión de observaciones individuales, mientras

$$u_A(\bar{x}) \approx 0.082\,\mathrm{s}$$

caracteriza la incertidumbre estándar asociada a la estimación de la media debida a esta fuente estadística.

Definir: evaluación tipo B. No toda información proviene de repetir mediciones.

Podemos saber, por ejemplo, que:

- un certificado declara una incertidumbre;
- la resolución digital es Δ;
- el fabricante especifica un intervalo de tolerancia;
- una corrección se conoce dentro de ciertos límites;
- experiencias previas indican una dispersión plausible.

Definición operativa 3.10 — Evaluación tipo B de la incertidumbre Una **evaluación tipo B** es una evaluación de una componente de incertidumbre por medios distintos del análisis estadístico directo de una serie actual de valores medidos, utilizando información disponible como certificados, especificaciones, datos previos, resolución o conocimiento del sistema.[30]

La evaluación tipo B no significa «inventar un número razonable».

Exige declarar:

1. qué información se utiliza;
2. qué intervalo o distribución se adopta;
3. qué transformación convierte esa información en una incertidumbre estándar.

[30] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.29, *Type B evaluation of measurement uncertainty.*

Definir: incertidumbre estándar. Para combinar contribuciones necesitamos expresarlas en una forma común. El VIM llama **incertidumbre estándar** a una incertidumbre de medición expresada como una desviación estándar.[31]

Definición operativa 3.11 — Incertidumbre estándar Una **incertidumbre estándar** es una incertidumbre de medición expresada con la escala de una desviación estándar. La denotaremos habitualmente por

$$u(x).$$

La unidad de $u(x)$ es la misma que la de x.

Si

$$x = 10.0\,\mathrm{V},$$

podríamos tener

$$u(x) = 0.03\,\mathrm{V}.$$

La incertidumbre relativa, que estudiaremos después, será una cantidad de dimensión uno.

De una incertidumbre expandida a una estándar. Un certificado puede reportar una incertidumbre expandida

$$U$$

junto con un factor de cobertura

$$k.$$

En el caso elemental en que el certificado especifica

$$U = ku,$$

recuperamos la incertidumbre estándar mediante $u = \frac{U}{k}$. Por ejemplo, si

$$U = 0.06\,\mathrm{V}, \qquad k = 2,$$

entonces $u = 0.03\,\mathrm{V}$.

No debemos escribir simplemente «0.06» en un presupuesto y combinarlo con incertidumbres estándar sin antes homogeneizar el significado de las cantidades.

Un modelo tipo B para la resolución digital. Supongamos una pantalla con paso

$$\Delta.$$

En §2 modelamos la cuantización mediante un intervalo de anchura Δ alrededor de una indicación. Si adoptamos explícitamente el modelo de que el error de cuantización puede distribuirse uniformemente entre

$$-\frac{\Delta}{2} \quad \text{y} \quad +\frac{\Delta}{2},$$

[31] JCGM 200:2012 (VIM3), término 2.30, *standard measurement uncertainty*. El tratamiento de incertidumbre expandida y factores de cobertura se desarrollará en §8.

la desviación estándar de ese modelo rectangular es $u_{\text{res}} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$. Esta identidad es una propiedad matemática de la distribución uniforme. No la derivamos aquí porque el capítulo no presupone todavía teoría de probabilidad; la utilizamos de manera explícita como parte del modelo estadístico adoptado, no como una ley física del instrumento.

Por ejemplo, para

$$\Delta = 0.01\,\text{g},$$

obtenemos

$$u_{\text{res}} = \frac{0.01}{\sqrt{12}}\,\text{g} \approx 0.0029\,\text{g}.$$

La fórmula no proviene de la palabra «resolución».

Proviene de dos ingredientes:

1. un intervalo asociado al modelo de cuantización;
2. una **hipótesis de distribución uniforme** dentro de ese intervalo.

Si cambiamos el modelo probabilístico, cambia la incertidumbre estándar asignada.

Por eso:

$$\boxed{\text{intervalo conocido} + \text{modelo de distribución} \longrightarrow \text{incertidumbre estándar.}}$$

Por qué un intervalo no basta. Supongamos que sólo sabemos

$$-a \le X \le a.$$

Esta información fija una cota, pero no determina por sí sola una desviación estándar única.

Podríamos adoptar:

- distribución uniforme;
- distribución triangular;
- una distribución concentrada cerca del centro;
- otra distribución justificada por información física adicional.

Cada elección produce una desviación estándar diferente. Por tanto, el paso

$$\pm a \longrightarrow u$$

requiere hipótesis. La incertidumbre no es simplemente «el ancho del intervalo».

Ejemplo tipo B: certificado de calibración. Supongamos que una corrección de calibración es $C = +0.120\,\text{g}$

y el certificado informa

$$U_C = 0.040\,\text{g}$$

con

$$k = 2.$$

Entonces la incertidumbre estándar asociada a esa corrección es

$$u(C) = \frac{0.040}{2}\,\text{g} = 0.020\,\text{g}.$$

Nuestro modelo podría ser

$$Y = X + C.$$

Todavía no combinaremos $u(X)$ y $u(C)$.

Eso corresponde a §6. Por ahora registramos que el modelo contiene dos entradas y que cada una debe llevar consigo su propia información de incertidumbre.

Un presupuesto preliminar de incertidumbre. Antes de combinar, podemos construir una tabla conceptual:

Entrada	Estimación	Fuente	Método de evaluación	Incertidumbre estándar
X	73.41 g	repetición	tipo A	$u(X)$
C	−0.12 g	certificado	tipo B	0.02 g
R	0	resolución	tipo B	u_{res}

La tercera entrada R representa aquí una corrección media nula asociada a la cuantización, pero con incertidumbre no nula. Esta forma tabular anticipa el **presupuesto de incertidumbre**. El objetivo no es burocrático.

La tabla obliga a declarar de dónde sale cada número.

Diagnóstico: tres confusiones frecuentes.

Confusión A.

«Tipo A significa aleatorio y tipo B sistemático.»

No. A y B clasifican métodos de evaluación de incertidumbre, no tipos físicos de error.

Confusión B.

«Una incertidumbre tipo B es menos objetiva.»

No se sigue. Un certificado de calibración o una especificación técnica puede aportar información cuantitativa muy sólida.

Confusión C.

«Si aumento indefinidamente n, toda la incertidumbre tiende a cero.»

Sólo la componente modelada mediante $s/\sqrt{n}$
disminuye de esa forma bajo las hipótesis declaradas.

Las contribuciones de calibración, resolución, modelo u otras fuentes no desaparecen automáticamente al repetir la misma lectura.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.11 — Evaluación tipo A de una media

Función pedagógica: `Cálculo → Interpretación → Hipótesis`.

Cuatro mediciones de tiempo son 10.0, 10.2, 9.8, 10.0 s.

1. Calcula $\bar{x}$.
2. Calcula s.
3. Bajo el modelo de repeticiones independientes en condiciones comparables, calcula

$$u_A(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

4. Explica la diferencia entre s y $u_A(\bar{x})$.

5. Indica una situación en la que la fórmula $s/\sqrt{n}$ podría ser inadecuada.

Solución

1. La media es

$$\bar{x} = 10.0\,\mathrm{s}.$$

2. Tenemos

$$s = \sqrt{\frac{0.08}{3}}\,\mathrm{s} \approx 0.163\,\mathrm{s}.$$

3. Como $n = 4$,

$$u_A(\bar{x}) = \frac{0.163}{2}\,\mathrm{s} \approx 0.082\,\mathrm{s}.$$

4. s describe la dispersión de observaciones individuales. $u_A(\bar{x})$ es la incertidumbre estándar asociada a la estimación de la media debida a esa componente estadística bajo el modelo adoptado.
5. Puede ser inadecuada si existe deriva durante la serie, si las observaciones están fuertemente correlacionadas o si las condiciones cambian sistemáticamente.

Ejercicio 3.12 — Construir componentes tipo B

Función pedagógica: `Clasificación → Modelización`.

Para una medición de tensión disponemos de:

A. veinte lecturas repetidas tomadas en condiciones de repetibilidad;

B. un certificado que declara

$$U_{\mathrm{cal}} = 0.06\,\mathrm{V}, \qquad k = 2;$$

C. una pantalla con paso

$$\Delta = 0.02\,\mathrm{V},$$

cuyo error de cuantización se modela uniformemente en $[-\Delta/2, \Delta/2]$.

1. Clasifica cada evaluación como tipo A o tipo B.
2. Convierte la información del certificado en incertidumbre estándar.
3. Calcula la incertidumbre estándar del modelo de resolución.
4. Explica por qué las componentes B y C no deben llamarse simplemente «errores sistemáticos».
5. ¿Podemos sumar todavía las tres incertidumbres estándar? Explica qué falta discutir.

Solución

1. **A** es tipo A porque utiliza análisis estadístico de la serie actual. **B** y **C** son tipo B porque utilizan otras fuentes de información y modelos.
2.

$$u_{\mathrm{cal}} = \frac{U_{\mathrm{cal}}}{k} = \frac{0.06}{2} = 0.03\,\mathrm{V}.$$

3.

$$u_{\mathrm{res}} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{0.02}{\sqrt{12}}\,\mathrm{V} \approx 0.0058\,\mathrm{V}.$$

4. Tipo B clasifica el **método de evaluación**. Una componente evaluada por certificado o especificación no se identifica automáticamente con un error sistemático.

5. Todavía falta declarar el modelo de medición, los coeficientes de sensibilidad y las relaciones de dependencia o correlación entre entradas. La combinación pertenece a §6.

Autoexplicación: de dónde sale cada número. Ante una componente de incertidumbre debemos poder responder:
1. ¿qué cantidad de entrada representa?;
2. ¿qué valor se le atribuye?;
3. ¿qué fuente de información utilizamos?;
4. ¿la evaluación es tipo A o tipo B?;
5. ¿cómo se obtuvo una incertidumbre estándar?;
6. ¿qué hipótesis de distribución o de dependencia/correlación se han introducido?

Si no podemos responder estas preguntas, el número $u = 0.03$
carece de suficiente contexto físico.

Conectar: evaluar no es todavía combinar. Después de esta sección podemos tener

$$u(x_1), \quad u(x_2), \quad \dots, \quad u(x_N).$$

Pero el mensurando depende de esas entradas mediante $Y = f(X_1, \dots, X_N)$.
Necesitamos saber cómo las incertidumbres de entrada afectan a la salida.
Y antes de sumar cuadrados debemos responder una pregunta decisiva:

> **¿qué ocurre cuando dos entradas están correlacionadas o no podemos tratarlas como no correlacionadas?**

El siguiente paso será el §6.

---

6. Combinación de incertidumbres

Intuir: dos incertidumbres no se suman siempre del mismo modo. En §5 terminamos con un modelo elemental de medición, $Y = X + C + R$,
donde cada entrada llevaba asociada una incertidumbre estándar.
Supongamos, por ejemplo,

$$u(X) = 0.030\,\mathrm{g}, \qquad u(C) = 0.020\,\mathrm{g}, \qquad u(R) = 0.0029\,\mathrm{g}.$$

¿Qué incertidumbre debemos asociar al resultado Y?
Una respuesta apresurada podría ser

$$0.030 + 0.020 + 0.0029 = 0.0529\,\mathrm{g}.$$

Otra podría ser

$$\sqrt{0.030^2 + 0.020^2 + 0.0029^2} \approx 0.0362\,\mathrm{g}.$$

¿Cuál es correcta?
La pregunta está mal planteada si todavía no hemos declarado **cómo se relacionan las contribuciones**. La combinación de incertidumbres no es una regla tipográfica aplicada a una lista de números. Forma parte del modelo de medición.

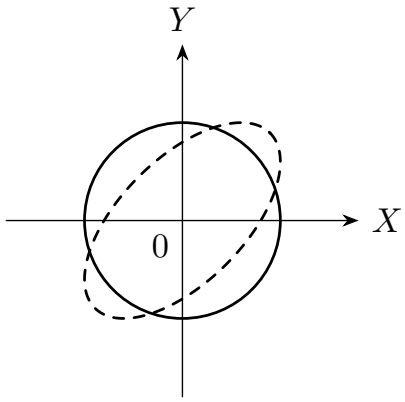


Figura 3.3. Los contornos normalizados $X^2 + Y^2 = 1$ (continuo) y $X^2 - 1{,}2XY + Y^2 = 0{,}64$ (discontinuo) corresponden a matrices de covarianza con correlaciones 0 y 0,6. Aquí $X = \delta x/u_x$ e $Y = \delta y/u_y$. No se les asigna un nivel de confianza. Véase §6.

Principio 3.6 — La ausencia de correlación es una hipótesis del modelo Las incertidumbres estándar pueden combinarse cuadráticamente sólo cuando las hipótesis que justifican esa combinación están declaradas. En particular, tratar dos entradas como no correlacionadas no es un automatismo: debe estar justificado por el diseño de la medición, la procedencia de los datos o el modelo adoptado.

Definir: incertidumbre estándar combinada. El VIM llama **incertidumbre estándar combinada** a la incertidumbre estándar obtenida a partir de las incertidumbres estándar asociadas a las cantidades de entrada de un modelo de medición.[32]

Definición operativa 3.12 — Incertidumbre estándar combinada La **incertidumbre estándar combinada** de una cantidad de salida Y es la incertidumbre estándar que resulta de propagar, a través del modelo de medición, las incertidumbres estándar y, cuando corresponda, las dependencias entre las cantidades de entrada. La denotaremos por

$$u_c(y).$$

La letra c recuerda que se trata de una incertidumbre **combinada**, no de una nueva clase física de error.

El caso más simple: una suma de entradas no correlacionadas. Consideremos

$$Y = X_1 + X_2.$$

Supongamos que las estimaciones de entrada x_1 y x_2 tienen incertidumbres estándar

$$u(x_1), \qquad u(x_2),$$

y que, dentro del modelo adoptado, pueden tratarse como **no correlacionadas**.

Entonces la GUM conduce a

$$\boxed{u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}.}$$

[32] JCGM 200:2012, VIM3, §2.31, "combined standard measurement uncertainty"; la nota asociada indica que, cuando existen correlaciones entre cantidades de entrada, deben incorporarse covarianzas.

Esta regla es una suma de **varianzas**, seguida de una raíz cuadrada. No es una suma aritmética de incertidumbres estándar.[33]

Por ejemplo, si

$$u(x_1) = 0.30\,\text{mm}, \qquad u(x_2) = 0.40\,\text{mm},$$

entonces

$$u_c(y) = \sqrt{0.30^2 + 0.40^2}\,\text{mm} = 0.50\,\text{mm}.$$

La estructura recuerda al teorema de Pitágoras porque estamos combinando contribuciones cuadráticas no correlacionadas.

Resta: el signo del modelo no cambia la regla cuando no hay correlación. Sea ahora

$$Y = X_1 - X_2.$$

Si las entradas son no correlacionadas, obtenemos nuevamente

$$\boxed{u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}.}$$

El signo menos desaparece al elevar al cuadrado la contribución de X_2.

Esto suele sorprender al principio. Si restamos dos números, los valores pueden cancelarse; pero la incertidumbre de cada entrada no desaparece por el mero hecho de que el modelo contenga un signo negativo.

Resultado formal: combinación lineal sin correlación. Proposición 3.2 — Combinación elemental para un modelo lineal con entradas no correlacionadas Sea

$$Y = a_1 X_1 + \cdots + a_N X_N,$$

donde los coeficientes a_i se consideran conocidos con incertidumbre despreciable. Si las estimaciones de entrada pueden tratarse como no correlacionadas, entonces

$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 u^2(x_i).}$$

En particular, $u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2 u^2(x_i)}$.

Demostración. Para un modelo lineal, una variación de entrada

$$\delta x_i$$

produce en la salida la contribución

$$\delta y_i = a_i \delta x_i.$$

La incertidumbre estándar correspondiente a esa contribución escala por el valor absoluto del coeficiente: $u_i(y) = |a_i| u(x_i)$. Cuando las entradas son no correlacionadas, las varianzas de las contribuciones se suman. Por tanto,

[33] JCGM 100:2008, GUM, §5.1.2, ecuación (10), para cantidades de entrada no correlacionadas.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 u^2(x_i).$$

Tomando la raíz cuadrada positiva se obtiene la segunda expresión. □

Esta proposición es un caso especialmente limpio de la ley de propagación de incertidumbre de la GUM.[34]

Aplicación: completar el presupuesto de §5. Retomemos

$$Y = X + C + R.$$

Supongamos

$$X = 73.41\,\mathrm{g}, \qquad C = -0.12\,\mathrm{g}, \qquad R = 0,$$

con

$$u(X) = 0.030\,\mathrm{g}, \qquad u(C) = 0.020\,\mathrm{g}, \qquad u(R) = 0.0029\,\mathrm{g}.$$

El valor de salida es $y = 73.29\,\mathrm{g}$. Si las tres contribuciones se modelan como no correlacionadas,

$$u_c(y) = \sqrt{0.030^2 + 0.020^2 + 0.0029^2}\,\mathrm{g} \approx 0.0362\,\mathrm{g}.$$

No redondearemos todavía el resultado final. La política de reporte y cifras significativas pertenece a §8.

Cuando hay dependencia: aparece la covarianza. La regla cuadrática anterior deja de ser suficiente cuando dos entradas están correlacionadas. Para dos entradas X_1 y X_2 en un modelo lineal

$$Y = aX_1 + bX_2,$$

la expresión apropiada es

$$\boxed{u_c^2(y) = a^2 u^2(x_1) + b^2 u^2(x_2) + 2ab\, u(x_1, x_2),}$$

donde

$$u(x_1, x_2)$$

representa la covarianza estimada entre las dos entradas.[35]

Es útil escribir

$$u(x_1, x_2) = \rho_{12}\, u(x_1) u(x_2),$$

con

$$-1 \le \rho_{12} \le 1.$$

[34] JCGM 100:2008, GUM, §5.1.5; para un modelo lineal, la combinación por varianzas es directa bajo la hipótesis de entradas no correlacionadas.

[35] JCGM 100:2008, GUM, §§5.2.1–5.2.2, ecuaciones (13)–(16), donde aparecen covarianzas y coeficientes de correlación.

Aquí ρ_{12} representa un coeficiente de correlación.
Cuando

$$\rho_{12} = 0,$$

las entradas son no correlacionadas y recuperamos la regla cuadrática.
No debemos confundir:

$$\boxed{\text{independencia} \Longrightarrow \text{no correlación}}$$

con la conversa, que no vale en general. Para este capítulo basta saber que **no correlacionado** es la condición que elimina el término de covarianza en la fórmula de combinación.

Ejemplo decisivo: una misma calibración puede correlacionar dos resultados. Supongamos que medimos dos longitudes con el mismo instrumento y modelamos

$$L_1 = A + C,$$

$$L_2 = B + C,$$

donde C representa una corrección común de calibración.
Queremos la diferencia

$$D = L_1 - L_2.$$

Sustituyendo el modelo completo, $D = (A + C) - (B + C) = A - B$. La corrección común se cancela exactamente. Si tratáramos ingenuamente L_1 y L_2 como dos entradas no correlacionadas, contaríamos dos veces una contribución común que en realidad se cancela en la diferencia.

Éste es un ejemplo de por qué la correlación no es un detalle estadístico periférico. Puede cambiar cualitativamente la incertidumbre del resultado. La GUM señala precisamente que usar el mismo instrumento, patrón o dato de referencia puede introducir correlaciones significativas entre cantidades de entrada.[36]

Suma lineal y suma cuadrática responden a preguntas distintas. ¿Por qué a veces aparece

$$u_1 + u_2$$

y otras veces

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2}?$$

Porque no representan la misma estructura. Si dos contribuciones están completamente correlacionadas con el mismo signo, pueden combinarse linealmente en el caso especial correspondiente. Si son no correlacionadas, sus varianzas se combinan cuadráticamente.

Y si lo que tenemos no son incertidumbres estándar sino **cotas absolutas** del tipo

$$|\delta x_1| \le a, \qquad |\delta x_2| \le b,$$

entonces una cota conservadora para la suma puede ser

[36] JCGM 100:2008, GUM, §§5.2.4–5.2.5; una misma referencia, instrumento o influencia común puede inducir correlaciones significativas.

$$|\delta y| \le a + b.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{cota} \neq \text{incertidumbre estándar.}}$$

Mezclar ambos lenguajes produce fórmulas aparentemente contradictorias que en realidad responden a objetos matemáticos diferentes.

Producto: primera regla relativa. Consideremos ahora

$$Z = XY.$$

Perturbemos las entradas: $X \mapsto X + \delta X, \qquad Y \mapsto Y + \delta Y.$

Entonces

$$(X + \delta X)(Y + \delta Y) = XY + Y\delta X + X\delta Y + \delta X\delta Y.$$

Si las perturbaciones son pequeñas respecto de X e Y, el término

$$\delta X \delta Y$$

es de segundo orden y puede despreciarse en una aproximación de primer orden. Así, $\delta Z \approx Y\delta X + X\delta Y$. Dividiendo por $Z = XY$,

obtenemos

$$\frac{\delta Z}{Z} \approx \frac{\delta X}{X} + \frac{\delta Y}{Y}.$$

Por ello, cuando las entradas son no correlacionadas y la aproximación de primer orden es adecuada,

$$\boxed{\left(\frac{u_c(z)}{|z|}\right)^2 \approx \left(\frac{u(x)}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{|y|}\right)^2.}$$

La GUM proporciona esta estructura para productos de potencias bajo las hipótesis correspondientes.[37]

Cociente: el signo cambia en la perturbación, pero no en el caso no correlacionado. Sea

$$Z = \frac{X}{Y}.$$

Para perturbaciones pequeñas,

$$\frac{X + \delta X}{Y + \delta Y} \approx \frac{X}{Y}\left(1 + \frac{\delta X}{X} - \frac{\delta Y}{Y}\right).$$

Así,

[37] JCGM 100:2008, GUM, §5.1.6, ecuación (12), para productos de potencias con entradas no correlacionadas y en el régimen de propagación adoptado.

$$\frac{\delta Z}{Z} \approx \frac{\delta X}{X} - \frac{\delta Y}{Y}.$$

Si las entradas son no correlacionadas, al combinar varianzas el signo menos desaparece y obtenemos nuevamente

$$\boxed{\left(\frac{u_c(z)}{|z|}\right)^2 \approx \left(\frac{u(x)}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{|y|}\right)^2.}$$

Si existe correlación, el signo sí importa porque afecta al término cruzado.

Ejemplo: área de una placa. Sea

$$A = LW,$$

con

$$L = 1.200\,\mathrm{m}, \qquad u(L) = 0.005\,\mathrm{m},$$

$$W = 0.800\,\mathrm{m}, \qquad u(W) = 0.004\,\mathrm{m}.$$

El área estimada es $A = 0.960\,\mathrm{m}^2$. Si L y W pueden tratarse como no correlacionados y la aproximación de primer orden es adecuada,

$$\frac{u_c(A)}{A} \approx \sqrt{\left(\frac{0.005}{1.200}\right)^2 + \left(\frac{0.004}{0.800}\right)^2} \approx 6.51 \times 10^{-3}.$$

Entonces

$$u_c(A) \approx 0.960 \times 6.51 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \approx 0.00625\,\mathrm{m}^2.$$

De nuevo, no hemos establecido todavía cómo debe escribirse el resultado final; eso se hará en §8.

Diagnóstico: cuatro errores plausibles.

Error A — sumar todas las incertidumbres estándar.

«Siempre hay que sumar $u_1 + u_2 + \cdots$.»

No. Esa regla no representa el caso no correlacionado de la GUM.

Error B — aplicar siempre raíz de suma de cuadrados.

«Siempre hay que usar $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots}$.»

Tampoco. Si existen correlaciones significativas, deben incorporarse.

Error C — confundir independencia y ausencia de correlación. Para eliminar covarianzas basta la hipótesis de no correlación. La independencia es una condición más fuerte.

Error D — usar la regla relativa sin mirar el tamaño de las incertidumbres. Las fórmulas relativas de producto y cociente que acabamos de escribir son de primer orden. Si el modelo es fuertemente no lineal en la región relevante o las incertidumbres no son pequeñas, pueden ser insuficientes. Ésta será precisamente la transición a §7.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.13 — Sumar entradas sin sumar incertidumbres linealmente

Función pedagógica: `Cálculo → Diagnóstico`.

Una magnitud se modela por $Y = X + C$,
con

$$u(X) = 0.12\,\mathrm{V}, \qquad u(C) = 0.05\,\mathrm{V}.$$

Las entradas se consideran no correlacionadas.

1. Calcula $u_c(Y)$.
2. Compara con $0.12 + 0.05$.
3. Explica por qué ambos números no representan el mismo supuesto.

Solución

Como las entradas se modelan como no correlacionadas,

$$u_c(Y) = \sqrt{0.12^2 + 0.05^2}\,\mathrm{V} = 0.13\,\mathrm{V}.$$

La suma lineal sería

$$0.17\,\mathrm{V}.$$

No es la incertidumbre estándar combinada del modelo no correlacionado. Puede aparecer como cota conservadora en otro problema o como caso de correlación extrema con signos apropiados, pero no debe introducirse sin declarar ese modelo.

Ejercicio 3.14 — La corrección común que se cancela

Función pedagógica: `Modelización → Contraejemplo`.

Dos longitudes se modelan como $L_1 = A + C, \qquad L_2 = B + C,$
donde C es una corrección de calibración común. Queremos

$$D = L_1 - L_2.$$

1. Sustituye los modelos y simplifica D.
2. Explica por qué tratar L_1 y L_2 como entradas independientes puede sobrecontar la incertidumbre asociada a C.
3. ¿Qué enseñanza general deja el ejemplo sobre el presupuesto de incertidumbre?

Solución

Sustituyendo, $D = (A+C)-(B+C) = A-B$. La corrección común desaparece exactamente del modelo de la diferencia. Si primero construimos incertidumbres para L_1 y L_2 y después fingimos que ambas cantidades son independientes, perdemos la información de que comparten la misma contribución C.

La enseñanza es:

combinar incertidumbres exige conservar la estructura del modelo.

Ejercicio 3.15 — Producto y regla relativa

Función pedagógica: `Cálculo → Hipótesis → Autoexplicación`.

Una placa rectangular tiene

$$L = 2.00\,\mathrm{m}, \qquad u(L) = 0.01\,\mathrm{m},$$

$$W = 0.50\,\mathrm{m}, \qquad u(W) = 0.01\,\mathrm{m}.$$

Supón que L y W pueden tratarse como no correlacionados y que la aproximación de primer orden es adecuada.

1. Calcula $A = LW$.
2. Calcula $u_c(A)/A$.
3. Calcula $u_c(A)$.
4. Explica qué dos hipótesis hacen posible el paso de las incertidumbres de L y W a la fórmula utilizada.

Solución

El área es $A = (2.00)(0.50) = 1.00\,\mathrm{m}^2$.

Las incertidumbres relativas son

$$\frac{u(L)}{L} = \frac{0.01}{2.00} = 0.005,$$

$$\frac{u(W)}{W} = \frac{0.01}{0.50} = 0.020.$$

Por tanto,

$$\frac{u_c(A)}{A} \approx \sqrt{0.005^2 + 0.020^2} \approx 0.0206.$$

Y

$$u_c(A) \approx 1.00 \times 0.0206\,\mathrm{m}^2 = 0.0206\,\mathrm{m}^2.$$

Las hipótesis esenciales son:

1. las entradas se tratan como no correlacionadas;
2. la aproximación lineal de primer orden describe adecuadamente la propagación en la región de incertidumbre considerada.

Red: de la receta al modelo. El capítulo ha avanzado desde

medir

hasta

evaluar componentes

y ahora hasta

combinar componentes.

Pero la expresión general todavía está escondida detrás de los casos elementales.

En §7 haremos explícito el mecanismo matemático:

$$\boxed{\text{modelo no lineal} \to \text{linealización local} \to \text{coeficientes de sensibilidad} \to \text{propagación}.}$$

Eso permitirá comprender cuándo las reglas de esta sección son válidas, cómo se generalizan y cuándo pueden fallar.

7. Propagación mediante linealización

Intuir: una función no lineal puede parecer lineal si miramos suficientemente cerca.
En §6 aprendimos a combinar incertidumbres en modelos lineales como $Y = a_1X_1 + \cdots + a_NX_N$.

Pero muchos modelos físicos no son lineales:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

$$A = \pi r^2,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

o, más generalmente, $Y = f(X_1, \dots, X_N)$.

¿Cómo trasladamos entonces la incertidumbre de las entradas a la salida?

La idea matemática fundamental es local. Una función diferenciable puede aproximarse, cerca de un punto, mediante una función lineal. En una variable,

$$f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\,\delta x + \text{términos de orden superior.}$$

Si δx es suficientemente pequeño y la curvatura de f no domina en la región relevante, podemos escribir

$$\delta y \approx f'(x)\,\delta x.$$

Por tanto, la derivada no aparece aquí como un procedimiento formal aislado. Aparece porque mide **cuánto cambia localmente la salida cuando cambia una entrada**.

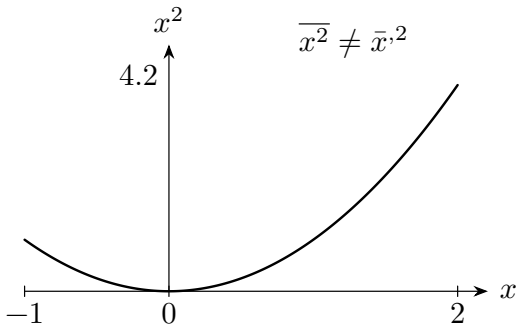


Figura 3.4. Para datos simétricos $x = \pm a$, la media de x es cero y la de x^2 vale a^2. Transformar la media y promediar los valores transformados son operaciones distintas. La derivada nula en el origen no elimina esta variación de segundo orden. Véase §7.

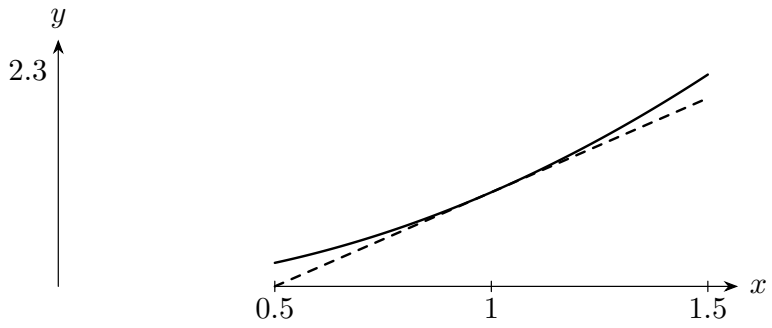


Figura 3.5. Para $y = x^2$, alrededor de $x_0 = 1$, la tangente $y = 1 + 2(x - 1)$ aproxima la función. El residuo exacto es $(x - 1)^2$; la propagación lineal requiere una banda suficientemente pequeña. Véase §7.

Principio 3.7 — Propagar incertidumbre exige propagar también el modelo Una incertidumbre no se transporta desde las entradas a la salida mediante una regla independiente de la relación física utilizada. Debemos propagar las variaciones a través del modelo de medición y declarar el régimen en el cual su aproximación local es adecuada.

Una variable: del cambio de entrada al cambio de salida. Sea

$$Y = f(X).$$

Supongamos que utilizamos una estimación

$$x$$

para la entrada y obtenemos $y = f(x)$. Si la entrada cambia en una pequeña cantidad δx, entonces, para una función diferenciable, $f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + R_2$,

donde R_2 representa los términos que la aproximación lineal omite. Si esos términos son pequeños frente al término lineal, $\delta y \approx f'(x)\delta x$. En términos de incertidumbre estándar, esto conduce al caso elemental

$$\boxed{u_c(y) \approx |f'(x)|\, u(x).}$$

La barra de valor absoluto aparece porque una incertidumbre estándar es no negativa. La derivada puede ser negativa; la incertidumbre estándar no.

Definir: coeficiente de sensibilidad. En un modelo multivariable

$$Y = f(X_1, \dots, X_N),$$

cada entrada puede influir de manera diferente sobre la salida. La GUM denomina **coeficiente de sensibilidad** a la derivada parcial del modelo respecto de una cantidad de entrada, evaluada en los valores utilizados para estimar la salida.[38]

Definición operativa 3.13 — Coeficiente de sensibilidad Para un modelo de medición

$$Y = f(X_1, \dots, X_N),$$

[38]JCGM 100:2008, §5.1.3: los coeficientes de sensibilidad se expresan mediante derivadas parciales del modelo evaluadas en las estimaciones de entrada.

definimos el **coeficiente de sensibilidad** asociado a la entrada X_i por

$$c_i = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_1=x_1,\dots,X_N=x_N}.$$

El coeficiente c_i mide, en la aproximación local de primer orden, cuánto cambia la salida cuando cambia la entrada X_i. Sus unidades importan. Si

$$[Y]$$

es la unidad dimensional de la salida y

$$[X_i]$$

la de la entrada, entonces $[c_i] = \frac{[Y]}{[X_i]}$.

Así, $c_i\, u(x_i)$

tiene la misma unidad que la salida. Este control dimensional es una herramienta útil para auditar una propagación.

La linealización multivariable. Sea

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$$

y sea

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$$

el punto formado por las estimaciones de entrada. Para pequeñas perturbaciones

$$\delta x_1, \dots, \delta x_N,$$

la expansión de primer orden da

$$f(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} c_i\, \delta x_i.$$

Por tanto,

$$\boxed{\delta y \approx \sum_{i=1}^{N} c_i\, \delta x_i.}$$

Esta ecuación es el puente entre cálculo diferencial y propagación de incertidumbre.

No dice todavía cómo se combinan estadísticamente las contribuciones. Para eso necesitamos además la información sobre las covarianzas entre las entradas.

Resultado formal: ley de propagación de primer orden. Proposición 3.3 — Ley de propagación de incertidumbre en la aproximación lineal de primer orden Sea

$$Y = f(X_1, \dots, X_N),$$

donde f es diferenciable en un entorno de las estimaciones

$$(x_1, \dots, x_N).$$

Definamos

$$c_i = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\mathbf{x}}.$$

Si la aproximación lineal de primer orden describe adecuadamente la variación de f en la región relevante de las entradas, entonces la incertidumbre estándar combinada de la salida se aproxima por

$$\boxed{u_c^2(y) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i<j} c_i c_j \, u(x_i, x_j).}$$

Si las entradas pueden tratarse como no correlacionadas, $u(x_i, x_j) = 0 \qquad (i \neq j)$,
y queda

$$\boxed{u_c^2(y) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i).}$$

Demostración. La linealización de primer orden produce $\delta y \approx \sum_{i=1}^{N} c_i \, \delta x_i$.
La varianza de una combinación lineal de contribuciones se obtiene sumando los términos diagonales y los términos cruzados:

$$u_c^2(y) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i<j} c_i c_j \, u(x_i, x_j).$$

Si las covarianzas entre entradas distintas son nulas, $u(x_i, x_j) = 0$,
desaparecen los términos cruzados y queda $u_c^2(y) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$.
Tomando la raíz cuadrada positiva obtenemos $u_c(y)$. □
Esta es la forma local de primer orden de la ley de propagación de incertidumbre utilizada por la GUM.[39]

Recuperar §6 como caso particular. La proposición anterior contiene a §6.
Si

$$Y = a_1 X_1 + \cdots + a_N X_N,$$

entonces $\frac{\partial Y}{\partial X_i} = a_i$. Por tanto, $c_i = a_i$

[39]JCGM 100:2008, §§5.1.2–5.1.5 y §5.2.2: ley de propagación de incertidumbre, primero para entradas no correlacionadas y luego incluyendo covarianzas.

y, para entradas no correlacionadas, $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 u^2(x_i)$. En un modelo lineal esta expresión no depende de una aproximación local de la función: la linealización coincide exactamente con el modelo. Ésta es una razón pedagógica para haber estudiado §6 antes de §7.

Ejemplo: densidad obtenida a partir de masa y volumen. Consideremos

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Supongamos $m = 250.0\,\mathrm{g}, \qquad u(m) = 0.2\,\mathrm{g},$
y

$$V = 100.0\,\mathrm{cm}^3, \qquad u(V) = 0.5\,\mathrm{cm}^3.$$

La estimación de densidad es

$$\rho = \frac{250.0}{100.0}\,\mathrm{g/cm}^3 = 2.500\,\mathrm{g/cm}^3.$$

Los coeficientes de sensibilidad son

$$c_m = \frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V},$$

y

$$c_V = \frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2}.$$

Evaluados en las estimaciones, $c_m = 0.0100\,\mathrm{cm}^{-3}$,
mientras

$$c_V = -0.0250\,\mathrm{g\,cm}^{-6}.$$

Las contribuciones estándar a la salida son

$$|c_m| u(m) = 0.0100 \times 0.2\,\mathrm{g/cm}^3 = 0.0020\,\mathrm{g/cm}^3,$$

y

$$|c_V| u(V) = 0.0250 \times 0.5\,\mathrm{g/cm}^3 = 0.0125\,\mathrm{g/cm}^3.$$

Si m y V pueden tratarse como no correlacionados,

$$u_c(\rho) \approx \sqrt{0.0020^2 + 0.0125^2}\,\mathrm{g/cm}^3 \approx 0.0127\,\mathrm{g/cm}^3.$$

Este cálculo muestra algo que una mera inspección de $u(m)$ y $u(V)$ no mostraba: la entrada dominante es el volumen, porque el modelo amplifica más su incertidumbre en las condiciones consideradas.

Un presupuesto con coeficientes de sensibilidad. La propagación puede organizarse en una tabla:

Entrada	Estimación	$u(x_i)$	c_i	$\lvert c_i\rvert u(x_i)$
m	$250.0\,\mathrm{g}$	$0.2\,\mathrm{g}$	$0.0100\,\mathrm{cm}^{-3}$	$0.0020\,\mathrm{g/cm}^3$
V	$100.0\,\mathrm{cm}^3$	$0.5\,\mathrm{cm}^3$	$-0.0250\,\mathrm{g\,cm}^{-6}$	$0.0125\,\mathrm{g/cm}^3$

La última columna permite comparar las contribuciones **ya expresadas en la escala de la salida**. No basta mirar qué entrada tiene la incertidumbre numéricamente mayor. Debemos mirar qué incertidumbre produce esa entrada **después de pasar por el modelo**.

Forma matricial: una estructura compacta. Definamos el vector de sensibilidades

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

y la matriz de covarianzas

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u^2(x_1) & u(x_1,x_2) & \cdots \\ u(x_2,x_1) & u^2(x_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Entonces la ley de propagación puede escribirse de forma compacta como

$$\boxed{u_c^2(y) \approx \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{U}\mathbf{c}.}$$

Esta escritura separa limpiamente dos estructuras:

- el **modelo local**, contenido en $\mathbf{c}$;
- la **estructura de incertidumbre y dependencia**, contenida en $\mathbf{U}$.

La física entra en ambas. El modelo decide qué cantidades intervienen y cómo; el diseño experimental y la información disponible deciden qué covarianzas son relevantes.

Producto y cociente recuperados mediante derivadas. En §6 anticipamos las reglas relativas. Ahora podemos derivarlas sistemáticamente.

Sea

$$Z = XY.$$

Entonces

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = Y, \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y} = X.$$

Si X y Y son no correlacionadas, $u_c^2(z) \approx y^2u^2(x) + x^2u^2(y)$.

Dividiendo por $z^2 = x^2y^2$,

obtenemos

$$\boxed{\left(\frac{u_c(z)}{|z|}\right)^2 \approx \left(\frac{u(x)}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{|y|}\right)^2.}$$

Para

$$Z = \frac{X}{Y},$$

los coeficientes son

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{1}{Y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = -\frac{X}{Y^2}.$$

El signo desaparece al cuadrar en el caso no correlacionado, y recuperamos la misma estructura relativa.

Potencias: por qué aparece el exponente. Sea

$$Y = X^n.$$

Entonces $\frac{dY}{dX} = nX^{n-1}$. Por tanto, $u_c(y) \approx |n|\,|x|^{n-1}u(x)$. Si $x \neq 0$ y $y = x^n$,

$$\boxed{\frac{u_c(y)}{|y|} \approx |n|\frac{u(x)}{|x|}.}$$

La regla no surge de memorizar que «el exponente baja».

Surge de la derivada del modelo. Por ejemplo, si

$$A = \pi r^2,$$

entonces $\frac{u_c(A)}{A} \approx 2\frac{u(r)}{r}$. Una incertidumbre relativa pequeña en el radio se amplifica aproximadamente por un factor 2 en el área.

¿Cuándo falla la linealización? Hasta ahora hemos repetido una condición:

> la aproximación de primer orden debe ser adecuada en la región relevante.

Debemos aprender a reconocer cuándo esta condición puede fallar.

Caso A — incertidumbre demasiado grande. Si $u(x)$ no es pequeño comparado con la escala sobre la cual cambia apreciablemente $f'(x)$, la curvatura de f puede importar.

Caso B — derivada casi nula. Sea

$$Y = X^2$$

cerca de

$$x = 0.$$

Entonces $f'(0) = 0$. La fórmula lineal daría

$$u_c(y) \approx 0.$$

Pero si X realmente fluctúa alrededor de cero, X^2 no es constante. El término cuadrático, que el primer orden descarta, es precisamente el término dominante.

Este ejemplo es decisivo:

derivada nula $\not\Rightarrow$ incertidumbre nula.

Significa que la aproximación lineal ha perdido la contribución principal.

Caso C — singularidades o fuertes no linealidades. En

$$Y = \frac{1}{X},$$

si la región de incertidumbre de X se aproxima demasiado a cero, la función cambia violentamente y una aproximación lineal puede ser insuficiente o incluso conceptualmente inadecuada. La GUM advierte que, cuando la no linealidad es significativa en la región de incertidumbre, deben considerarse términos de orden superior o métodos más adecuados.[40]

La enmienda **JCGM 100:2008/Amd.1:2026 — *Nonlinearity in measurement models*** hace esta frontera todavía más explícita: una no linealidad significativa puede exigir términos de orden superior de Taylor o un método de Monte Carlo, y puede afectar no sólo la evaluación de la incertidumbre de salida, sino también la propia estimación de la salida.[41]

Este capítulo no desarrolla esos métodos. La conclusión operativa es más modesta y más importante:

si el primer orden deja de representar el modelo, hay que detener la fórmula de primer orden.

Una prueba de estrés de la aproximación. Antes de aceptar una propagación lineal conviene preguntar:

1. ¿el modelo f es diferenciable alrededor de las estimaciones utilizadas?;
2. ¿las incertidumbres de entrada son pequeñas respecto de las escalas características del problema?;
3. ¿los coeficientes de sensibilidad cambian poco en la región relevante?;
4. ¿algún coeficiente de sensibilidad es casi nulo porque estamos cerca de un extremo o punto estacionario?;
5. ¿la región de incertidumbre se acerca a una singularidad o a un cambio abrupto del modelo?;
6. ¿las correlaciones relevantes están representadas?

Estas preguntas no producen automáticamente una respuesta cuantitativa, pero sirven como auditoría del uso del primer orden.

Regla de control 3.7-R1 — La derivada debe ser auditada en su región de uso Evaluar una derivada en un punto no basta. La propagación lineal presupone que esa derivada representa adecuadamente el comportamiento del modelo a lo largo de la región explorada por las incertidumbres de entrada.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.16 — Densidad: identificar la entrada dominante

Función pedagógica: `Modelo → Derivadas → Interpretación`.

Para

$$\rho = \frac{m}{V},$$

[40] JCGM 100:2008, §5.1.2 nota y §5.1.5: cuando la no linealidad del modelo es significativa en la región relevante, la aproximación lineal puede requerir términos de orden superior.

[41] JCGM 100:2008/Amd.1:2026, *Nonlinearity in measurement models*: añade una advertencia explícita sobre no linealidad significativa y remite, según el caso, a términos de orden superior o a propagación mediante Monte Carlo; también señala que la no linealidad puede afectar la evaluación de la estimación de salida.

se tienen

$$m = 500.0\,\mathrm{g}, \qquad u(m) = 0.5\,\mathrm{g},$$

$$V = 200.0\,\mathrm{cm}^3, \qquad u(V) = 2.0\,\mathrm{cm}^3.$$

Supón entradas no correlacionadas.

1. Calcula ρ.
2. Calcula los coeficientes de sensibilidad respecto de m y V.
3. Calcula las dos contribuciones estándar a la salida.
4. Calcula $u_c(\rho)$.
5. Decide qué entrada domina la incertidumbre y explica por qué no basta comparar 0.5 con 2.0.

Solución 3.16

El valor estimado es

$$\rho = \frac{500.0}{200.0} = 2.500\,\mathrm{g/cm}^3.$$

Los coeficientes son $c_m = \frac{1}{V} = 0.00500\,\mathrm{cm}^{-3}$,

y

$$c_V = -\frac{m}{V^2} = -\frac{500.0}{200.0^2} = -0.0125\,\mathrm{g\,cm}^{-6}.$$

Las contribuciones son

$$|c_m|u(m) = 0.00500 \times 0.5 = 0.00250\,\mathrm{g/cm}^3,$$

$$|c_V|u(V) = 0.0125 \times 2.0 = 0.0250\,\mathrm{g/cm}^3.$$

Por tanto,

$$u_c(\rho) \approx \sqrt{0.00250^2 + 0.0250^2}\,\mathrm{g/cm}^3 \approx 0.0251\,\mathrm{g/cm}^3.$$

La contribución del volumen domina aproximadamente por un factor 10.

Comparar directamente

$$0.5 \quad \text{y} \quad 2.0$$

no tiene sentido físico suficiente porque poseen unidades distintas y porque el modelo transforma cada incertidumbre con un coeficiente de sensibilidad diferente.

Ejercicio 3.17 — Una linealización que falla

Función pedagógica: `Contraejemplo → Diagnóstico → Límite de método`.

Considera

$$Y = X^2$$

y una estimación

$$x = 0$$

con incertidumbre estándar no nula

$$u(x) = 0.10.$$

1. Aplica mecánicamente la fórmula lineal de una variable.
2. Explica por qué el resultado obtenido no puede interpretarse como incertidumbre física nula de Y.
3. Identifica qué término de la expansión de Taylor se vuelve dominante.
4. Formula una regla práctica para detectar situaciones semejantes.

Solución 3.17

Como $f'(x) = 2x$,
en

$$x = 0$$

tenemos $f'(0) = 0$. La fórmula lineal produciría

$$u_c(y) \approx |f'(0)|u(x) = 0.$$

Sin embargo, $Y = X^2$
cambia cuando X se aparta de cero. La expansión exacta alrededor de cero es $f(0+\delta x) = (\delta x)^2$. El término lineal desaparece y el término cuadrático es el primer término no nulo. Por tanto, el cero obtenido no representa una ausencia real de incertidumbre: indica que la aproximación de primer orden es degenerada en ese punto.

Regla práctica:

si el gradiente es nulo o muy pequeño, comprobar términos de orden superior.

Cierre: del cálculo local al reporte físico. La arquitectura construida hasta aquí es:

modelo de medición $\rightarrow$ estimaciones de entrada
$\Downarrow$
incertidumbres y covarianzas
$\Downarrow$
coeficientes de sensibilidad $\rightarrow u_c(y)$.

Pero todavía falta una pregunta práctica decisiva:

> **¿cómo se escribe finalmente el resultado para no comunicar más información de la que realmente poseemos?**

Ése será el problema de §8.

Allí estudiaremos:

- redondeo de incertidumbres;
- coherencia entre el redondeo de la incertidumbre y el valor reportado;
- cifras significativas;
- notación con incertidumbre;
- falsa precisión.

El cálculo de incertidumbre no termina cuando aparece un decimal en la calculadora.

Termina cuando el resultado se comunica con una precisión compatible con la información disponible.

8. Cómo se reporta un resultado

Intuir: el cálculo no termina cuando aparece un número. Supongamos que, después de construir un modelo de medición y propagar las incertidumbres, obtenemos $y = 73.28741\,\mathrm{g}$ y

$$u_c(y) = 0.03617\,\mathrm{g}.$$

La calculadora ha terminado. La medición todavía no. Si escribimos

$$73.28741 \pm 0.03617\,\mathrm{g},$$

hemos conservado más dígitos de los que normalmente tienen sentido en un reporte final. Si escribimos solamente

$$73.3\,\mathrm{g},$$

hemos perdido la información que permite juzgar el alcance del resultado.

Reportar una medición es una operación científica: debemos conservar la información relevante y descartar la falsa precisión.

Principio 3.8 — El reporte final debe reflejar la información disponible, no la capacidad de la calculadora Durante los cálculos intermedios pueden conservarse dígitos de guarda. En el reporte final, el valor atribuido al mensurando y su incertidumbre deben redondearse de manera coherente y acompañarse de la información necesaria para interpretar qué significa la incertidumbre declarada.

La GUM recomienda precisamente evitar un número excesivo de dígitos en la estimación y en su incertidumbre, y redondear ambas de manera coherente.[42]

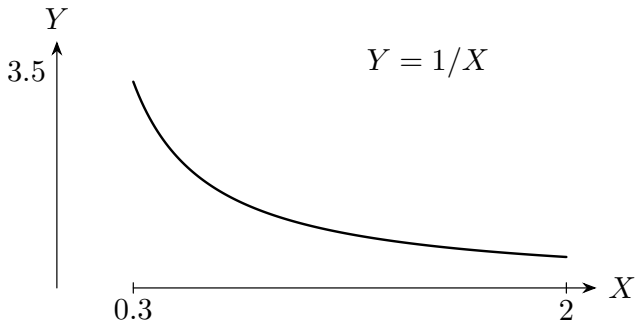


Figura 3.6. Un intervalo $X \in [1/2, 3/2]$ se transforma bajo $Y = 1/X$ en $Y \in [2/3, 2]$. Sus extremos quedan a distancias diferentes de $Y(1) = 1$. El ejemplo es un intervalo de valores admisibles, sin asignación de probabilidad. Véase §8.

[42] JCGM 100:2008, §7.2.6. Recomienda evitar un número excesivo de dígitos en y, $u_c(y)$ y U; usualmente bastan como máximo dos cifras significativas para las incertidumbres, con redondeo coherente de la estimación.

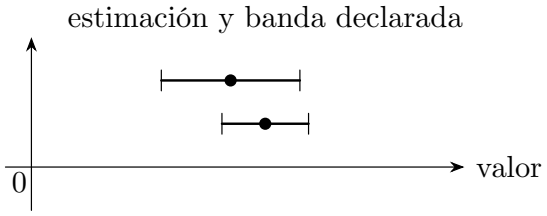


Figura 3.7. El punto es la estimación y el segmento representa el intervalo declarado. La superposición de bandas no prueba por sí sola igualdad de los valores verdaderos. Véase §8.

Dos niveles de incertidumbre que no deben confundirse. En §§5–7 hemos trabajado principalmente con incertidumbres estándar: $u(x)$

y con la incertidumbre estándar combinada

$$u_c(y).$$

Pero muchos certificados y reportes utilizan una **incertidumbre expandida**

$$U.$$

La relación típica es $U = k\,u_c(y)$,
donde

$$k$$

es un factor de cobertura.
No debemos leer

$$y \pm U$$

como si el símbolo $\pm$ explicara por sí solo el significado estadístico del intervalo. Para interpretar el reporte necesitamos saber, al menos, qué representa U, qué valor de k se utilizó y, cuando se declara una probabilidad o nivel de cobertura, cuál es su fundamento.[43]

Definir: incertidumbre expandida. Definición operativa 3.14 — Incertidumbre expandida Una **incertidumbre expandida** es una cantidad obtenida al multiplicar una incertidumbre estándar combinada por un factor de cobertura:

$$U = k\,u_c(y).$$

Se utiliza para construir un intervalo alrededor de la estimación de salida cuando el procedimiento de evaluación y el significado de cobertura han sido especificados.[44]

La unidad de U es la misma que la de y. Por ejemplo, si

$$u_c(y) = 0.036\,\mathrm{g}$$

y elegimos

[43] JCGM 100:2008, §§7.2.3–7.2.4. Para reportes con incertidumbre expandida, la GUM pide declarar U, el factor de cobertura k y, cuando se atribuye un nivel de confianza, la base utilizada.

[44] JCGM 200:2012 (VIM3), entrada sobre **expanded measurement uncertainty**.

$$k = 2,$$

entonces $U = 0.072\,\mathrm{g}$. Pero el número

$$k = 2$$

no significa automáticamente y sin más hipótesis «95 % exacto». La interpretación de cobertura depende de la distribución, los grados de libertad efectivos y el procedimiento utilizado. En tratamientos elementales es frecuente asociar $k \approx 2$ a una cobertura cercana al 95 % bajo condiciones aproximadamente normales y suficientemente bien justificadas, pero esa interpretación debe declararse como una aproximación, no como una identidad universal.[45]

Definir: factor de cobertura. Definición operativa 3.15 — Factor de cobertura El **factor de cobertura** k es el número por el cual se multiplica la incertidumbre estándar combinada para obtener una incertidumbre expandida:

$$U = k\,u_c(y).$$

Su valor debe acompañar el reporte cuando se utiliza U, salvo que el contexto documental ya lo defina inequívocamente.[46]

Esta definición separa dos objetos: $u_c(y)$ y U.

No podemos sumar o comparar directamente incertidumbres estándar e incertidumbres expandidas sin antes llevarlas a una escala común.

La notación $\pm$ no tiene una semántica universal. Consideremos

$$L = (24.60 \pm 0.05)\,\mathrm{cm}.$$

¿Qué significa

$$0.05\,\mathrm{cm}?$$

Podría representar:

- una incertidumbre estándar;
- una incertidumbre expandida;
- una semiamplitud de un intervalo de tolerancia;
- una cota conservadora;
- la mitad de una resolución instrumental;
- otra convención definida por quien reporta.

La escritura por sí sola no decide.

Por tanto:

$$\boxed{\pm \text{ es una notación, no una teoría de incertidumbre.}}$$

Un reporte científicamente interpretable debe declarar qué significa el número que sigue al símbolo. Por ejemplo, una forma clara es $m = (73.290 \pm 0.072)\,\mathrm{g}$,

seguida de

[45] JCGM 100:2008, §§6.2–6.3 y 7.2.3. La relación entre k, el intervalo expandido y una probabilidad de cobertura depende de las hipótesis estadísticas empleadas.

[46] JCGM 200:2012 (VIM3), entrada sobre **coverage factor**.

donde $0.072\,\mathrm{g}$ es la incertidumbre expandida U obtenida con $k = 2$.

Si además se atribuye una probabilidad de cobertura, debe explicarse cómo se obtuvo.[47]

Cifras significativas y posiciones decimales. Dos conceptos se confunden con frecuencia:

- **cifras significativas**;
- **posición decimal**.

El número 0.036

tiene dos cifras significativas: 3, 6. Su última cifra está en la posición de las milésimas. El número 73.290

tiene cinco cifras significativas y termina también en la posición de las milésimas. Esta coincidencia de posición decimal es precisamente lo que buscamos cuando reportamos

$$y = 73.290\,\mathrm{g}, \qquad u_c(y) = 0.036\,\mathrm{g}.$$

La incertidumbre determina qué posiciones del valor reportado siguen siendo informativas en el formato final. Eso no significa que el número de cifras significativas de una medición pueda inferirse únicamente mirando el instrumento. Tampoco significa que cada dígito de una expansión decimal tenga idéntica significación física.

Regla editorial del tratado para el redondeo final. Adoptaremos la siguiente política editorial para los ejemplos de este tratado.

1. **Durante los cálculos intermedios**, conservaremos suficientes dígitos de guarda para evitar que el redondeo temprano domine el resultado.
2. **En el reporte final**, la incertidumbre se expresará normalmente con **dos cifras significativas**.
3. El valor atribuido al mensurando se redondeará hasta la **misma posición decimal** que la incertidumbre reportada.
4. Si existe una razón metrológica o numérica para conservar más cifras, se declarará explícitamente.
5. Si se utiliza incertidumbre expandida, se reportará el factor de cobertura k y, cuando corresponda, el significado de cobertura.

Esta política es una convención editorial coherente con la recomendación general de la GUM de no reportar un número excesivo de dígitos; no debe confundirse con una ley matemática que obligue siempre a usar exactamente dos cifras significativas.[48]

Ejemplo: de los dígitos de cálculo al reporte. Retomemos

$$y = 73.28741\,\mathrm{g}$$

y

$$u_c(y) = 0.03617\,\mathrm{g}.$$

Primero redondeamos la incertidumbre estándar a dos cifras significativas: $u_c(y) \approx 0.036\,\mathrm{g}$. La última cifra está en milésimas de gramo. Por tanto, redondeamos el valor a la misma posición: $y \approx 73.287\,\mathrm{g}$.

---

[47] Taylor, B. N. y Kuyatt, C. E., *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*, NIST TN 1297, §7. La política de reporte exige identificar U y k o reportar u_c, y documentar el procedimiento de evaluación.

[48] JCGM 100:2008, §7.2.6. Recomienda evitar un número excesivo de dígitos en y, $u_c(y)$ y U; usualmente bastan como máximo dos cifras significativas para las incertidumbres, con redondeo coherente de la estimación.

El formato preferente de este tratado para una incertidumbre estándar será mantener separados el valor atribuido y su incertidumbre:

$$\boxed{m = 73.287\,\mathrm{g}, \qquad u_c(m) = 0.036\,\mathrm{g}.}$$

La GUM enumera también formas compactas con $\pm u_c$, pero recomienda evitar ese formato siempre que sea posible porque el símbolo $\pm$ se asocia tradicionalmente con intervalos de alta cobertura y puede confundirse con una incertidumbre expandida.[49]

Por tanto, si excepcionalmente se utiliza

$$m = (73.287 \pm 0.036)\,\mathrm{g},$$

debe declararse de forma inmediata que

$$0.036\,\mathrm{g} = u_c(m)$$

y que no se está afirmando por ello un intervalo expandido ni una probabilidad de cobertura. Si elegimos una incertidumbre expandida con

$$k = 2,$$

entonces, antes de redondear, $U = 2(0.03617)\,\mathrm{g} = 0.07234\,\mathrm{g}$.

Reportamos

$$U \approx 0.072\,\mathrm{g}$$

y, de nuevo, redondeamos el valor a milésimas:

$$\boxed{m = (73.287 \pm 0.072)\,\mathrm{g}, \qquad k = 2.}$$

El valor central no debe cambiar arbitrariamente de precisión entre dos reportes equivalentes.

No redondear demasiado pronto. Supongamos que debemos calcular

$$Q = abc$$

a partir de tres valores medidos. Si redondeamos agresivamente cada resultado intermedio, el error numérico introducido por nuestras propias operaciones puede llegar a ser comparable con la incertidumbre que intentamos evaluar.

Por eso distinguimos:

$$\boxed{\text{dígitos de trabajo} \neq \text{dígitos de reporte.}}$$

Los dígitos de trabajo existen para proteger el cálculo.

Los dígitos de reporte existen para comunicar la información físicamente justificada.

Esta separación evita dos extremos:

- redondear demasiado pronto;
- publicar todos los dígitos internos de la calculadora.

[49] JCGM 100:2008, §7.2.2, especialmente la nota asociada a los formatos de reporte de $u_c(y)$: la forma con $\pm$ está listada, pero se recomienda evitarla siempre que sea posible porque puede confundirse con un intervalo de alta cobertura o con una incertidumbre expandida.

Un cero final puede contener información. Comparemos

$$12\,\text{cm},$$

$$12.0\,\text{cm},$$

y

$$12.00\,\text{cm}.$$

Como números reales escritos en notación decimal ordinaria representan el mismo valor numérico: $12 = 12.0 = 12.00$. Pero en un reporte de medición pueden comunicar **distinto nivel de redondeo**. Si, por ejemplo, el contexto define explícitamente que $0.03\,\text{cm}$ es una incertidumbre expandida y escribimos

$$L = (12.00 \pm 0.03)\,\text{cm},$$

el cero final ayuda a mostrar que el valor se ha reportado hasta centésimas de centímetro. Sin embargo, no debemos inferir la incertidumbre completa a partir del número de decimales: $12.00\,\text{cm}$ por sí solo no nos dice si la incertidumbre es

$$0.01\,\text{cm}, \quad 0.03\,\text{cm}, \quad 0.20\,\text{cm},$$

u otro valor. La incertidumbre debe declararse o estar definida por el contexto documental.

Notación científica y coherencia. Para cantidades muy grandes o muy pequeñas, la notación científica puede hacer más visible la estructura del reporte. Por ejemplo, $R = (1.234 \pm 0.006) \times 10^6\,\Omega$ es preferible a escribir una larga cadena de ceros si esa forma facilita la comparación entre valor e incertidumbre.

Podemos factorizar la potencia de diez porque afecta por igual al valor y a la incertidumbre:

$$(1.234 \pm 0.006) \times 10^6 = 1.234 \times 10^6 \pm 0.006 \times 10^6.$$

El control dimensional sigue siendo obligatorio: $[y] = [u_c(y)] = [U]$. Una incertidumbre absoluta sin unidad, cuando la salida sí tiene dimensión física, es una señal inmediata de error de reporte.

Cifras significativas no equivalen a incertidumbre. Una regla escolar frecuente dice algo como:

> «el número de cifras significativas indica la precisión de la medida».

Como primera intuición puede servir para advertir contra la falsa precisión, pero es demasiado imprecisa para un tratamiento metrológico.

Un reporte completo debe distinguir:

valor, unidad, incertidumbre, tipo de incertidumbre, información de cobertura.

Dos resultados pueden tener el mismo número de cifras significativas y, sin embargo, incertidumbres muy diferentes. Y dos resultados con distinta cantidad de dígitos impresos pueden representar la misma calidad metrológica si utilizan unidades o escalas diferentes.

Por tanto:

$$\boxed{\text{cifras significativas} \not\equiv \text{incertidumbre de medición.}}$$

Plantilla mínima de reporte. Para este tratado utilizaremos tres niveles de reporte.

Nivel A — incertidumbre estándar. El formato canónico y preferente del tratado será

$$\boxed{Y = y, \qquad u_c(y) = u.}$$

La forma $Y = (y \pm u)\,[Y]$

está contemplada por la GUM si se identifica expresamente u como incertidumbre estándar combinada, pero aquí no será el formato ordinario porque puede confundirse con un intervalo expandido.[50]

Nivel B — incertidumbre expandida.

$$\boxed{Y = (y \pm U)\,[Y], \qquad U = k\,u_c(y), \qquad k = \text{valor declarado.}}$$

Nivel C — reporte metrológico completo. Además de lo anterior se incluyen, según corresponda:

- definición del mensurando;
- modelo de medición;
- principales componentes de incertidumbre;
- método de evaluación;
- factor de cobertura;
- nivel o probabilidad de cobertura y su fundamento;
- condiciones experimentales relevantes;
- trazabilidad o referencias documentales.

La GUM y NIST insisten en que el resultado debe ir acompañado por información suficiente para reconstruir el significado de la incertidumbre declarada.[51][52]

Diagnóstico: cuatro errores de reporte.

Error A — copiar todos los dígitos de la calculadora.

$$x = 2.483746192\,\mathrm{m}$$

cuando

$$u(x) = 0.03\,\mathrm{m}.$$

Los últimos dígitos no están respaldados por la incertidumbre.

Error B — redondear la incertidumbre pero no el valor.

$$x = 2.483746192\,\mathrm{m}, \qquad u(x) = 0.03\,\mathrm{m}.$$

El valor central debe redondearse de manera coherente: $x = 2.48\,\mathrm{m}, \qquad u(x) = 0.03\,\mathrm{m}.$

Error C — escribir $\pm$ sin explicar su significado.

$$x = (2.48 \pm 0.03)\,\mathrm{m}$$

es incompleto si no sabemos qué representa $0.03\,\mathrm{m}$.

---

[50] JCGM 100:2008, §7.2.2, especialmente la nota asociada a los formatos de reporte de $u_c(y)$: la forma con $\pm$ está listada, pero se recomienda evitarla siempre que sea posible porque puede confundirse con un intervalo de alta cobertura o con una incertidumbre expandida.

[51] JCGM 100:2008, §§7.2.3–7.2.4. Para reportes con incertidumbre expandida, la GUM pide declarar U, el factor de cobertura k y, cuando se atribuye un nivel de confianza, la base utilizada.

[52] Taylor, B. N. y Kuyatt, C. E., *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*, NIST TN 1297, §7. La política de reporte exige identificar U y k o reportar u_c, y documentar el procedimiento de evaluación.

Error D — atribuir una probabilidad universal a $k = 2$. No podemos escribir automáticamente

«$k = 2$ significa exactamente 95 %»

sin declarar el modelo y el fundamento de cobertura.

Práctica MA-PED. Ejercicio 3.18 — Convertir un cálculo en un reporte

Función pedagógica: `Cálculo → Redondeo → Interpretación`.

Un procedimiento produce $y = 18.37642\,\mathrm{V}$

y

$$u_c(y) = 0.08473\,\mathrm{V}.$$

1. Reporta $u_c(y)$ con dos cifras significativas.
2. Redondea y de manera coherente.
3. Escribe el reporte preferente del tratado para la incertidumbre estándar combinada y explica por qué no usaremos normalmente $\pm u_c$ como formato principal.
4. Si se adopta $k = 2$, calcula y reporta la incertidumbre expandida.

▪ **Solución**

1. Dos cifras significativas:

$$u_c(y) \approx 0.085\,\mathrm{V}.$$

2. La última cifra de la incertidumbre está en milésimas de volt:

$$y \approx 18.376\,\mathrm{V}.$$

3. El reporte preferente es

$$\boxed{y = 18.376\,\mathrm{V}, \qquad u_c(y) = 0.085\,\mathrm{V}.}$$

La forma compacta

$$y = (18.376 \pm 0.085)\,\mathrm{V}$$

requeriría aclarar inmediatamente que $0.085\,\mathrm{V}$ es $u_c(y)$. No la utilizamos como formato principal porque $\pm$ puede confundirse con la notación habitual de una incertidumbre expandida.

4. Antes del redondeo final,

$$U = 2(0.08473)\,\mathrm{V} = 0.16946\,\mathrm{V}.$$

Con dos cifras significativas, $U \approx 0.17\,\mathrm{V}$. La última cifra está en centésimas, de modo que

$$y \approx 18.38\,\mathrm{V}.$$

Un reporte expandido coherente es

$$\boxed{y = (18.38 \pm 0.17)\,\mathrm{V}, \qquad k = 2.}$$

El cambio en la cantidad de decimales del valor central no representa un cambio físico del resultado; responde a la escala de la incertidumbre que estamos reportando.

Ejercicio 3.19 — ¿Qué significa realmente el símbolo $\pm$?

Función pedagógica: `Diagnóstico → Contraejemplo → Comunicación`.

Se encuentran tres reportes:

$$A = (5.40 \pm 0.05)\,\mathrm{cm},$$

$$B = (5.40 \pm 0.05)\,\mathrm{cm},$$

$$C = (5.40 \pm 0.05)\,\mathrm{cm}.$$

En el informe de A, 0.05 cm es una incertidumbre estándar combinada. En el informe de B, 0.05 cm es una incertidumbre expandida con $k = 2$. En el informe de C, 0.05 cm es sólo la semiamplitud de una tolerancia especificada.

1. ¿Son metrológicamente equivalentes los tres reportes?
2. ¿Qué información adicional necesita cada uno?
3. Explica por qué la notación $\pm$ no basta para identificar la incertidumbre.

▪ **Solución**

1. No. La expresión impresa es idéntica, pero los números que siguen a $\pm$ representan objetos diferentes.
2. Para A debe declararse que se trata de

$$u_c(A) = 0.05\,\mathrm{cm}.$$

Para B debe declararse

$$U = 0.05\,\mathrm{cm}, \qquad k = 2,$$

y, si se asigna una probabilidad de cobertura, debe indicarse su fundamento. Para C debe indicarse que

$$0.05\,\mathrm{cm}$$

es una tolerancia o cota, no una incertidumbre estándar. Si se quisiera convertirla en una incertidumbre estándar sería necesario añadir un modelo probabilístico o una regla de evaluación justificable.

3. El símbolo

$$\pm$$

sólo expresa una forma simétrica de escritura alrededor de un valor central. La semántica del número asociado proviene del procedimiento de medición y del reporte, no del símbolo.

Red: lo que debe sobrevivir al cálculo. El flujo completo de §§5–8 puede resumirse como

fuentes de información → incertidumbres estándar
⇓
modelo → propagación
⇓
$u_c(y)$ → decisión de cobertura
⇓
reporte.

Cada flecha añade estructura. El resultado final no es simplemente «el número al que llegó la cuenta». Es una afirmación cuantitativa cuyo alcance puede ser interpretado por otra persona.

En §9 introduciremos la **incertidumbre relativa**, que permitirá comparar resultados de escalas muy diferentes sin perder de vista la diferencia entre incertidumbre absoluta y relativa.

---

9. Incertidumbre relativa y comparación de escalas

Intuir: la misma incertidumbre absoluta puede significar cosas muy diferentes. Comparemos dos resultados:

$$L_1 = 100.0\,\text{cm}, \qquad u(L_1) = 0.1\,\text{cm},$$

y

$$L_2 = 1.0\,\text{cm}, \qquad u(L_2) = 0.1\,\text{cm}.$$

En ambos casos la incertidumbre estándar absoluta es la misma: 0.1 cm. Pero su importancia física no es la misma. En el primer caso representa una parte pequeña del valor medido; en el segundo, una fracción mucho mayor. La comparación natural no es entonces sólo

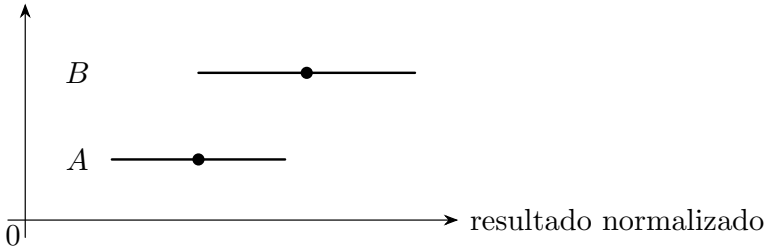


Figura 3.8. Los dos intervalos dibujados se solapan. Ese hecho geométrico no equivale por sí solo a una prueba de compatibilidad estadística: hacen falta el significado de las barras, las correlaciones y el criterio declarado. Véase §9.

$$u(L_1) \quad \text{frente a} \quad u(L_2),$$

sino

$$\frac{u(L_1)}{|L_1|} \quad \text{frente a} \quad \frac{u(L_2)}{|L_2|}.$$

Obtenemos $\frac{0.1}{100.0} = 0.001$
y

$$\frac{0.1}{1.0} = 0.1.$$

Es decir, $0.1\,\%$
frente a

$$10\,\%.$$

La incertidumbre absoluta responde a la pregunta

¿cuál es la escala de variación expresada en las unidades de la magnitud?

La incertidumbre relativa responde a otra:

¿qué fracción del tamaño del valor estimado representa esa incertidumbre?

Ambas preguntas son legítimas. No son intercambiables.

Definir: incertidumbre estándar relativa. La GUM utiliza la incertidumbre estándar relativa como el cociente entre una incertidumbre estándar y el valor absoluto de la estimación correspondiente, siempre que esa estimación no sea cero.[53]

Definición operativa 3.16 — Incertidumbre estándar relativa Sea una estimación no nula

$$x \neq 0$$

con incertidumbre estándar

$$u(x).$$

Definimos su **incertidumbre estándar relativa** por

$$\boxed{u_r(x) = \frac{u(x)}{|x|}.}$$

Es una cantidad adimensional. Puede expresarse como fracción, porcentaje o, cuando resulte útil, en partes por millón u otra escala adimensional equivalente. La barra de valor absoluto garantiza que

$$u_r(x) \geq 0.$$

Por ejemplo, si

$$x = 250.0\,\mathrm{g}, \qquad u(x) = 0.5\,\mathrm{g},$$

entonces $u_r(x) = \frac{0.5}{250.0} = 0.002 = 0.2\,\%$.

[53] JCGM 100:2008, §5.1.6 y notas asociadas a la forma relativa de la ley de propagación; la incertidumbre estándar relativa se obtiene normalizando una incertidumbre estándar por la magnitud de la estimación no nula correspondiente.

Una cantidad adimensional no significa una cantidad sin interpretación. Como $[u(x)] = [x]$,
el cociente

$$\frac{u(x)}{|x|}$$

no tiene dimensión física. Pero que sea adimensional no significa que carezca de significado. El valor

$$0.002$$

puede leerse como 2×10^{-3},
como $0.2\,\%$,
o como 2000 partes por millón.
Son distintas escalas de presentación para la misma razón adimensional. La elección depende del contexto.

La incertidumbre relativa es invariante ante un cambio exacto de unidad. Supongamos que cambiamos de unidad mediante un factor exacto

$$a \neq 0.$$

Entonces $x' = ax$.
Como a es exacto, $u(x') = |a|u(x)$. Por tanto,

$$u_r(x') = \frac{u(x')}{|x'|} = \frac{|a|u(x)}{|a||x|} = \frac{u(x)}{|x|}.$$

Así,

$$\boxed{u_r(x') = u_r(x).}$$

Si una longitud se expresa en metros o centímetros mediante una conversión exacta, su incertidumbre absoluta cambia numéricamente con la unidad, pero su incertidumbre relativa no. Por ejemplo, $L = 1.000\,\mathrm{m}, \qquad u(L) = 0.001\,\mathrm{m}$
se convierte en

$$L = 100.0\,\mathrm{cm}, \qquad u(L) = 0.1\,\mathrm{cm},$$

y en ambos casos

$$u_r(L) = 0.001.$$

Esta invariancia hace especialmente útil a la incertidumbre relativa para comparar escalas.

Comparar instrumentos y procedimientos. Supongamos dos procedimientos para medir longitudes distintas:

Resultado	Incertidumbre estándar	Incertidumbre relativa
$L_A = 2.000\,\mathrm{m}$	$u(L_A) = 0.002\,\mathrm{m}$	$0.1\,\%$
$L_B = 20.0\,\mathrm{mm}$	$u(L_B) = 0.1\,\mathrm{mm}$	$0.5\,\%$

Mirando sólo las incertidumbres absolutas, $0.002\,\mathrm{m}$
y

$$0.1\,\mathrm{mm}$$

no pueden compararse de manera informativa sin considerar las escalas de las magnitudes. Al normalizar, $u_r(L_A) = 0.001$,
mientras

$$u_r(L_B) = 0.005.$$

En relación con el tamaño de lo medido, el primer resultado tiene una incertidumbre relativa menor. Pero esta comparación tiene un límite conceptual importante: una incertidumbre relativa menor no convierte automáticamente un procedimiento en «mejor» en todos los sentidos. La adecuación depende también del mensurando, el intervalo de trabajo, los sesgos, la trazabilidad, la resolución necesaria y el propósito de la medición.

El problema del cero. La definición

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{|x|}$$

requiere

$$x \neq 0.$$

Si

$$x = 0,$$

el cociente no está definido. Y si

$$x$$

es muy pequeño comparado con

$$u(x),$$

la incertidumbre relativa puede hacerse muy grande. Por ejemplo, $x = 0.002\,\mathrm{V}$, $u(x) = 0.010\,\mathrm{V}$
da $u_r(x) = 5 = 500\,\%$.

No hay ninguna contradicción matemática. El resultado nos está diciendo que la escala de la incertidumbre es varias veces mayor que el valor estimado. Sin embargo, en problemas donde el valor de interés puede atravesar cero, la incertidumbre relativa puede dejar de ser una forma estable o útil de resumen.

Prueba de estrés — No dividir mecánicamente por un valor cercano a cero La incertidumbre relativa es una normalización por $|x|$. Si x es cero no está definida; si $|x|$ es muy pequeño, puede amplificar enormemente la razón. En esos casos debe conservarse la incertidumbre absoluta y analizarse el problema físico antes de interpretar porcentajes.

De §7 a una regla relativa para productos. En §7 obtuvimos, para

$$Z = XY,$$

con entradas no correlacionadas, $u_c^2(z) \approx y^2 u^2(x) + x^2 u^2(y)$.
Si

$$z = xy \neq 0,$$

dividimos por $z^2 = x^2 y^2$
y obtenemos

$$\left(\frac{u_c(z)}{|z|}\right)^2 \approx \left(\frac{u(x)}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{|y|}\right)^2.$$

Es decir,

$$\boxed{u_r^2(z) \approx u_r^2(x) + u_r^2(y)}$$

bajo las hipótesis declaradas. La aparente simplicidad de esta expresión no debe ocultar su origen: es la ley de propagación de primer orden aplicada a un modelo multiplicativo.

Potencias: el exponente amplifica la incertidumbre relativa. Sea

$$Y = X^a$$

en una región donde la función sea diferenciable y

$$x \neq 0.$$

Entonces $\frac{\partial Y}{\partial X} = aX^{a-1}$. La propagación de primer orden da $u_c(y) \approx |a|\,|x|^{a-1} u(x)$
en el caso real donde la expresión esté bien definida.
Como $|y| = |x^a|$,
obtenemos, localmente,

$$\boxed{u_r(y) \approx |a|\, u_r(x).}$$

Así, para un cuadrado, $u_r(x^2) \approx 2u_r(x)$,
y para una raíz cuadrada, $u_r(\sqrt{x}) \approx \frac{1}{2} u_r(x)$,
siempre dentro del régimen donde la linealización sea adecuada.

Resultado formal: monomios y propagación relativa. Proposición 3.4 — Propagación relativa de primer orden en un modelo monomial Considérese

$$Z = C\prod_{i=1}^{N} X_i^{a_i},$$

donde $C \neq 0$ es exacta, los exponentes a_i son constantes y el modelo es diferenciable en un entorno de las estimaciones no nulas

$$x_i \neq 0.$$

Si la aproximación lineal de primer orden es adecuada, entonces

$$\boxed{\frac{u_c^2(z)}{z^2} \approx \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2} + 2\sum_{i<j} a_i a_j \frac{u(x_i,x_j)}{x_i x_j}.}$$

Si además las entradas pueden tratarse como no correlacionadas, $u(x_i, x_j) = 0 \qquad (i \neq j)$, entonces

$$\boxed{u_r^2(z) \approx \sum_{i=1}^{N} a_i^2 u_r^2(x_i).}$$

Demostración. Para

$$Z = C\prod_{i=1}^{N} X_i^{a_i},$$

la derivada parcial respecto de X_i es

$$\frac{\partial Z}{\partial X_i} = a_i \frac{Z}{X_i}.$$

Por tanto, el coeficiente de sensibilidad evaluado en las estimaciones es $c_i = a_i \frac{z}{x_i}$. Sustituyendo en la proposición 3.3,

$$u_c^2(z) \approx \sum_i \left(a_i \frac{z}{x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i<j}\left(a_i \frac{z}{x_i}\right)\left(a_j \frac{z}{x_j}\right) u(x_i,x_j).$$

Factorizando z^2,

$$u_c^2(z) \approx z^2\left[\sum_i a_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2} + 2\sum_{i<j} a_i a_j \frac{u(x_i,x_j)}{x_i x_j}\right].$$

Como $z \neq 0$, dividimos por z^2 y obtenemos la primera fórmula. Si las covarianzas entre entradas distintas son nulas, desaparecen los términos cruzados y queda

$$\frac{u_c^2(z)}{z^2} \approx \sum_i a_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}.$$

Por la definición definición 3.16,

$$u_r^2(z) \approx \sum_i a_i^2 u_r^2(x_i). \qquad \square$$

La GUM presenta esta forma relativa para productos de potencias como consecuencia de la ley de propagación bajo las hipótesis correspondientes.[54]

Ejemplo: densidad y contribuciones relativas. Para

$$\rho = \frac{m}{V},$$

los exponentes son $a_m = 1$, $a_V = -1$. Si masa y volumen son no correlacionados, $u_r^2(\rho) \approx u_r^2(m) + u_r^2(V)$. Tomemos

$$m = 250.0\,\mathrm{g}, \qquad u(m) = 0.2\,\mathrm{g},$$

y

$$V = 100.0\,\mathrm{cm}^3, \qquad u(V) = 0.5\,\mathrm{cm}^3.$$

Entonces

$$u_r(m) = \frac{0.2}{250.0} = 8.0 \times 10^{-4} = 0.08\,\%,$$

mientras

$$u_r(V) = \frac{0.5}{100.0} = 5.0 \times 10^{-3} = 0.50\,\%.$$

Por tanto,

$$u_r(\rho) \approx \sqrt{(8.0 \times 10^{-4})^2 + (5.0 \times 10^{-3})^2} \approx 5.06 \times 10^{-3}.$$

Es decir, $u_r(\rho) \approx 0.51\,\%$. La comparación relativa muestra inmediatamente que la contribución del volumen domina el presupuesto.

¿Cuándo conviene usar incertidumbre absoluta y cuándo relativa? No existe una regla que obligue a elegir una sola representación. La incertidumbre absoluta

$$u(x)$$

es indispensable porque conserva la escala y la unidad física de la magnitud. La incertidumbre relativa

$$u_r(x)$$

es especialmente útil para:

- comparar resultados de escalas muy diferentes;
- analizar productos, cocientes y potencias;
- identificar contribuciones dominantes en términos porcentuales;
- expresar especificaciones proporcionales;

[54] JCGM 100:2008, §5.1.6, ecuación (12): forma relativa de la ley de propagación para un producto de potencias bajo las hipótesis indicadas.

- comparar el rendimiento relativo de procedimientos cuando esa comparación es físicamente pertinente.

Una buena práctica es conservar ambas cuando aportan información distinta. Por ejemplo,

$$x = 12.000\,\mathrm{V}, \qquad u(x) = 0.006\,\mathrm{V},$$

contiene información de escala que no aparece en

$$u_r(x) = 0.0005 = 0.05\,\%.$$

Y el porcentaje permite una comparación que la cifra

$$0.006\,\mathrm{V}$$

por sí sola no ofrece.

Espacio de ejemplos y no-ejemplos.

Ejemplo A — Comparación legítima. Dos masas:

$$m_1 = 100.0\,\mathrm{g}, \qquad u(m_1) = 0.2\,\mathrm{g},$$

$$m_2 = 10.00\,\mathrm{g}, \qquad u(m_2) = 0.05\,\mathrm{g}.$$

Entonces $u_r(m_1) = 0.2\,\%$, $u_r(m_2) = 0.5\,\%$. La segunda medición tiene mayor incertidumbre relativa aunque su incertidumbre absoluta sea menor.

No-ejemplo B — Dividir por cero. Si

$$x = 0,$$

no escribimos

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{0}.$$

La incertidumbre relativa no está definida.

No-ejemplo C — Confundir porcentaje con probabilidad. Si

$$u_r(x) = 2\,\%,$$

esto no significa que exista una «probabilidad del 98 % de que el valor sea correcto». El 2 % expresa una razón entre la incertidumbre estándar y la magnitud de la estimación. No es, por sí mismo, una probabilidad de cobertura.

Ejercicio 3.20 — Misma incertidumbre absoluta, distinta escala. 3.20 Se obtienen dos longitudes:

$$L_A = 50.0\,\mathrm{cm}, \qquad u(L_A) = 0.2\,\mathrm{cm},$$

y

$$L_B = 5.00\,\mathrm{cm}, \qquad u(L_B) = 0.2\,\mathrm{cm}.$$

1. Calcula las incertidumbres estándar relativas.
2. Exprésalas en porcentaje.
3. Explica por qué la igualdad de las incertidumbres absolutas no implica igual calidad relativa.

Solución ejercicio 3.20 Para L_A,

$$u_r(L_A) = \frac{0.2}{50.0} = 0.004 = 0.4\,\%.$$

Para L_B, $u_r(L_B) = \frac{0.2}{5.00} = 0.04 = 4\,\%$. Aunque ambas incertidumbres absolutas valen 0.2 cm, en el segundo resultado esa escala representa una fracción diez veces mayor del valor medido. Por ello la comparación relativa distingue situaciones que la incertidumbre absoluta, aislada, no distingue.

Ejercicio 3.21 — Una ley de potencias. 3.21 Una magnitud se modela por

$$Q = C\frac{A^2 B}{D^3},$$

donde C es exacta y A, B y D pueden tratarse como no correlacionadas. Se conocen

$$u_r(A) = 1.0\,\%, \qquad u_r(B) = 2.0\,\%, \qquad u_r(D) = 0.5\,\%.$$

Calcula la incertidumbre estándar relativa aproximada de Q mediante proposición 3.4.

Solución ejercicio 3.21 Los exponentes son

$$a_A = 2, \qquad a_B = 1, \qquad a_D = -3.$$

Por proposición 3.4,

$$u_r^2(Q) \approx 2^2 u_r^2(A) + 1^2 u_r^2(B) + (-3)^2 u_r^2(D).$$

En forma decimal,

$$u_r^2(Q) \approx 4(0.010)^2 + (0.020)^2 + 9(0.005)^2.$$

Por tanto,

$$u_r^2(Q) \approx 0.0004 + 0.0004 + 0.000225 = 0.001025.$$

Luego

$$u_r(Q) \approx \sqrt{0.001025} \approx 0.0320.$$

Es decir,

$$\boxed{u_r(Q) \approx 3.2\,\%.}$$

Obsérvese que el signo negativo del exponente de D desaparece al elevarlo al cuadrado en el caso no correlacionado. Eso no significa que el signo carezca siempre de importancia: en presencia de covarianzas, los productos $a_i a_j$ de los términos cruzados sí conservan información de signo.

Cierre conceptual. En esta sección hemos pasado de una escala absoluta a una escala normalizada: $u(x) \longrightarrow u_r(x) = \frac{u(x)}{|x|}$. La normalización permite comparar resultados de tamaños distintos y revela la estructura especialmente simple de los modelos multiplicativos.

Pero también introduce una nueva condición de uso: $x \neq 0$. Por eso no debemos convertir automáticamente toda incertidumbre en un porcentaje. La forma relativa es una herramienta de modelización y comparación, no un sustituto universal de la incertidumbre absoluta.

Con esta distinción cerramos el bloque dedicado a la medición y su incertidumbre. A partir de §10 cambiaremos de problema: ya no preguntaremos sólo cómo evaluar un resultado medido, sino cómo construir una **estimación física razonada** cuando los datos son incompletos y el objetivo es identificar la escala correcta del fenómeno.

---

10. Estimación física y órdenes de magnitud

Intuir: estimar no es adivinar. Consideremos la pregunta:

¿Qué masa de agua contiene aproximadamente una piscina rectangular?

Una respuesta como

«unas cien toneladas»

puede acertar por casualidad y, sin embargo, no constituir todavía una estimación física. Para estimar necesitamos mostrar **cómo** llegamos al número. Supongamos una piscina de dimensiones aproximadas

$$25\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}.$$

Su volumen es del orden de

$$V \sim 25 \times 10 \times 2\,\mathrm{m}^3 = 5 \times 10^2\,\mathrm{m}^3.$$

Si adoptamos para el agua la escala

$$\rho \sim 10^3\,\mathrm{kg/m}^3,$$

entonces

$$m \sim \rho V \sim (10^3)(5 \times 10^2)\,\mathrm{kg} = 5 \times 10^5\,\mathrm{kg}.$$

El valor es aproximado, pero su procedencia es auditable. Podemos discutir las dimensiones elegidas, la profundidad representativa, la densidad utilizada y la precisión pretendida. Ésta es la diferencia fundamental entre **adivinar** y **estimar**.

Definir: estimación física. Definición operativa 3.17 — Estimación física Una **estimación física** es una inferencia cuantitativa aproximada obtenida a partir de un modelo simplificado, escalas representativas, datos aproximados o cotas plausibles, de modo que las hipótesis empleadas y la precisión pretendida permanezcan explícitas.

Una estimación no exige conocer todos los detalles del sistema. Exige, en cambio, distinguir entre lo que sabemos, lo que suponemos y lo que estamos despreciando. Podemos resumir el proceso por

pregunta $\longrightarrow$ modelo simplificado $\longrightarrow$ escalas $\longrightarrow$ cálculo $\longrightarrow$ control.

Principio 3.9 — Una estimación debe exponer su modelo Un número aproximado sólo se convierte en una estimación física controlable cuando deja visibles las cantidades intermedias, las escalas adoptadas y las simplificaciones que conducen al resultado.

Qué problema resuelve una estimación. La medición y la estimación responden a problemas distintos. En una medición disponemos de un procedimiento experimental y queremos caracterizar un resultado junto con su incertidumbre. En una estimación, en cambio, puede faltar una medición directa o puede ser innecesaria para la pregunta planteada. Queremos saber, por ejemplo, si una energía está más cerca de 10^3 que de 10^{12} J, si un tiempo característico es de segundos, horas o años, o si el resultado detallado de un cálculo numérico es físicamente plausible.

La estimación es entonces una herramienta de **orientación cuantitativa**. No sustituye una medición cuando se necesita medir ni un cálculo detallado cuando el problema exige precisión fina.

El modelo simplificado es la parte principal. Supongamos que queremos estimar el número de granos contenidos en un recipiente. Una estrategia posible es escribir

$$N \sim \frac{V_{\text{recipiente}}}{V_{\text{grano}}}.$$

Esta expresión no es todavía un cálculo. Es una **decisión de modelización**. Estamos suponiendo implícitamente, entre otras cosas, que existe un volumen representativo para cada grano y que los huecos entre granos pueden incorporarse como un factor de orden uno o ignorarse si sólo buscamos una escala gruesa.

El número final dependerá de las cifras introducidas, pero la calidad de la estimación depende primero de si esta descomposición representa adecuadamente el fenómeno para el propósito buscado.

Escalas representativas. En una estimación rara vez necesitamos comenzar con muchos dígitos. Podemos escribir

$$L \sim 3\,\text{m},$$

$$t \sim 10^2\,\text{s},$$

o

$$v \sim 20\,\text{m/s}$$

cuando ésas son las escalas que el problema justifica. La notación

$$Q \sim \widetilde{Q}$$

se utilizará aquí informalmente para expresar que $\widetilde{Q}$ representa una escala o valor aproximado razonable para Q. No debe confundirse con una igualdad exacta ni con una relación asintótica formal.

Estimación de valor y orden de magnitud. Una estimación puede conservar más información que su orden de magnitud. Por ejemplo, $Q \sim 8 \times 10^6$

es una estimación de valor.

Decir únicamente que Q es del orden de

$$10^7$$

es una afirmación más gruesa. Perdemos deliberadamente el factor 8 y conservamos sólo la escala decimal dominante. Por tanto,

$$\boxed{\text{valor estimado} \neq \text{orden de magnitud.}}$$

Definir: orden de magnitud. La expresión «orden de magnitud» se utiliza con más de una convención en la literatura. Para evitar ambigüedad, este tratado adoptará una convención explícita.

Definición operativa 3.18 — Orden de magnitud decimal Sea $q > 0$ el valor numérico de una cantidad expresada en una unidad previamente fijada. Definimos su **orden de magnitud decimal** como la potencia de diez más cercana **en escala logarítmica**:

$$\mathrm{OM}(q) = 10^n,$$

donde

$$n = \left\lfloor \log_{10} q + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Si $q = 10^{n+1/2}$, el empate se resuelve a favor de la potencia superior, coherentemente con la función piso indicada. Equivalentemente, $\mathrm{OM}(q) = 10^n$

cuando

$$10^{n-\frac{1}{2}} \leq q < 10^{n+\frac{1}{2}}.$$

Por ejemplo, $\mathrm{OM}(8 \times 10^6) = 10^7$,

mientras

$$\mathrm{OM}(2 \times 10^6) = 10^6.$$

Convención editorial Algunos textos utilizan «orden de magnitud» para referirse simplemente a la potencia 10^n que fija la década $10^n \leq q < 10^{n+1}$. Aquí no adoptaremos esa convención. Cuando necesitemos hablar de la década decimal lo diremos explícitamente.

Una sutileza: las cantidades dimensionales necesitan una unidad declarada. Consideremos una longitud

$$L = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

La misma longitud puede escribirse

$$L = 3\,\mathrm{mm}.$$

El valor numérico ha cambiado. Por tanto, no tiene sentido asignar un orden de magnitud al **número desnudo** asociado a una cantidad dimensional sin indicar la unidad utilizada. Debemos decir, por ejemplo,

el valor numérico de L expresado en metros es del orden de 10^{-3},

o trabajar con una cantidad adimensional.

Así,

el orden de magnitud de una cantidad dimensional requiere una convención de unidad.

Control dimensional de una estimación. Una estimación debe respetar las dimensiones físicas.

Supongamos que intentamos estimar una energía mediante $E \sim mv$.

Entonces $[mv] = MLT^{-1}$,

que no tiene dimensión de energía. La estimación falla antes de introducir números. En cambio, $E \sim mv^2$

posee dimensión

$$ML^2T^{-2}.$$

Esto no demuestra que la ley física exacta sea $E = mv^2$. Sólo demuestra que la expresión ha superado un filtro necesario.

Control rápido Antes de evaluar numéricamente una estimación, comprueba que la combinación propuesta tiene las dimensiones de la magnitud buscada.

Falsa precisión en una estimación. Supongamos una tasa aproximada

$$r \sim 17\,\text{min}^{-1}$$

y un tiempo exacto de conversión

$$T = 365 \times 24 \times 60\,\text{min}.$$

La calculadora puede producir

$$rT = 8\,935\,200.$$

Pero si $17\,\text{min}^{-1}$ era sólo una tasa representativa, el resultado no contiene siete cifras de información física. Una presentación coherente puede ser

$$N \sim 9 \times 10^6,$$

o, si sólo interesa la escala, $\text{OM}(N) = 10^7$. La calculadora multiplica dígitos. No multiplica conocimiento.

Estimar antes de calcular con detalle. Una estimación preliminar cumple una función diagnóstica.

Supongamos que un cálculo detallado produce $Q = 4.7 \times 10^{11}\,\text{J}$,

mientras un razonamiento elemental había situado la escala esperada alrededor de

$$10^5\,\text{J}.$$

La discrepancia de seis órdenes de magnitud no demuestra automáticamente que el cálculo detallado sea erróneo. Pero obliga a revisar unidades, potencias de diez, conversiones, modelo,

parámetros introducidos e hipótesis de la estimación preliminar. Una buena estimación actúa como **control de plausibilidad**.

Qué precisión debe pretender una estimación. La precisión buscada depende de la pregunta. Si queremos decidir entre

$$10^{-3}$$

y

$$10^{6},$$

un factor dos es irrelevante. Si queremos distinguir entre 1.1 y 1.2, una estimación de orden de magnitud es insuficiente.

Por tanto, antes de estimar conviene preguntar:

¿qué decisión debe permitirnos el resultado?

La precisión útil no se determina por el número de operaciones disponibles, sino por la escala de la pregunta.

Ejercicio 3.22 — Del modelo al orden de magnitud. Función pedagógica: `Construcción → Control dimensional → Orden de magnitud`

Una piscina rectangular tiene aproximadamente

$$25\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}.$$

Usa

$$\rho_{\mathrm{agua}} \sim 10^{3}\,\mathrm{kg/m^{3}}.$$

1. Estima el volumen.
2. Estima la masa de agua.
3. Determina el orden de magnitud decimal de la masa usando definición 3.18.
4. Explica por qué escribir muchos decimales no mejoraría la estimación.

Solución

$$V \sim 25 \times 10 \times 2 = 500\,\mathrm{m^{3}} = 5 \times 10^{2}\,\mathrm{m^{3}}.$$

Entonces $m \sim \rho V \sim (10^{3})(5 \times 10^{2}) = 5 \times 10^{5}\,\mathrm{kg}$.

Como $5 \times 10^{5} > 10^{5.5}$,

la potencia de diez más cercana es

$$\boxed{\mathrm{OM}(m) = 10^{6}\,\mathrm{kg}}$$

cuando el valor numérico se expresa en kilogramos.

Los datos han sido introducidos como escalas aproximadas. Añadir decimales al resultado final no añadiría información sobre esas aproximaciones.

Ejercicio 3.23 — El orden de magnitud y la unidad. Función pedagógica: `Diagnóstico → No-ejemplo → Autoexplicación`

Una longitud se escribe como $L = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$. La misma longitud puede escribirse como $L = 3\,\mathrm{mm}$. Un estudiante afirma: «La longitud cambió de orden de magnitud al cambiar de metros a milímetros». Analiza la afirmación.

Solución

La cantidad física no ha cambiado. Lo que ha cambiado es su **valor numérico respecto de la unidad elegida**. En metros, $\frac{L}{1\,\mathrm{m}} = 3 \times 10^{-3}$,

mientras en milímetros, $\frac{L}{1\,\mathrm{mm}} = 3$. Por eso una afirmación sobre orden de magnitud de una cantidad dimensional debe especificar la unidad o normalización utilizada. Una formulación correcta sería: «el valor numérico de L expresado en metros está en la escala de 10^{-3}».

Cierre: estimar es construir una explicación cuantitativa. Una estimación física bien construida contiene más que un número. Contiene

$$\boxed{\text{modelo} + \text{escalas} + \text{cálculo} + \text{control.}}$$

En esta sección hemos fijado la base.

En §11 estudiaremos una estrategia particularmente poderosa para problemas donde la cantidad buscada debe reconstruirse a partir de varios factores accesibles:

$$\boxed{\text{estimaciones tipo Fermi.}}$$

Después, en §12, analizaremos cómo someter esas estimaciones a pruebas de robustez, cotas y caminos independientes.

11. Estimaciones tipo Fermi

Intuir: una cantidad difícil puede descomponerse. Hay preguntas cuantitativas para las que no disponemos de un dato directo:

¿Cuántas respiraciones realiza aproximadamente una persona en un año?

Podríamos intentar recordar una cifra publicada. Pero también podemos reconstruir la respuesta a partir de cantidades más accesibles. Tomemos una frecuencia respiratoria representativa

$$f \sim 15\,\mathrm{min}^{-1}.$$

Un año contiene aproximadamente

$$T \sim 365 \times 24 \times 60\,\mathrm{min} \approx 5.3 \times 10^{5}\,\mathrm{min}.$$

Entonces

$$N \sim fT \sim (15)(5.3 \times 10^{5}) \sim 8 \times 10^{6}.$$

Con la convención definición 3.18, $\mathrm{OM}(N) = 10^{7}$. La idea esencial no es la cifra final. Es la descomposición

$$\boxed{\text{respiraciones} = \frac{\text{respiraciones}}{\text{minuto}} \times \frac{\text{minutos}}{\text{año}}.}$$

La cantidad difícil ha sido sustituida por factores más accesibles.

Definir: estimación tipo Fermi. Definición operativa 3.19 — Estimación tipo Fermi Una **estimación tipo Fermi** es una estimación física en la que una cantidad difícil de conocer directamente se reconstruye mediante una descomposición en factores, cocientes o escalas más accesibles, cada uno evaluado con la precisión necesaria para la pregunta planteada.

En forma esquemática, $Q = q_1 q_2 \cdots q_r$

puede estimarse mediante

$$Q \sim \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \cdots \tilde{q}_r.$$

La estructura puede incluir también cocientes:

$$Q \sim \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2}{\tilde{q}_3}.$$

Lo decisivo es que el modelo permanezca visible. Una estimación tipo Fermi no es una licencia para elegir números arbitrarios. Es una estrategia para **reemplazar una incógnita global por varias incógnitas locales más manejables**.

Del problema al árbol de factores. Antes de introducir números conviene construir un árbol conceptual.

Supongamos que queremos estimar el número de vasos de agua consumidos por una población en un día. Una posible descomposición es

$$N_{\text{vasos}} \sim N_{\text{personas}} \times \frac{\text{L}}{\text{persona}\,\text{día}} \times \frac{\text{vasos}}{\text{L}}.$$

Cada factor responde una pregunta distinta:

1. ¿cuántas personas intervienen?;
2. ¿qué consumo diario por persona adoptamos?;
3. ¿cuántos vasos corresponden aproximadamente a un litro?

La estimación completa es una red de decisiones pequeñas.

Pausa de modelización Antes de calcular, escribe la descomposición simbólica y comprueba que cada factor tenga una interpretación física propia y aporte información no duplicada.

El control dimensional funciona también como control semántico. En una estimación de Fermi, las unidades pueden detectar una descomposición mal construida. En el ejemplo anterior,

$$\left[N_{\text{personas}} \times \frac{\text{L}}{\text{persona}\,\text{día}} \times \frac{\text{vasos}}{\text{L}}\right] = \frac{\text{vasos}}{\text{día}}.$$

Las unidades intermedias

$$\text{persona}$$

y

$$\text{L}$$

se cancelan.

Esto no demuestra que los valores representativos sean correctos, pero confirma que el producto responde a la pregunta dimensional formulada.

Una cadena con unidades que no se cancelan como esperamos suele señalar:

- un factor ausente;

- un factor invertido;
- una doble contabilización;
- una pregunta mal formulada.

Potencias de diez: la aritmética de escalas. Supongamos que

$$q_i \sim a_i 10^{n_i},$$

con

$$1 \leq a_i < 10.$$

Entonces $Q = \prod_{i=1}^{r} q_i$
se estima como

$$Q \sim \left(\prod_{i=1}^{r} a_i \right) 10^{\sum_{i=1}^{r} n_i}.$$

La parte exponencial se controla mediante una suma:

$$\boxed{10^{n_1} 10^{n_2} \cdots 10^{n_r} = 10^{n_1+n_2+\cdots+n_r}.}$$

En forma logarítmica, **si Q y q_i representan sus valores numéricos positivos expresados en unidades coherentes previamente fijadas**, $\log_{10} |Q| = \sum_{i=1}^{r} \log_{10} |q_i|$. Por eso una estimación multiplicativa puede pensarse como una **contabilidad aditiva de exponentes**. No tomamos el logaritmo de una cantidad dimensional: los logaritmos de esta igualdad actúan sobre valores numéricos con sus unidades ya declaradas (definición 3.18).

Esta observación es especialmente útil para hacer cálculos mentales de escala.

Los coeficientes de orden uno todavía importan. No debemos confundir «trabajar con potencias de diez» con «borrar todos los coeficientes».

Supongamos $Q \sim (5 \times 10^2)(4 \times 10^3)$. Si conservamos los coeficientes, $Q \sim 20 \times 10^5 = 2 \times 10^6$. Con la convención definición 3.18, $\mathrm{OM}(Q) = 10^6$. Si reemplazáramos prematuramente ambos factores por 10^3
y

$$10^4,$$

obtendríamos

$$10^7,$$

una escala diferente. Por tanto, una buena estimación de orden de magnitud no consiste en redondear cada factor brutalmente antes de multiplicar. Conviene conservar suficientes coeficientes de orden uno hasta el final y determinar entonces la potencia de diez más cercana.

Ejemplo desarrollado: cuánta lluvia cae sobre una manzana urbana. Queremos estimar el volumen de agua que cae sobre una manzana de aproximadamente

$$100\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$$

durante una lluvia acumulada de

$$20\,\mathrm{mm}.$$

Primero convertimos

$$20\,\mathrm{mm} = 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}.$$

El área es

$$A \sim 10^2\,\mathrm{m} \times 10^2\,\mathrm{m} = 10^4\,\mathrm{m}^2.$$

El volumen de precipitación es

$$V \sim Ah \sim (10^4)(2 \times 10^{-2})\,\mathrm{m}^3 = 2 \times 10^2\,\mathrm{m}^3.$$

Como $1\,\mathrm{m}^3 = 10^3\,\mathrm{L}$,
obtenemos $V \sim 2 \times 10^5\,\mathrm{L}$. La estimación nos sitúa en la escala de cientos de miles de litros. No hemos modelado desagües, evaporación, superficies permeables ni geometría real de la manzana. Eso no invalida el cálculo.

Define el alcance de la pregunta que realmente hemos contestado:

> volumen total de precipitación equivalente sobre una superficie horizontal de esa escala.

Un factor debe representar una sola idea. Un error frecuente consiste en introducir dos factores que contienen la misma información.

Supongamos que estimamos el consumo diario de agua de un edificio mediante

$$N_{\text{personas}} \times \frac{\mathrm{L}}{\text{persona}\,\text{día}}.$$

Si el valor de

$$\frac{\mathrm{L}}{\text{persona}\,\text{día}}$$

ya incluye duchas, cocina y limpieza, no debemos multiplicar después por un nuevo «factor de duchas» como si aportara información adicional no contenida ya en el consumo agregado. Eso produciría una doble contabilización.

Prueba de estrés — ¿Este factor añade información nueva? Antes de incorporar un factor a una estimación, pregunta si representa una dependencia nueva o si ya está contenida en otro valor agregado.

Descomponer hasta que los factores sean estimables. Una descomposición es útil si transforma una pregunta difícil en preguntas que podemos contestar razonablemente. Si escribimos

$$Q \sim AB,$$

pero tanto

$$A$$

como

$$B$$

son tan desconocidos como

$$Q,$$

no hemos ganado mucho.

La descomposición debe continuar hasta llegar a cantidades para las que podamos:

- recordar una escala razonable;
- inferir una escala geométricamente;
- obtener una cota sencilla;
- utilizar una constante física conocida;
- formular un valor representativo defendible.

El objetivo no es maximizar el número de factores. Es maximizar la **auditabilidad** del razonamiento.

Demasiados factores pueden ocultar el problema. Una cadena larga parece sofisticada: $Q \sim q_1 q_2 q_3 \cdots q_{12}$. Pero cada factor introduce una nueva decisión. Si muchos de ellos son débilmente conocidos, la aparente precisión del producto puede ser ilusoria.

Por eso una estimación Fermi debe buscar un equilibrio:

suficiente descomposición para poder estimar + suficiente simplicidad para poder auditar.

La cuestión de cuánto pueden acumularse los factores inciertos será tratada sistemáticamente en §12.

Fermi no significa necesariamente "producto". La estructura multiplicativa es frecuente, pero no obligatoria.

Podemos encontrar modelos como

$$Q \sim \frac{A}{B},$$

$$Q \sim A + B,$$

o

$$Q \sim A(B - C).$$

Lo importante es construir una relación que conecte la cantidad buscada con cantidades más accesibles. Por ejemplo, para estimar un tiempo de llenado, $t \sim \frac{V}{\dot{V}}$,

donde

$$V$$

es un volumen y

$$\dot{V}$$

un caudal.

Las unidades verifican:

$$\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^3/\mathrm{s}} = \mathrm{s}.$$

Una estimación Fermi no es una evaluación GUM de incertidumbre. En §§5–9 trabajamos con incertidumbres estándar, covarianzas, propagación y reporte metrológico.

Aquí hacemos otra cosa. Cuando decimos que un factor es «aproximadamente»

$$2$$

o que podría variar «por un factor del orden de dos», no estamos declarando automáticamente:

- una desviación estándar;
- una distribución de probabilidad;
- una probabilidad de cobertura;
- una incertidumbre expandida.

Por tanto,

$$\boxed{\text{factor de plausibilidad en una estimación Fermi} \neq \text{incertidumbre estándar.}}$$

Podemos conectar ambos lenguajes sólo si construimos explícitamente un modelo probabilístico o metrológico adicional. Esta separación evita importar de manera ilegítima la semántica de §5–§9 a un problema de estimación gruesa.

Ejercicio 3.24 — Respiraciones en un año. Función pedagógica: `Descomposición → Escalas → Orden de magnitud`

Estima el número de respiraciones de una persona en un año usando: $f \sim 15\,\mathrm{min}^{-1}$.

1. Construye primero la descomposición simbólica.
2. Calcula una estimación de valor.
3. Determina su orden de magnitud decimal según la definición 3.18.
4. Explica qué información adicional necesitarías para convertir este ejercicio en un problema metrológico de incertidumbre.

Solución

La descomposición es $N \sim fT$. Un año contiene aproximadamente

$$T = 365 \times 24 \times 60\,\mathrm{min} \approx 5.26 \times 10^5\,\mathrm{min}.$$

Entonces

$$N \sim (15)(5.26 \times 10^5) \approx 7.9 \times 10^6.$$

Por definición 3.18,

$$\boxed{\mathrm{OM}(N) = 10^7.}$$

Para una evaluación metrológica necesitaríamos especificar qué población o persona se estudia, cómo se mide la frecuencia respiratoria, su variabilidad, el modelo temporal, las fuentes de incertidumbre y la interpretación probabilística correspondiente. El valor representativo $15\,\mathrm{min}^{-1}$ no contiene por sí solo esa información.

Ejercicio 3.25 — Agua caída sobre un campo. Función pedagógica: `Modelo geométrico → Conversión → Control dimensional`

Un campo rectangular mide aproximadamente

$$100\,\mathrm{m} \times 50\,\mathrm{m}.$$

Durante una tormenta caen

$$30\,\mathrm{mm}$$

de precipitación acumulada.

1. Estima el volumen total de agua que corresponde a esa precipitación.
2. Exprésalo en metros cúbicos y litros.
3. Determina el orden de magnitud del número de litros.
4. Identifica dos procesos físicos que este modelo no intenta describir.

Solución

El área es

$$A \sim (100)(50)\,\mathrm{m}^2 = 5 \times 10^3\,\mathrm{m}^2.$$

La altura de precipitación es $h = 30\,\mathrm{mm} = 3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$. Por tanto,

$$V \sim Ah = (5 \times 10^3)(3 \times 10^{-2})\,\mathrm{m}^3 = 1.5 \times 10^2\,\mathrm{m}^3.$$

Como $1\,\mathrm{m}^3 = 10^3\,\mathrm{L}$,
resulta $V \sim 1.5 \times 10^5\,\mathrm{L}$.
Según definición 3.18,

$$\boxed{\mathrm{OM}(V) = 10^5\,\mathrm{L}.}$$

El modelo no intenta describir, por ejemplo, infiltración, escorrentía, evaporación, almacenamiento superficial ni variaciones espaciales de la lluvia. Calcula el volumen de precipitación equivalente sobre el área geométrica indicada.

Cierre: descomponer para poder pensar. Una estimación tipo Fermi transforma

una pregunta global difícil

en

varias preguntas locales manejables.

Su arquitectura mínima es

cantidad buscada → descomposición
⇓
factores estimables → cálculo de escala
⇓
control dimensional y conceptual.

Hemos aprendido a construir la estimación.
Todavía falta una pregunta decisiva:

¿cuánto cambia la conclusión si nuestras escalas cambian?

Ése será el problema de §12:

robustez, cotas y estimación por caminos independientes.

12. Robustez, cotas y estimación por caminos independientes

Intuir: una estimación no termina en el número central. Supongamos que una estimación tipo Fermi produce $Q \sim 8 \times 10^5$.
Podemos calcular su orden de magnitud y obtener

$$\mathrm{OM}(Q) = 10^6.$$

Pero todavía falta una pregunta esencial:

¿seguiríamos llegando a la misma conclusión si cambiáramos razonablemente las hipótesis?

Una estimación física no sólo debe producir una escala.
Debe permitirnos estudiar cuánto depende esa escala de las elecciones introducidas.
Éste es el problema de la **robustez**. La pregunta deja de ser simplemente

¿cuánto vale aproximadamente Q?

y pasa a ser

¿qué parte de la conclusión sobrevive cuando variamos las premisas?

Factores de variación. Sea una cantidad positiva estimada mediante

$$\widetilde{Q} = C \prod_{i=1}^{N} \tilde{q}_i^{a_i},$$

donde

$$C > 0$$

es exacta para el modelo y

$$\tilde{q}_i > 0.$$

Supongamos ahora que el valor real de cada factor relevante no se conoce exactamente, pero podemos defender una cota multiplicativa

$$\frac{\tilde{q}_i}{f_i} \leq q_i \leq f_i \tilde{q}_i,$$

con

$$f_i \geq 1.$$

Decir, por ejemplo, que

$$f_i = 2$$

significa:

> para el propósito de esta estimación, considero plausible que el factor esté entre la mitad y el doble del valor representativo.

Esta afirmación es una **cota multiplicativa de plausibilidad**.
No es, por sí sola, una desviación estándar ni una probabilidad de cobertura.

Resultado formal: acumulación de factores multiplicativos. Proposición 3.5 — Cota multiplicativa acumulada para un modelo monomial Sea

$$Q = C \prod_{i=1}^{N} q_i^{a_i},$$

con

$$C > 0, \qquad q_i > 0,$$

y sea

$$\widetilde{Q} = C \prod_{i=1}^{N} \tilde{q}_i^{a_i}.$$

Si para cada entrada existe

$$f_i \geq 1$$

tal que

$$\frac{1}{f_i} \leq \frac{q_i}{\tilde{q}_i} \leq f_i,$$

entonces

$$\boxed{\frac{1}{F} \leq \frac{Q}{\widetilde{Q}} \leq F,}$$

donde

$$\boxed{F = \prod_{i=1}^{N} f_i^{|a_i|}.}$$

Demostración. Definamos

$$r_i = \frac{q_i}{\tilde{q}_i}.$$

Por hipótesis, $\frac{1}{f_i} \leq r_i \leq f_i$.
Además,

$$\frac{Q}{\widetilde{Q}} = \prod_{i=1}^{N} r_i^{a_i}.$$

Si

$$a_i \geq 0,$$

entonces $f_i^{-|a_i|} \leq r_i^{a_i} \leq f_i^{|a_i|}$.
Si

$$a_i < 0,$$

la inversión intercambia los extremos, pero vuelve a obtenerse

$$f_i^{-|a_i|} \leq r_i^{a_i} \leq f_i^{|a_i|}.$$

Multiplicando todas las desigualdades positivas,

$$\prod_i f_i^{-|a_i|} \leq \prod_i r_i^{a_i} \leq \prod_i f_i^{|a_i|}.$$

Como $\prod_i r_i^{a_i} = \frac{Q}{\widetilde{Q}}$,
y

$$F = \prod_i f_i^{|a_i|},$$

resulta

$$\frac{1}{F} \leq \frac{Q}{\widetilde{Q}} \leq F. \qquad \square$$

Proposición 3.5 no es una ley probabilística. Es una afirmación determinista sobre **cotas multiplicativas declaradas**.

El ejemplo $2^5 = 32$. Supongamos un producto de cinco factores: $Q = q_1 q_2 q_3 q_4 q_5$. Si cada uno se conoce sólo dentro de un factor

$$2,$$

entonces proposición 3.5 da $F = 2^5 = 32$. Por tanto,

$$\frac{\widetilde{Q}}{32} \leq Q \leq 32\widetilde{Q}.$$

Un factor individual de dos puede parecer pequeño.
Cinco factores de dos no lo son.

Como $32 > 10$,
la acumulación ya permite un desplazamiento superior a una década decimal completa.

Ésta es una razón para preferir descomposiciones con pocos factores relevantes y para no introducir factores débilmente conocidos sin necesidad.

La visión logarítmica. Tomando logaritmos en la proposición 3.5,

$$\left|\log_{10}\left(\frac{Q}{\widetilde{Q}}\right)\right| \leq \log_{10} F.$$

Como $F = \prod_i f_i^{|a_i|}$,
tenemos

$$\boxed{\log_{10} F = \sum_i |a_i| \log_{10} f_i.}$$

Así, las incertidumbres multiplicativas de escala se vuelven aditivas en el espacio logarítmico.

Esta fórmula muestra qué factores dominan la fragilidad de una estimación:

- factores con gran
$$f_i;$$
- factores elevados a exponentes de gran módulo
$$|a_i|.$$

La estructura recuerda la propagación relativa de §9, pero no debe confundirse con ella: aquí trabajamos con **cotas multiplicativas**, no con varianzas.

¿Cuándo es robusto el orden de magnitud? Recordemos definición 3.18. Fijada una unidad Q_0 de la misma dimensión que Q, el orden de magnitud decimal del valor numérico Q/Q_0 cambia cuando su logaritmo cruza una frontera de la forma $n + \frac{1}{2}$. Supongamos que nuestra estimación central es $\widetilde{Q} > 0$
y que proposición 3.5 garantiza

$$\frac{\widetilde{Q}}{F} \leq Q \leq F\widetilde{Q}.$$

En escala logarítmica, el valor verdadero debe encontrarse dentro de

$$\log_{10}\left(\frac{\widetilde{Q}}{Q_0}\right) \pm \log_{10} F.$$

Por tanto, el orden de magnitud queda garantizado si todo ese intervalo permanece dentro de una misma celda

$$\left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right).$$

Éste es un criterio más preciso que decir simplemente:

«los factores parecen pequeños».

Prueba de robustez del orden de magnitud 1. Calcula el orden central según la definición 3.18. 2. Construye una cota multiplicativa total F. 3. Comprueba si el intervalo

$$[\widetilde{Q}/F,\ F\widetilde{Q}]$$

cruza alguna frontera entre órdenes de magnitud. 4. Si no la cruza, la conclusión de orden de magnitud es robusta respecto de esas cotas.

Ejemplo: una escala robusta pese a una cota amplia. Consideremos una ciudad con

$$N \sim 5 \times 10^5$$

habitantes.

Supongamos que el consumo diario por persona está entre

$$100$$

y

$$400\,\mathrm{L/persona/día}.$$

Entonces

$$V_{\text{mín}} = (5 \times 10^5)(10^2) = 5 \times 10^7\,\mathrm{L/día},$$

mientras

$$V_{\text{máx}} = (5 \times 10^5)(4 \times 10^2) = 2 \times 10^8\,\mathrm{L/día}.$$

Tenemos $5 \times 10^7 \le V \le 2 \times 10^8$. Con definición 3.18, $\mathrm{OM}(5 \times 10^7) = 10^8$ y

$$\mathrm{OM}(2 \times 10^8) = 10^8.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{OM}(V) = 10^8\,\mathrm{L/día}}$$

es robusto frente a toda la variación declarada. La cifra central puede cambiar mucho. La conclusión de escala no.

Cuando la cota cruza una frontera. Supongamos, en cambio, $3 \times 10^6 \le Q \le 8 \times 10^7$. El extremo inferior está cerca de la frontera entre los órdenes

$$10^6$$

y

$$10^7,$$

mientras el superior pertenece claramente a la escala de

$$10^8$$

según la definición 3.18. En ese caso no debemos fingir un único orden de magnitud robusto. Una comunicación más fiel es conservar la cota:

$$\boxed{3 \times 10^6 \lesssim Q \lesssim 8 \times 10^7.}$$

Cotar puede transmitir más información que forzar una única potencia de diez.

Cotas asimétricas. No toda incertidumbre de escala tiene que ser simétrica alrededor de un valor representativo.

Podemos saber, por ejemplo, que

$$q_{\text{mín}} \le q \le q_{\text{máx}},$$

sin que exista un único factor

$$f$$

razonable que describa ambas direcciones. En ese caso debemos propagar directamente los extremos si el modelo es monótono en las variables pertinentes. Para

$$Q = AB,$$

con

$$A_{\text{mín}} \le A \le A_{\text{máx}},$$

y

$$B_{\text{mín}} \le B \le B_{\text{máx}},$$

si todas las cantidades son positivas, $A_{\text{mín}}B_{\text{mín}} \le Q \le A_{\text{máx}}B_{\text{máx}}$.

Las cotas deben seguir la estructura real del modelo.

No es obligatorio convertir todo problema en un porcentaje simétrico.

Dos caminos hacia la misma cantidad. Una estimación puede ser internamente consistente y, sin embargo, apoyarse en una hipótesis equivocada. Una forma poderosa de control consiste en construir la misma cantidad mediante otro modelo. Por ejemplo, estimemos el volumen corporal de una persona adulta.

Camino A — masa y densidad. Tomemos

$$m \sim 70\,\text{kg}$$

y una densidad corporal media de escala comparable a la del agua: $\rho \sim 10^3\,\text{kg/m}^3$. Entonces

$$V_A \sim \frac{m}{\rho} \sim \frac{70}{10^3}\,\text{m}^3 = 7 \times 10^{-2}\,\text{m}^3.$$

Camino B — geometría gruesa. Tomemos una altura

$$h \sim 1.7\,\mathrm{m}$$

y un área transversal representativa

$$A \sim 4 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2.$$

Entonces

$$V_B \sim Ah \sim (4 \times 10^{-2})(1.7)\,\mathrm{m}^3 \sim 7 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3.$$

Dos modelos muy distintos conducen a la misma escala.

Eso aumenta la credibilidad de la conclusión.

Principio 3.10 — Dos rutas independientes son una herramienta diagnóstica Cuando una cantidad puede estimarse mediante dos descomposiciones conceptualmente distintas, la concordancia de escalas refuerza la plausibilidad del resultado; una discrepancia grande señala que al menos una ruta, un dato o una hipótesis debe ser revisado.

"Independientes" no significa independencia estadística. La palabra **independientes** en el principio 3.10 no tiene aquí el significado probabilístico utilizado al hablar de variables aleatorias. Queremos rutas que compartan la menor cantidad posible de supuestos estructurales. Por ejemplo, $V \sim \frac{m}{\rho}$

y

$$V \sim Ah$$

usan ideas diferentes. En cambio, dos cálculos que reutilizan el mismo consumo por persona expresado en unidades distintas no constituyen dos caminos conceptualmente independientes. Por tanto,

$$\boxed{\text{independencia de rutas de estimación} \neq \text{independencia estadística.}}$$

La discrepancia es información. Supongamos que dos rutas producen

$$Q_A \sim 3 \times 10^4$$

y

$$Q_B \sim 5 \times 10^8.$$

La diferencia de más de cuatro órdenes de magnitud no debe resolverse promediando: $\frac{Q_A+Q_B}{2}$. Eso ocultaría el problema.

La discrepancia debe desencadenar una auditoría:

- ¿las dos rutas calculan realmente la misma magnitud?;
- ¿hay una conversión de unidades equivocada?;
- ¿algún factor está invertido?;
- ¿hay doble contabilización?;
- ¿una escala representativa es absurda?;
- ¿algún modelo omite un mecanismo dominante?

Una gran discrepancia no es un fracaso inútil. Es una señal diagnóstica.

Robustez no significa exactitud. Una estimación puede ser muy robusta y seguir siendo gruesa. Si muchas variaciones razonables de las premisas producen siempre

$$Q \sim 10^8,$$

podemos tener mucha confianza en la **escala**.

Eso no implica conocer

$$Q$$

con cuatro cifras significativas. De modo inverso, una estimación central aparentemente precisa puede ser frágil si pequeñas variaciones de las premisas la desplazan por varios órdenes de magnitud.

Por tanto debemos separar:

$$\boxed{\text{robustez de la conclusión} \neq \text{precisión numérica fina.}}$$

Ejercicio 3.26 — Cotas y dos caminos para un consumo urbano. Función pedagógica: `Robustez → Cotas → Diagnóstico por rutas`

Una ciudad tiene aproximadamente

$$5 \times 10^5$$

habitantes.

Camino A. Supón un consumo doméstico representativo entre

$$100$$

y

$$400\,\mathrm{L/persona/día}.$$

1. Construye una cota inferior y superior para el consumo diario total.
2. Decide si el orden de magnitud decimal es robusto.

Camino B. Un segundo modelo estima

$$1.5 \times 10^5$$

hogares y un consumo medio del orden de

$$700\,\mathrm{L/hogar/día}.$$

3. Obtén la estimación del camino B.
4. Compara ambas rutas.
5. Explica por qué la concordancia no convierte ninguna de las dos en una medición ni demuestra que sus errores sean estadísticamente independientes.

Solución

Para el camino A,

$$V_{\mathrm{mín}} = (5 \times 10^5)(10^2) = 5 \times 10^7\,\mathrm{L/día},$$

y

$$V_{\text{máx}} = (5 \times 10^5)(4 \times 10^2) = 2 \times 10^8\,\text{L/día}.$$

Así,

$$\boxed{5 \times 10^7 \leq V_A \leq 2 \times 10^8\,\text{L/día}.}$$

Ambos extremos tienen, según la definición 3.18, OM $= 10^8\,\text{L/día}$. Por tanto, la conclusión de escala es robusta frente a ese intervalo de consumo por persona. Para el camino B, $V_B \sim (1.5 \times 10^5)(700)\,\text{L/día}$. Como $700 = 7 \times 10^2$,

resulta

$$V_B \sim 10.5 \times 10^7 = 1.05 \times 10^8\,\text{L/día}.$$

Así,

$$\boxed{V_B \sim 10^8\,\text{L/día}.}$$

Los dos caminos coinciden en escala y el valor del camino B cae dentro de las cotas del camino A.

Esta concordancia es una evidencia diagnóstica favorable para el modelo de escala, pero no convierte los números adoptados en mediciones ni asigna una distribución probabilística a sus errores. Además, las dos rutas no son completamente independientes si el consumo por hogar fue obtenido a partir de hábitos individuales semejantes a los que sustentan el consumo por persona; esa dependencia conceptual debe reconocerse.

Cierre del bloque de estimación. Las §§10–12 forman ahora una secuencia completa:

$$\boxed{\text{estimación} \longrightarrow \text{descomposición Fermi} \longrightarrow \text{robustez y control.}}$$

Hemos distinguido:

- valor estimado;
- orden de magnitud;
- factores de plausibilidad;
- cotas;
- robustez;
- concordancia entre rutas.

Y hemos mantenido separadas estas ideas de la semántica metrológica de incertidumbre desarrollada en §§4–9. El capítulo puede pasar ahora a problemas integradores donde ambas mitades —medición y estimación— trabajen juntas.

Ése será el objetivo de §13:

$$\boxed{\text{casos integradores de medición y estimación.}}$$

13. Casos integradores de medición y estimación

Integrar: una medición completa es una cadena de decisiones. Hasta ahora hemos estudiado por separado mensurando, indicación, resolución, repetición, incertidumbre, propagación, reporte, estimación y orden de magnitud. En un problema real esas piezas aparecen juntas. El esquema de trabajo que utilizaremos en esta sección es

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pregunta física} \to \text{mensurando}\\ \Downarrow\\ \text{modelo} \to \text{procedimiento}\\ \Downarrow\\ \text{datos} \to \text{incertidumbre}\\ \Downarrow\\ \text{propagación} \to \text{reporte}\\ \Downarrow\\ \text{control de plausibilidad.}\end{array}}$$

La estimación previa aparece antes del cálculo detallado y vuelve al final como control.

No es un adorno externo al procedimiento experimental.

Protocolo integrador En cada caso pregunta explícitamente: 1. ¿qué cantidad se pretende conocer?; 2. ¿qué modelo conecta esa cantidad con las observaciones?; 3. ¿qué componentes de incertidumbre se están incluyendo?; 4. ¿qué hipótesis permiten combinarlas?; 5. ¿cómo debe reportarse el resultado?; 6. ¿es físicamente plausible la escala obtenida?

Caso A — Medir una longitud con un calibre digital. Queremos medir el diámetro de una pieza cilíndrica. El **mensurando** no es «lo que muestra el calibre», sino el diámetro de la pieza bajo las condiciones y procedimiento especificados.

Supongamos cinco indicaciones, en milímetros:

$$20.14, \quad 20.15, \quad 20.13, \quad 20.14, \quad 20.14.$$

La resolución del instrumento es $\Delta = 0.01\,\text{mm}$.

Antes de calcular, una inspección de los datos ya sitúa el diámetro alrededor de

$$2 \times 10^{1}\,\text{mm}.$$

La escala del resultado está clara antes de cualquier estadística.

Centro, dispersión y componente tipo A. La media es $\bar{d} = 20.140\,\text{mm}$. La desviación estándar muestral de las cinco indicaciones es aproximadamente

$$s \approx 0.0071\,\text{mm}.$$

Por tanto, bajo las hipótesis discutidas en §5, la incertidumbre estándar tipo A de la media es

$$u_A(\bar{d}) = \frac{s}{\sqrt{5}} \approx 0.0032\,\text{mm}.$$

La dispersión observada y la incertidumbre de la media son cantidades distintas.

Resolución, combinación y reporte. Si modelamos la cuantización debida a la resolución mediante una distribución rectangular de anchura

$$\Delta = 0.01\,\text{mm},$$

la componente estándar asociada es

$$u_{\text{res}} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} \approx 0.0029\,\text{mm}.$$

Si tratamos ambas componentes como no correlacionadas,

$$u_c(d) = \sqrt{u_A^2 + u_{\text{res}}^2} \approx 0.0043\,\text{mm}.$$

Un reporte coherente es

$$\boxed{d = 20.1400\,\text{mm}, \qquad u_c(d) = 0.0043\,\text{mm}.}$$

Este ejemplo reúne varias ideas del capítulo:

- una indicación no es todavía un resultado completo;
- la repetición aporta información sobre dispersión;
- la resolución contribuye al presupuesto de incertidumbre;
- la combinación requiere una hipótesis sobre dependencia;
- el número final debe reportarse con semántica explícita.

Lo que este cálculo no demuestra No hemos incluido, por ejemplo, error geométrico del calibre, temperatura, fuerza de contacto, falta de circularidad de la pieza ni una posible corrección de calibración. Un presupuesto de incertidumbre es tan completo como el modelo que lo sostiene.

Caso B — Medir un período cronometrando muchas oscilaciones. Queremos determinar el período de una oscilación aproximadamente periódica.

Cronometrar una sola oscilación puede hacer que el tiempo de reacción del operador sea comparable con una fracción importante del período. Una estrategia mejor es medir el tiempo total de

$$N = 20$$

oscilaciones y utilizar el modelo

$$\boxed{T = \frac{t}{N}.}$$

Supongamos cinco tiempos totales, en segundos:

$$31.58, \quad 31.65, \quad 31.61, \quad 31.63, \quad 31.59.$$

La media es $\bar{t} = 31.612\,\text{s}$. Por tanto,

$$T = \frac{31.612}{20}\,\text{s} = 1.5806\,\text{s}.$$

Una estimación previa de

$$T \sim 1.5\,\mathrm{s}$$

ya nos habría permitido detectar inmediatamente un error como $T = 15.8\,\mathrm{s}$.

Propagación en el caso del período. Para los cinco tiempos anteriores, $s_t \approx 0.0286\,\mathrm{s}$, y

$$u_A(\bar{t}) \approx 0.0128\,\mathrm{s}.$$

Si el cronómetro tiene resolución

$$0.01\,\mathrm{s},$$

la componente rectangular asociada es $u_{\mathrm{res}} \approx 0.0029\,\mathrm{s}$.

Supongamos además que el procedimiento asigna al efecto de reacción una semiamplitud aproximada de

$$0.10\,\mathrm{s}$$

modelada rectangularmente. Entonces

$$u_{\mathrm{reac}} = \frac{0.10}{\sqrt{3}}\,\mathrm{s} \approx 0.0577\,\mathrm{s}.$$

Si tratamos las tres contribuciones como no correlacionadas, $u_c(t) \approx 0.0592\,\mathrm{s}$.

Como $T = \frac{t}{20}$,

el coeficiente de sensibilidad respecto de t es $c_t = \frac{1}{20}$. Por proposición 3.3,

$$u_c(T) \approx \frac{0.0592}{20}\,\mathrm{s} \approx 0.0030\,\mathrm{s}.$$

Podemos reportar

$$\boxed{T = 1.5806\,\mathrm{s}, \qquad u_c(T) = 0.0030\,\mathrm{s}.}$$

Qué mejora al medir muchas oscilaciones — y qué no. El modelo

$$T = \frac{t}{N}$$

hace que una componente de incertidumbre asociada al tiempo total se divida por

$$N.$$

Pero no toda fuente de error físico queda automáticamente reducida por el mismo factor. Si el sistema cambia de período durante la medición, si se cuentan mal las oscilaciones o si el criterio para determinar el comienzo y el final introduce un efecto sistemático dependiente del procedimiento, aumentar N no resuelve por sí solo el problema.

Por tanto,

$$\boxed{\text{aumentar } N \text{ mejora ciertas contribuciones del modelo, no todas las posibles fuentes de inexactitud.}}$$

Ésta es una aplicación directa del principio 3.7:

propagar incertidumbre exige propagar también el modelo.

Caso C — Densidad de un bloque a partir de masa y dimensiones. Consideremos un bloque rectangular con

$$m = 78.42\,\mathrm{g}, \qquad u(m) = 0.03\,\mathrm{g},$$

$$L = 4.000\,\mathrm{cm}, \qquad u(L) = 0.005\,\mathrm{cm},$$

$$W = 2.000\,\mathrm{cm}, \qquad u(W) = 0.005\,\mathrm{cm},$$

$$H = 1.000\,\mathrm{cm}, \qquad u(H) = 0.005\,\mathrm{cm}.$$

El modelo es $\rho = \frac{m}{LWH}$.
Antes de calcular con detalle podemos estimar

$$m \sim 8 \times 10^{1}\,\mathrm{g}$$

y

$$V \sim 8\,\mathrm{cm}^3,$$

de modo que

$$\rho \sim 10\,\mathrm{g/cm}^3.$$

La estimación previa sitúa inmediatamente la escala esperada.

Propagación relativa y contribución dominante. El volumen nominal es

$$V = (4.000)(2.000)(1.000)\,\mathrm{cm}^3 = 8.000\,\mathrm{cm}^3.$$

Por tanto,

$$\rho = \frac{78.42}{8.000}\,\mathrm{g/cm}^3 = 9.8025\,\mathrm{g/cm}^3.$$

Si las cuatro entradas pueden tratarse como no correlacionadas, proposición 3.4 da

$$u_r^2(\rho) \approx u_r^2(m) + u_r^2(L) + u_r^2(W) + u_r^2(H).$$

Numéricamente,

$$u_r(m) \approx 3.8 \times 10^{-4},$$

$$u_r(L) = 1.25 \times 10^{-3},$$

$$u_r(W) = 2.5 \times 10^{-3},$$

y

$$u_r(H) = 5.0 \times 10^{-3}.$$

La altura domina claramente el presupuesto relativo. La incertidumbre relativa combinada es aproximadamente

$$u_r(\rho) \approx 5.74 \times 10^{-3},$$

y por tanto

$$u_c(\rho) \approx 0.056\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Un reporte coherente es

$$\boxed{\rho = 9.803\,\mathrm{g/cm^3}, \qquad u_c(\rho) = 0.056\,\mathrm{g/cm^3}.}$$

La estimación previa

$$\rho \sim 10\,\mathrm{g/cm^3}$$

y el resultado propagado son compatibles.

Además, el presupuesto nos indica dónde convendría mejorar el experimento: **medir mejor la dimensión más pequeña**.

Caso D — Consumo diario de agua: medición y estimación Fermi. Supongamos que el medidor de agua de una vivienda indica al inicio del día

$$R_1 = 132.438\,\mathrm{m^3}$$

y al final

$$R_2 = 132.912\,\mathrm{m^3}.$$

El consumo medido es

$$V = R_2 - R_1 = 0.474\,\mathrm{m^3} = 474\,\mathrm{L}.$$

Antes de mirar el medidor, una estimación tipo Fermi para una vivienda de cuatro personas podría ser

$$V_F \sim 4\,\text{personas} \times 10^2\,\frac{\mathrm{L}}{\text{persona}\,\text{día}} \times 1\,\text{día} \sim 4 \times 10^2\,\mathrm{L}.$$

Las dos rutas producen la misma escala: $474\,\mathrm{L}$

frente a

$$400\,\mathrm{L}.$$

La concordancia no demuestra que el modelo Fermi sea exacto.

Muestra que no existe una discrepancia de escala que obligue inmediatamente a revisar el razonamiento.

Diferencia de lecturas y fuentes comunes. Supongamos que la resolución del medidor es $\Delta = 0.001\,\mathrm{m}^3$. Para una lectura individual, bajo un modelo rectangular de cuantización,

$$u_{\mathrm{res}} = \frac{0.001}{\sqrt{12}}\,\mathrm{m}^3.$$

Si las cuantizaciones de las dos lecturas pueden tratarse como no correlacionadas,

$$u_c(V) = \sqrt{2}\,u_{\mathrm{res}} \approx 4.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \approx 0.41\,\mathrm{L}.$$

Pero un desplazamiento aditivo común del cero del medidor aparece en ambas lecturas como $R_1 = A + C, \qquad R_2 = B + C,$

y se cancela en

$$R_2 - R_1 = B - A.$$

En cambio, un error multiplicativo de escala no se cancela de la misma manera. Este caso reúne §6, §8, §10, §11 y §12 en un solo problema.

Medición de un día no equivale a consumo "típico". El resultado

$$474\,\mathrm{L}$$

puede describir razonablemente el consumo **de ese día** bajo el modelo del medidor.

No basta, por sí solo, para afirmar que el consumo diario típico de la vivienda es 474 L. Para esa nueva pregunta tendríamos que modelar variaciones entre días, ocupación, estación, hábitos y otros factores.

Aquí aparece una distinción central del capítulo:

cambiar la pregunta física $\Longrightarrow$ cambiar el mensurando y el modelo de incertidumbre.

Red conceptual de los cuatro casos.

Caso	Mensurando	Modelo principal	Herramienta dominante	Control final
Diámetro	longitud de la pieza	media de indicaciones	tipo A + resolución	reporte explícito
Período	tiempo por oscilación	$T = t/N$	sensibilidad y propagación	escala previa
Densidad	masa por volumen	$\rho = m/(LWH)$	incertidumbre relativa	entrada dominante
Agua diaria	volumen consumido	$V = R_2 - R_1$	diferencia + correlación	ruta Fermi conceptualmente distinta

La misma arquitectura reaparece con contenidos diferentes.

Eso es precisamente lo que debe aprenderse: no una colección de fórmulas, sino un modo de organizar problemas cuantitativos.

Ejercicio 3.27 — Diseñar una medición de período. Función pedagógica: `Diseño experimental → Propagación → Diagnóstico`

Se espera que un oscilador tenga un período cercano a

$$2\,\mathrm{s}.$$

Un cronómetro tiene resolución

$$0.01\,\mathrm{s}.$$

El efecto de reacción al iniciar y detener el cronómetro se modela mediante una semiamplitud

$$0.12\,\mathrm{s}$$

rectangular para el tiempo total.

1. Compara conceptualmente medir una sola oscilación con medir $N = 20$ oscilaciones.
2. Calcula la incertidumbre estándar debida al efecto de reacción sobre el período en ambos diseños.
3. Explica qué fuentes de inexactitud no quedarían necesariamente reducidas por un factor 20.
4. Indica qué dato adicional necesitarías para incorporar una componente tipo A.

Solución

La incertidumbre estándar del efecto de reacción sobre el tiempo total es

$$u_{\mathrm{reac}} = \frac{0.12}{\sqrt{3}}\,\mathrm{s} \approx 0.069\,\mathrm{s}.$$

Para una sola oscilación, $T = t$,
de modo que la contribución es aproximadamente

$$0.069\,\mathrm{s}.$$

Para veinte oscilaciones, $T = \frac{t}{20}$,
y la contribución se reduce a

$$\boxed{u_{\mathrm{reac}}(T) \approx \frac{0.069}{20}\,\mathrm{s} \approx 0.0035\,\mathrm{s}.}$$

No quedan necesariamente reducidos en la misma proporción un conteo incorrecto de ciclos, una deriva física del período, un sesgo del criterio de comienzo/final o un modelo inadecuado del movimiento. Para una componente tipo A necesitamos una serie de repeticiones del tiempo total —o del período inferido— bajo condiciones definidas.

Ejercicio 3.28 — Medición y estimación de un consumo doméstico. Función pedagógica: `Integración → Dos rutas → Alcance del mensurando`

Un medidor registra

$$R_1 = 241.205\,\mathrm{m}^3$$

al comienzo de un día y

$$R_2 = 241.661\,\mathrm{m}^3$$

al final. Su resolución es $0.001\,\mathrm{m}^3$. En la vivienda viven tres personas. Construye además una estimación Fermi usando

$$150\,\mathrm{L/persona/día}.$$

1. Calcula el consumo medido.
2. Evalúa la componente estándar asociada a la resolución de la diferencia suponiendo cuantizaciones no correlacionadas.
3. Construye la estimación Fermi.
4. Compara ambas rutas.
5. Explica por qué el resultado de un solo día no determina todavía el consumo diario típico de la vivienda.

Solución

La diferencia es

$$V = 241.661 - 241.205 = 0.456\,\mathrm{m}^3 = 456\,\mathrm{L}.$$

Para cada lectura,

$$u_{\mathrm{res}} = \frac{0.001}{\sqrt{12}}\,\mathrm{m}^3.$$

Para la diferencia,

$$u_c(V) = \sqrt{2}\,u_{\mathrm{res}} \approx 4.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \approx 0.41\,\mathrm{L}.$$

La estimación Fermi es

$$V_F \sim 3\,\mathrm{personas} \times 150\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{persona\,día}} \times 1\,\mathrm{día} = 450\,\mathrm{L}.$$

Las rutas concuerdan notablemente en escala:

$$456\,\mathrm{L} \quad \text{frente a} \quad 450\,\mathrm{L}.$$

Esa concordancia no convierte el valor Fermi en medición ni prueba que el consumo sea estable día a día. Para hablar de consumo diario típico necesitaríamos observaciones de múltiples días y un modelo explícito de variabilidad temporal.

Cierre: una misma disciplina para medir y estimar. Los cuatro casos muestran que la parte difícil rara vez es la aritmética.

La dificultad está en decidir:

- qué se está midiendo;
- qué modelo se está usando;
- qué fuentes de incertidumbre pertenecen al problema;
- qué dependencias existen;
- qué nivel de precisión está justificado;
- qué comparación externa puede revelar una incoherencia.

Podemos condensar el capítulo hasta aquí en una sola disciplina:

hacer visible la cadena que conecta el fenómeno con el número reportado.

En §14 cerraremos el capítulo preguntando qué tipo de afirmación permite finalmente esa cadena y, con igual importancia, qué afirmaciones **no** permite.

14. Qué puede y qué no puede decir una medición

Volver a la pregunta rectora. El capítulo comenzó con una pregunta:

¿qué información física contiene realmente un resultado de medición?

Después de estudiar mensurandos, indicaciones, resolución, repetición, error, incertidumbre, propagación, reporte, estimación y robustez, podemos responderla con mayor precisión. Un resultado de medición no es simplemente un número obtenido mediante un instrumento. Tampoco es una confesión de ignorancia.

Es una atribución cuantitativa al mensurando construida a partir de:

- una pregunta física;
- un procedimiento;
- un modelo de medición;
- observaciones;
- correcciones;
- información sobre las fuentes relevantes de incertidumbre;
- reglas explícitas de evaluación y reporte.[55]

Por eso el principio epistemológico que ha atravesado todo el capítulo puede escribirse como

resultado de medición $\neq$ valor matemático exacto del mensurando.

Pero de esta desigualdad no se sigue que una medición sea arbitraria. El objetivo de la metrología es precisamente hacer **controlable, comunicable y cuantitativa** la información experimental disponible.

Qué sí puede decir una medición bien formulada. Supongamos que reportamos

$$d = 20.1400\,\text{mm}, \qquad u_c(d) = 0.0043\,\text{mm}.$$

Bajo el modelo y procedimiento declarados, este resultado puede sostener afirmaciones como:

1. el valor atribuido al mensurando está centrado alrededor de

$$20.1400\,\text{mm};$$

2. la información utilizada conduce a una incertidumbre estándar combinada de

$$0.0043\,\text{mm};$$

3. determinadas fuentes de variación o corrección han sido incorporadas al presupuesto;
4. el resultado puede compararse con otros resultados si entendemos la semántica de sus incertidumbres y las condiciones de medición;
5. la escala física del mensurando está bien determinada para el propósito experimental considerado.

La medición permite formular una afirmación cuantitativa **condicionada por un modelo y por información experimental explícita**. Eso es mucho más que una mera lectura.

[55] JCGM 200:2012 (VIM3), §2.9, *measurement result*.

Qué no puede decir por sí sola. El mismo resultado

$$d = 20.1400\,\text{mm}, \qquad u_c(d) = 0.0043\,\text{mm}$$

no autoriza automáticamente afirmaciones como:

> «El diámetro verdadero es exactamente 20.1400 000 ... mm.»

Tampoco permite concluir, sin información adicional:

> «La probabilidad de que el valor verdadero esté entre 20.1357 y 20.1443 mm es del 68 %.»

Ni:

> «Toda dimensión de esta pieza es conocida con esa incertidumbre.»

Ni:

> «Cualquier otro instrumento que muestre 20.1400 mm está de acuerdo con éste.»

Cada una de estas afirmaciones introduce contenido que no está contenido automáticamente en la escritura del resultado. Por tanto,

un resultado justifica sólo las conclusiones sostenidas por su mensurando, su modelo y la semántica declarada de la incertidumbre

.

Incertidumbre no significa ignorancia total. En §4 definimos la incertidumbre como información cuantitativa que caracteriza la dispersión de valores atribuibles al mensurando a partir de la información utilizada.[56]

Esto significa que

$$u > 0$$

no equivale a decir:

> «No sabemos nada.»

De hecho, una incertidumbre evaluada cuidadosamente expresa **cuánto sabemos y bajo qué estructura lo sabemos**.

Consideremos dos situaciones:

Situación A. Sólo sabemos que una longitud está probablemente entre

$$1\,\text{m} \quad \text{y} \quad 10\,\text{m}.$$

Situación B. Un procedimiento calibrado conduce a

$$L = 2.417\,\text{m}, \qquad u_c(L) = 0.003\,\text{m}.$$

Ambas contienen incertidumbre. Pero no contienen la misma cantidad ni la misma calidad de información. La existencia de incertidumbre no destruye el conocimiento experimental.

Lo estructura.

[56] JCGM 200:2012 (VIM3), §2.26, *measurement uncertainty*.

Incertidumbre pequeña no garantiza por sí sola exactitud. Aquí conviene recuperar la distinción entre **precisión de medición** y **exactitud de medición**. La precisión está relacionada con la cercanía entre indicaciones o valores medidos obtenidos mediante mediciones repetidas bajo condiciones especificadas. La exactitud se refiere cualitativamente a la cercanía entre un valor medido y un valor verdadero del mensurando; el VIM no la trata como una magnitud que deba representarse mediante un único número.[57]

Un procedimiento puede ser muy repetible y producir una serie estrecha:

$$10.0001, \quad 10.0002, \quad 10.0001, \quad 10.0002.$$

Pero si existe un desplazamiento sistemático no reconocido de

$$0.5,$$

la gran repetibilidad no convierte automáticamente el resultado en exacto. Por eso,

$$\boxed{\text{alta precisión} \not\Rightarrow \text{alta exactitud.}}$$

Y, del mismo modo,

$$\boxed{\text{incertidumbre evaluada dentro de un modelo} \not\Rightarrow \text{modelo completo.}}$$

El presupuesto de incertidumbre no certifica automáticamente el modelo. Supongamos que medimos repetidamente el diámetro de una pieza no perfectamente circular, siempre en la misma orientación. Podríamos obtener una dispersión extremadamente pequeña. Podríamos incluir además la resolución del calibre y una corrección de calibración.

El presupuesto podría parecer excelente. Sin embargo, si la pregunta física era

> «¿cuál es el diámetro medio de la pieza?»

y sólo medimos una orientación, entonces el problema principal no está en la aritmética de la propagación. Está en el **modelo del mensurando y del procedimiento**. Una evaluación de incertidumbre no puede rescatar una pregunta mal especificada.

En forma esquemática,

$$\boxed{\text{propagación correcta} + \text{modelo inadecuado} \neq \text{resultado adecuado.}}$$

Ésta es una consecuencia directa del principio 3.1 y principio 3.7.

La incertidumbre sólo incluye lo que el análisis ha modelado. Un presupuesto de incertidumbre puede contener:

- repetibilidad;
- resolución;
- calibración;
- correcciones;
- condiciones ambientales;
- covarianzas;
- parámetros del modelo.

[57] JCGM 200:2012 (VIM3), §§2.13 y 2.15, *measurement accuracy* y *measurement precision*.

Pero una fuente relevante no aparece mágicamente en el resultado por el solo hecho de escribir

$$u_c.$$

Si una contribución importante no ha sido reconocida, caracterizada o incorporada de manera adecuada, el número final no puede compensar esa omisión. Por eso debemos interpretar

$$u_c(y)$$

como

> incertidumbre estándar combinada **según el modelo y la información utilizados**,

no como

> medida absoluta y definitiva de toda limitación concebible de la experiencia.

Esta disciplina evita tratar el presupuesto de incertidumbre como un ritual algebraico.

Un intervalo sólo significa lo que hemos declarado que significa. En §§4 y 8 insistimos en que el símbolo

$$\pm$$

no posee una semántica universal. La escritura

$$x \pm u$$

no establece por sí misma una probabilidad de cobertura. Una incertidumbre estándar, una incertidumbre expandida, una tolerancia y una cota determinista son objetos diferentes. Si reportamos una incertidumbre expandida

$$U = ku_c,$$

el factor de cobertura y la interpretación empleada deben quedar declarados.[58]
Por tanto,

$$\boxed{\text{forma gráfica semejante} \not\Rightarrow \text{significado metrológico semejante.}}$$

La notación debe seguir a la semántica, no sustituirla.

Exactitud matemática y precisión física pertenecen a niveles distintos. Supongamos que

$$a = 1.24\,\mathrm{m}, \qquad b = 0.73\,\mathrm{m}.$$

Matemáticamente, $1.24 \times 0.73 = 0.9052$
es una igualdad exacta entre números decimales finitos. Pero si

$$a$$

y

[58] JCGM 100:2008 (GUM), tratamiento del reporte de incertidumbre estándar y expandida; véanse también VIM3 §§2.35–2.38.

b

son valores procedentes de mediciones, la igualdad matemática no implica que el área física sea conocida exactamente como $0.9052\,\mathrm{m}^2$. La distinción fundamental es

exactitud de la operación matemática
$\neq$
exactitud del conocimiento físico de sus entradas.

Este punto explica por qué las cifras producidas por una calculadora no determinan el número de cifras que deben reportarse. La matemática puede operar exactamente con representaciones numéricas cuya procedencia física tiene alcance finito.

Una medición responde una pregunta, no todas las preguntas cercanas. En §13 medimos un consumo de agua durante un día.

El mensurando podía formularse como:

> volumen registrado como consumido entre dos instantes determinados.

Ese resultado no responde automáticamente:

> ¿cuál es el consumo diario típico de la vivienda durante el año?

La segunda pregunta requiere nueva información:

- muchos días;
- variabilidad estacional;
- cambios de ocupación;
- hábitos;
- posibles tendencias.

Por eso,

generalizar el resultado = formular una nueva inferencia.

Y una nueva inferencia requiere justificar su propio modelo.

Medir una muestra temporal, espacial o poblacional no autoriza automáticamente una afirmación universal.

Comparar resultados exige comparar también sus modelos. Supongamos dos laboratorios que reportan

$$x_A = 10.000, \qquad u_c(x_A) = 0.010,$$

y

$$x_B = 10.018, \qquad u_c(x_B) = 0.012.$$

La comparación no debe reducirse a observar cuántos decimales coinciden.

También debemos preguntar:

- ¿miden el mismo mensurando?;
- ¿bajo condiciones comparables?;
- ¿sus incertidumbres significan lo mismo?;
- ¿comparten patrones o correcciones que introduzcan correlaciones?;

- ¿utilizan modelos compatibles?

Incluso la diferencia

$$x_B - x_A$$

es una nueva magnitud derivada cuya interpretación depende de esas relaciones. Por tanto,

$$\boxed{\text{comparar números} \neq \text{comparar automáticamente resultados de medición.}}$$

La comparación física conserva la estructura del problema original.

Medición y estimación no compiten. Las §§10–12 introdujeron estimaciones de escala y estimaciones tipo Fermi.

Puede parecer que existen dos métodos rivales:

$$\text{medir} \qquad \text{vs.} \qquad \text{estimar.}$$

No es así.

Una estimación puede:

- anticipar la escala de una medición;
- detectar errores de unidades;
- señalar un resultado implausible;
- ayudar a diseñar el rango de un instrumento;
- indicar qué precisión es realmente necesaria.

Una medición puede, a su vez:

- reemplazar una escala tentativa por información experimental;
- revelar que una hipótesis de la estimación era pobre;
- proporcionar valores para estimaciones posteriores.

La relación correcta es

$$\boxed{\text{estimación} \longleftrightarrow \text{medición},}$$

con funciones distintas pero complementarias.

Reportar un resultado es construir un argumento compacto. Un buen reporte experimental puede ser breve, pero no es intelectualmente simple. Cuando escribimos

$$y, \qquad u_c(y), \qquad \text{unidad},$$

estamos condensando una cadena:

$$\boxed{\text{mensurando} \to \text{modelo} \to \text{procedimiento} \to \text{datos} \to \text{evaluación} \to \text{resultado}.}$$

El reporte final es la conclusión visible de ese argumento. Por eso un número aislado puede ser insuficiente incluso si su aritmética es impecable. Y por eso documentar las hipótesis no es burocracia externa a la física.

Forma parte de la física experimental.

Prueba de cierre: seis preguntas antes de aceptar una conclusión. Antes de aceptar una afirmación basada en una medición, conviene poder responder:

1. **Mensurando:** ¿qué magnitud se pretendía medir?
2. **Procedimiento:** ¿cómo se obtuvieron las indicaciones?
3. **Modelo:** ¿qué relación conecta observaciones y mensurando?
4. **Incertidumbre:** ¿qué significa la incertidumbre declarada y qué fuentes incluye?
5. **Alcance:** ¿a qué condiciones, sistema, intervalo temporal o población se refiere?
6. **Conclusión:** ¿la afirmación final añade algo que el resultado no justifica?

Podemos condensarlo como

$$\boxed{\text{buena inferencia física} = \text{resultado} + \text{modelo} + \text{alcance declarado.}}$$

Esta fórmula no es algebraica. Es una regla de lectura científica.

Ejercicio 3.29 — Crítica epistemológica de un reporte. Función pedagógica: `Diagnóstico → Distinciones → Reconstrucción`

Un estudiante escribe:

> «Medí cinco veces una pieza con un calibre digital. Obtuve una media de 25.000 mm y una incertidumbre estándar combinada de 0.002 mm. Por tanto, el diámetro verdadero de la pieza está entre 24.998 y 25.002 mm con certeza, la pieza es perfectamente circular y cualquier otro laboratorio debería obtener un valor dentro de ese intervalo.»

Analiza separadamente las tres conclusiones:

1. «el valor verdadero está dentro del intervalo con certeza»;
2. «la pieza es perfectamente circular»;
3. «cualquier otro laboratorio debería obtener un valor dentro del intervalo».

Para cada una, indica qué información adicional sería necesaria.

Solución

1. Intervalo garantizado. La incertidumbre estándar combinada

$$u_c = 0.002\,\text{mm}$$

no es, por sí sola, una cota determinista que garantice

$$24.998 \leq d \leq 25.002\,\text{mm}.$$

Para interpretar un intervalo necesitamos declarar qué tipo de incertidumbre o cobertura se está usando y bajo qué modelo.

2. Circularidad. Una serie de mediciones de diámetro en una sola orientación puede ser muy repetible y, aun así, no decir nada suficiente sobre otras orientaciones. Para evaluar circularidad habría que definir el mensurando correspondiente y medir la geometría de la pieza en múltiples direcciones o mediante un procedimiento apropiado.

3. Otro laboratorio. Otro laboratorio puede usar un procedimiento, patrón, corrección, temperatura, fuerza de contacto o modelo de incertidumbre distintos. La comparabilidad exige verificar que ambos resultados se refieren al mismo mensurando bajo condiciones y modelos compatibles. El diagnóstico general es

las tres conclusiones exceden la información explícitamente proporcionada.

Ejercicio 3.30 — Qué puede concluirse y qué no. Función pedagógica: `Síntesis final → Transferencia`

Una experiencia produce

$$T = 1.5806\,\mathrm{s}, \qquad u_c(T) = 0.0030\,\mathrm{s},$$

para el período de un sistema oscilante durante una sesión experimental.

Clasifica cada afirmación como:

- **justificada por el resultado y el modelo declarado**;
- **posiblemente justificable con información adicional**;
- **no justificada por los datos proporcionados**.

A. «La escala temporal del período es del orden de un segundo.»
B. «El período matemáticamente exacto del sistema es 1.5806000 ... s.»
C. «La incertidumbre estándar evaluada es aproximadamente 0.0030 s.»
D. «Mañana el sistema tendrá exactamente el mismo período.»
E. «Un resultado de 15.81 s obtenido con el mismo montaje merece una revisión inmediata.»
F. «El sistema es perfectamente periódico para todo tiempo.»

Solución

A — Justificada. El resultado sitúa claramente la escala temporal alrededor de

$$10^0\,\mathrm{s}.$$

B — No justificada. Los dígitos reportados no establecen un valor matemático exacto del mensurando.

C — Justificada, si $u_c(T)$ ha sido evaluada y reportada como incertidumbre estándar combinada según el modelo indicado.

D — Posiblemente justificable con información adicional. Requeriría estudiar estabilidad temporal y condiciones del sistema.

E — Justificada como diagnóstico de plausibilidad. Difiere en un factor

$$10$$

de la escala observada y estimada; antes de aceptarlo conviene revisar unidades, conteo de oscilaciones, factor N y procedimiento.

F — No justificada. Una medición de período durante una sesión no demuestra periodicidad matemática perfecta para todo tiempo.

La síntesis final es:

una medición informa con precisión sobre una pregunta delimitada;
no convierte esa pregunta en una afirmación ilimitada sobre el sistema .

Red final del capítulo. Podemos ahora reconstruir la arquitectura completa.

De la experiencia al resultado.

$$\text{sistema físico} \to \text{mensurando} \to \text{procedimiento} \to \text{indicación}.$$

De las indicaciones a la información metrológica.

$$\text{repetición} + \text{resolución} + \text{calibración} + \text{modelo} \to \text{incertidumbre}.$$

De las entradas a la magnitud derivada.

$$\text{modelo de medición} \to \text{coeficientes de sensibilidad} \to \text{propagación}.$$

Del cálculo al reporte.

$$\text{valor} + \text{unidad} + \text{incertidumbre explícita} \to \text{resultado comunicado}.$$

Del resultado al juicio físico.

$$\text{resultado} + \text{estimación} + \text{robustez} + \text{alcance del modelo} \to \text{conclusión físicamente defendible}.$$

La lección global puede resumirse en una sola regla:

> la física experimental no elimina la incertidumbre;
>
> aprende a describir qué sabemos, cómo lo sabemos y hasta dónde llega esa afirmación .

Transición al capítulo 4. Hasta aquí hemos tratado magnitudes que podían representarse mediante un valor escalar:

- longitud;
- masa;
- tiempo;
- temperatura;
- volumen;
- densidad;
- consumo.

Pero muchos problemas físicos exigen algo más que tamaño. Una posición requiere especificar **dónde**. Un desplazamiento requiere tamaño y dirección.

Una velocidad ya no queda caracterizada completamente por un número positivo. La siguiente capa conceptual será entonces geométrica. Pasaremos de preguntas como

$$\text{¿cuánto?}$$

a preguntas como

$$\text{¿dónde?} \qquad \text{¿en qué dirección?} \qquad \text{¿respecto de qué referencia?}$$

El siguiente capítulo es:

> capítulo 4 — Espacio euclídeo, vectores y marcos de referencia.

La disciplina adquirida aquí seguirá vigente.

También allí tendremos que preguntar qué magnitud representa cada objeto matemático, cómo se relaciona con la experiencia y qué información física justifica cada afirmación.

Capítulo 4

Espacio euclídeo, vectores y marcos de referencia

1. Un punto no es un vector

La pregunta física antes de las coordenadas. Dos personas describen el mismo objeto. Una coloca el origen de una regla en el extremo izquierdo de una mesa; la otra lo sitúa un metro a su derecha. Sus números para la posición del objeto difieren. Sin embargo, **el objeto no se ha desplazado por el mero cambio de origen**. Este hecho invita a separar tres objetos distintos:

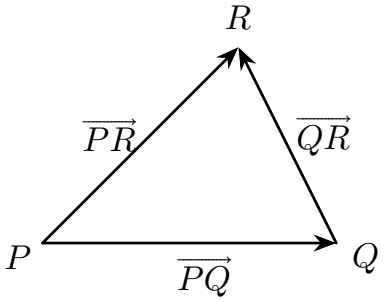


Figura 4.1. Los puntos son extremos y las flechas son desplazamientos: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. La identidad no requiere elegir un origen. Véase §1.

- el **punto** P donde se encuentra el objeto;
- el **origen** O que elegimos para describirlo;
- el **desplazamiento** desde O hasta P.

El número que asignamos a una posición requiere una convención. La diferencia geométrica entre dos puntos puede expresarse sin privilegiar un origen.[1]

Activación Si una persona cambia de habitación la regla con la que mide, ¿se desplaza también el objeto medido? ¿Qué cambió realmente en el procedimiento de descripción?

Representar: puntos y flechas de desplazamiento. Imaginemos tres puntos O, P, Q sobre una recta, en ese orden. La flecha de O a P y la flecha de P a Q pueden componerse para dar la flecha de O a Q.

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}.$$

La suma en esta expresión es una suma de **desplazamientos**, no una suma de puntos. Los tres puntos sirven como extremos; las flechas pertenecen a otro tipo de objeto matemático. El dibujo sugiere la ley, pero todavía tenemos que definir la estructura que permite demostrarla.

[1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2.ª ed., Springer, 1989, parte I, cap. 1, §2.A «Notation», pp. 3–4.

Definir: espacio afín. Un espacio vectorial real V permite sumar vectores y multiplicarlos por escalares reales. Para este capítulo trabajaremos con un espacio vectorial de dimensión tres, aunque las primeras identidades no dependen de esa dimensión.

Definición 4.1 — Espacio afín real Un espacio afín $\mathcal{E}$ modelado sobre el espacio vectorial real V es un conjunto no vacío de puntos junto con una operación de traslación

$$\mathcal{E} \times V \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad (P, v) \longmapsto P + v,$$

que satisface: $P + 0 = P, \qquad (P + u) + v = P + (u + v),$

y para cada par $P, Q \in \mathcal{E}$ existe un **único** $v \in V$ tal que $P + v = Q$.

Las dos primeras condiciones hacen coherente la traslación por varios desplazamientos. La última garantiza que, entre dos puntos, existe exactamente un vector de desplazamiento. Hipótesis y alcance Esta es una **idealización geométrica** del espacio físico clásico, no una conclusión empírica obtenida por definición. La conveniencia de esa idealización debe contrastarse con el fenómeno y la escala considerados, tal como exige capítulo 1.

Definir: desplazamiento entre puntos. Definición 4.2 — Desplazamiento Dados $P, Q \in \mathcal{E}$, definimos $\overrightarrow{PQ} \in V$ como el único vector que satisface

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

En particular, $\overrightarrow{PQ}$ no es el punto Q y no necesita elegir ningún origen global. Es un vector libre cuya interpretación puede ser longitud y dirección cuando añadamos la métrica euclídea. La notación $Q-P$ puede usarse como abreviatura de $\overrightarrow{PQ}$, pero **sólo como diferencia de dos puntos**. No debe interpretarse como una resta entre dos vectores de posición previamente identificados sin origen.

Primera prueba: la ley del triángulo. Proposición 4.1 — Identidades de desplazamiento En todo espacio afín $\mathcal{E}$ modelado sobre V, para cualesquiera puntos P, Q, R:

$$\overrightarrow{PP} = 0, \qquad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ},$$

y

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.}$$

Demostración. Por la identidad $P + 0 = P$ y la unicidad del vector que lleva P a sí mismo, se obtiene $\overrightarrow{PP} = 0$. Por definición, $P + \overrightarrow{PQ} = Q$. Trasladamos este punto por el vector opuesto:

$$Q + (-\overrightarrow{PQ}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + (-\overrightarrow{PQ}) = P.$$

La unicidad del desplazamiento de Q a P implica $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$. Finalmente,

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R.$$

Como $\overrightarrow{PR}$ es el único vector que lleva P a R, ambos deben coincidir. □ **Autoexplicación de la prueba.** El mecanismo no usa una figura particular ni componentes: utiliza la compatibilidad de traslaciones y, al final, la unicidad exigida en la definición 4.1. Por eso la ley vale antes de introducir bases o coordenadas.

¿Por qué no podemos sumar dos puntos? En V sí existe la operación

$$V \times V \longrightarrow V, \qquad (u, v) \longmapsto u + v.$$

En cambio, definición 4.1 no ofrece ninguna operación intrínseca

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

que merezca llamarse suma de puntos. La expresión $P+Q$ no está definida por nuestra estructura. En contraste, $P + v$ sí está definida y es un punto; $Q - P$ sí está definida y es un vector.

Error plausible «Si dibujé un punto como $(2, 3)$ y otro como $(4, 5)$, puedo sumarlos y obtener $(6, 8)$; por tanto, sumar puntos es una operación geométrica». La terna o pareja numérica ya presupone un origen y ejes; la suma obtenida depende de esa convención. No demuestra la existencia de una suma canónica de puntos.

El origen es una elección, no una propiedad del punto. Definición 4.3 — Origen y vector de posición Elegido un punto $O \in \mathcal{E}$ como **origen**, el vector de posición de P relativo a O es

$$r_O(P) := \overrightarrow{OP} \in V.$$

El subíndice recuerda que se eligió un punto de referencia. La elección permite construir una correspondencia entre puntos y vectores, pero no los convierte retroactivamente en objetos idénticos.

Principio metodológico 4.1 — Un punto no es un vector Antes de escribir una posición como un vector o una terna, declarar el origen y, cuando correspondan, los ejes y las unidades.

Segunda prueba: cambiar el origen. Tomemos un origen nuevo $O' = O + a$, donde $a \in V$. Entonces $\overrightarrow{OO'} = a$. La ley del triángulo aplicada a O', O, P da $\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P}$. Como $\overrightarrow{O'O} = -a$, obtenemos

$$\boxed{r_{O'}(P) = r_O(P) - a.}$$

La posición **representada** cambia en un vector constante $-a$ para todos los puntos. La geometría no exige que los puntos se hayan movido.

Proposición 4.2 — Invariancia del desplazamiento respecto del origen Para cualesquiera $P, Q, O, O' \in \mathcal{E}$,

$$\boxed{r_O(Q) - r_O(P) = r_{O'}(Q) - r_{O'}(P) = \overrightarrow{PQ}.}$$

Demostración. proposición 4.1 da $r_O(P) + \overrightarrow{PQ} = r_O(Q)$, luego la primera igualdad. Si $a = \overrightarrow{OO'}$, la fórmula de cambio de origen da

$$\begin{aligned} r_{O'}(Q) - r_{O'}(P) &= \big(r_O(Q) - a\big) - \big(r_O(P) - a\big) \\ &= r_O(Q) - r_O(P) = \overrightarrow{PQ}. \end{aligned}$$

Por tanto la diferencia entre posiciones es independiente del origen. □

Principio metodológico 4.2 — Invariancia frente al origen Una representación numérica de posición puede cambiar al trasladar el origen; un desplazamiento entre los mismos dos puntos no cambia por esa sola elección.

Ejemplo físico: dos personas describen el mismo desplazamiento. En un modelo unidimensional, asignemos respecto de O las posiciones $x_O(P) = 2\,\mathrm{m}$ y $x_O(Q) = 7\,\mathrm{m}$. La diferencia es $5\,\mathrm{m}$ hacia el sentido positivo elegido. Si el nuevo origen se sitúa $a = 3\,\mathrm{m}$ a la derecha de O, entonces

$$x_{O'}(P) = -1\,\mathrm{m}, \qquad x_{O'}(Q) = 4\,\mathrm{m},$$

y

$$x_{O'}(Q) - x_{O'}(P) = 5\,\mathrm{m}.$$

En este ejemplo sólo cambió el origen; los ejes conservaron orientación y unidad. Un cambio de base modificará también las **componentes** de los desplazamientos y se estudiará en §10. No debemos inferir de esta invariancia del desplazamiento que todos los marcos físicos sean equivalentes desde el punto de vista dinámico. Ese problema requiere una teoría del movimiento y leyes físicas posteriores.

Prueba de estrés de las definiciones.

- **¿Pueden coincidir los vectores de posición del mismo punto respecto de dos orígenes diferentes?** No: $r_{O'}(P) = r_O(P) - a$; si los vectores coinciden, entonces $a = 0$ y, por la definición 4.1, $O' = O$. La coincidencia de sus *componentes numéricas* en bases diferentes es una cuestión distinta que trataremos en §10.
- **¿Puede definirse $\overrightarrow{PQ}$ sin producto escalar?** Sí: definición 4.2 sólo necesita traslaciones.
- **¿Puede definirse una distancia sólo con la definición 4.1?** No: falta una noción de longitud en V; se introducirá mediante el producto escalar.
- **¿Puede sumarse $P + v$?** Sí, da un punto.
- **¿Puede sumarse $P + Q$ sólo con la definición 4.1?** No.

La pregunta de qué hace especial a una geometría **euclídea**, en vez de meramente afín, se responderá al introducir longitud y ángulos.

¿Tiene sentido sumar dos puntos? Ejercicio 4.1 · Diagnóstico lógico y contraejemplo Un estudiante elige coordenadas en una recta y asigna a dos puntos P, Q los números 2 y 5. Afirma: «su suma es el punto de coordenada 7; es independiente del origen». Cambia el origen tres unidades hacia la derecha y examina la afirmación.

Solución desarrollada Con el origen inicial, las coordenadas son 2 y 5 y su suma informal es 7. Con el origen desplazado tres unidades, las coordenadas son -1 y 2, cuya suma es 1. Si 7 describía un punto fijo, con el origen nuevo debería tener coordenada 4, no 1. La operación propuesta no respeta el cambio de origen y no pertenece a la estructura afín. En cambio, la diferencia pasa de $5 - 2 = 3$ a $2 - (-1) = 3$: el desplazamiento sí es invariante.

Cambiar el origen sin mover el objeto. Ejercicio 4.2 · Representación, formalización e invariancia Respecto de un origen O, dos puntos de una recta tienen coordenadas $x_O(P) = -2\,\mathrm{m}$ y $x_O(Q) = 4\,\mathrm{m}$. Se elige un origen O' situado $5\,\mathrm{m}$ a la izquierda de O, sin invertir el eje. Calcula las coordenadas nuevas y el desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$ en ambas descripciones.

Solución desarrollada El desplazamiento del origen nuevo respecto del antiguo tiene componente $a = -5\,\mathrm{m}$. Por $x_{O'} = x_O - a$,

$$x_{O'}(P) = 3\,\mathrm{m}, \qquad x_{O'}(Q) = 9\,\mathrm{m}.$$

Las diferencias son $4-(-2)=6\,\mathrm{m}$, $\qquad 9-3=6\,\mathrm{m}$. El vector desplazamiento es el mismo, y su componente permanece $+6\,\mathrm{m}$ porque no se cambió ni orientación ni unidad de la base.

Reconstruir un triángulo de desplazamientos. Ejercicio 4.3 · Prueba y transferencia Si $\overrightarrow{AB}=u$ y $\overrightarrow{BC}=v$, expresa $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$. Calcula luego la suma cerrada $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ sin asignar coordenadas a los puntos.

Solución desarrollada Por proposición 4.1,

$$\overrightarrow{AC}=u+v, \qquad \overrightarrow{CA}=-(u+v), \qquad \overrightarrow{CB}=-v.$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=u+v-(u+v)=0.$$

El vector total de un recorrido cerrado es nulo en un espacio afín: el cálculo sólo emplea las reglas de desplazamiento, no una figura ni un origen privilegiado.

Cierre conceptual: del lugar a la estructura. Hemos probado que una **posición** expresada por $r_O(P)$ depende de un origen, mientras que el desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$ es geométricamente independiente de él. Ésta es la primera invariancia que necesitaremos para comparar observadores.

$$\boxed{\text{puntos} \xrightarrow{\text{diferencia}} \text{vectores de desplazamiento}}$$

En §2 construiremos sistemáticamente las operaciones afines y la geometría del paralelogramo. Sólo después introduciremos bases y coordenadas, y luego el producto escalar que permite hablar rigurosamente de longitudes y ángulos.

2. La estructura afín de los desplazamientos

Activación: ¿dónde está el punto medio si nadie fija el origen? Dos marcas físicas ocupan puntos $P,Q\in\mathcal{E}$. Para indicar una marca intermedia podemos elegir momentáneamente un origen O y calcular el promedio de sus vectores de posición: $r_O(M)=\frac{1}{2}r_O(P)+\frac{1}{2}r_O(Q)$. Pero O es una elección. ¿Cambiará el punto M si otro observador coloca su origen en otro lugar? ¿Por qué este promedio sería admisible, mientras que la «suma de puntos» de §1 no lo era? La respuesta exigirá comprobar la **dependencia de la construcción respecto del origen**; una ilustración de dos marcas sobre una regla sugiere dónde situar M, pero no demuestra esa independencia.

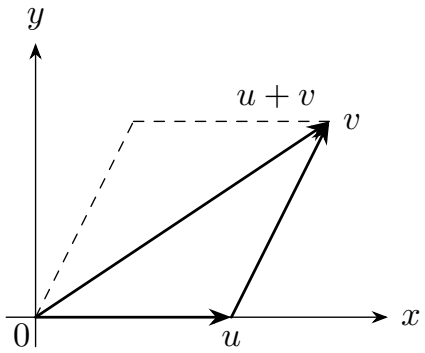


Figura 4.2. Si $u = \overrightarrow{AB}$ y $v = \overrightarrow{BC}$, entonces $u + v = \overrightarrow{AC}$. El paralelogramo compara la composición de desplazamientos con su representación vectorial. Véase §2.

Recuperar la estructura disponible: trasladar, restar, componer. De definición 4.1 sabemos que la traslación $P + v$ es un punto cuando $v \in V$. De definición 4.2 y proposición 4.1:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}, \qquad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}.$$

Por consiguiente, sí tienen significado intrínseco

$$P + u, \qquad Q - P := \overrightarrow{PQ}, \qquad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR},$$

pero **no** $P + Q$. La estructura distingue expresiones por su tipo: punto, vector o escalar. Esta disciplina permite construir nuevos puntos sin identificar puntos y vectores.

Una receta tentativa con varios puntos. Sean $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Si elegimos un origen auxiliar O, la receta

$$A_O := O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$$

produce un punto: la suma del lado derecho pertenece a V y puede trasladar O. Sin embargo, que la fórmula produzca **algún** punto no demuestra que produzca el **mismo** punto para todos los orígenes. Trabajo cognitivo Si trasladamos el origen por a, cada vector $\overrightarrow{OP_i}$ cambia en $-a$. ¿Cuántas veces aparece esa corrección en la suma? Antes de calcular, predice qué condición sobre los coeficientes puede cancelarla.

Proposición fundamental: el origen desaparece si y sólo si la suma es uno. Proposición 4.3 — Criterio de independencia del origen Sean $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y

$$A_O = O + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i}.$$

Si $O' = O + a$, entonces

$$\boxed{\overrightarrow{A_O A_{O'}} = \left(1 - \sum_i \lambda_i\right) a.}$$

En particular, A_O es independiente del origen elegido si $\sum_i \lambda_i = 1$. Recíprocamente, como $\dim V = 3$ y existen traslaciones no nulas, si A_O es independiente de **toda** elección de origen, necesariamente $\sum_i \lambda_i = 1$.

Demostración. La fórmula de §1 da $\overrightarrow{O'P_i} = \overrightarrow{OP_i} - a$. Sustituyendo en la receta:

$$\begin{aligned} A_{O'} &= O' + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{O'P_i} \\ &= (O + a) + \sum_i \lambda_i (\overrightarrow{OP_i} - a) \\ &= A_O + \left(1 - \sum_i \lambda_i\right) a. \end{aligned}$$

Definición 4.2 identifica el vector que lleva A_O a $A_{O'}$ con el término entre paréntesis. Si $\sum_i \lambda_i = 1$, ese vector es cero para todo a. Inversamente, si es cero para todo a, escogemos $a \neq 0$ y usamos que un escalar multiplicado por un vector no nulo sólo da cero cuando el escalar vale cero. Por tanto $1 - \sum_i \lambda_i = 0$. □ **Lectura guiada.** La demostración tiene una estrategia (cambiar el origen), un mecanismo (cada vector de posición incorpora $-a$) y un cierre (unicidad del desplazamiento). No se necesitó ninguna fórmula de distancia.

Definir correctamente una combinación afín. Definición 4.4 — Combinación afín de puntos Dados $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con $\sum_i \lambda_i = 1$, su **combinación afín** es el punto único

$$\boxed{A = O + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i},}$$

donde O es cualquier origen auxiliar. Proposición 4.3 asegura que el punto no depende de esa elección. La expresión abreviada $\sum_i \lambda_i P_i$ se permite **exclusivamente** después de declarar esta definición, y nunca como suma vectorial ordinaria de puntos.

Podemos usar un punto de la propia familia como origen. Para $O = P_1$:

$$\boxed{A = P_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_1P_i}.}$$

Esta fórmula ya no necesita elegir un origen exterior a los puntos y facilita los cálculos conceptuales.

Principio metodológico 4.3 — Comprobar los tipos y los coeficientes Antes de combinar puntos, verificar que los coeficientes sumen uno. Antes de sumar, verificar que los sumandos sean vectores; antes de trasladar, verificar que el primer objeto sea un punto y el segundo un vector.

Ejemplos, no-ejemplos y cambio de origen. Con dos puntos,

$$A = (1-t)P + tQ = P + t\overrightarrow{PQ}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es una combinación afín válida para **todo** t, incluso $t < 0$ o $t > 1$. Por el contrario, la receta $P+Q$ interpretada como «dos posiciones sumadas» tendría coeficientes $1+1=2$; proposición 4.3 muestra que la construcción basada en un origen variaría al trasladarlo. Ejemplo de valores numéricos en una recta —usados sólo como comprobación de §1, no como definición de coordenadas generales—:

si los valores respecto de un origen provisional son 0 m y 10 m, entonces para $t = \frac{3}{4}$ obtenemos 7.5 m. Trasladando el origen 3 m hacia la derecha, los valores de los mismos puntos son -3 m y 7 m:

$$\frac{1}{4}(-3) + \frac{3}{4}(7) = 4.5\,\text{m}.$$

El nuevo valor es 4.5 m respecto del nuevo origen, equivalente a 7.5 m respecto del antiguo. Cambió la descripción numérica, no el punto obtenido.

Definir el baricentro sin confundirlo con un promedio de puntos. Definición 4.5 — Baricentro de pesos de suma no nula Dados puntos P_i y pesos escalares w_i compatibles entre sí, con suma $W = \sum_i w_i \neq 0$, definimos el **baricentro** como la combinación afín

$$\boxed{G = O + \sum_i \frac{w_i}{W}\overrightarrow{OP_i}.}$$

Los coeficientes w_i/W son adimensionales y suman uno; proposición 4.3 garantiza que G es independiente de O. Si los pesos representan masas, deben expresarse en unidades compatibles antes de sumarlos. Para dos masas positivas m_P, m_Q, colocando $u = \overrightarrow{PQ}$: $G = P + \frac{m_Q}{m_P+m_Q}u$.

Como $m_P, m_Q > 0$, los coeficientes $m_P/(m_P + m_Q)$ y $m_Q/(m_P + m_Q)$ están entre 0 y 1; en §2.9 formalizaremos esta situación diciendo que G pertenece al segmento afín entre P y Q. Pero **definición 4.5 admite también pesos negativos** siempre que $W \neq 0$; tal baricentro es una construcción geométrica y no debe interpretarse automáticamente como el centro de masa de cuerpos ordinarios.

¿Qué sucede cuando la suma de los pesos es cero? Si $W = 0$, la normalización w_i/W está indefinida. No es una dificultad de la calculadora ni una invitación a escoger arbitrariamente un origen. En cambio, el vector ponderado

$$S_O := \sum_i w_i \overrightarrow{OP_i}$$

sí es independiente del origen, porque

$$S_{O'} = S_O - Wa = S_O.$$

Esto produce un **vector**, no un baricentro. Para $w_1 = 1$, $w_2 = -1$, resulta $S_O = \overrightarrow{P_2P_1}$; no aparece un punto privilegiado. Prueba de hipótesis La condición $W \neq 0$ es esencial para definición 4.5. Que una suma ponderada de vectores permanezca bien definida cuando $W = 0$ no autoriza a llamarla punto.

Definir el segmento afín y su punto medio. Definición 4.6 — Segmento afín y punto medio Para $P, Q \in \mathcal{E}$, el segmento afín entre ellos es

$$[P, Q]_{\text{af}} := \{P + t\overrightarrow{PQ} : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Su **punto medio** es el punto

$$\boxed{M(P, Q) := P + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ}.}$$

La fórmula del punto medio equivale a la combinación afín de coeficientes $1/2, 1/2$. Si $P = Q$, el segmento consta de un solo punto y el punto medio coincide con él. No estamos utilizando todavía

una distancia: «mitad» significa aquí la mitad del **vector de desplazamiento**. Cuando $t \in [0,1]$, los coeficientes $(1-t), t$ no sólo suman uno: son no negativos. Ésta es una **combinación convexa**. Si t queda fuera del intervalo, la fórmula sigue siendo afín, pero el punto ya no pertenece al segmento definido, salvo el caso degenerado $P = Q$.

Comprobación: la interpolación no depende del origen. Sea $X_t = P + t\overrightarrow{PQ}$. Para cualquier origen O: $r_O(X_t) = (1-t)r_O(P) + tr_O(Q)$. Esto se deduce de la proposición 4.1 y proposición 4.2: $r_O(Q) - r_O(P) = \overrightarrow{PQ}$. La igualdad representa un punto en función de dos vectores de posición, pero **la definición intrínseca** sigue siendo $P + t\overrightarrow{PQ}$. Además, para $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\overrightarrow{X_s X_t} = (t-s)\overrightarrow{PQ}.}$$

Se verifica trasladando X_s por $(t-s)\overrightarrow{PQ}$ y usando la unicidad de la definición 4.1. Si $P \neq Q$, dos parámetros distintos dan puntos distintos. Si $P = Q$, todos los parámetros producen el mismo punto: no hay unicidad de parámetro en el segmento degenerado.

Un paralelogramo construido con desplazamientos. Fijemos un punto A y dos vectores $u, v \in V$. Construyamos sucesivamente

$$B = A + u, \qquad D = A + v, \qquad C = A + u + v.$$

Entonces

$$\overrightarrow{AB} = u = \overrightarrow{DC}, \qquad \overrightarrow{AD} = v = \overrightarrow{BC}.$$

Ésta es la ley del paralelogramo **como identidad afín**, no como consecuencia de medir lados o ángulos. Los pares de lados opuestos representan el mismo desplazamiento libre. Cuando u y v no producen cuatro vértices geométricamente distintos, la construcción puede degenerar; no se necesita introducir todavía independencia lineal ni un producto escalar para que las identidades sean válidas.

Proposición: el paralelogramo y sus diagonales. Proposición 4.4 — Paralelogramo, desplazamientos y puntos medios Sean $A, B, D \in \mathcal{E}$. Hay un único punto C tal que

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.$$

Ese punto es $C = B + \overrightarrow{AD}$ y se caracteriza también por

$$\boxed{M(A,C) = M(B,D).}$$

Recíprocamente, si cuatro puntos A, B, C, D satisfacen esa igualdad de puntos medios, cumplen las identidades de lados opuestos anteriores.

Demostración. Escribamos $u = \overrightarrow{AB}$ y $v = \overrightarrow{AD}$. El punto $C = A+u+v = B+v = D+u$ existe. Su unicidad se deduce de la unicidad del traslado de B por v. Para los puntos medios:

$$M(A,C) = A + \frac{u+v}{2}.$$

Como $\overrightarrow{BD} = v - u$,

$$M(B,D) = B + \frac{v-u}{2} = A + u + \frac{v-u}{2} = A + \frac{u+v}{2}.$$

Para la recíproca supongamos $M(A,C) = M(B,D)$; tomando A sólo como punto auxiliar y escribiendo $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AD}$, $w = \overrightarrow{AC}$, se obtiene

$$A + \frac{w}{2} = A + u + \frac{v-u}{2} = A + \frac{u+v}{2}.$$

La unicidad de traslación y la aritmética vectorial implican $w = u+v$. Por tanto $C = A+u+v = B+v = D+u$, que da las dos identidades. □ **Autoexplicación.** El paralelogramo no se define mediante una ilustración de cuatro lados «aparentemente paralelos»; su construcción y su criterio de diagonales se obtienen de la acción afín. Las relaciones métricas sobre las longitudes de las diagonales quedan reservadas para §5.

Aplicación geométrica y frontera física. Tres marcas A, B, D permiten definir una cuarta posición por dos rutas conceptualmente equivalentes: $C = B + \overrightarrow{AD} = D + \overrightarrow{AB}$.

Si un trazado real no hace coincidir físicamente ambas marcas construidas, eso no refuta la identidad afín: invita a estudiar errores de realización, idealización, procedimiento o incertidumbre, conforme al capítulo 3. La identidad pertenece al **modelo exacto**; el traslado y la localización físicos requieren procedimientos. No estamos afirmando que cambiar el origen, recorrer un desplazamiento o representar un paralelogramo determine la evolución temporal de un cuerpo. La cinemática comienza en el capítulo 5.

Prueba de estrés: baricentro, segmento y promedios.

1. Si $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ pero uno es negativo, la combinación es afín, aunque no necesariamente pertenece al segmento.
2. Si dos pesos tienen suma nula, definición 4.5 no define un baricentro; puede quedar definido un vector ponderado.
3. Para puntos coincidentes $P = Q$, el punto medio existe y coincide con ellos; el parámetro del segmento deja de ser único.
4. En un paralelogramo degenerado, proposición 4.4 sigue siendo verdadero; no supone longitudes ni ángulos.
5. No escribiremos $\frac{1}{2}(P+Q)$: contiene una suma de puntos que definición 4.1 no define. La expresión correcta es $M(P,Q) = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$, o bien la combinación afín definida en la definición 4.4.

Lectura inversa Dado un punto G descrito como «centro», reconstruye qué pesos se eligieron, si suman un valor no nulo, qué fenómeno representan y si la construcción es geométrica o metrológica.

Ejercicio 4.4 — Baricentro con un origen auxiliar.

Función cognitiva: `modelización → traducción vectorial → prueba de invariancia`.

Sean $P, Q, R \in \mathcal{E}$ y $u = \overrightarrow{PQ}$, $v = \overrightarrow{PR}$. Tres pesos de la misma unidad son $2, 3, 1$.

1. Calcula el baricentro G mediante definición 4.5, con P como origen auxiliar.
2. Repite el cálculo con un origen genérico O y demuestra que describe el mismo punto.
3. Explica por qué el cociente de cada peso respecto de la suma no conserva la unidad de los pesos.

Solución desarrollada

La suma es $W = 6$ y los coeficientes afines son $\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}$. Con P como origen auxiliar, $\overrightarrow{PP} = 0$:

$$\boxed{G = P + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v.}$$

Para otro origen O, escribimos $r_O(Q) = r_O(P) + u$ y $r_O(R) = r_O(P) + v$. Entonces

$$r_O(G) = \frac{2}{6}r_O(P) + \frac{3}{6}r_O(Q) + \frac{1}{6}r_O(R)$$
$$= r_O(P) + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v.$$

Dado que el último vector traslada P al punto obtenido antes, las dos descripciones coinciden. Cada razón w_i/W es adimensional, porque numerador y denominador tienen la misma unidad. La positividad de los pesos permite interpretarlos como masas **si** se declara un modelo físico adecuado; no convierte por sí sola esta identidad en una medición del centro de masa.

Ejercicio 4.5 — Construir y auditar un paralelogramo.

Función cognitiva: `construcción → demostración → detección de errores`.

Dados un punto A y desplazamientos u, v, define $B = A + u$ y $D = A + v$.

1. Construye el único C que cumple las dos igualdades de lados opuestos de la proposición 4.4.
2. Demuestra que ambas diagonales tienen el mismo punto medio.
3. Un compañero propone $C' = A + u - v$. Determina para qué v esa propuesta es correcta.

Solución desarrollada

Por construcción y proposición 4.4,

$$\boxed{C = A + u + v = B + v = D + u.}$$

Los puntos medios de AC y BD son, respectivamente,

$$M(A, C) = A + \frac{u + v}{2},$$
$$M(B, D) = B + \frac{v - u}{2} = A + \frac{u + v}{2}.$$

Para que $C' = C$ se requiere $u - v = u + v$, o $2v = 0$. Sobre un espacio vectorial real esto equivale a $v = 0$: el error sólo desaparece en el caso degenerado $D = A$. Confundir un vector con su opuesto cambia la construcción, aunque un dibujo mal orientado pueda ocultarlo.

Cierre y red matemática. La estructura afín permite obtener nuevos puntos **sin declarar un origen absoluto**. Las operaciones que acabamos de construir se organizan así:

puntos y desplazamientos $\xrightarrow{\text{definiciones 4.1–4.2}}$ traslaciones

$\xrightarrow{\text{proposición 4.3}}$ combinaciones afines y baricentros

$\xrightarrow{\text{definición 4.6, proposición 4.4}}$ segmentos y paralelogramos.

No obstante, aún no sabemos expresar **cualquier vector de manera única mediante unas direcciones elegidas**. Ésa será la pregunta de §3 — *Vectores, independencia y bases*. La métrica euclídea seguirá esperando hasta §5.

3. Vectores, independencia y bases

Activación: una flecha, distintas descripciones. Dos personas registran el mismo desplazamiento físico. Una escoge tres desplazamientos de referencia; la otra escoge otros tres. Sus listas de números pueden diferir sin que cambie el desplazamiento. ¿Cuándo una lista describe un vector de manera completa y sin ambigüedad? La §1 enseñó que $\overrightarrow{PQ} \in V$ no es ni P ni Q; la §2 mostró que las sumas y múltiplos escalares corresponden a **vectores**, mientras que combinar puntos exige coeficientes que sumen uno. Ahora estudiaremos cómo expresar cualquier elemento de V a partir de vectores de referencia. La dificultad tiene dos mitades distintas:

- **Existencia:** ¿nuestros vectores de referencia alcanzan para construir cualquier desplazamiento?
- **Unicidad:** ¿cada desplazamiento posee una única receta en términos de ellos?

Un sistema puede satisfacer una mitad y fallar en la otra.

Activación Si tenemos tres instrucciones de desplazamiento pero una de ellas es la suma de las otras dos, ¿obtenemos información nueva? ¿Podrían dos listas numéricas diferentes representar la misma flecha?

La estructura vectorial ya disponible. El espacio real V dispone de una suma $u + v$ y una multiplicación por escalares λu. Emplearemos las leyes vectoriales conocidas: asociatividad y conmutatividad de la suma, vector cero, opuestos y distributividad. Para $P \in \mathcal{E}$, la expresión $P + v$ sigue representando la traslación de un **punto** por un **vector**. Por proposición 4.1, una sucesión de desplazamientos satisface $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Que podamos componer flechas no significa que exista una suma intrínseca de puntos. Las combinaciones lineales que definiremos pertenecen siempre a V. La dimensión $\dim V = 3$ forma parte del modelo del capítulo. Esto significa que existe alguna terna de vectores que constituye una base; **no** significa que cualquier terna no nula lo sea. No necesitamos una métrica para comprender esta dimensión algebraica.

Definir: combinación lineal y espacio generado. Definición 4.7 — Combinación lineal y subespacio generado Para vectores $v_1, \dots, v_k \in V$ y escalares $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, la expresión

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$$

es una **combinación lineal**. El conjunto de todas las combinaciones lineales de la familia es

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i v_i : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diremos que la familia **genera** V si su espacio generado coincide con V. La familia de un solo vector no nulo genera los vectores de la forma av; dos vectores generan los de la forma $au + bw$. Sólo si la familia genera V podremos representar **todo** desplazamiento del modelo.

¿Por qué se llama subespacio? La combinación con todos los coeficientes nulos produce 0. Si $x = \sum a_i v_i$ e $y = \sum b_i v_i$, entonces $x + y = \sum (a_i + b_i) v_i$ y $cx = \sum (c a_i) v_i$. Así, el conjunto generado contiene el cero y es cerrado bajo suma y multiplicación escalar. No hemos usado longitudes ni ángulos.

Dos pruebas de estrés para la generación. Familia demasiado pequeña. Si $u \neq 0$, la familia (u) puede representar $2u$ o $-u$, pero no tiene por qué representar cualquier vector de V. En un espacio de dimensión tres, su espacio generado es estrictamente menor que V. **Familia con instrucciones redundantes.** Añadir $u + v$ a (u, v) no aumenta lo generado:

$$\operatorname{span}(u, v, u+v) = \operatorname{span}(u, v).$$

En efecto, toda combinación $au + bv + c(u+v)$ se reescribe como $(a+c)u + (b+c)v$, y las combinaciones de (u, v) se obtienen tomando $c = 0$. La segunda familia tiene más elementos, pero no permite construir vectores adicionales. La cantidad de instrucciones no mide por sí sola la información geométrica.

Definición 4.8 — Independencia lineal Una familia $(v_1, \dots, v_k)$ es **linealmente independiente** si

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_k = 0.$$

Si existen coeficientes, no todos nulos, que producen 0, la familia es **linealmente dependiente**.

¿Por qué estudiar precisamente una combinación que vale cero? Porque una relación de este tipo permite modificar los coeficientes de una representación sin cambiar el vector obtenido. Algunos no-ejemplos inmediatos: una familia que contiene 0 es dependiente; una familia en la que se repite un vector es dependiente; la terna $(u, v, u+v)$ es dependiente, pues

$$u + v - (u+v) = 0.$$

En particular, que *todos* los vectores de una familia sean no nulos no basta para garantizar independencia.

La pregunta correcta: ¿cuántas recetas tiene el mismo vector? Una familia dependiente proporciona una relación $\sum_i c_i v_i = 0$

con algún $c_i \neq 0$. Si $w = \sum_i a_i v_i$, entonces también

$$w = \sum_i (a_i + t c_i) v_i$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Si $t \neq 0$, la segunda lista de coeficientes es distinta de la primera. Por el contrario, si una familia es independiente, dos listas que representen el mismo vector han de coincidir. Este razonamiento merece una demostración general.

Proposición: independencia y unicidad en el espacio generado. Proposición 4.5 — Caracterización de la independencia por unicidad Para una familia finita $(v_1, \dots, v_k)$, son equivalentes:

1. La familia es linealmente independiente.
2. Cada vector de $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$ tiene **una única** representación como $\sum_i a_i v_i$.

Demostración. Supongamos independencia y que un vector admite dos expresiones:

$$\sum_i a_i v_i = \sum_i b_i v_i.$$

Restando, $\sum_i (a_i - b_i) v_i = 0$.

Por independencia, $a_i - b_i = 0$ para cada i; las listas son iguales. Recíprocamente, supongamos unicidad dentro del espacio generado. El vector 0 admite la representación con todos los coeficientes nulos. Si $\sum_i c_i v_i = 0$, ésta es otra representación de 0 y, por unicidad, necesariamente $c_i = 0$ para todos los índices. La familia es independiente. □ **Lectura guiada.** La estrategia es convertir «dos representaciones» en «una relación que da cero»; la técnica es restarlas; el mecanismo es aplicar

definición 4.8. La recíproca prueba la definición examinando exclusivamente las representaciones del vector cero.

Definir: base. Definición 4.9 — Base de un espacio vectorial Una familia ordenada $B = (e_1, \dots, e_n)$ es una **base** de V si cumple simultáneamente:

- **generación:** $\operatorname{span}(e_1, \dots, e_n) = V$;
- **independencia:** $\sum_i a_i e_i = 0$ sólo cuando todos los a_i son cero.

En nuestro modelo tridimensional consideraremos bases ordenadas $B = (e_1, e_2, e_3)$. El orden es necesario al escribir componentes: intercambiar e_1 y e_2 cambia el orden de los números, aunque la colección de vectores siga siendo una base. Un conjunto que sólo genera puede contener instrucciones redundantes. Una familia independiente que no genera no describe todos los desplazamientos. **Una base resuelve los dos problemas a la vez.**

Proposición: el teorema fundamental de las representaciones en una base. Proposición 4.6 — Existencia y unicidad de los coeficientes en una base Sea $B = (e_1, \dots, e_n)$ una familia finita de vectores. Es una base de V **si y sólo si** cada $v \in V$ posee una única representación

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i.}$$

Demostración. Si B es una base, la condición de generación asegura la existencia para todo v. Proposición 4.5, aplicada a la independencia de B, asegura la unicidad. Inversamente, si cada $v \in V$ posee una representación de la forma indicada, B genera V. La unicidad para todo v, y en particular para los vectores del espacio generado, implica independencia por la proposición 4.5. Ambas condiciones de la definición 4.9 se cumplen. □

Principio metodológico 4.4 — Separar existencia de unicidad Antes de llamar *base* a una familia, demostrar por separado que todo vector se puede construir con ella y que no existen dos listas distintas de coeficientes para un mismo vector. Una sola comprobación numérica no sustituye ninguna de estas pruebas.

Definir: las componentes de un vector. Definición 4.10 — Componentes relativas a una base Sea $B = (e_1, e_2, e_3)$ una base ordenada de V. Para el vector único

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3,$$

definimos su columna de **componentes en** B como

$$\boxed{[v]_B = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.}$$

Proposición 4.6 garantiza que esta notación no es ambigua. La columna es un elemento de $\mathbb{R}^3$; v sigue siendo un elemento de V. La igualdad $v = [v]_B$ **no** es una igualdad de objetos tipados como hemos definido, aunque una identificación dependiente de B permita realizar cálculos con la columna.

Punto, vector y columna $P \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{PQ} \in V$ y $[\overrightarrow{PQ}]_B \in \mathbb{R}^3$ son objetos distintos. Un origen hará posible representar puntos mediante vectores de posición; esa operación se estudiará sistemáticamente en §4.

Proposición: la aplicación de componentes respeta las operaciones. Proposición 4.7 — Correspondencia lineal de componentes Fijada una base $B = (e_1, e_2, e_3)$, la aplicación

$$C_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad C_B(v) = [v]_B$$

es biyectiva y lineal. En particular,

$$\boxed{[au + bv]_B = a[u]_B + b[v]_B.}$$

Demostración. Dados $v = \sum_i v^i e_i$ y $w = \sum_i w^i e_i$, las leyes vectoriales dan

$$av + bw = \sum_i (av^i + bw^i) e_i.$$

Por la unicidad de la proposición 4.6, sus componentes son precisamente $(av^i + bw^i)_{i=1}^3$. Esto prueba la linealidad. Para cada columna $(c^1, c^2, c^3)^\mathsf{T}$, el vector $\sum_i c^i e_i$ tiene esa columna: C_B es sobreyectiva. Si dos vectores tienen igual columna, sus expresiones en la base son idénticas y los vectores coinciden: C_B es inyectiva. □ **Autoexplicación.** Una columna es útil porque conserva la suma y la multiplicación escalar. Pero su forma numérica depende de la base; la correspondencia se define **después** de elegir B, no antes.

Ejemplo construido: una base no tiene por qué ser la primera que vemos. Sea $E = (e_1, e_2, e_3)$ una base conocida de un espacio de dimensión tres. Definamos

$$b_1 = e_1, \qquad b_2 = e_1 + e_2, \qquad b_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Para un vector cualquiera

$$v = ae_1 + be_2 + ce_3,$$

buscamos escalares x, y, z tales que $v = xb_1 + yb_2 + zb_3$. Al reordenar:

$$xb_1 + yb_2 + zb_3 = (x + y + z)e_1 + (y + z)e_2 + ze_3.$$

La unicidad de las componentes relativas a E obliga a resolver

$$x + y + z = a, \qquad y + z = b, \qquad z = c.$$

El sistema se despeja desde la última ecuación:

$$\boxed{z = c, \qquad y = b - c, \qquad x = a - b.}$$

Existe una solución para todo v y es única; por la proposición 4.6, $B = (b_1, b_2, b_3)$ es una base. **No hemos utilizado determinantes, producto escalar ni ortogonalidad.** Para $v = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$:

$$[v]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad [v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Las columnas son diferentes, pero ambas reconstruyen el mismo vector. La teoría general de cambios de base, incluida su convención matricial, aparecerá en §10.

Contraejemplo: tres vectores que no forman base. Con E como antes, elijamos

$$u = e_1 + e_2, \qquad w = e_2 + e_3, \qquad z = u + w = e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Los tres vectores son no nulos, pero

$$u + w - z = 0$$

es una relación no trivial. Además, para el propio vector z tenemos dos representaciones: $z = 0u + 0w + 1z = 1u + 1w + 0z$. No son componentes legítimas de una base, porque la unicidad falla. Tampoco generan todo V: si $e_1 = \alpha u + \beta w$, la comparación de coeficientes en E daría $\alpha = 1$, $\alpha + \beta = 0$ y $\beta = 0$, un sistema contradictorio.

Error plausible «Tres vectores no nulos en un espacio tridimensional forman automáticamente una base». Es falso: el problema no es contar flechas, sino verificar independencia y generación. El contraejemplo falla en ambas condiciones.

Cambiar la escala de un vector de referencia. Si $B = (e_1, e_2, e_3)$ es una base y $s \in \mathbb{R}$ con $s \neq 0$, entonces $B' = (se_1, e_2, e_3)$ también es una base: toda representación $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$ se reescribe unívocamente como $v = \frac{v^1}{s}(se_1) + v^2 e_2 + v^3 e_3$. Por tanto,

$$\boxed{[v]_{B'} = \begin{pmatrix} v^1/s \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.}$$

Este caso particular enseña un fenómeno esencial: cuando se hace s veces mayor el vector de referencia, el coeficiente correspondiente se divide por s. No hemos cambiado v; hemos cambiado la **escala de su descripción**. Si el contexto físico asigna unidades a los desplazamientos de referencia, las componentes y las unidades se interpretan coherentemente según la convención declarada.

La interpretación física y sus límites. La interpretación dimensional de las componentes depende de la convención declarada. Si los vectores de la base representan desplazamientos de referencia con dimensión de longitud, los coeficientes v^i son números adimensionales; si se trabaja con direcciones adimensionales, las componentes pueden portar la unidad de longitud. En ningún caso los coeficientes solos revelan cuál es la base de referencia ni qué convención de unidades se adoptó. No hemos probado que una base sea ortonormal: ni siquiera hemos definido todavía los ángulos y las longitudes. Tampoco se sigue de la definición 4.9 que los vectores elegidos representen un marco físico inercial o que el espacio físico real satisfaga exactamente el modelo euclídeo. Son cuestiones posteriores. Al igual que en el capítulo 3, los valores medidos que se empleen para realizar una representación física tendrán su propia incertidumbre; las igualdades algebraicas de las proposiciones 4.5–4.7 no son resultados experimentales.

Ejercicio 4.6 — Tres vectores, pero ninguna base.

Función pedagógica: diagnóstico de independencia y generación, prueba de estrés de la definición, reconstrucción de una representación.

Sea $E = (e_1, e_2, e_3)$ una base conocida de V y definamos

$$u = e_1 + e_2, \qquad w = e_2 + e_3, \qquad z = u + w.$$

1. Demuestra que (u, w, z) no es independiente.
2. Exhibe dos listas de coeficientes que representen z.

3. Demuestra, sin determinantes, que la familia tampoco genera V.
4. Explica por qué añadir z a (u, w) no soluciona el problema.

Solución desarrollada

1. $u + w - z = 0$ proporciona coeficientes $(1, 1, -1)$ no todos nulos: la familia es dependiente.
2. $z = 1u + 1w + 0z = 0u + 0w + 1z$. La representación no es única.
3. Si existieran α, β, γ con $e_1 = \alpha u + \beta w + \gamma z$, podríamos absorber γz y escribir $e_1 = au + bw$. Esto daría

$$e_1 = ae_1 + (a + b)e_2 + be_3.$$

Como E es base, habría de cumplirse $a = 1$, $a + b = 0$ y $b = 0$, imposible. Por tanto e_1 no pertenece al espacio generado. 4. Por definición $z = u + w$ ya pertenecía a $\operatorname{span}(u, w)$: no añade una dirección algebraica nueva ni repara la redundancia.

Ejercicio 4.7 — Probar una base y leer sus componentes.

Función pedagógica: construcción, prueba de existencia y unicidad, traducción símbolo–representación.

Sea $E = (e_1, e_2, e_3)$ una base de V, y sean

$$b_1 = e_1, \quad b_2 = e_1 + e_2, \quad b_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Demuestra que $B = (b_1, b_2, b_3)$ es una base sin invocar determinantes.
2. Para $v = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$, calcula $[v]_B$ y verifica reconstruyendo v.
3. Explica por qué la diferencia entre $[v]_E$ y $[v]_B$ no implica un cambio físico del vector.

Solución desarrollada

1. Para $v = ae_1 + be_2 + ce_3$, una combinación $xb_1 + yb_2 + zb_3$ reproduce v si y sólo si $x + y + z = a$, $y + z = b$ y $z = c$. La única solución es

$$(x, y, z) = (a - b, b - c, c).$$

Existe y es única para todo vector; proposición 4.6 prueba que B es base. 2. Sustituyendo $(a, b, c) = (2, 3, 4)$:

$$[v]_B = (-1, -1, 4)^{\mathsf{T}}.$$

Reconstruimos:

$$-b_1 - b_2 + 4b_3 = -e_1 - (e_1 + e_2) + 4(e_1 + e_2 + e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 = v.$$

3. La identidad de reconstrucción muestra que ambas columnas nombran el mismo elemento de V. Cambian los vectores que sirven como referencia, no el desplazamiento físico.

Cierre: de una base vectorial a las coordenadas de los puntos. Ya tenemos una cadena demostrada:

$$\boxed{\text{generación} + \text{independencia} \iff \text{existencia y unicidad de componentes.}}$$

Proposiciones 4.5–4.7 justifican la representación de **vectores** mediante columnas. Aún no hemos asignado una columna a un punto P, porque para hacerlo debemos elegir además un origen O y representar el vector $r_O(P) = \overrightarrow{OP}$. El siguiente paso, **§4 — Coordenadas afines y marcos cartesianos**, incorporará esa elección adicional y distinguirá sistemáticamente punto, vector de posición, desplazamiento y terna de componentes.

4. Coordenadas afines y marcos cartesianos

Activación: tres números, ¿qué describen? Un plano de una sala señala que un sensor ocupa la posición «$(2, -1, 3)$». Esa información no determina por sí sola una ubicación física: faltan un origen, tres vectores de referencia ordenados y las convenciones de escala que permiten interpretar los números.[2] Si otro plano elige el origen en la puerta en vez de una esquina, el mismo sensor recibe otra terna sin moverse. §1 distinguió los puntos de los vectores; §2 construyó combinaciones afines; §3 demostró que una base permite representar **vectores** por columnas únicas. Ahora añadiremos la elección que faltaba para representar **puntos**.

Activación Si dos registros contienen la misma terna $(2, -1, 3)$, ¿qué deberíamos comprobar antes de concluir que se refieren al mismo lugar? ¿Puede una diferencia de ternas ser físicamente significativa aunque ambas ternas por separado dependan del origen?

Inventario de objetos: no intercambiar tipos. La geometría disponible distingue:

- un punto $P \in \mathcal{E}$;
- un vector de desplazamiento $v \in V$;
- su columna $[v]_B \in \mathbb{R}^3$, una vez elegida una base B;
- el vector de posición $r_O(P) = \overrightarrow{OP} \in V$, una vez elegido un origen O.

La expresión $P = v$ no pertenece a nuestra estructura. Tampoco hay una terna de números atribuida canónicamente a P. En cambio, la cadena

$$P \longmapsto r_O(P) \longmapsto [r_O(P)]_B$$

está bien definida cuando se fijan O y B. Cada flecha representa una **decisión matemática distinta**; no hay medición ni movimiento implícito en la elección.

Definir el marco afín. Definición 4.11 — Marco afín ordenado Un **marco afín** de $\mathcal{E}$ es un par

$$\boxed{\mathfrak{F} = (O, B), \qquad B = (e_1, e_2, e_3),}$$

donde $O \in \mathcal{E}$ es un punto elegido como origen y B es una base ordenada del espacio vectorial V de desplazamientos.

La elección de O fija la referencia para las posiciones; la de B fija cómo se descomponen los desplazamientos. En este punto no se exige que los e_i tengan la misma longitud ni que formen ángulos rectos: tales expresiones todavía no están definidas. **No-ejemplos.** Un origen aislado no es un marco completo. Una terna dependiente tampoco lo es, aunque dibujemos tres flechas y la llamemos «tres ejes». Una base sin origen sirve para representar vectores, pero todavía no proporciona coordenadas de puntos.

Definir las coordenadas de un punto. Definición 4.12 — Coordenadas afines de un punto Fijado $\mathfrak{F} = (O, B)$, las **coordenadas afines** de P son la columna única

$$\boxed{x_{\mathfrak{F}}(P) := [\overrightarrow{OP}]_B = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.}$$

[2] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics*, expanded ed., Yale University Press, 2019, cap. 2, §2.4 «Choice of axes and basis vectors», pp. 22–25.

Por la definición de componentes y proposición 4.6, el punto satisface la reconstrucción

$$\boxed{P = O + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3.}$$

En la última fórmula, $O + v$ es la acción afín definida en la definición 4.1; no estamos sumando cuatro puntos. Las coordenadas x^i son escalares relativos a la base **declarada**, no propiedades intrínsecas del punto.

Principio metodológico 4.5 — Declarar el marco y las unidades Toda terna que se interprete como posición debe ir acompañada de la elección del origen, la base ordenada y el convenio de unidades. Distinguir explícitamente P, $r_O(P)$ y $x_{\mathfrak{F}}(P)$; no inferir desplazamiento real de un cambio de etiqueta.

La proposición de existencia y unicidad para puntos. Proposición 4.8 — Coordenadas afines como correspondencia biyectiva Para cada marco afín fijo $\mathfrak{F} = (O, B)$, la aplicación

$$x_{\mathfrak{F}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad P \longmapsto [\overrightarrow{OP}]_B$$

es biyectiva. Su inversa es

$$\boxed{(c^1, c^2, c^3)^{\mathsf{T}} \longmapsto O + c^1 e_1 + c^2 e_2 + c^3 e_3.}$$

Demostración. Para una columna c, la combinación $v = \sum_i c^i e_i$ es un vector y definición 4.1 construye el punto $P = O + v$. Por definición 4.2, $\overrightarrow{OP} = v$, y por la proposición 4.6 sus componentes son precisamente c: la aplicación es sobreyectiva. Si dos puntos P, Q poseen la misma columna, proposición 4.7 y la unicidad de las componentes dan $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$. Definición 4.1 implica entonces $P = O + \overrightarrow{OP} = O + \overrightarrow{OQ} = Q$: es inyectiva. □ **Lectura guiada.** Para existir una posición dada la terna, convertimos la terna en un vector y trasladamos el origen; para probar unicidad, deshacemos ambas operaciones. Ésta es una biyección que **depende del marco**, no una identidad entre los conjuntos $\mathcal{E}$ y $\mathbb{R}^3$.

El origen y los vectores de referencia tienen coordenadas sencillas. De $\overrightarrow{OO} = 0$ y proposición 4.7 se deduce

$$x_{\mathfrak{F}}(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los puntos $E_i := O + e_i$ tienen las columnas unitarias habituales:

$$x_{\mathfrak{F}}(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\mathfrak{F}}(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\mathfrak{F}}(E_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estas columnas no afirman que los vectores de referencia midan un metro, que sean perpendiculares o que tengan igual longitud. Sólo codifican su **papel algebraico en la base**.

Definir los ejes afines sin presuponer ángulos rectos. Definición 4.13 — Ejes afines de un marco Para $\mathfrak{F} = (O, (e_1, e_2, e_3))$, el eje afín asociado a e_i es el conjunto de puntos

$$\boxed{\mathcal{A}_i = \{O + te_i : t \in \mathbb{R}\}.}$$

Los tres ejes concurren en O y están asociados a desplazamientos linealmente independientes. La construcción es algebraicamente legítima incluso si en una ilustración sus direcciones parecen oblicuas. **Precisión terminológica.** A menudo se llama «sistema cartesiano» a un origen con ejes perpendiculares y una escala declarada. Aquí hemos construido la parte **afín** del sistema de coordenadas; podremos exigir ortogonalidad sólo tras definir producto escalar (§5) y construir bases ortonormales (§7). Por ahora, «marco cartesiano» en el título señala el objetivo del capítulo, no una propiedad métrica ya demostrada.

Proposición: restar coordenadas recupera un desplazamiento. Proposición 4.9 — Diferencias de coordenadas Fijado $\mathfrak{F} = (O, B)$, para todos $P, Q \in \mathcal{E}$ se tiene

$$\boxed{[\overrightarrow{PQ}]_B = x_{\mathfrak{F}}(Q) - x_{\mathfrak{F}}(P).}$$

Además, para $v \in V$,

$$\boxed{x_{\mathfrak{F}}(P + v) = x_{\mathfrak{F}}(P) + [v]_B.}$$

Demostración. proposición 4.2 establece que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. Aplicamos la linealidad de la correspondencia de componentes proposición 4.7 y la definición definición 4.12 para obtener la primera identidad. Para la segunda, la ley del triángulo da $\overrightarrow{O(P+v)} = \overrightarrow{OP} + v$; proposición 4.7 vuelve a convertir la suma vectorial en suma de columnas. □ La diferencia de las columnas representa el **desplazamiento entre los puntos**, no una «resta física de posiciones» realizada sobre los objetos. El orden importa:

$$[\overrightarrow{QP}]_B = x_{\mathfrak{F}}(P) - x_{\mathfrak{F}}(Q) = -[\overrightarrow{PQ}]_B.$$

Ejemplo físico: ubicar un detector y desplazarlo. Fijamos un origen en una marca del laboratorio y tres desplazamientos de referencia ordenados $B = (e_1, e_2, e_3)$. Sea el punto del detector

$$P = O + 2e_1 - e_2 + 3e_3.$$

Su columna es

$$x_{\mathfrak{F}}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si trasladamos **físicamente el detector en el modelo** mediante $v = -e_1 + 2e_2$, el nuevo punto es $Q = P + v$. Proposición 4.9 proporciona

$$x_{\mathfrak{F}}(Q) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aquí sí cambió el punto modelado. La comparación con el próximo caso —un cambio de **origen** sin movimiento— es la prueba conceptual importante.

Cambiar sólo el origen, conservando la base. Supongamos que elegimos $O' = O + a$ con $a \in V$, pero conservamos exactamente la base ordenada B. Los marcos son $\mathfrak{F} = (O, B)$, $\mathfrak{F}' = (O', B)$. §1 ya demostró para el vector de posición que

$$r_{O'}(P) = r_O(P) - a.$$

La novedad consiste en expresar esa ley para las **columnas** mediante proposición 4.7. Es un cambio pasivo de descripción; no modifica el punto P.

Proposición: ley de traslación de las coordenadas. Proposición 4.10 — Cambio de origen con base fija Si $O' = O + a$ y B se conserva, entonces para cualquier $P \in \mathcal{E}$,

$$\boxed{x_{(O',B)}(P) = x_{(O,B)}(P) - [a]_B.}$$

Para cualesquiera P, Q, la diferencia de coordenadas no cambia:

$$\boxed{x_{(O',B)}(Q) - x_{(O',B)}(P) = x_{(O,B)}(Q) - x_{(O,B)}(P).}$$

Demostración. La primera identidad se obtiene aplicando proposición 4.7 a $r_{O'}(P) = r_O(P) - a$ y usando definición 4.12. Sustraemos esta identidad para Q y para P; los términos $-[a]_B$ se cancelan. De manera independiente, proposición 4.9 identifica ambas diferencias con $[\overrightarrow{PQ}]_B$. □
Prueba de estrés del signo. Si el nuevo origen se desplaza **hacia** un punto manteniendo la base, la coordenada de ese punto disminuye en la componente correspondiente. Sumar $[a]_B$ sería confundir el desplazamiento del origen con el cambio de coordenada del objeto.

Ejemplo: dos planos de un mismo laboratorio. Sea

$$x_{(O,B)}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [a]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $O' = O + a$, sin mover P ni alterar B,

$$x_{(O',B)}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Recuperamos la representación antigua sumando $[a]_B$. Dos columnas distintas representan el **mismo punto** en marcos distintos; no se deduce un desplazamiento del detector. Si también cambiásemos B, la fórmula anterior sería insuficiente: necesitaríamos además la matriz de cambio de base, que se desarrollará en §10. La composición sistemática de ambos cambios será propia de §12.

Coordenadas de las combinaciones afines. Proposición 4.11 — Compatibilidad con combinaciones afines Si A es la combinación afín de puntos $P_1, \dots, P_n$ con coeficientes λ_i tales que $\sum_i \lambda_i = 1$, entonces, en cualquier marco fijo $\mathfrak{F}$,

$$\boxed{x_{\mathfrak{F}}(A) = \sum_i \lambda_i x_{\mathfrak{F}}(P_i).}$$

Demostración. definición 4.4 permite escribir $A = O + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$ porque los coeficientes suman uno. Aplicamos definición 4.12 y la linealidad de la proposición 4.7 al vector $\overrightarrow{OA}$ y obtenemos la fórmula. Para otro origen $O' = O + a$, la suma de las nuevas columnas es $\sum_i \lambda_i (x_{\mathfrak{F}}(P_i) - [a]_B) = \sum_i \lambda_i x_{\mathfrak{F}}(P_i) - [a]_B$, exactamente la nueva columna de A por la proposición 4.10. □ Para el punto medio de §2:

$$\boxed{x_{\mathfrak{F}}(M(P,Q)) = \tfrac{1}{2} x_{\mathfrak{F}}(P) + \tfrac{1}{2} x_{\mathfrak{F}}(Q).}$$

Para un baricentro con $W = \sum_i w_i \neq 0$, los coeficientes son w_i/W, y la misma fórmula vale. La suma de coeficientes uno no es un detalle cosmético: impide que el punto resultante dependa del origen.

Unidades y escalas: qué miden los coeficientes. La ecuación $\overrightarrow{OP} = \sum_i x^i e_i$ sólo tiene interpretación dimensional después de declarar qué representan los e_i. Por ejemplo, si cada e_i es un **desplazamiento de referencia con dimensión de longitud**, los coeficientes x^i son números adimensionales; el producto $x^i e_i$ sí es una cantidad vectorial de longitud. Si se trabaja con símbolos de direcciones adimensionales y componentes dimensionales, es preciso declararlo como una convención diferente, no mezclar ambas escrituras sin aviso. Los tres desplazamientos de referencia no tienen por qué ser de igual longitud física. Una columna como $(2, -1, 3)^{\mathsf{T}}$ no proporciona por sí sola tres medidas en metros ni permite calcular la distancia al origen. La noción métrica aún no existe en el desarrollo deductivo.

El capítulo 2 y capítulo 3 El número escrito en el plano no equivale a una medición sin declarar patrones, instrumentos, mensurando e incertidumbre. Las identidades de esta sección son exactas **en el modelo afín**; la realización física de un sistema de marcas requiere procedimientos y puede tener incertidumbre.

Diagnóstico de afirmaciones plausibles pero falsas. «Tres flechas de referencia cualesquiera definen un marco». Falso: deben constituir una base, es decir, generar V y ser independientes (definición 4.9). **«El origen tiene coordenadas cero en todos los marcos».** El origen *elegido por cada marco* tiene coordenadas cero en su propio marco. El mismo punto O no tiene necesariamente coordenadas cero respecto de otro origen O'. **«Si cambia la terna, el objeto se movió».** Falso: proposición 4.10 exhibe un contraejemplo mediante un mero cambio de origen. **«Si dos ternas son iguales, los puntos son necesariamente iguales».** Sólo si las ternas se interpretan en el **mismo marco**; proposición 4.8 no establece identidad entre columnas procedentes de marcos diferentes. **«La diferencia de ternas es un desplazamiento geométrico absoluto».** Debe precisarse: en un mismo marco, es la **columna en la base declarada** del desplazamiento intrínseco (proposición 4.9). Otra base puede proporcionar una columna diferente para ese mismo vector. **«Llamar cartesiano al marco demuestra ejes perpendiculares».** No: la perpendicularidad necesita un producto escalar (§5), y la ortonormalidad será construida en §7.

Ejercicio 4.8 — Dos orígenes, ningún movimiento.

Función cognitiva: `cambio de representación / control del signo / invariancia`.

En un marco afín $\mathfrak{F} = (O, B)$, dos marcas tienen columnas

$$x_{\mathfrak{F}}(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_{\mathfrak{F}}(Q) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Se elige $O' = O + a$ manteniendo B, con $[a]_B = (2, -1, 4)^{\mathsf{T}}$.

1. Calcula las columnas de ambos puntos respecto de (O', B).
2. Calcula la columna de $\overrightarrow{PQ}$ por las dos rutas.
3. Explica si las marcas se movieron y por qué no puede inferirse su distancia geométrica sólo de estas columnas.

Solución desarrollada Por proposición 4.10 restamos la columna de a a cada punto:

$$x_{(O',B)}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad x_{(O',B)}(Q) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En el marco inicial, proposición 4.9 da

$$[\overrightarrow{PQ}]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En el marco nuevo,

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Coinciden porque no cambió B ni los puntos, sólo el origen: es una transformación pasiva. No podemos convertir la columna $(-5, 5, 1)^{\mathsf{T}}$ en una distancia sin definir una métrica sobre V y especificar el significado de las escalas de la base.

Ejercicio 4.9 — Marco válido, punto medio y errores de tipo.

Función cognitiva: `construcción / no-ejemplo / traducción geometría-columnas`.

Sea $E = (e_1, e_2, e_3)$ una base de V y elijamos un origen O. Definimos $b_1 = e_1, \quad b_2 = e_1 + e_2, \quad b_3 = e_1 + e_2 + e_3$. En $\mathfrak{F} = (O, B)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, dos puntos tienen coordenadas

$$x_{\mathfrak{F}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x_{\mathfrak{F}}(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifica que B es una base sin usar determinantes.
2. Calcula las coordenadas de $M(P, Q)$ en B y el vector $\overrightarrow{PQ}$ expresado en E.
3. Analiza las frases «$P = [P]_B$» y «el punto medio es la mitad de la suma vectorial $P + Q$».

Solución desarrollada Para $v = ae_1 + be_2 + ce_3$, buscar $v = xb_1 + yb_2 + zb_3$ lleva a $x + y + z = a$, $y + z = b$, $z = c$, con solución única $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c$. Por proposición 4.6, B es base.

Por proposición 4.11,

$$x_{\mathfrak{F}}(M) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por proposición 4.9, $[\overrightarrow{PQ}]_B = (2, -2, 2)^{\mathsf{T}}$. Por la definición de B,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= 2b_1 - 2b_2 + 2b_3 \\ &= 2e_1 - 2(e_1 + e_2) + 2(e_1 + e_2 + e_3) \\ &= 2e_1 + 0e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

La primera frase confunde un punto $P \in \mathcal{E}$ con su columna de coordenadas $x_{\mathfrak{F}}(P) \in \mathbb{R}^3$; $[P]_B$ ni siquiera es la notación definida para puntos. La segunda frase usa una suma vectorial $P + Q$ que no existe en la definición 4.1: la formulación correcta es $M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$, cuya columna puede calcularse por el promedio de la proposición 4.11.

Cierre y enlace deductivo. La representación de un punto necesita dos elecciones:

$$\boxed{\text{marco afín} = \text{origen} + \text{base ordenada.}}$$

Con ambas fijadas, las coordenadas son únicas (proposición 4.8); la resta de columnas representa un desplazamiento (proposición 4.9); trasladar sólo el origen modifica las coordenadas por un término común y conserva las diferencias (proposición 4.10); combinar puntos afínmente es compatible con combinar sus columnas usando coeficientes de suma uno (proposición 4.11). Pero todavía **no** hemos definido la longitud de una flecha ni la distancia entre dos puntos. El siguiente paso será precisamente

(§5).

Allí distinguiremos la mera independencia de los ejes de su perpendicularidad y construiremos las herramientas métricas necesarias para hablar con precisión de sistemas cartesianos rectangulares.

5. Producto escalar, norma y distancia

Activación: las coordenadas todavía no saben medir. En §4 aprendimos a asignar a un punto una terna de coordenadas una vez fijado un marco afín. Supongamos que dos puntos tienen coordenadas

$$x_{\mathfrak{F}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_{\mathfrak{F}}(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es tentador concluir inmediatamente que están separados por «5 unidades». Pero hasta ahora la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ sólo es una base algebraica. No sabemos todavía cuánto mide cada e_i, ni si las direcciones asociadas forman ángulos rectos. La columna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

describe componentes del desplazamiento; **no contiene por sí sola una regla de longitud**.

Activación ¿Qué estructura matemática debemos añadir a V para comparar longitudes y hablar de distancia sin depender de una base particular?

La geometría afín y la geometría métrica son capas distintas. La estructura afín construida hasta §4 permite distinguir puntos y vectores, trasladar puntos, formar diferencias, elegir bases y representar puntos y desplazamientos por columnas. Nada de esto define todavía longitud, distancia, perpendicularidad o ángulo.

Principio metodológico 4.6 — La métrica es estructura adicional No inferir longitudes, distancias ni perpendicularidad a partir de una terna de componentes sin declarar antes el producto escalar —o una estructura métrica equivalente— con el que se interpretan esas componentes.

Definición 4.14 — Producto escalar real Un **producto escalar** sobre V es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todos $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle,$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$$

y

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \qquad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0.$$

Por simetría y bilinealidad en la primera entrada, también hay linealidad en la segunda.

Definición 4.15 — Espacio afín euclídeo Un **espacio afín euclídeo** es un espacio afín $\mathcal{E}$ modelado sobre un espacio vectorial real V provisto de un producto escalar positivo definido.

La estructura afín determina desplazamientos; el producto escalar añade la posibilidad de medirlos. Que un sistema físico concreto sea adecuadamente modelado así es una cuestión física y experimental, no una consecuencia de la definición.

Definir: norma inducida. Definición 4.16 — Norma euclídea inducida Para $v \in V$ definimos

$$\boxed{\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.}$$

La positividad garantiza

$$\|v\| \geq 0, \qquad \|v\| = 0 \iff v = 0.$$

Además,

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \, \|v\|.$$

Proposición 4.12 — Desigualdad de Cauchy–Schwarz Para todos $u, v \in V$,

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.}$$

Hay igualdad si y sólo si u y v son linealmente dependientes.

Demostración. Si $v = 0$, el resultado es inmediato. Supongamos $v \neq 0$ y definamos

$$\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

La positividad da

$$0 \leq \|u - \lambda v\|^2 = \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle.$$

Expandiendo,

$$0 \leq \langle u, u \rangle - 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Al sustituir λ,

$$0 \le \langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle}.$$

Por tanto,

$$\langle u, v\rangle^2 \le \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle,$$

y al tomar raíces, $|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$.

La igualdad ocurre exactamente cuando $\|u - \lambda v\| = 0$, es decir, cuando $u = \lambda v$; incluyendo los casos nulos, esto equivale a dependencia lineal. □

Proposición: desigualdad triangular de la norma. Proposición 4.13 — Desigualdad triangular Para todos $u, v \in V$,

$$\boxed{\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|.}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2\\ &\le \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2\\ &\le (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

Como ambos lados son no negativos, tomamos raíces. □ La ley del triángulo de §1 era una identidad vectorial; proposición 4.13 compara longitudes.

Definir: distancia entre puntos. Definición 4.17 — Distancia euclídea Para $P, Q \in \mathcal{E}$,

$$\boxed{d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|.}$$

La definición no requiere origen ni base.

Proposición: la distancia satisface los axiomas métricos. Proposición 4.14 — Propiedades métricas de d Para cualesquiera $P, Q, R \in \mathcal{E}$:

$$d(P, Q) \ge 0, \qquad d(P, Q) = 0 \iff P = Q,$$

$$d(P, Q) = d(Q, P),$$

y

$$\boxed{d(P, R) \le d(P, Q) + d(Q, R).}$$

Demostración. Las dos primeras propiedades siguen de la definición 4.16. La simetría usa $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$ y $\|-v\| = \|v\|$. Finalmente,

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR},$$

y proposición 4.13 produce la desigualdad triangular de la distancia. □

La métrica en una base general: matriz de Gram. Definición 4.18 — Matriz de Gram de una base Sea $B = (e_1, e_2, e_3)$ una base. Su **matriz de Gram** es

$$\boxed{G_B = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \langle e_1, e_3\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \langle e_2, e_3\rangle \\ \langle e_3, e_1\rangle & \langle e_3, e_2\rangle & \langle e_3, e_3\rangle \end{pmatrix}.}$$

Si $c = [v]_B$, entonces

$$\boxed{\|v\|^2 = c^{\mathsf{T}} G_B c.}$$

Proposición: positividad de la matriz de Gram. Proposición 4.15 — Forma cuadrática de Gram Para toda columna no nula $c \in \mathbb{R}^3$,

$$\boxed{c^{\mathsf{T}} G_B c > 0.}$$

Demostración. El vector $v = c^1 e_1 + c^2 e_2 + c^3 e_3$ es no nulo porque B es una base y $c \neq 0$. Luego

$$c^{\mathsf{T}} G_B c = \langle v, v\rangle > 0.$$

□

No-ejemplo: la fórmula pitagórica no vale en cualquier base. Supongamos

$$\langle e_1, e_1\rangle = 4, \qquad \langle e_2, e_2\rangle = 1, \qquad \langle e_1, e_2\rangle = 1.$$

Para $v = 2e_1 - e_2$,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= 4\langle e_1, e_1\rangle - 4\langle e_1, e_2\rangle + \langle e_2, e_2\rangle \\ &= 16 - 4 + 1 = 13. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|v\| = \sqrt{13}$,
no $\sqrt{5}$.
Coordenadas no son métrica La expresión $\sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$ no es universal. Sólo aparecerá bajo hipótesis adicionales sobre la base, introducidas en §7.

Invariancia frente al origen y dependencia respecto de la métrica. Si el origen cambia pero la base permanece fija, proposición 4.10 preserva las diferencias de coordenadas. Por ello $\overrightarrow{PQ}$ y $d(P, Q)$ permanecen iguales. Esto no significa que la distancia sea independiente de toda estructura: si sobre V elegimos otro producto escalar, podemos obtener longitudes distintas. La métrica forma parte del modelo.

Interpretación física y unidades. Si los vectores modelan desplazamientos, entonces $\|v\|$ tiene dimensión de longitud y $\langle u, v\rangle$ dimensión de longitud al cuadrado. Si los vectores base llevan dimensión de longitud, las entradas de G_B también tienen dimensión de longitud al cuadrado y sus componentes pueden ser adimensionales. Las identidades geométricas son exactas dentro del modelo. Una medición experimental de una distancia posee resolución e incertidumbre, según capítulo 3.

Ejercicio 4.10 — Una columna no determina por sí sola la longitud.
Función pedagógica: `Diagnóstico → Matriz de Gram → No-ejemplo`
En una base $B = (e_1, e_2, e_3)$:

$$\langle e_1, e_1\rangle = 4\,\mathrm{m}^2, \quad \langle e_2, e_2\rangle = 1\,\mathrm{m}^2, \quad \langle e_1, e_2\rangle = 1\,\mathrm{m}^2.$$

Si

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcula $\|v\|$, explica por qué $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$ es incorrecto e indica qué datos faltan si la tercera componente fuese no nula.

Solución desarrollada

$$\|v\|^2 = 16 - 4 + 1 = 13\,\mathrm{m}^2,$$

luego

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{13}\,\mathrm{m}.}$$

La raíz $\sqrt{5}$ presupone condiciones métricas especiales sobre la base que no han sido dadas. Para una tercera componente no nula se requerirían además $\langle e_3, e_3\rangle$, $\langle e_1, e_3\rangle$ y $\langle e_2, e_3\rangle$.

Ejercicio 4.11 — Distancia, cambio de origen y desigualdad triangular.

Función pedagógica: `Integración → Invariancia → Desigualdad triangular`

En un marco $\mathfrak{F} = (O, B)$:

$$x_{\mathfrak{F}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\mathfrak{F}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\mathfrak{F}}(R) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\langle e_1, e_1\rangle = 1\,\mathrm{m}^2, \quad \langle e_2, e_2\rangle = 4\,\mathrm{m}^2, \quad \langle e_1, e_2\rangle = 0.$$

Calcula las tres distancias, verifica proposición 4.14 y explica por qué un traslado del origen con base fija no las modifica.

Solución desarrollada

Las columnas de los desplazamientos son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{5}\,\mathrm{m}, \qquad d(Q,R) = 2\,\mathrm{m}, \qquad d(P,R) = \sqrt{13}\,\mathrm{m}.}$$

Y

$$\sqrt{13} \le \sqrt{5} + 2.$$

Bajo un cambio de origen con base fija, proposición 4.10 resta la misma columna a las coordenadas de todos los puntos. Las diferencias permanecen iguales y, por tanto, también las distancias.

Cierre: de la estructura afín a la geometría euclídea. La cadena construida es

$$\boxed{\text{estructura afín} + \langle\cdot,\cdot\rangle \longrightarrow \|v\| \longrightarrow d(P,Q).}$$

Cauchy–Schwarz controla el producto escalar; de ella se obtiene la desigualdad triangular de la norma y después la de la distancia. El siguiente paso será
(§6).

6. Proyecciones, ángulos y geometría de componentes

Activación: ¿cuánto de un vector apunta en una dirección? Una fuerza, un desplazamiento o cualquier otro vector puede compararse con una dirección elegida. La pregunta física típica no es sólo cuánto mide el vector completo, sino **qué parte de él actúa a lo largo de una dirección determinada**. Con sólo componentes algebraicas esta pregunta depende de cómo hayamos elegido la base. Con el producto escalar introducido en §5 podemos formularla sin depender de una representación particular. Sean $u, v \in V$, con $v \neq 0$. Queremos construir un múltiplo de v que represente la parte de u alineada con la dirección de v, y que el resto sea perpendicular a esa dirección.

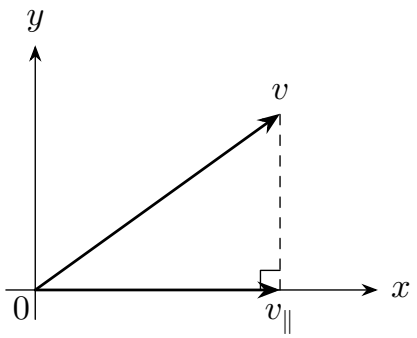


Figura 4.3. La proyección ortogonal sobre el eje horizontal es $v_\parallel = (v \cdot e_1)e_1$. El residuo perpendicular no desaparece del vector: $v = v_\parallel + v_\perp$. Véase §6.

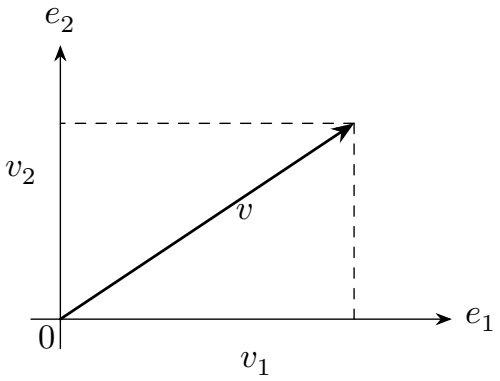


Figura 4.4. En una base ortonormal, $v = v_1e_1 + v_2e_2$ y $v_i = v \cdot e_i$. Las líneas discontinuas sitúan las componentes; no son fuerzas adicionales. Véase §6.

Definición 4.19 — Ortogonalidad Dos vectores $u, v \in V$ son **ortogonales**, y escribimos

$$u \perp v,$$

si

$$\boxed{\langle u, v\rangle = 0.}$$

La definición utiliza el producto escalar, no la apariencia de un dibujo ni la forma de sus columnas en una base arbitraria. En particular, el vector cero es ortogonal a todo vector: $\langle 0, v\rangle = 0$. La afirmación inversa «si $u \perp v$, entonces uno de los dos es cero» es falsa: pueden existir dos vectores no nulos y ortogonales.

La condición que debe satisfacer una proyección. Busquemos un vector de la forma $p = \lambda v$

tal que el residuo

$$r := u - p$$

sea ortogonal a v. La condición es $\langle u - \lambda v, v\rangle = 0$. Por bilinealidad, $\langle u, v\rangle - \lambda\langle v, v\rangle = 0$. Como $v \neq 0$, definición 4.14 implica $\langle v, v\rangle > 0$.

Por tanto el coeficiente queda determinado de manera única:

$$\boxed{\lambda = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.}$$

La construcción no requiere todavía definir un ángulo.

Definir: proyección ortogonal sobre una dirección. Definición 4.20 — Proyección ortogonal sobre un vector no nulo Para $v \neq 0$, definimos la **proyección ortogonal de** u **sobre la dirección de** v por

$$\boxed{\operatorname{proj}_v(u) := \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v.}$$

El resultado pertenece al subespacio generado por v: $\operatorname{proj}_v(u) \in \operatorname{span}(v)$. Si reemplazamos v por otro vector no nulo de la misma dirección, por ejemplo cv con $c \neq 0$, obtenemos el mismo vector proyectado: $\operatorname{proj}_{cv}(u) = \operatorname{proj}_v(u)$.

Por ello la proyección depende de la **dirección** o recta vectorial elegida, no de la longitud particular del representante v.

Principio metodológico 4.7 — Declarar la dirección y la métrica antes de proyectar Una «componente en una dirección» no se obtiene tomando una entrada de una columna salvo en situaciones especiales. Primero se fija la dirección geométrica y el producto escalar; después se proyecta.

Proposición: descomposición ortogonal y unicidad. Proposición 4.16 — Descomposición ortogonal respecto de una dirección Sean $u, v \in V$ con $v \neq 0$. Entonces existe una única descomposición

$$\boxed{u = p + r}$$

tal que

$$p \in \operatorname{span}(v), \qquad r \perp v.$$

Está dada por

$$\boxed{p = \operatorname{proj}_v(u), \qquad r = u - \operatorname{proj}_v(u).}$$

Demostración. Por definición 4.20, p es un múltiplo de v. Además,

$$\begin{aligned}\langle r, v\rangle &= \left\langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, v \right\rangle \\ &= \langle u, v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle v, v\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto $r \perp v$. Para la unicidad, supongamos también

$$u = \alpha v + s, \qquad s \perp v.$$

Tomando producto escalar con v, $\langle u, v\rangle = \alpha\langle v, v\rangle$,
de donde

$$\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.$$

Así $\alpha v = p$, y entonces $s = u - p = r$. □ La prueba separa con claridad las dos tareas: **existencia**, construyendo explícitamente p y r; y **unicidad**, recuperando el coeficiente mediante el producto escalar.

Primera consecuencia: caso ortogonal y caso paralelo. Si $u \perp v$, entonces $\langle u, v\rangle = 0$,
y por tanto

$$\boxed{\operatorname{proj}_v(u) = 0.}$$

En cambio, si $u = cv$, entonces

$$\operatorname{proj}_v(u) = \frac{c\langle v, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = cv = u.$$

La proyección distingue de manera exacta dos extremos:

$$\text{ortogonal a la dirección} \longrightarrow 0,$$

$$\text{contenido enteramente en la dirección} \longrightarrow u.$$

Interpretación física y alcance de la proyección. Si u representa un desplazamiento y v fija una dirección de referencia, $\mathrm{proj}_v(u)$ es el desplazamiento vectorial que queda al conservar sólo la parte alineada con esa dirección según la métrica escogida. Esto **no** significa que una proyección matemática sea una nueva medición. En una experiencia real, los datos con que se reconstruyen u y la dirección de v pueden tener incertidumbre; la identidad de la proposición 4.16 pertenece al modelo geométrico. Tampoco hemos definido todavía un número llamado «ángulo entre u y v». Ese concepto requiere usar Cauchy–Schwarz para demostrar primero que cierto cociente pertenece a $[-1, 1]$.

Cauchy–Schwarz legitima el coseno. Sean ahora $u, v \in V$ no nulos. Proposición 4.12 implica $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$.

Como $\|u\|\,\|v\| > 0$, podemos dividir y obtener

$$\boxed{-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1.}$$

El cociente es adimensional y pertenece exactamente al dominio de la función arc cos real. Esta verificación lógica debe preceder a la definición del ángulo.

Definir: ángulo entre vectores no nulos. Definición 4.21 — Ángulo entre dos vectores no nulos Para $u \neq 0$ y $v \neq 0$, definimos el **ángulo** $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ por

$$\boxed{\theta(u, v) := \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right).}$$

La definición no se extiende al vector cero: si $u = 0$ o $v = 0$, el denominador se anula y no hay una dirección geométrica determinada por ese vector. El ángulo no viene de las coordenadas La expresión anterior es intrínseca. En una base general, no debe reemplazarse por fórmulas de trigonometría sobre componentes salvo que la métrica de esa base haya sido incorporada correctamente.

Proposición: casos límite y ortogonalidad. Proposición 4.17 — Caracterización métrica de los ángulos límite Sean $u, v \neq 0$. Entonces:

$$u \perp v \iff \theta(u, v) = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta(u, v) = 0 \iff u = cv \text{ para algún } c > 0,$$

y

$$\theta(u, v) = \pi \iff u = cv \text{ para algún } c < 0.$$

Demostración. Por definición 4.21,

$$\cos\theta(u, v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Como el denominador es positivo, $\cos\theta = 0$ si y sólo si $\langle u, v\rangle = 0$, lo cual equivale a ortogonalidad por la definición 4.19. Para $\theta = 0$ o π, el valor absoluto del coseno es uno. Por el caso de igualdad de Cauchy–Schwarz, u y v son linealmente dependientes: $u = cv$. El signo de

$$\langle u, v\rangle = c\langle v, v\rangle$$

determina $c > 0$ cuando $\cos\theta = 1$ y $c < 0$ cuando $\cos\theta = -1$. La recíproca se verifica sustituyendo $u = cv$. □ Esta proposición conecta tres lenguajes distintos: producto escalar, dependencia lineal y geometría angular.

Definir: componente escalar en una dirección. Definición 4.22 — Componente escalar de un vector en una dirección orientada Para $v \neq 0$, definimos la **componente escalar de u en la dirección orientada de v** por

$$\boxed{\operatorname{comp}_v(u) := \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|}.}$$

El signo contiene información de orientación:

$$\operatorname{comp}_{-v}(u) = -\operatorname{comp}_v(u).$$

En cambio, definición 4.20 da

$$\operatorname{proj}_{-v}(u) = \operatorname{proj}_v(u).$$

Por tanto, **la componente escalar depende del sentido elegido en la dirección**, mientras la proyección vectorial sólo depende de la recta vectorial.

Principio metodológico 4.8 — No confundir coordenada, componente escalar y proyección Una entrada v^i de una columna depende de la base; $\operatorname{comp}_w(v)$ depende de una dirección orientada y de la métrica; $\operatorname{proj}_w(v)$ es un vector geométrico. Antes de identificar dos de estas expresiones, demostrar las hipótesis que las relacionan.

Proposición: relación entre ángulo, componente y proyección. Proposición 4.18 — Forma angular de la componente y la proyección Para $u, v \neq 0$,

$$\boxed{\operatorname{comp}_v(u) = \|u\|\cos\theta(u, v).}$$

Si

$$\hat{v} := \frac{v}{\|v\|},$$

entonces

$$\boxed{\operatorname{proj}_v(u) = \operatorname{comp}_v(u)\,\hat{v}.}$$

En particular,

$$\boxed{\|\operatorname{proj}_v(u)\| = |\operatorname{comp}_v(u)|.}$$

Demostración. De definición 4.21,

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta(u, v).$$

Dividir por $\|v\|$ prueba la primera fórmula. Luego

$$\operatorname{comp}_v(u)\hat{v} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|}\frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v = \operatorname{proj}_v(u).$$

Finalmente, $\|\hat{v}\| = 1$ y la homogeneidad de la norma producen la última igualdad. □

Ejemplo sin coordenadas. Supongamos

$$\|u\| = 5, \qquad \|v\| = 2, \qquad \langle u, v\rangle = 6.$$

Entonces $\cos\theta(u,v) = \frac{6}{5\cdot 2} = \frac{3}{5}$,
y

$$\theta(u,v) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

La componente escalar es $\mathrm{comp}_v(u) = \frac{6}{2} = 3$,
mientras que

$$\mathrm{proj}_v(u) = \frac{6}{4}v = \frac{3}{2}v.$$

El número 3 y el vector $\frac{3}{2}v$ codifican aspectos distintos de la misma descomposición: uno es una magnitud escalar con signo y el otro es un vector.

Balance conceptual: del ángulo a Pitágoras. Ya podemos pasar rigurosamente de

$$\langle u, v\rangle$$

a tres objetos diferentes:

$$\boxed{\theta(u,v), \qquad \mathrm{comp}_v(u), \qquad \mathrm{proj}_v(u).}$$

La geometría elemental de la proyección todavía necesita una última pieza: cuantificar cómo se reparte la longitud total entre la parte paralela y la parte perpendicular.

Proposición: identidad pitagórica de la descomposición ortogonal. Proposición 4.19 — Pitágoras para proyección y residuo Sean $u, v \in V$ con $v \neq 0$. Definamos

$$p := \mathrm{proj}_v(u), \qquad r := u - p.$$

Entonces $p \perp r$ y

$$\boxed{\|u\|^2 = \|p\|^2 + \|r\|^2.}$$

Demostración. proposición 4.16 da $r \perp v$. Como p es múltiplo de v, también $r \perp p$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \langle p + r, p + r\rangle \\ &= \langle p, p\rangle + 2\langle p, r\rangle + \langle r, r\rangle \\ &= \|p\|^2 + \|r\|^2.\end{aligned}$$

□

Esta identidad no es la fórmula pitagórica por **componentes de una base arbitraria**. Se aplica porque aquí las dos partes concretas p y r han sido demostradas ortogonales.

Consecuencia: longitud perpendicular a una dirección. De proposición 4.19 y proposición 4.18, $\|p\| = |\operatorname{comp}_v(u)|$.

Así,

$$\boxed{\|r\|^2 = \|u\|^2 - \operatorname{comp}_v(u)^2.}$$

Usando

$$\operatorname{comp}_v(u) = \|u\| \cos\theta,$$

obtenemos $\|r\|^2 = \|u\|^2(1 - \cos^2\theta)$.

Como $\theta \in [0, \pi]$ y $\sin\theta \geq 0$ en ese intervalo,

$$\boxed{\|r\| = \|u\| \sin\theta.}$$

La interpretación geométrica es precisa:

- $\|u\| \cos\theta$ es la componente escalar **con signo** en la dirección orientada de v;
- $\|u\| \sin\theta$ es la magnitud no negativa de la parte perpendicular.

Geometría de componentes sin adelantar §7. Supongamos que una base contiene un vector e_1 de norma uno. Para

$$u = u^1 e_1 + w,$$

si además hemos demostrado que $w \perp e_1$, entonces

$$u^1 = \langle u, e_1 \rangle = \operatorname{comp}_{e_1}(u).$$

Pero esta identificación depende de **dos hipótesis**:

1. $\|e_1\| = 1$;
2. el resto de la descomposición es ortogonal a e_1.

Una base general de §3 no garantiza ninguna de las dos. Por eso no podemos concluir todavía que todas las entradas de $[u]_B$ se recuperan mediante productos escalares con los vectores de la base. Anticipación controlada En §7 construiremos precisamente la situación en que todos los vectores de la base son unitarios y mutuamente ortogonales. Sólo entonces aparecerá sistemáticamente

$$u^i = \langle u, e_i \rangle.$$

Ejercicio 4.12 — Proyección, componente y residuo.
Función pedagógica: `Cálculo intrínseco → distinción de tipos → Pitágoras`
Sean $u, v \in V$ con

$$\|u\| = 5, \qquad \|v\| = 2, \qquad \langle u, v \rangle = 6.$$

Calcula:

1. $\operatorname{comp}_v(u)$;
2. $\operatorname{proj}_v(u)$;
3. $\|u - \operatorname{proj}_v(u)\|$;
4. el ángulo $\theta(u, v)$.

Solución desarrollada

La componente escalar es $\mathrm{comp}_v(u) = \frac{6}{2} = 3$. La proyección vectorial es

$$\mathrm{proj}_v(u) = \frac{6}{4}v = \frac{3}{2}v.$$

Su norma vale $\left\|\mathrm{proj}_v(u)\right\| = 3$. Por proposición 4.19, $\|r\|^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, de modo que

$$\boxed{\|r\| = 4.}$$

Finalmente, $\cos\theta = \frac{6}{5\cdot 2} = \frac{3}{5}$, y

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right).}$$

El número 3, el vector $\frac{3}{2}v$ y la longitud 4 son objetos distintos: componente escalar, proyección vectorial y magnitud del residuo perpendicular.

Ejercicio 4.13 — La dirección puede reescalarse sin cambiar la proyección.

Función pedagógica: `Invariancia → orientación → prueba algebraica`

Sea $v \neq 0$ y sea $c \neq 0$.

1. Demuestra que

$$\mathrm{proj}_{cv}(u) = \mathrm{proj}_v(u).$$

2. Determina la relación entre $\mathrm{comp}_{cv}(u)$ y $\mathrm{comp}_v(u)$.
3. Explica qué cambia si $c < 0$.

Solución desarrollada

Por definición 4.20,

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{cv}(u) &= \frac{\langle u, cv\rangle}{\langle cv, cv\rangle}(cv)\\ &= \frac{c\langle u, v\rangle}{c^2\langle v, v\rangle}(cv)\\ &= \mathrm{proj}_v(u).\end{aligned}$$

Para la componente escalar,

$$\mathrm{comp}_{cv}(u) = \frac{c\langle u, v\rangle}{|c|\|v\|} = \frac{c}{|c|}\,\mathrm{comp}_v(u).$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{comp}_{cv}(u) = \begin{cases}\mathrm{comp}_v(u), & c > 0,\\ -\mathrm{comp}_v(u), & c < 0.\end{cases}}$$

Reescalar una dirección no cambia la recta vectorial y, por tanto, tampoco la proyección vectorial. Si $c < 0$, sí se invierte el **sentido orientado** elegido y cambia el signo de la componente escalar.

Cierre de §6. La sección ha separado cuatro nociones que suelen mezclarse:

ortogonalidad, proyección vectorial, componente escalar, ángulo.

La cadena conceptual completa es

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \longrightarrow \perp \longrightarrow \operatorname{proj}_v(u) \longrightarrow \theta(u, v) \longrightarrow \operatorname{comp}_v(u),$$

con la proposición 4.19 proporcionando el control pitagórico de la descomposición. La conclusión pedagógica decisiva es:

una coordenada no es automáticamente una componente métrica.

Para convertir sistemáticamente las entradas de una columna en componentes métricas necesitamos una base cuyas direcciones sean unitarias y mutuamente ortogonales. El siguiente paso será el §7.

7. Bases ortonormales y descomposición

Activación: ¿cuándo una coordenada coincide con una componente métrica? En §3 una base $B = (e_1, e_2, e_3)$ permitió escribir todo vector de manera única: $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$. En §5 vimos que, para una base general, no podemos calcular la longitud mediante $\sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$

sin conocer la matriz de Gram. En §6 descubrimos además que una componente escalar en una dirección unitaria se obtiene mediante un producto escalar. La pregunta natural es entonces:

Activación ¿Qué condiciones debe satisfacer una base para que sus coeficientes algebraicos v^i sean exactamente las componentes métricas de v en las tres direcciones de la base?

La respuesta combinará dos propiedades:

- cada vector de la base tiene norma uno;
- vectores de base distintos son ortogonales.

Definición 4.23 — Base ortonormal Una base ordenada

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

de V es **ortonormal** si

$$\boxed{\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},}$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Equivalentemente, $\|e_i\| = 1$
para cada i, y

$$e_i \perp e_j$$

si $i \neq j$. La palabra **orto-normal** recuerda exactamente estas dos condiciones: ortogonalidad mutua y normalización a longitud uno. Unidades y normalización definición 4.23 está formulada para vectores matemáticamente normalizados una vez fijada la convención de unidades. Al realizar físicamente la geometría, puede factorizarse una escala de longitud común ℓ_0: si e_i es ortonormal

en el sentido de la definición 4.23 y se usan desplazamientos de referencia $b_i = \ell_0 e_i$, entonces $\langle b_i, b_j\rangle = \ell_0^2 \delta_{ij}$.

Las coordenadas respecto de los b_i pueden mantenerse adimensionales, pero deben conservarse los factores de escala de la matriz de Gram de §5. Equivalentemente, puede trabajarse con direcciones normalizadas y portar la escala física en las componentes. Son convenciones distintas y no deben mezclarse.

Base ortogonal no significa todavía ortonormal Una base puede estar formada por vectores mutuamente ortogonales y, sin embargo, tener

$$\|e_i\| \neq 1.$$

En ese caso, las fórmulas de esta sección deben conservar los factores de escala correspondientes.

La matriz de Gram se simplifica. Definición 4.18 definió la matriz de Gram de una base: $G_B = (\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j}$. Si B es ortonormal, definición 4.23 implica inmediatamente

$$\boxed{G_B = I_3.}$$

Por eso la fórmula general de §5, $\|v\|^2 = [v]_B^{\mathsf{T}} G_B [v]_B$,
se reduce a

$$\|v\|^2 = [v]_B^{\mathsf{T}} [v]_B.$$

Ésta es la razón estructural de la conocida suma de cuadrados. No es una propiedad de cualquier columna: es una consecuencia de que la matriz de Gram de la base sea la identidad.

Proposición: recuperar componentes mediante productos escalares. Proposición 4.20 — Componentes y norma en una base ortonormal Sea

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ortonormal. Si

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3,$$

entonces, para cada $k = 1, 2, 3$,

$$\boxed{v^k = \langle v, e_k\rangle.}$$

Por tanto,

$$\boxed{v = \sum_{k=1}^{3} \langle v, e_k\rangle e_k}$$

y

$$\boxed{\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{3} \langle v, e_k\rangle^2.}$$

Demostración. Partimos de la expansión única de la proposición 4.6:

$$v = \sum_{i=1}^{3} v^i e_i.$$

Tomamos producto escalar con e_k:

$$\begin{aligned}\langle v, e_k\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{3} v^i e_i, e_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{3} v^i \langle e_i, e_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{3} v^i \delta_{ik} \\ &= v^k.\end{aligned}$$

Esto prueba la primera identidad. Sustituir los coeficientes obtenidos en la expansión de v da $v = \sum_{k=1}^{3} \langle v, e_k\rangle e_k$. Finalmente, como $G_B = I_3$,

$$\|v\|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \sum_{k=1}^{3} \langle v, e_k\rangle^2.$$

□

Lectura guiada. El paso decisivo es que el producto escalar con e_k «selecciona» exactamente un coeficiente porque todos los términos cruzados desaparecen y $\langle e_k, e_k\rangle = 1$.

Relación con las proyecciones de §6. Como $\|e_k\| = 1$, definición 4.22 produce

$$\operatorname{comp}_{e_k}(v) = \frac{\langle v, e_k\rangle}{\|e_k\|} = \langle v, e_k\rangle.$$

Por proposición 4.20,

$$\boxed{v^k = \operatorname{comp}_{e_k}(v).}$$

Además, definición 4.20 da

$$\operatorname{proj}_{e_k}(v) = \langle v, e_k\rangle e_k = v^k e_k.$$

Por tanto, en una base ortonormal sí coinciden de manera controlada tres lenguajes:

$$\boxed{\text{coeficiente algebraico} = \text{componente escalar métrica}}$$

y el término vectorial correspondiente es

$$\boxed{v^k e_k = \operatorname{proj}_{e_k}(v).}$$

La igualdad no era válida de manera automática en una base general; ahora está demostrada bajo una hipótesis precisa.

Principio metodológico y pregunta constructiva. Principio metodológico 4.9 — Verificar ortonormalidad antes de leer componentes métricamente Antes de usar

$$v^i = \langle v, e_i \rangle$$

o

$$\|v\|^2 = \sum_i (v^i)^2,$$

comprobar que la base declarada es ortonormal respecto del producto escalar utilizado.

La base ortonormal convierte una lista de coeficientes en una descripción métrica particularmente simple, pero no elimina la distinción de tipos:

- $v \in V$ es el vector;
- $[v]_B \in \mathbb{R}^3$ es su columna;
- v^i es un escalar;
- $v^i e_i$ es una proyección vectorial.

Todavía falta responder una pregunta constructiva: dado un conjunto de vectores independientes que **no** es ortonormal, ¿cómo podemos producir a partir de él una base ortonormal?

La estrategia: quitar sucesivamente las partes ya explicadas. Sean

$$a_1, a_2, a_3$$

vectores linealmente independientes. El primer vector sólo necesita normalización: $u_1 := a_1, \qquad e_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}$.

Para el segundo vector no basta con normalizar a_2, porque podría contener una parte paralela a e_1. Primero retiramos esa parte:

$$u_2 := a_2 - \mathrm{proj}_{e_1}(a_2) = a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle e_1.$$

Entonces $u_2 \perp e_1$ por la proposición 4.16, y normalizamos: $e_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$.

Con el tercer vector debemos retirar las partes ya explicadas por las dos direcciones anteriores:

$$u_3 := a_3 - \langle a_3, e_1 \rangle e_1 - \langle a_3, e_2 \rangle e_2,$$

y finalmente

$$e_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}.$$

Antes de aceptar estas fórmulas debemos probar dos cuestiones:

1. que u_2 y u_3 no se anulan;
2. que reemplazar a_k por e_k no cambia los subespacios generados acumulativamente.

Definir: procedimiento de Gram–Schmidt en dimensión tres. Definición 4.24 — Procedimiento de Gram–Schmidt Sea (a_1, a_2, a_3) una familia linealmente independiente. Definimos recursivamente

$$u_1 := a_1, \qquad e_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|},$$

$$u_2 := a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1, \qquad e_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|},$$

y

$$u_3 := a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2, \qquad e_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}.$$

Cuando los denominadores son no nulos, la familia (e_1, e_2, e_3) se denomina la **ortonormalización de Gram–Schmidt** de (a_1, a_2, a_3) en ese orden. La cláusula «cuando los denominadores son no nulos» no quedará como supuesto adicional: la independencia lineal de los a_i permitirá demostrarlo.

Primer control: los residuos no pueden anularse. Para u_1 no hay dificultad: $a_1 \neq 0$ porque la familia es independiente. Supongamos que

$$u_2 = 0.$$

Entonces $a_2 = \langle a_2, e_1\rangle e_1$.
Como e_1 es un múltiplo no nulo de a_1, se seguiría

$$a_2 \in \operatorname{span}(a_1),$$

contradiciendo la independencia de (a_1, a_2). Para u_3, si

$$u_3 = 0,$$

entonces

$$a_3 = \langle a_3, e_1\rangle e_1 + \langle a_3, e_2\rangle e_2.$$

Una vez que probemos que

$$\operatorname{span}(e_1, e_2) = \operatorname{span}(a_1, a_2),$$

esto implicará

$$a_3 \in \operatorname{span}(a_1, a_2),$$

otra contradicción con la independencia original. Por tanto, la preservación del subespacio generado no es un detalle secundario: forma parte del argumento que garantiza que el algoritmo puede continuar.

Proposición: Gram–Schmidt preserva los subespacios generados. Proposición 4.21 — Preservación de generación por Gram–Schmidt Para la construcción de la definición 4.24,

$$\boxed{\operatorname{span}(e_1) = \operatorname{span}(a_1),}$$

$$\boxed{\operatorname{span}(e_1, e_2) = \operatorname{span}(a_1, a_2),}$$

y

$$\boxed{\operatorname{span}(e_1, e_2, e_3) = \operatorname{span}(a_1, a_2, a_3).}$$

Demostración. Como $e_1 = a_1/\|a_1\|$, cada uno es un múltiplo no nulo del otro. Por tanto generan el mismo subespacio. Para la segunda etapa, definición 4.24 da

$$u_2 = a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1.$$

Así, $u_2 \in \operatorname{span}(a_1, a_2)$,
pues $e_1 \in \operatorname{span}(a_1)$. Como e_2 es un múltiplo no nulo de u_2, $e_2 \in \operatorname{span}(a_1, a_2)$. Luego

$$\operatorname{span}(e_1, e_2) \subseteq \operatorname{span}(a_1, a_2).$$

En sentido inverso,

$$a_2 = u_2 + \langle a_2, e_1\rangle e_1 = \|u_2\| e_2 + \langle a_2, e_1\rangle e_1,$$

de modo que $a_2 \in \operatorname{span}(e_1, e_2)$; junto con $a_1 \in \operatorname{span}(e_1)$ obtenemos la igualdad. Para la tercera etapa,

$$u_3 = a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2.$$

Por la igualdad ya probada, $e_1, e_2 \in \operatorname{span}(a_1, a_2)$,
así que

$$u_3 \in \operatorname{span}(a_1, a_2, a_3).$$

Luego e_3 pertenece al mismo subespacio y obtenemos una inclusión. La inclusión inversa se sigue de

$$a_3 = \|u_3\| e_3 + \langle a_3, e_1\rangle e_1 + \langle a_3, e_2\rangle e_2.$$

Por tanto los tres subespacios acumulativos coinciden. □ Esta proposición completa también el argumento de §7.9: la independencia inicial garantiza que $u_2 \neq 0$ y $u_3 \neq 0$.

Proposición: el resultado es ortonormal. Proposición 4.22 — Corrección de Gram–Schmidt Si (a_1, a_2, a_3) es linealmente independiente, el procedimiento definición 4.24 está bien definido y produce una familia

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

ortonormal. Si además (a_1, a_2, a_3) es una base de V, entonces B es una base ortonormal de V.

Demostración. §7.9 y proposición 4.21 garantizan que todos los u_i son no nulos, por lo que cada normalización está definida y

$$\|e_i\| = 1.$$

Por proposición 4.16, $u_2 \perp e_1$,
y multiplicar u_2 por el escalar positivo $1/\|u_2\|$ conserva la ortogonalidad: $e_2 \perp e_1$. Para u_3, calculamos

$$\begin{aligned}\langle u_3, e_1\rangle &= \langle a_3, e_1\rangle - \langle a_3, e_1\rangle\langle e_1, e_1\rangle - \langle a_3, e_2\rangle\langle e_2, e_1\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

porque $\|e_1\| = 1$ y $e_2 \perp e_1$. De manera análoga, $\langle u_3, e_2\rangle = 0$. Al normalizar u_3, obtenemos $e_3 \perp e_1, \qquad e_3 \perp e_2$. Así los tres vectores son unitarios y mutuamente ortogonales: forman una familia ortonormal. Finalmente, si (a_1, a_2, a_3) genera V, proposición 4.21 da $\operatorname{span}(e_1, e_2, e_3) = V$.

Una familia ortonormal de vectores no nulos es linealmente independiente: si

$$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = 0,$$

tomar producto escalar con e_k da $c_k = 0$. Por definición 4.9, B es una base. □

El orden importa, el subespacio final no. El procedimiento definición 4.24 utiliza un **orden**. Si comenzamos con

$$(a_1, a_2, a_3)$$

o con otra permutación de esos vectores, normalmente obtenemos bases ortonormales distintas. No obstante, proposición 4.21 garantiza que, para cualquier orden al que pueda aplicarse el procedimiento sobre la misma familia independiente completa, el subespacio final generado es el mismo:

$$\boxed{\operatorname{span}(e_1, e_2, e_3) = \operatorname{span}(a_1, a_2, a_3).}$$

Por tanto Gram–Schmidt no descubre una base ortonormal **canónica** sin datos adicionales. Construye una base ortonormal compatible con el orden elegido.

Principio metodológico 4.10 — Ortonormalizar sin perder el espacio generado En Gram–Schmidt, comprobar en cada etapa dos invariantes: el nuevo residuo es ortogonal a las direcciones ya construidas y el subespacio generado acumulativo coincide con el de los vectores originales procesados.

Balance antes de los ejemplos y ejercicios. Ya sabemos:
1. reconocer una base ortonormal;
2. recuperar componentes mediante productos escalares;
3. construir una base ortonormal a partir de una familia independiente;
4. demostrar que el procedimiento preserva el subespacio generado.

Todavía falta aplicar el procedimiento en un caso concreto y cerrar el bloque §§4–7 con los ejercicios 4.14–4.15.

Ejemplo guiado: ortonormalizar una base oblicua simple. Sea

$$F = (f_1, f_2, f_3)$$

una base ortonormal conocida. Consideremos la familia

$$a_1 = f_1 + f_2, \qquad a_2 = f_2, \qquad a_3 = f_3.$$

Es linealmente independiente: si

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0,$$

entonces $\alpha f_1 + (\alpha + \beta) f_2 + \gamma f_3 = 0$,

y la independencia de F obliga a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0.$$

Aplicamos definición 4.24. Primero, $u_1 = a_1 = f_1 + f_2$,
y

$$\|u_1\| = \sqrt{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{e_1 = \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}.}$$

Para el segundo vector,

$$\langle a_2, e_1\rangle = \left\langle f_2, \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_2 &= a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1 \\ &= f_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2. \end{aligned}$$

Su norma es $\|u_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
de modo que

$$\boxed{e_2 = \frac{-f_1 + f_2}{\sqrt{2}}.}$$

Finalmente, como f_3 es ortogonal a e_1 y e_2,

$$u_3 = f_3, \qquad \boxed{e_3 = f_3.}$$

La base obtenida es

$$\boxed{B = \left(\frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}, \frac{-f_1 + f_2}{\sqrt{2}}, f_3\right).}$$

Una comprobación directa da $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.
Gram–Schmidt no ha cambiado el espacio generado:

$$\operatorname{span}(a_1, a_2, a_3) = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3) = V.$$

Ejercicio 4.14 — Ejecutar Gram–Schmidt y auditar cada etapa.
Función pedagógica: `Construcción → Verificación → Preservación del generado`
Sea $F = (f_1, f_2, f_3)$ una base ortonormal y

$$a_1 = f_1 + f_2, \qquad a_2 = f_2, \qquad a_3 = f_3.$$

1. Aplica Gram–Schmidt en el orden dado.
2. Comprueba que los residuos que se normalizan son no nulos.
3. Verifica directamente que la familia final es ortonormal.

4. Comprueba que

$$\operatorname{span}(a_1, a_2) = \operatorname{span}(e_1, e_2).$$

Solución desarrollada
El primer paso da $e_1 = \frac{f_1+f_2}{\sqrt{2}}$.
Después,

$$u_2 = f_2 - \frac{1}{2}(f_1 + f_2) = -\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 \neq 0,$$

y

$$e_2 = \frac{-f_1 + f_2}{\sqrt{2}}.$$

Como f_3 es ortogonal a los dos primeros, $u_3 = f_3 \neq 0, \qquad e_3 = f_3$.
Las normas son uno y

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{-1+1}{2} = 0,$$

mientras

$$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0.$$

Para el generado,

$$e_1, e_2 \in \operatorname{span}(f_1, f_2) = \operatorname{span}(a_1, a_2).$$

Recíprocamente, $a_1 = \sqrt{2}\, e_1$,
y, usando

$$f_2 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}},$$

obtenemos $a_2 = \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$. Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{span}(a_1, a_2) = \operatorname{span}(e_1, e_2).}$$

Ejercicio 4.15 — Recuperar componentes y norma en la nueva base.
Función pedagógica: `Producto escalar → Componentes → Reconstrucción → Parseval finito`
En la base ortonormal

$$B = (e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}, \frac{-f_1 + f_2}{\sqrt{2}}, f_3 \right),$$

sea

$$v = 3f_1 + f_2 + 2f_3.$$

1. Calcula $\langle v, e_1 \rangle$, $\langle v, e_2 \rangle$, $\langle v, e_3 \rangle$.
2. Escribe $[v]_B$.
3. Reconstruye v desde esas componentes.
4. Verifica

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle v, e_i \rangle^2.$$

Solución desarrollada
Primero,

$$\langle v, e_1 \rangle = \frac{3+1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Luego,

$$\langle v, e_2 \rangle = \frac{-3+1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Finalmente, $\langle v, e_3 \rangle = 2$. Por proposición 4.20,

$$\boxed{[v]_B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.}$$

La reconstrucción es

$$\begin{aligned} v &= 2\sqrt{2}\, e_1 - \sqrt{2}\, e_2 + 2e_3 \\ &= 2(f_1 + f_2) + (f_1 - f_2) + 2f_3 \\ &= 3f_1 + f_2 + 2f_3. \end{aligned}$$

Finalmente, $\|v\|^2 = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14$
en la base ortonormal F, mientras que

$$(2\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + 2^2 = 8 + 2 + 4 = 14.$$

Por tanto,

$$\boxed{\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle v, e_i \rangle^2.}$$

Cierre de §7. La secuencia §§5–7 ha construido progresivamente la geometría euclídea:

$$\boxed{\text{producto escalar} \longrightarrow \text{norma y distancia} \longrightarrow \text{proyección y ángulo} \longrightarrow \text{base ortonormal.}}$$

Una base ortonormal es especial porque reúne la estructura algebraica de una base y la estructura métrica del producto escalar. Sólo bajo esta hipótesis quedan justificadas simultáneamente las fórmulas

$$\boxed{v^i = \langle v, e_i \rangle,}$$

$$\boxed{v = \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i,}$$

y

$$\boxed{\|v\|^2 = \sum_i (v^i)^2.}$$

Gram–Schmidt demuestra además que, a partir de una base cualquiera de un espacio euclídeo finito, podemos construir una base ortonormal sin cambiar el espacio generado. Con ello queda cerrada la construcción métrica iniciada en §4. El siguiente paso será el §8.

8. Orientación y determinantes

Activación: una base ordenada puede tener dos "sentidos". Una base ordenada tridimensional

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

no sólo proporciona tres direcciones independientes. El **orden** de esas direcciones contiene información adicional. Si intercambiamos dos vectores, por ejemplo

$$B' = (b_2, b_1, b_3),$$

seguimos teniendo los mismos tres vectores y el mismo espacio generado. Sin embargo, hemos invertido algo que no puede detectarse mediante longitudes ni ángulos por sí solos. Ese dato adicional es la **orientación**. Para describirlo necesitamos una cantidad algebraica que:

- se anule cuando los tres vectores dejan de ser independientes;
- cambie de signo cuando intercambiamos dos de ellos;
- permita distinguir dos clases de bases ordenadas.

Esa cantidad es el determinante.

Definir: determinante de una matriz real 3 × 3. Definición 4.25 — Determinante tridimensional Para

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

definimos

$$\boxed{\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}}$$

Esta expresión es un escalar asociado a una matriz cuadrada de orden tres. En particular, $\det I_3 = 1$. Todavía no interpretamos el valor absoluto como volumen; por ahora nos interesa principalmente su **signo**.

Determinante de una terna de vectores respecto de una base. Fijemos temporalmente una base ordenada de referencia

$$E = (e_1, e_2, e_3).$$

Para tres vectores $v_1, v_2, v_3 \in V$, formamos la matriz cuyas columnas son sus componentes en E:

$$A_E(v_1, v_2, v_3) := \begin{pmatrix} | & | & | \\ [v_1]_E & [v_2]_E & [v_3]_E \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Definimos entonces la abreviatura

$$\boxed{\det_E(v_1, v_2, v_3) := \det A_E(v_1, v_2, v_3).}$$

Si tomamos precisamente la terna de referencia, $\det_E(e_1, e_2, e_3) = 1$.

Primera propiedad: intercambiar dos columnas cambia el signo. Proposición 4.23 — Regla de intercambio Si A' se obtiene de una matriz A intercambiando dos columnas, entonces

$$\boxed{\det A' = -\det A.}$$

En particular,

$$\boxed{\det_E(v_2, v_1, v_3) = -\det_E(v_1, v_2, v_3).}$$

Demostración. Basta comprobar un intercambio elemental, por ejemplo las dos primeras columnas. Escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\det A = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Tras intercambiar las dos primeras columnas,

$$A' = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{pmatrix}.$$

Por definición 4.25, $\det A' = bdi + afh + ceg - cdh - aei - bfg$.
Reordenando términos,

$$\det A' = -(aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh) = -\det A.$$

Los demás intercambios se comprueban de la misma manera. □ La regla de signo no depende de longitudes ni de ortogonalidad. Es consecuencia de la estructura algebraica del determinante.

Consecuencia: una permutación impar invierte el signo. Si partimos de

$$(v_1, v_2, v_3)$$

y realizamos un solo intercambio, el determinante cambia de signo. Dos intercambios sucesivos producen

$$(-1)^2 = 1,$$

por lo que restauran el signo original. Por ejemplo,

$$(v_1, v_2, v_3) \longrightarrow (v_2, v_1, v_3) \longrightarrow (v_2, v_3, v_1)$$

realiza dos intercambios y conserva el signo. Esto anticipa la distinción entre permutaciones **pares** e **impares**, pero no necesitamos todavía formalizar el grupo de permutaciones.

Definir: orientación relativa a una base de referencia. Definición 4.26 — Orientación relativa Fijemos una base ordenada de referencia

$$E = (e_1, e_2, e_3).$$

Sea

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

otra base ordenada. Diremos que B tiene **orientación positiva respecto de** E si

$$\boxed{\det_E(b_1, b_2, b_3) > 0,}$$

y **orientación negativa respecto de** E si

$$\boxed{\det_E(b_1, b_2, b_3) < 0.}$$

Como B es una base, esperamos que el determinante no sea cero. La demostración general de la equivalencia

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \text{columnas independientes}$$

se demostrará en §§8.9–8.12, junto con las propiedades estructurales necesarias del determinante. Por ahora, definición 4.26 se aplica a las bases para las que ya hemos verificado directamente que el determinante es no nulo.

Ejemplo inmediato: invertir dos ejes. La base de referencia satisface $\det_E(e_1, e_2, e_3) = 1 > 0$. Por proposición 4.23, $\det_E(e_2, e_1, e_3) = -1$. Por tanto, (e_1, e_2, e_3)
y

$$(e_2, e_1, e_3)$$

poseen orientaciones relativas opuestas. Sin embargo, ambas bases tienen exactamente los mismos vectores y, si E era ortonormal, la base obtenida al intercambiar dos elementos también es ortonormal. Ortonormalidad no fija la orientación Una base puede conservar todas las longitudes y todos los ángulos entre sus vectores y, aun así, invertir la orientación al intercambiar dos ejes.

Principio metodológico y cuestiones pendientes. Principio metodológico 4.11 — Separar métrica y orientación Longitudes, ángulos y ortonormalidad pertenecen a la estructura métrica; la orientación añade un dato de signo asociado al orden de una base. No inferir orientación únicamente a partir de productos escalares.

Hasta aquí hemos introducido:

$$\boxed{\det A}$$

como escalar algebraico y hemos aislado su papel más elemental:

$$\boxed{\text{intercambiar dos vectores} \Longrightarrow \text{cambiar el signo del determinante.}}$$

Esto permite hablar de orientación **relativa a una base elegida**, pero todavía falta demostrar de manera sistemática:

- cuándo el determinante es cero;
- cómo se comporta bajo combinaciones lineales;
- cómo se relacionan orientaciones definidas usando distintas bases de referencia.

Proposición: multilinealidad y alternancia. Proposición 4.24 — El determinante es trilineal y alternante Fijada una base de referencia E, la aplicación

$$(v_1, v_2, v_3) \longmapsto \det_E(v_1, v_2, v_3)$$

es lineal en cada argumento por separado. Además, si dos argumentos coinciden, entonces

$$\boxed{\det_E(v_1, v_2, v_3) = 0.}$$

Demostración de la linealidad en el primer argumento. Sean $u, w, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por linealidad de las coordenadas,

$$[\alpha u + \beta w]_E = \alpha [u]_E + \beta [w]_E.$$

Al sustituir esta columna en la fórmula explícita definición 4.25, cada término depende linealmente de las entradas de la primera columna. Por tanto,

$$\boxed{\det_E(\alpha u + \beta w, v_2, v_3) = \alpha \det_E(u, v_2, v_3) + \beta \det_E(w, v_2, v_3).}$$

La misma inspección de la definición 4.25 prueba linealidad en la segunda y tercera columnas. Para la alternancia, si las dos primeras columnas coinciden, proposición 4.23 da simultáneamente

$$\det_E(v, v, v_3) = -\det_E(v, v, v_3).$$

Luego

$$2 \det_E(v, v, v_3) = 0,$$

y como trabajamos sobre $\mathbb{R}$, $\det_E(v, v, v_3) = 0$.

Los demás casos se reducen a éste intercambiando columnas. □

Consecuencia: dependencia lineal implica determinante cero. Proposición 4.25 — Una terna dependiente tiene determinante nulo Si v_1, v_2, v_3 son linealmente dependientes, entonces

$$\boxed{\det_E(v_1, v_2, v_3) = 0.}$$

Demostración. Si uno de los vectores es cero, la multilinealidad da inmediatamente determinante cero. Supongamos entonces que ninguno es cero y que, por ejemplo,

$$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Por linealidad en el tercer argumento,

$$\begin{aligned}\det_E(v_1, v_2, v_3) &= \det_E(v_1, v_2, \alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha \det_E(v_1, v_2, v_1) + \beta \det_E(v_1, v_2, v_2).\end{aligned}$$

Cada término se anula por alternancia. Luego

$$\det_E(v_1, v_2, v_3) = 0.$$

Si la relación de dependencia despeja otro vector, el argumento es idéntico. □ La implicación recíproca todavía requiere una propiedad adicional: la multiplicatividad.

Proposición: multiplicatividad del determinante. Proposición 4.26 — Determinante de un producto Para matrices reales 3×3,

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B).}$$

Demostración. Escribamos las columnas de A como

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

y las de B mediante sus entradas b_{ij}. La columna j de AB es $b_{1j}a_1 + b_{2j}a_2 + b_{3j}a_3$. Por trilinealidad, $\det(AB)$

se expande como suma de términos de la forma $b_{i1}b_{j2}b_{k3}\det(a_i, a_j, a_k)$.

Todo término con índices repetidos se anula por alternancia. Sólo sobreviven las seis permutaciones de $(1, 2, 3)$. Cada permutación aporta

$$\pm b_{i1}b_{j2}b_{k3}\det(a_1, a_2, a_3),$$

donde el signo es precisamente el signo de la permutación, por la proposición 4.23. Factorizando,

$$\det(AB) = \det(A)\Big(b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{31}b_{12}b_{23} - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{21}b_{12}b_{33} - b_{11}b_{32}b_{23}\Big).$$

La expresión entre paréntesis es exactamente $\det(B)$ escrita por columnas. Por tanto, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

□

Proposición: determinante no nulo e independencia. Proposición 4.27 — Criterio de base mediante el determinante Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y sea

$$A = A_E(v_1, v_2, v_3).$$

Entonces

$$\boxed{\det A \neq 0 \iff (v_1, v_2, v_3) \text{ es linealmente independiente.}}$$

En dimensión tres, esto equivale a que (v_1, v_2, v_3) sea una base de V.

Demostración. Si la terna es dependiente, proposición 4.25 da

$$\det A = 0.$$

Por contraposición,

$$\det A \neq 0 \Longrightarrow (v_1, v_2, v_3) \text{ independiente.}$$

Para la otra dirección, supongamos que

$$B = (v_1, v_2, v_3)$$

es una base. Como E también es base, cada e_j posee coordenadas únicas en B. Sea C la matriz cuyas columnas son esas coordenadas:

$$C = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [e_1]_B & [e_2]_B & [e_3]_B \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

La matriz A convierte componentes en B a componentes en E, de modo que

$$AC = I_3.$$

Aplicando proposición 4.26, $1 = \det I_3 = \det(A)\det(C)$. Por tanto, $\det(A) \neq 0$.

Esto prueba la equivalencia. □ La observación pendiente de §8.6 queda ahora justificada: toda base ordenada tiene determinante no nulo respecto de cualquier base de referencia.

Definir: misma orientación entre bases. Definición 4.27 — Bases con la misma orientación Sean

$$B = (b_1, b_2, b_3), \qquad C = (c_1, c_2, c_3)$$

bases ordenadas de V. Diremos que B y C tienen la **misma orientación** si la matriz de cambio de componentes de C a B tiene determinante positivo. Equivalentemente, fijada cualquier base de referencia E,

$$\boxed{\det_E(B)\det_E(C) > 0.}$$

Tienen **orientaciones opuestas** si ese producto es negativo.

Aquí usamos la abreviatura

$$\det_E(B) := \det_E(b_1, b_2, b_3).$$

La equivalencia entre ambas formulaciones se justificará de inmediato.

Proposición: la comparación de orientación no depende de la referencia. Proposición 4.28 — Invariancia de la comparación de orientación El signo de

$$\det_E(B)\,\det_E(C)$$

no depende de la base de referencia E.

Demostración. Sea F otra base de referencia. Denotemos por S la matriz cuyas columnas son los vectores de F expresados en E. Entonces, para cualquier base B,

$$A_E(B) = S\,A_F(B).$$

Por proposición 4.26, $\det_E(B) = \det(S)\,\det_F(B)$.

Análogamente, $\det_E(C) = \det(S)\,\det_F(C)$. Por tanto,

$$\det_E(B)\,\det_E(C) = \det(S)^2\,\det_F(B)\,\det_F(C).$$

Como F es una base, proposición 4.27 garantiza

$$\det(S) \neq 0,$$

y por ello

$$\det(S)^2 > 0.$$

Multiplicar por un número positivo no cambia el signo. Luego ambas referencias producen la misma comparación de orientación. □

Las bases se separan en dos clases. Definición 4.27 y proposición 4.28 permiten olvidar una base de referencia particular y hablar simplemente de dos clases de bases ordenadas. Fijada una base E:

- todas las bases con

$$\det_E(B) > 0$$

pertenecen a una clase;

- todas las bases con

$$\det_E(B) < 0$$

pertenecen a la otra. Proposición 4.23 muestra que intercambiar dos vectores de una base pasa de una clase a la otra. Dos intercambios restauran la clase original.

Principio metodológico 4.12 — La orientación es una clase, no un número El valor concreto de un determinante depende de la base usada para expresar los vectores; la orientación conserva sólo la información de signo relativa entre bases. Al cambiar de referencia, distinguir el factor de escala del dato binario de orientación.

Balance: de la orientación al volumen. Ya disponemos de la estructura mínima necesaria:

$$\boxed{\text{trilinealidad} + \text{alternancia} + \text{multiplicatividad}}$$

y de sus dos consecuencias centrales:

$$\boxed{\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \text{columnas independientes},}$$

$$\boxed{\text{las bases ordenadas se dividen en dos clases de orientación.}}$$

Todavía falta interpretar geométricamente el **valor absoluto** del determinante y conectar esa interpretación con volumen, ortonormalidad y los ejercicios de §8.

Reglas geométricas que ya contiene el determinante. Proposición 4.24 y proposición 4.23 permiten leer tres operaciones elementales directamente en el determinante. Si multiplicamos una arista por un escalar λ,

$$\det_E(\lambda v_1, v_2, v_3) = \lambda \det_E(v_1, v_2, v_3).$$

Si añadimos a una arista un múltiplo de otra,

$$\begin{aligned}\det_E(v_1 + \lambda v_2, v_2, v_3) &= \det_E(v_1, v_2, v_3) + \lambda \det_E(v_2, v_2, v_3)\\ &= \det_E(v_1, v_2, v_3).\end{aligned}$$

Y si intercambiamos dos aristas, $\det_E(v_2, v_1, v_3) = -\det_E(v_1, v_2, v_3)$.

Estas tres reglas anticipan exactamente el comportamiento geométrico esperado de un volumen orientado:

- escalar una arista escala el volumen;
- una cizalla paralela a otra arista no cambia el volumen;
- intercambiar dos aristas conserva el tamaño pero invierte el signo de orientación.

Definir: volumen orientado y volumen euclídeo. Fijemos ahora una base **ortonormal** y una de las dos clases de orientación como positiva: $E = (e_1, e_2, e_3)$.

Definición 4.28 — Volumen orientado de una terna Para $v_1, v_2, v_3 \in V$, definimos el **volumen orientado respecto de** E por

$$\boxed{\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(v_1, v_2, v_3) := \det_E(v_1, v_2, v_3).}$$

El **volumen euclídeo** del paralelepípedo generado por la terna es

$$\boxed{\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) := \left|\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(v_1, v_2, v_3)\right|.}$$

La ortonormalidad de E es esencial para esta lectura métrica. Si usáramos una base de referencia oblicua y no normalizada, el determinante de coordenadas mediría el volumen en unidades del paralelepípedo fundamental de esa base, no directamente en la escala euclídea normalizada. **Convención de unidades.** definición 4.28 utiliza la normalización matemática fijada en §7. Cuando una realización física introduce una escala común de longitud ℓ_0, los desplazamientos de referencia $b_i = \ell_0 e_i$ aportan un factor ℓ_0^3 al volumen físico. Así, el valor numérico $|\det_E(v_1, v_2, v_3)|$ debe interpretarse junto con la escala de longitud declarada; si la unidad normalizada es 1 m, un valor 24

corresponde a $24\,\mathrm{m}^3$. Para bases dimensionales no normalizadas, debe conservarse además el volumen de su paralelepípedo fundamental. Por el momento estas expresiones están escritas respecto de E. Después de la proposición 4.30 demostraremos que el valor absoluto es independiente de la base ortonormal de referencia y que el signo depende únicamente de la clase de orientación elegida. El signo registra orientación; el valor absoluto registra tamaño.

Proposición: reglas del volumen orientado. Proposición 4.29 — Escala, cizalla y orientación del volumen Para toda terna v_1, v_2, v_3 y todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(\lambda v_1, v_2, v_3) = \lambda\,\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(v_1, v_2, v_3),}$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(v_1 + \lambda v_2, v_2, v_3) = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(v_1, v_2, v_3),}$$

y

$$\boxed{\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(v_2, v_1, v_3) = -\,\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(v_1, v_2, v_3).}$$

En consecuencia, el volumen euclídeo no cambia al intercambiar dos aristas ni al realizar la cizalla anterior.

Demostración. Cada identidad es exactamente una aplicación de la proposición 4.24 y proposición 4.23 a definición 4.28. Al tomar valor absoluto, el cambio de signo desaparece. □

Proposición: una base ortonormal tiene determinante ± 1. Proposición 4.30 — Determinante de una base ortonormal Sea

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

una base ortonormal y sea E una base ortonormal de referencia. Entonces

$$\boxed{\det_E(B) = \pm 1.}$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Vol}(b_1, b_2, b_3) = 1.}$$

Demostración. Sea

$$Q = A_E(b_1, b_2, b_3).$$

Como E es ortonormal, los productos escalares entre columnas de Q se calculan mediante el producto matricial usual. La ortonormalidad de B equivale a

$$Q^{\mathsf{T}} Q = I_3.$$

Por inspección directa de la definición 4.25, $\det(Q^{\mathsf{T}}) = \det(Q)$.

Aplicando proposición 4.26,

$$1 = \det I_3 = \det(Q^{\mathsf{T}} Q) = \det(Q^{\mathsf{T}})\det(Q) = \det(Q)^2.$$

Por tanto, $\det(Q) = \pm 1$.

El valor absoluto es uno. □ Esta proposición separa limpiamente dos posibilidades: $\det_E(B) = +1$ si B tiene la misma orientación que E, y

$$\det_E(B) = -1$$

si tiene la orientación opuesta.

Proposición: independencia de la referencia ortonormal. Proposición 4.31 — Invariancia del volumen bajo cambio de referencia ortonormal Sean

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

y

$$F = (f_1, f_2, f_3)$$

bases ortonormales. Para toda terna v_1, v_2, v_3:

1. si E y F tienen la misma orientación,

$$\boxed{\det_E(v_1, v_2, v_3) = \det_F(v_1, v_2, v_3);}$$

2. si tienen orientaciones opuestas,

$$\boxed{\det_E(v_1, v_2, v_3) = -\det_F(v_1, v_2, v_3);}$$

3. en ambos casos,

$$\boxed{|\det_E(v_1, v_2, v_3)| = |\det_F(v_1, v_2, v_3)|.}$$

Por tanto, una vez fijada una clase de orientación positiva, el volumen orientado es independiente de la base ortonormal positiva elegida, y el volumen euclídeo es independiente de cualquier base ortonormal de referencia.

Demostración. Sea

$$S = A_E(f_1, f_2, f_3).$$

Para la terna

$$V = (v_1, v_2, v_3),$$

las matrices de componentes satisfacen

$$A_E(V) = S\, A_F(V).$$

Por proposición 4.26, $\det_E(V) = \det(S)\det_F(V)$.

Como E y F son ortonormales, proposición 4.30 da $\det(S) = \pm 1$. Si tienen la misma orientación, definición 4.27 implica $\det(S) = +1$,

y los volúmenes orientados coinciden. Si tienen orientaciones opuestas, $\det(S) = -1$,

y los volúmenes orientados cambian de signo. En ambos casos, tomar valor absoluto elimina el signo. □ Esta proposición completa la justificación intrínseca de la definición 4.28: podemos escribir sin ambigüedad

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3)$$

sin indicar una base ortonormal particular.

Ejemplo guiado: cizalla, escala y orientación. Sea $E = (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormal positivamente orientada y definamos

$$v_1 = 2e_1, \qquad v_2 = e_1 + 3e_2, \qquad v_3 = 2e_1 - e_2 + 4e_3.$$

La matriz de columnas es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por definición 4.25, $\det A = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Vol}_E^{\mathrm{or}}(v_1, v_2, v_3) = 24,}$$

y

$$\boxed{\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) = 24.}$$

Los términos e_1 añadidos a v_2 y $2e_1 - e_2$ añadidos a v_3 actúan como cizallas: modifican la forma del paralelepípedo, pero no el producto final de los factores independientes 2, 3 y 4. Si intercambiamos v_1 y v_2,

$$\mathrm{Vol}_E^{\mathrm{or}}(v_2, v_1, v_3) = -24,$$

mientras

$$\mathrm{Vol}(v_2, v_1, v_3) = 24.$$

Ejercicio 4.16 — Determinante, volumen y orientación.
Función pedagógica: `Cálculo → Interpretación geométrica → Separación signo/magnitud`

Sea $E = (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormal positivamente orientada y

$$v_1 = 2e_1, \qquad v_2 = e_1 + 3e_2, \qquad v_3 = 2e_1 - e_2 + 4e_3.$$

1. Calcula $\det_E(v_1, v_2, v_3)$.
2. Determina el volumen euclídeo del paralelepípedo.
3. Decide si la terna tiene la misma orientación que E.
4. Repite las preguntas para (v_2, v_1, v_3).

Solución desarrollada

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por definición 4.25, $\det A = 24$.

Luego

$$\boxed{\mathrm{Vol}_E^{\mathrm{or}}(v_1, v_2, v_3) = 24,}$$

y

$$\boxed{\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) = 24.}$$

Como el determinante es positivo, la terna tiene la misma orientación que E. Al intercambiar los dos primeros vectores, proposición 4.23 da $\det_E(v_2, v_1, v_3) = -24$. El volumen euclídeo permanece

$$\boxed{24},$$

pero la orientación se invierte.

Ejercicio 4.17 — Qué operaciones cambian volumen y orientación.
Función pedagógica: `Transformaciones elementales → Invariantes → Diagnóstico`
Partimos de una base ortonormal positivamente orientada

$$E = (e_1, e_2, e_3),$$

cuyo volumen orientado vale 1. Para cada operación, determina el nuevo volumen orientado, el volumen euclídeo y si la orientación se conserva:

1. sustituir e_1 por $3e_1$;
2. sustituir e_1 por $-e_1$;
3. sustituir e_1 por $e_1 + 5e_2$;
4. intercambiar e_1 y e_2.

Solución desarrollada
1. Escala positiva.

$$\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(3e_1, e_2, e_3) = 3.$$

El volumen euclídeo pasa a 3 y la orientación se conserva.
2. Escala negativa.

$$\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(-e_1, e_2, e_3) = -1.$$

El volumen euclídeo sigue siendo 1, pero la orientación se invierte.
3. Cizalla.
Por proposición 4.29, $\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(e_1 + 5e_2, e_2, e_3) = 1$.
No cambia ni el volumen euclídeo ni la orientación.
4. Intercambio.

$$\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_E(e_2, e_1, e_3) = -1.$$

El volumen euclídeo sigue siendo 1 y la orientación se invierte.

Cierre de §8. La sección ha separado tres capas distintas:

$$\boxed{\text{independencia lineal} \quad \longleftrightarrow \quad \det \neq 0,}$$

$$\boxed{\text{orientación} \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{sgn}(\det),}$$

y, cuando la referencia es ortonormal,

$$\boxed{\text{volumen euclídeo} \quad \longleftrightarrow \quad |\det|.}$$

El determinante contiene así simultáneamente información algebraica, orientacional y métrica, pero cada lectura requiere sus hipótesis precisas.

Principio metodológico 4.13 — Separar cero, signo y magnitud del determinante Antes de interpretar un determinante, preguntar qué información se está usando:

- `det = 0`: pérdida de independencia;
- `sgn(det)`: clase de orientación;
- `|det|`: factor de volumen cuando la referencia métrica está normalizada.

La sección termina exactamente donde comienza la siguiente necesidad tridimensional: construir, a partir de dos vectores y una orientación elegida, un tercer vector perpendicular cuya magnitud codifique un área. Esa construcción será el objeto de §9. El siguiente paso será el §9.

9. Producto vectorial en dimensión tres

Activación: de dos vectores a una normal orientada. Sean

$$u, v \in V.$$

Los dos vectores determinan, cuando son linealmente independientes, un plano vectorial

$$\operatorname{span}(u, v).$$

En dimensión tres aparece una posibilidad especial: podemos buscar un tercer vector que sea perpendicular a ese plano y cuya magnitud mida el área del paralelogramo generado por u y v. Pero quedan dos elecciones que una simple condición de perpendicularidad no resuelve:

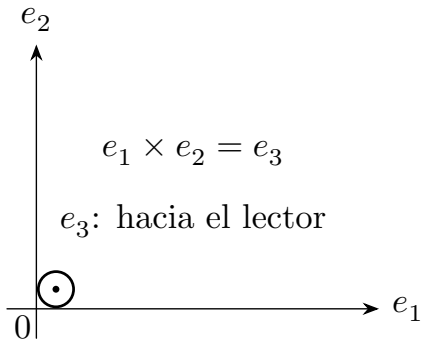


Figura 4.5. En una base ortonormal positivamente orientada, $e_1 \times e_2 = e_3$. El punto dentro del círculo indica una dirección que sale del papel; invertir los factores invierte ese vector. Véase §9.

1. hay dos sentidos opuestos en la recta perpendicular al plano;
2. la magnitud debe fijarse de manera compatible con el área.

La orientación construida en §8 resuelve el primer problema; el producto escalar resuelve el segundo. Por eso el producto vectorial no pertenece a la estructura lineal desnuda de V.

Los dos ingredientes que necesita la construcción. Para definir $u \times v$ necesitamos simultáneamente:

- el producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle,$$

que permite identificar vectores con funcionales lineales mediante la regla

$$x \longmapsto \langle x, \cdot \rangle;$$

- una clase de orientación positiva, que fija el signo del volumen orientado

$$\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w).$$

Proposición 4.31 garantiza que, una vez fijada la orientación positiva, este volumen orientado es independiente de la base ortonormal positiva usada para calcularlo. Así, para u y v fijos, la aplicación

$$w \longmapsto \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w)$$

es un funcional lineal sobre V, por la proposición 4.24. La pregunta central es:
Existencia y unicidad ¿Existe un único vector $x \in V$ tal que

$$\langle x, w \rangle = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w)$$

para todo $w \in V$?

Proposición: representación vectorial del volumen orientado. Proposición 4.32 — Existencia y unicidad del vector representante Para cada par $u, v \in V$ existe un único vector $x \in V$ tal que

$$\boxed{\langle x, w \rangle = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w)}$$

para todo $w \in V$.
Demostración de existencia. Elegimos una base ortonormal positivamente orientada

$$E = (e_1, e_2, e_3).$$

Definimos

$$x := \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, e_k) e_k.$$

Sea ahora

$$w = \sum_{k=1}^{3} w^k e_k.$$

Por proposición 4.20, $w^k = \langle w, e_k \rangle$.
Como E es ortonormal,

$$\begin{aligned} \langle x, w \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, e_k) e_k, \sum_{j=1}^{3} w^j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, e_k) w^k. \end{aligned}$$

Por linealidad del volumen orientado en el tercer argumento,

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(u,v,w) &= \operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}\left(u,v,\sum_{k=1}^{3} w^k e_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3} w^k \operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(u,v,e_k).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle x, w\rangle = \operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(u,v,w).$$

Demostración de unicidad. Supongamos que x e y satisfacen la misma condición. Entonces, para todo $w \in V$,

$$\langle x-y, w\rangle = 0.$$

Tomamos $w = x - y$.
Así, $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = 0$. Por positividad definida, $x - y = 0$,
y por tanto

$$x = y.$$

□

La construcción utilizó una base ortonormal positiva para demostrar existencia, pero el vector obtenido no depende de esa base: la condición que lo caracteriza es intrínseca y proposición 4.32 asegura unicidad.

Definir: producto vectorial. Definición 4.29 — Producto vectorial en un espacio euclídeo orientado de dimensión tres Para $u, v \in V$, definimos su **producto vectorial**

$$\boxed{u \times v}$$

como el único vector cuya existencia y unicidad garantiza proposición 4.32, caracterizado por

$$\boxed{\langle u \times v, w\rangle = \operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(u,v,w)}$$

para todo $w \in V$. Esta identidad es la definición geométrica fundamental del producto vectorial en este capítulo. No depende de haber elegido una base concreta para escribir componentes.

Tipo físico y unidades definición 4.29 define una operación en el espacio euclídeo abstracto una vez fijadas métrica y orientación. Si, en una realización física, u y v representan desplazamientos con dimensión L, entonces proposición 4.37 implica $\|u \times v\| \sim L^2$. Por tanto, $u \times v$ debe interpretarse dimensionalmente como un **vector de área orientada**, no como otro desplazamiento. Una forma segura de llevar las unidades es escribir $u = \ell_0 \bar{u}$ y $v = \ell_0 \bar{v}$, con $\bar{u}, \bar{v}$ en el espacio direccional normalizado; entonces el vector de área físico es $\ell_0^2(\bar{u} \times \bar{v})$.

Reutilizar V para codificar su dirección no autoriza a sumar $u \times v$ con un desplazamiento ni a interpretar automáticamente sus componentes en metros. El tipo de magnitud y la escala deben conservarse explícitos.

Primeras consecuencias sin coordenadas. Tomemos

$$w = u.$$

Entonces

$$\langle u \times v, u \rangle = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, u).$$

Como el volumen orientado es alternante, $\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, u) = 0$. Por tanto,

$$\boxed{u \times v \perp u.}$$

Análogamente,

$$\boxed{u \times v \perp v.}$$

Así, el vector definido por la definición 4.29 es perpendicular a los dos factores sin que hayamos impuesto esta condición por separado: surge automáticamente de la alternancia del determinante. También, $\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, u, w) = 0$

para todo w, luego proposición 4.32 implica

$$\boxed{u \times u = 0.}$$

Qué ocurre si invertimos la orientación. Supongamos que conservamos el mismo producto escalar pero declaramos positiva la orientación opuesta. Entonces el volumen orientado cambia de signo:

$$\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{opp}}(u, v, w) = -\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w).$$

Sea $\times_{\mathrm{opp}}$ el producto vectorial definido con esa orientación opuesta. Por definición 4.29,

$$\langle u \times_{\mathrm{opp}} v, w \rangle = -\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w).$$

Pero

$$\langle -(u \times v), w \rangle = -\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w).$$

Por unicidad en la proposición 4.32,

$$\boxed{u \times_{\mathrm{opp}} v = -(u \times v).}$$

La orientación no es, por tanto, una decoración terminológica: determina el **signo** del producto vectorial.

Principio metodológico y consecuencias pendientes. Principio metodológico 4.14 — Declarar métrica y orientación antes de usar el producto vectorial El producto vectorial tridimensional requiere simultáneamente:

- un producto escalar, para identificar el funcional de volumen con un vector;
- una orientación, para fijar el signo del volumen orientado.

No tratar $u \times v$ como una operación disponible en un espacio vectorial real arbitrario. La definición intrínseca

$$\boxed{\langle u \times v, w \rangle = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w)}$$

contiene ya la geometría esencial de la operación. Todavía falta traducir esta caracterización a una base ortonormal positiva y obtener:

- la fórmula usual por componentes;
- antisimetría y bilinealidad;
- el criterio $u \times v = 0$;
- la magnitud

$$\|u \times v\|$$

en términos del ángulo entre u y v.

Proposición: fórmula en una base ortonormal positiva. Proposición 4.33 — Fórmula coordenada del producto vectorial Sea

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ortonormal positivamente orientada. Si

$$u = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3$$

y

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3,$$

entonces

$$\boxed{\begin{aligned} u \times v = {} & (u^2 v^3 - u^3 v^2) e_1 \\ & + (u^3 v^1 - u^1 v^3) e_2 \\ & + (u^1 v^2 - u^2 v^1) e_3. \end{aligned}}$$

Demostración. Como E es ortonormal, proposición 4.20 permite recuperar las componentes de $u \times v$ mediante productos escalares:

$$(u \times v)^k = \langle u \times v, e_k \rangle.$$

Por definición 4.29,

$$(u \times v)^k = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, e_k) = \det_E(u, v, e_k).$$

Para $k = 1$,

$$\det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 1 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{pmatrix} = u^2 v^3 - u^3 v^2.$$

Para $k = 2$,

$$\det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 1 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{pmatrix} = u^3v^1 - u^1v^3.$$

Y para $k = 3$,

$$\det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 1 \end{pmatrix} = u^1v^2 - u^2v^1.$$

Reuniendo las tres componentes obtenemos la fórmula. □ La expresión usual por componentes no es, por tanto, el punto de partida conceptual: es la representación de la definición 4.29 en una base ortonormal positiva.[3]

Tabla de la base ortonormal positiva. Aplicando proposición 4.33 a los vectores de la propia base,

$$\boxed{e_1 \times e_2 = e_3,}$$

$$\boxed{e_2 \times e_3 = e_1,}$$

$$\boxed{e_3 \times e_1 = e_2.}$$

Al invertir el orden,

$$e_2 \times e_1 = -e_3,$$

$$e_3 \times e_2 = -e_1,$$

$$e_1 \times e_3 = -e_2.$$

Esta tabla incorpora simultáneamente ortonormalidad y orientación. En una base ortonormal de orientación opuesta, los signos se invierten.

Proposición: bilinealidad y antisimetría. Proposición 4.34 — Bilinealidad y antisimetría del producto vectorial Para $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(\alpha u + \beta v) \times w = \alpha(u \times w) + \beta(v \times w),}$$

$$\boxed{u \times (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \times v) + \beta(u \times w),}$$

y

$$\boxed{v \times u = -(u \times v).}$$

Demostración de la linealidad en la primera entrada. Para todo $z \in V$,

[3]Véanse R. Shankar, *Basic Training in Mathematics: A Fitness Program for Science Students*, Springer, 1995, cap. 7, §7.1 «Review of Vector Analysis», pp. 149–154; y G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7.ª ed., Academic Press, 2013, cap. 3, §3.2 «Vector in 3-D Spaces», pp. 126–132.

$$\begin{aligned}\langle(\alpha u+\beta v)\times w, z\rangle &= \operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(\alpha u+\beta v, w, z)\\ &= \alpha\operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(u,w,z)+\beta\operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(v,w,z)\\ &= \langle\alpha(u\times w)+\beta(v\times w), z\rangle\,.\end{aligned}$$

Como esto vale para todo z, la unicidad de la proposición 4.32 implica la primera identidad. La linealidad en la segunda entrada se demuestra del mismo modo usando la trilinealidad del volumen orientado. Para la antisimetría,

$$\begin{aligned}\langle v\times u, z\rangle &= \operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(v,u,z)\\ &= -\operatorname{Vol}^{\mathrm{or}}(u,v,z)\\ &= \langle -(u\times v), z\rangle.\end{aligned}$$

Otra vez proposición 4.32 da $v\times u=-(u\times v)$.
□

La antisimetría contiene como caso particular

$$u\times u=0,$$

que ya habíamos obtenido directamente en §9.5.

Consecuencias algebraicas inmediatas. De proposición 4.34 se sigue

$$u\times 0=0,$$

$$0\times v=0,$$

y, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$(\lambda u)\times v=\lambda(u\times v)=u\times(\lambda v).$$

Además, $(u+v)\times w=u\times w+v\times w$,
y

$$u\times(v+w)=u\times v+u\times w.$$

Estas identidades son algebraicas; no requieren elegir coordenadas una vez que definición 4.29 está establecido.

Proposición: cuándo se anula el producto vectorial. Proposición 4.35 — Criterio de dependencia mediante el producto vectorial Para $u, v\in V$,

$$\boxed{u\times v=0\iff u, v \text{ son linealmente dependientes.}}$$

Demostración. Si u y v son dependientes, entonces existe una relación lineal entre ellos. En particular, si $v=\lambda u$,

$$u\times v=u\times(\lambda u)=\lambda(u\times u)=0.$$

Los casos en que uno de los vectores es cero quedan incluidos. Recíprocamente, supongamos $u\times v=0$. Elegimos una base ortonormal positivamente orientada

$$E = (e_1, e_2, e_3).$$

Por proposición 4.33, las tres componentes de $u \times v$ se anulan, de modo que

$$u^2v^3 - u^3v^2 = 0,$$

$$u^3v^1 - u^1v^3 = 0,$$

y

$$u^1v^2 - u^2v^1 = 0.$$

Si $u = 0$, la dependencia es inmediata. Supongamos entonces $u \neq 0$. Alguna componente de u es no nula. Si, por ejemplo, $u^1 \neq 0$,

las dos últimas ecuaciones dan

$$v^2 = \frac{u^2}{u^1}v^1, \qquad v^3 = \frac{u^3}{u^1}v^1.$$

Por tanto, $[v]_E = \frac{v^1}{u^1}[u]_E$,

y, por la biyección de componentes de la proposición 4.7, $v = \frac{v^1}{u^1}u$.

Así u y v son linealmente dependientes. Si la componente no nula de u es u^2 o u^3, el mismo argumento se obtiene permutando cíclicamente los índices. □ Así, el producto vectorial detecta exactamente cuándo dos vectores generan un plano genuino.

Advertencia: la fórmula coordenada tiene hipótesis. Principio metodológico 4.15 — No transportar la fórmula de componentes fuera de una base ortonormal positiva La expresión

$$\begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix}$$

representa las componentes de $u \times v$ sólo cuando las componentes de u y v están tomadas en una base ortonormal compatible con la orientación positiva elegida. En una base general, esa receta numérica no puede trasladarse sin incorporar correctamente la métrica y la orientación.

Este punto es paralelo a la advertencia de §5 sobre la fórmula pitagórica por componentes: una expresión simple suele esconder hipótesis geométricas fuertes.

Balance: forma intrínseca y forma coordenada. Ya tenemos dos descripciones complementarias: **Descripción intrínseca**

$$\boxed{\langle u \times v, w\rangle = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w),}$$

y **descripción coordenada en una base ortonormal positiva**

$$\boxed{[u \times v]_E = \begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix}.}$$

Además,

$$\boxed{v \times u = -(u \times v)}$$

y

$$\boxed{u \times v = 0 \iff u, v \text{ dependientes.}}$$

Todavía falta conectar la **magnitud** de $u \times v$ con el área del paralelogramo y con el ángulo entre u y v.

Proposición 4.36 — Identidad de Lagrange Para todo $u, v \in V$,

$$\boxed{\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2.}$$

Demostración. Elegimos una base ortonormal positivamente orientada

$$E = (e_1, e_2, e_3),$$

y escribimos

$$[u]_E = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \qquad [v]_E = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

Por proposición 4.33,

$$[u \times v]_E = \begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix}.$$

Como E es ortonormal,

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 = &(u^2v^3 - u^3v^2)^2 \\ &+ (u^3v^1 - u^1v^3)^2 \\ &+ (u^1v^2 - u^2v^1)^2. \end{aligned}$$

Al expandir y reagrupar,

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 = &((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2)((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2) \\ &- \left(u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3\right)^2. \end{aligned}$$

Por proposición 4.20, los dos factores son $\|u\|^2$ y $\|v\|^2$, mientras el último paréntesis es $\langle u, v\rangle$. Por tanto,

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2.$$

□

La identidad es intrínseca aunque se haya demostrado en una base ortonormal positiva: ambos lados están definidos geométricamente y no dependen de la base elegida.

Proposición: magnitud y ángulo. Proposición 4.37 — Magnitud del producto vectorial Sean $u, v \neq 0$ y sea

$$\theta = \theta(u, v) \in [0, \pi].$$

Entonces

$$\boxed{\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \sin\theta.}$$

Demostración. Por definición 4.21,

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta.$$

Sustituyendo en la proposición 4.36,

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Como $\theta \in [0, \pi]$, $\sin\theta \geq 0$.

Tomando raíces no negativas, $\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \sin\theta$.

□

Los casos extremos son coherentes con la proposición 4.35:

- si $\theta = 0$ o π, entonces $\sin\theta = 0$ y $u \times v = 0$;
- si $\theta = \pi/2$, entonces

$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\|.$$

Interpretación como área. El paralelogramo generado por u y v tiene base de longitud $\|u\|$ y altura perpendicular

$$\|v\| \sin\theta.$$

Por tanto su área euclídea es $\|u\| \, \|v\| \sin\theta$.

Proposición 4.37 permite escribir

$$\boxed{\text{Area}(u, v) = \|u \times v\|.}$$

Así, el producto vectorial reúne dos informaciones diferentes:

- su **dirección** es perpendicular al plano generado por u y v;
- su **magnitud** es el área del paralelogramo generado por ellos.

El signo orientacional no aparece en la norma. Está contenido en el sentido del vector normal.

Proposición: la normal elegida es positivamente orientada. Proposición 4.38 — Orientación de la terna $(u, v, u \times v)$ Si u y v son linealmente independientes, entonces

$$\boxed{\text{Vol}^{\text{or}}(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0.}$$

En particular,

$$\boxed{(u, v, u \times v)}$$

tiene orientación positiva.

Demostración. Por definición 4.29,

$$\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle.$$

Luego

$$\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2.$$

Como u y v son independientes, proposición 4.35 da $u \times v \neq 0$. Por positividad definida, $\|u \times v\|^2 > 0$.

□

Esta proposición expresa de manera intrínseca la regla de orientación que suele memorizarse mediante la "regla de la mano derecha".

Ejercicio 4.18 — Cálculo, perpendicularidad y área.

Función pedagógica: `Coordenadas → Verificación geométrica → Área`

En una base ortonormal positivamente orientada

$$E = (e_1, e_2, e_3),$$

sean

$$u = 2e_1 + e_2, \qquad v = e_1 + 3e_2 + 2e_3.$$

1. Calcula $u \times v$.
2. Comprueba que es perpendicular a u y a v.
3. Calcula el área del paralelogramo generado por u y v.
4. Verifica proposición 4.36 directamente.

Solución desarrollada

Las columnas son

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [v]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por proposición 4.33,

$$[u \times v]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\boxed{u \times v = 2e_1 - 4e_2 + 5e_3.}$$

Verificamos:

$$\langle u \times v, u \rangle = 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 0,$$

y

$$\langle u \times v, v \rangle = 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 0.$$

Su norma al cuadrado es $\|u \times v\|^2 = 2^2 + (-4)^2 + 5^2 = 45$. Por tanto,

$$\boxed{\text{Area}(u,v) = 3\sqrt{5}.}$$

Finalmente,

$$\|u\|^2 = 5, \qquad \|v\|^2 = 14, \qquad \langle u, v\rangle = 5.$$

Entonces

$$\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2 = 5 \cdot 14 - 25 = 45,$$

coincidiendo con $\|u \times v\|^2$.

Ejercicio 4.19 — Dependencia de la orientación.
Función pedagógica: `Estructura → Orientación → Signo`
Sea

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ortonormal positiva y sean

$$u = e_1 + e_2, \qquad v = e_2 + e_3.$$

1. Calcula $u \times v$ con la orientación positiva determinada por E.
2. Invierte la orientación del espacio sin cambiar el producto escalar. ¿Cuál es el nuevo producto vectorial?
3. Compara las normas y explica qué parte del resultado depende de la orientación.

Solución desarrollada
Por proposición 4.33,

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [v]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y

$$[u \times v]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{u \times v = e_1 - e_2 + e_3.}$$

Si invertimos la orientación y mantenemos la misma métrica, §9.6 da

$$\boxed{u \times_{\text{opp}} v = -e_1 + e_2 - e_3.}$$

En ambos casos,

$$\|u \times v\| = \|u \times_{\text{opp}} v\| = \sqrt{3}.$$

La magnitud —y por tanto el área— depende de la métrica, pero no de cuál clase de orientación declaramos positiva. Lo que cambia con la orientación es el **sentido** de la normal.

Cierre de §9. El producto vectorial ha quedado construido a partir de dos estructuras previas:

$$\boxed{\text{producto escalar} + \text{orientación} \Longrightarrow \text{producto vectorial.}}$$

Su definición intrínseca es

$$\boxed{\langle u \times v, w\rangle = \mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w),}$$

mientras que, en una base ortonormal positiva,

$$\boxed{[u \times v]_E = \begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix}.}$$

Las propiedades fundamentales quedan resumidas por

$$\boxed{u \times v \perp u, \qquad u \times v \perp v,}$$

$$\boxed{v \times u = -(u \times v),}$$

$$\boxed{u \times v = 0 \Longleftrightarrow u, v \text{ dependientes},}$$

y

$$\boxed{\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\| \sin\theta.}$$

Finalmente,

$$\boxed{\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0}$$

cuando u y v son independientes. La orientación determina el sentido de la normal; la métrica determina su magnitud. La siguiente sección cambiará de foco: no introducirá una nueva operación geométrica, sino que estudiará cómo una misma entidad vectorial adquiere distintas columnas cuando cambiamos de base. El siguiente paso será el §10.

10. Cambios de base y coordenadas vectoriales

Activación: el vector no cambia porque cambie su columna. Sea

$$v \in V.$$

Elegimos dos bases ordenadas: $B = (e_1, e_2, e_3)$, $\qquad B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. El mismo vector posee dos columnas: $[v]_B \qquad$ y $\qquad [v]_{B'}$.

Estas columnas pueden ser numéricamente distintas sin que haya ocurrido ninguna transformación física o geométrica del vector. La situación es **pasiva**:

$$\boxed{v \text{ permanece fijo;} \qquad \text{cambia la base usada para describirlo.}}$$

El objetivo inicial de esta sección es determinar rigurosamente cómo se relacionan ambas columnas.

Definir: matriz de la nueva base expresada en la antigua. Definición 4.30 — Matriz de cambio de base Sean

$$B = (e_1, e_2, e_3), \qquad B' = (e'_1, e'_2, e'_3).$$

Definimos

$$\boxed{S_{B\leftarrow B'} := \begin{pmatrix} | & | & | \\ [e'_1]_B & [e'_2]_B & [e'_3]_B \\ | & | & | \end{pmatrix}.}$$

Sus columnas son, por tanto, los vectores de la **base nueva** B' expresados en la **base antigua** B. Cuando no haya ambigüedad escribiremos simplemente

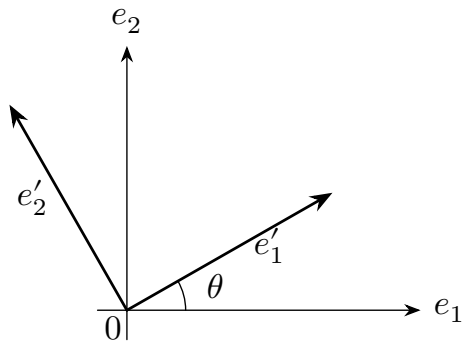


Figura 4.6. La base prima se gira un ángulo θ positivo. Las coordenadas de un mismo vector se transforman por la rotación inversa; el vector geométrico permanece fijo. Véase §10.

$$S := S_{B\leftarrow B'}.$$

La flecha recuerda el sentido de reconstrucción:

$$\boxed{\text{columnas en } B' \xrightarrow{\ S\ } \text{columnas en } B.}$$

Proposición: ley pasiva de transformación de coordenadas. Proposición 4.39 — Cambio de componentes entre dos bases Para todo $v \in V$,

$$\boxed{[v]_B = S_{B\leftarrow B'}[v]_{B'}.}$$

Como B' es una base, $S_{B\leftarrow B'}$ es invertible y, por tanto,

$$\boxed{[v]_{B'} = S^{-1}_{B\leftarrow B'}[v]_B.}$$

Demostración. Escribimos

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix}.$$

Por definición de componentes, $v = v'^1 e'_1 + v'^2 e'_2 + v'^3 e'_3$.

Tomando componentes respecto de B y usando la linealidad de la aplicación de componentes proposición 4.7,

$$[v]_B = v'^1[e'_1]_B + v'^2[e'_2]_B + v'^3[e'_3]_B.$$

Pero el lado derecho es precisamente el producto matricial

$$S_{B\leftarrow B'} \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix}.$$

Así, $[v]_B = S_{B\leftarrow B'}[v]_{B'}$. Las columnas de $S_{B\leftarrow B'}$ son las componentes en B de los vectores de la base B'. Como B' es linealmente independiente y proposición 4.7 es biyectiva, esas columnas son linealmente independientes. Por proposición 4.27, $\det S_{B\leftarrow B'} \neq 0$.

La matriz es, por tanto, invertible, y multiplicar la identidad anterior por su inversa produce $[v]_{B'} = S^{-1}_{B\leftarrow B'}[v]_B$.

□

La aparición de la inversa no es una convención arbitraria: procede del hecho de que las columnas de S describen la base nueva en la antigua.[4]

Cambio pasivo frente a transformación activa. En un **cambio pasivo de base**:

- el vector geométrico v es el mismo;
- cambia la base de descripción;
- la columna cambia según

$$[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B.$$

Una situación distinta es aplicar una transformación lineal

$$T : V \longrightarrow V$$

manteniendo fija la base B. Entonces el vector generalmente cambia: $v \longmapsto T(v)$. Si $A_B(T)$ es la matriz cuyas columnas son

$$[T(e_1)]_B, \qquad [T(e_2)]_B, \qquad [T(e_3)]_B,$$

la linealidad da

$$\boxed{[T(v)]_B = A_B(T)[v]_B.}$$

Aquí la matriz multiplica la columna porque estamos describiendo **otro vector en la misma base**. Estas dos operaciones no deben confundirse:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pasivo: } v \text{ fijo, } B \to B', \\ [v]_{B'} = S^{-1}[v]_B,\end{array}}$$

mientras

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{activo: } B \text{ fija, } v \to T(v), \\ [T(v)]_B = A_B(T)[v]_B.\end{array}}$$

[4] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7.ª ed., Academic Press, 2013, cap. 3, §3.3 «Coordinate Transformations», pp. 133–138.

La misma matriz puede aparecer en dos problemas diferentes. Supongamos que definimos una transformación lineal T_S mediante $T_S(e_j) = e'_j$. Por definición 4.30, la matriz de esta transformación activa en la base B es precisamente

$$A_B(T_S) = S_{B\leftarrow B'}.$$

Por tanto, $[T_S(v)]_B = S[v]_B$. Pero el cambio **pasivo** desde B hacia B' obedece $[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B$.

De modo que la misma matriz geométrica de columnas puede aparecer en dos expresiones opuestas:

$$\boxed{\text{activo: } S, \qquad \text{pasivo: } S^{-1}.}$$

La diferencia no es algebraica sino conceptual: en un caso cambia el vector; en el otro cambia su descripción.

Ejemplo diagnóstico. Sea

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

y definamos

$$B' = (e_1 + e_2,\ e_2,\ e_3).$$

Entonces

$$S_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$S^{-1}_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el vector

$$v = 2e_1 + 3e_2 + e_3.$$

En la base B,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lectura pasiva. El vector no cambia. Sólo buscamos su columna en B':

$$[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, $2(e_1 + e_2) + e_2 + e_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 = v$.

Lectura activa. Definamos ahora T_S por

$$T_S(e_1) = e_1 + e_2, \qquad T_S(e_2) = e_2, \qquad T_S(e_3) = e_3.$$

La base B permanece fija, pero el vector cambia:

$$[T_S(v)]_B = S[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $T_S(v) = 2e_1 + 5e_2 + e_3$,
que no es el vector original. Este ejemplo hace visible la diferencia:

pasivo:	v igual,	$(2,3,1) \to (2,1,1)$,
activo:	v cambia,	$(2,3,1) \to (2,5,1)$.

Principio metodológico y convención de cambio. Principio metodológico 4.16 — Preguntar qué está cambiando antes de multiplicar por una matriz Antes de escribir una fórmula matricial, distinguir explícitamente:

1. **cambio pasivo de base:** el vector permanece fijo y cambia su columna;
2. **transformación activa:** la base permanece fija y cambia el vector.

Una misma matriz puede intervenir en ambos problemas, pero las leyes de transformación no son la misma afirmación.

Queda fijada la convención canónica:

$$\boxed{S_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [e_1']_B & [e_2']_B & [e_3']_B \\ | & | & | \end{pmatrix},}$$

$$\boxed{[v]_B = S_{B \leftarrow B'}[v]_{B'},}$$

y

$$\boxed{[v]_{B'} = S_{B \leftarrow B'}^{-1}[v]_B.}$$

Todavía falta estudiar la composición de varios cambios de base, la matriz inversa como cambio en sentido opuesto y la transformación de objetos matriciales asociados.

La matriz identidad como cambio trivial. Si usamos la misma base como origen y destino, $B = (e_1, e_2, e_3)$,
entonces definición 4.30 produce

$$S_{B \leftarrow B} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [e_1]_B & [e_2]_B & [e_3]_B \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Pero

$$[e_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [e_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [e_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{S_{B\leftarrow B} = I_3.}$$

Un cambio de descripción que no cambia la base debe dejar las columnas intactas.

Proposición: el cambio inverso. Proposición 4.40 — La matriz inversa cambia de vuelta a la base original Para dos bases ordenadas B y B',

$$\boxed{S_{B'\leftarrow B} = S_{B\leftarrow B'}^{-1}.}$$

Demostración. proposición 4.39 aplicado al cambio de B' hacia B da, para todo $v \in V$,

$$[v]_B = S_{B\leftarrow B'}[v]_{B'}.$$

Aplicado en sentido contrario, $[v]_{B'} = S_{B'\leftarrow B}[v]_B$.
Sustituyendo la primera identidad en la segunda,

$$[v]_{B'} = S_{B'\leftarrow B}S_{B\leftarrow B'}[v]_{B'}.$$

Esto vale para toda columna de componentes en B'. Como proposición 4.7 establece una biyección entre V y $\mathbb{R}^3$, las columnas $[v]_{B'}$ recorren todo $\mathbb{R}^3$. Luego

$$S_{B'\leftarrow B}S_{B\leftarrow B'} = I_3.$$

Por unicidad de la inversa, $S_{B'\leftarrow B} = S_{B\leftarrow B'}^{-1}$.
□
La notación con flechas se comporta como esperamos:

$$\boxed{B' \longrightarrow B \quad \text{se deshace con} \quad B \longrightarrow B'.}$$

Proposición: composición de cambios de base. Proposición 4.41 — Regla de composición Sean B, B' y C tres bases ordenadas. Entonces

$$\boxed{S_{B\leftarrow C} = S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow C}.}$$

Demostración. Para todo $v \in V$, proposición 4.39 da

$$[v]_{B'} = S_{B'\leftarrow C}[v]_C.$$

Luego,

$$\begin{aligned}[v]_B &= S_{B\leftarrow B'}[v]_{B'} \\ &= S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow C}[v]_C.\end{aligned}$$

Pero también, por definición del cambio directo de C a B, $[v]_B = S_{B\leftarrow C}[v]_C$. Como las columnas $[v]_C$ recorren todo $\mathbb{R}^3$,

$$S_{B\leftarrow C} = S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow C}.$$

□
El orden de la multiplicación sigue el orden de las flechas: $C \longrightarrow B' \longrightarrow B$. Primero actúa

$$S_{B'\leftarrow C},$$

y después

$$S_{B\leftarrow B'}.$$

Consistencia de caminos. Supongamos que queremos convertir una columna desde C hasta B. Podemos hacerlo directamente: $[v]_B = S_{B\leftarrow C}[v]_C$.

O podemos pasar por una base intermedia B':

$$[v]_B = S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow C}[v]_C.$$

Proposición 4.41 garantiza que ambos caminos producen exactamente la misma columna. Por eso un diagrama de cambios de base debe ser **conmutativo**:

el resultado no depende del camino de bases intermedias.

Este criterio es una herramienta práctica de control: si dos rutas producen matrices distintas, alguna convención de flechas o algún orden de multiplicación fue usado incorrectamente.

Ejemplo con tres bases. Sea

$$B = (e_1, e_2, e_3).$$

Definimos $B' = (e_1 + e_2,\ e_2,\ e_3)$,
de modo que

$$S_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora definimos $C = (e'_1,\ e'_2 + e'_3,\ e'_3)$.
Respecto de B',

$$S_{B'\leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por proposición 4.41,

$$S_{B\leftarrow C} = S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow C}.$$

Multiplicando,

$$S_{B\leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos verificarlo directamente desde los vectores de C:

$$c_1 = e_1 + e_2,$$

$$c_2 = e_2 + e_3,$$

$$c_3 = e_3.$$

Sus columnas en B son precisamente

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

que forman la matriz obtenida por composición.

Proposición: compatibilidad con determinantes y orientación. Proposición 4.42 — Determinante de un cambio compuesto Para tres bases B, B' y C,

$$\boxed{\det S_{B\leftarrow C} = \det S_{B\leftarrow B'} \det S_{B'\leftarrow C}.}$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición 4.41 y proposición 4.26:

$$\begin{aligned}\det S_{B\leftarrow C} &= \det\left(S_{B\leftarrow B'} S_{B'\leftarrow C}\right)\\ &= \det S_{B\leftarrow B'} \det S_{B'\leftarrow C}.\end{aligned}$$

□

Por tanto, los signos también se componen:

- dos cambios que invierten orientación producen un cambio que la conserva;
- un único cambio de signo negativo invierte orientación;
- cambios de signo positivo conservan la clase de orientación.

Esto conecta la convención matricial de §10 con las clases de orientación construidas en §8.

Principio metodológico de consistencia. Principio metodológico 4.17 — Leer las flechas antes de multiplicar matrices de cambio Para una matriz

$$S_{A\leftarrow B},$$

interpretar siempre:

$$\text{componentes en } B \longrightarrow \text{componentes en } A.$$

Dos matrices pueden multiplicarse directamente sólo cuando las flechas intermedias encajan:

$$S_{A\leftarrow B} S_{B\leftarrow C} = S_{A\leftarrow C}.$$

La regla funciona como un control de tipos: $C \to B \to A$. Si las etiquetas no encajan, el producto no representa la composición pretendida aunque la multiplicación matricial sea algebraicamente posible.

Balance: inversión, composición y consistencia. Ya disponemos de una red coherente de cambios pasivos:

$$\boxed{S_{B\leftarrow B} = I,}$$

$$\boxed{S_{B'\leftarrow B} = S_{B\leftarrow B'}^{-1},}$$

y

$$\boxed{S_{B\leftarrow C} = S_{B\leftarrow B'} S_{B'\leftarrow C}.}$$

Estas identidades aseguran que la descripción de un vector puede convertirse entre bases sin ambigüedad y sin transformar el vector geométrico. Todavía falta estudiar cómo cambia la **matriz de una transformación lineal** cuando cambiamos la base usada para describirla.

Definir: matriz de una transformación lineal en una base. Definición 4.31 — Matriz de una transformación lineal Sea

$$T : V \longrightarrow V$$

lineal y sea

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ordenada. Definimos

$$\boxed{A_B(T) := \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_B & [T(e_2)]_B & [T(e_3)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix}.}$$

Entonces, para todo $v \in V$,

$$\boxed{[T(v)]_B = A_B(T)[v]_B.}$$

La matriz depende de la base. La transformación lineal T no. Por eso no es correcto identificar sin más

$$T \quad \text{con} \quad A_B(T).$$

La matriz es una representación de T una vez elegida una base.

Proposición: ley de conjugación. Proposición 4.43 — Cambio de base de la matriz de un operador Sean B y B' dos bases y sea

$$S := S_{B\leftarrow B'}.$$

Entonces

$$\boxed{A_{B'}(T) = S^{-1} A_B(T) S.}$$

Demostración. Para todo $v \in V$,

$$[v]_B = S[v]_{B'}.$$

Aplicamos T y escribimos el resultado en la base B: $[T(v)]_B = A_B(T)[v]_B = A_B(T)S[v]_{B'}$. Ahora convertimos la columna resultante desde B hacia B': $[T(v)]_{B'} = S^{-1}[T(v)]_B$. Por tanto, $[T(v)]_{B'} = S^{-1}A_B(T)S[v]_{B'}$. Pero, por la definición 4.31, $[T(v)]_{B'} = A_{B'}(T)[v]_{B'}$.

Como las columnas $[v]_{B'}$ recorren todo $\mathbb{R}^3$, $A_{B'}(T) = S^{-1}A_B(T)S$.

□

El patrón de la fórmula refleja exactamente el recorrido conceptual:

$$B' \xrightarrow{S} B \xrightarrow{A_B(T)} B \xrightarrow{S^{-1}} B'.$$

Misma transformación, matrices distintas. La igualdad $A_{B'}(T) = S^{-1}A_B(T)S$ no describe tres transformaciones activas sucesivas aplicadas al vector físico. Describe una sola transformación geométrica T expresada en dos sistemas de coordenadas distintos. Por eso las matrices

$$A_B(T) \qquad \text{y} \qquad A_{B'}(T)$$

pueden ser numéricamente diferentes y, sin embargo, representar exactamente el mismo operador.

Principio metodológico 4.18 — No confundir el operador con una de sus matrices Al cambiar de base, mantener fijo el operador geométrico y transformar su representación por conjugación:

$$A_{B'}(T) = S^{-1}A_B(T)S.$$

Una diferencia entre matrices no implica una diferencia entre operadores.

Proposición: el determinante del operador no depende de la base. Proposición 4.44 — Invariancia del determinante bajo cambio de base Para cualquier transformación lineal T y cualesquiera bases B, B',

$$\boxed{\det A_{B'}(T) = \det A_B(T).}$$

Demostración. Por proposición 4.43,

$$A_{B'}(T) = S^{-1}A_B(T)S.$$

Aplicando proposición 4.26,

$$\det A_{B'}(T) = \det(S^{-1}) \det A_B(T) \det(S).$$

Como $SS^{-1} = I$,

Proposición 4.26 implica $\det(S)\det(S^{-1}) = 1$.

Luego

$$\det A_{B'}(T) = \det A_B(T).$$

□

Así, aunque la matriz cambie con la base, su determinante es una propiedad intrínseca del operador lineal.

Ejemplo: una matriz diagonal deja de ser diagonal. Sea

$$B = (e_1, e_2, e_3),$$

y definamos

$$T(e_1) = 2e_1, \qquad T(e_2) = 3e_2, \qquad T(e_3) = 4e_3.$$

Entonces

$$A_B(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tomemos la base

$$B' = (e_1 + e_2,\ e_2,\ e_3),$$

para la cual

$$S = S_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por proposición 4.43, $A_{B'}(T) = S^{-1} A_B(T) S$.
Calculando,

$$A_B(T)S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\boxed{A_{B'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.}$$

La matriz ya no es diagonal, aunque el operador T sea exactamente el mismo. Además, $\det A_B(T) = 24$,
y

$$\det A_{B'}(T) = 24,$$

como predice proposición 4.44.

Ejercicio 4.20 — Cambio pasivo y transformación activa.

Función pedagógica: `Diagnóstico conceptual → Conversión de coordenadas → Activo/pasivo`

Sea

$$B = (e_1, e_2, e_3),$$

y

$$B' = (e_1 + e_2,\ e_2,\ e_3).$$

Para

$$v = 2e_1 + 3e_2 + e_3,$$

realiza dos operaciones distintas:

1. calcula $[v]_{B'}$ sin cambiar el vector;
2. define $T_S(e_j) = e'_j$ y calcula $[T_S(v)]_B$.

Explica por qué aparecen S^{-1} y S, respectivamente.

Solución desarrollada

Tenemos

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cambio pasivo:

$$[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El vector sigue siendo

$$v = 2e_1 + 3e_2 + e_3.$$

Transformación activa:

$$[T_S(v)]_B = S[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora el vector sí cambió: $T_S(v) = 2e_1 + 5e_2 + e_3$. El uso de S^{-1} o S responde a preguntas distintas, no a una elección notacional.

Ejercicio 4.21 — Una transformación, dos matrices.

Función pedagógica: `Conjugación → Verificación → Invariante`

En la base

$$B = (e_1, e_2, e_3),$$

una transformación lineal T tiene matriz

$$A_B(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$B' = (e_1 + e_2,\ e_2,\ e_3).$$

1. Calcula $S_{B \leftarrow B'}$ y su inversa.
2. Calcula $A_{B'}(T)$.
3. Verifica la acción sobre e_1' directamente.
4. Compara los determinantes de ambas matrices.

Solución desarrollada

Como antes,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por proposición 4.43,

$$A_{B'}(T) = S^{-1} A_B(T) S = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

Para verificar la primera columna, observamos que

$$e_1' = e_1 + e_2,$$

de modo que

$$T(e_1') = 2e_1 + 3e_2.$$

Buscamos

$$2e_1 + 3e_2 = \alpha(e_1 + e_2) + \beta e_2.$$

Comparando coeficientes, $\alpha = 2, \qquad \beta = 1$. Por tanto,

$$[T(e_1')]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que coincide con la primera columna de $A_{B'}(T)$.

Finalmente, $\det A_B(T) = 24$

y

$$\det A_{B'}(T) = 24.$$

El operador es el mismo; sólo cambia su representación matricial.

Cierre de §10. La sección ha distinguido tres objetos que suelen confundirse:

$$\boxed{\text{vector geométrico,} \qquad \text{columna de coordenadas,} \qquad \text{matriz de un operador.}}$$

Para un cambio pasivo de base,

$$\boxed{[v]_{B'} = S^{-1}_{B\leftarrow B'}[v]_B.}$$

Para una transformación activa en una base fija,

$$\boxed{[T(v)]_B = A_B(T)[v]_B.}$$

Y para el mismo operador expresado en dos bases,

$$\boxed{A_{B'}(T) = S^{-1}_{B\leftarrow B'}A_B(T)S_{B\leftarrow B'}.}$$

Las matrices de cambio satisfacen además

$$\boxed{S_{B'\leftarrow B} = S^{-1}_{B\leftarrow B'},}$$

y

$$\boxed{S_{B\leftarrow C} = S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow C}.}$$

La conclusión metodológica es simple:

$$\boxed{\text{antes de multiplicar matrices, declarar qué objeto cambia y en qué base se expresa.}}$$

La siguiente sección estudiará transformaciones lineales que preservan la geometría euclídea: rotaciones, reflexiones e isometrías. El siguiente paso será el §11.

11. Rotaciones, reflexiones e isometrías

Activación: transformar sin deformar. Una transformación lineal general

$$T : V \longrightarrow V$$

puede cambiar longitudes, ángulos y volúmenes. Pero hay transformaciones especiales que mueven los vectores sin deformar la geometría euclídea. Queremos caracterizar las transformaciones lineales que conservan exactamente la norma: $\|T(v)\| = \|v\|$

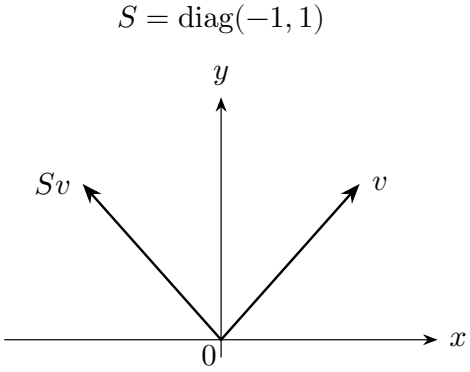


Figura 4.7. La reflexión $S(x, y) = (-x, y)$ conserva longitudes y ángulos y tiene determinante -1. Por ello no es una rotación propia del plano. Véase §11.

para todo $v \in V$. Como T es lineal,

$$T(0) = 0,$$

así que estas transformaciones fijan el origen vectorial. Las traslaciones y, más en general, las isometrías afines que no fijan el origen se tratarán al estudiar cambios de marco.

Definición 4.32 — Isometría lineal Una transformación lineal

$$T : V \longrightarrow V$$

es una **isometría lineal** si

$$\boxed{\|T(v)\| = \|v\|}$$

para todo $v \in V$. La definición es intrínseca: no requiere elegir una base. Además, para cualesquiera P, Q en el espacio afín modelado sobre V, si aplicamos T a sus desplazamientos,

$$\|T(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Por eso una isometría lineal conserva las longitudes de todos los vectores de desplazamiento.

Polarización: recuperar el producto escalar desde la norma. En un espacio euclídeo real, $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle$. Por bilinealidad y simetría,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

Despejando,

$$\boxed{\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).}$$

Esta identidad muestra que, en el caso real, la norma determina completamente el producto escalar.

Proposición: preservar norma equivale a preservar producto escalar. Proposición 4.45 — Caracterización intrínseca de las isometrías lineales Sea

$$T : V \longrightarrow V$$

lineal. Son equivalentes:

1. T preserva la norma:

$$\|T(v)\| = \|v\|$$

para todo v;

2. T preserva el producto escalar:

$$\boxed{\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle}$$

para todos $u, v \in V$.

Demostración. Supongamos primero que T preserva la norma. Como T es lineal,

$$T(u+v) = T(u) + T(v).$$

Aplicamos la identidad de polarización:

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(v)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|T(u)+T(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|T(u+v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)\\ &= \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

Recíprocamente, si T preserva el producto escalar, entonces

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2.$$

Como ambas normas son no negativas, $\|T(v)\| = \|v\|$.

□

Por tanto, una isometría lineal conserva simultáneamente longitudes y ángulos.

Consecuencias geométricas inmediatas. Si T es una isometría lineal, proposición 4.45 da $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.

Por tanto:

Ortogonalidad. Si

$$u \perp v,$$

entonces $\langle u, v\rangle = 0$,

y así $\langle T(u), T(v)\rangle = 0$.

Luego

$$\boxed{u \perp v \Longrightarrow T(u) \perp T(v).}$$

Ángulos. Para $u, v \neq 0$,

$$\cos\theta(T(u), T(v)) = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\|\|T(v)\|}.$$

Como producto escalar y normas se conservan,

$$\boxed{\theta(T(u), T(v)) = \theta(u, v).}$$

Distancias entre vectores. Por linealidad, $T(u) - T(v) = T(u - v)$.
Entonces $\|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| = \|u - v\|$. Así una isometría lineal conserva también la distancia euclídea entre cualesquiera dos vectores considerados como puntos del espacio vectorial.

Matriz de una isometría en una base ortonormal. Sea

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ortonormal y sea

$$Q := A_E(T).$$

Las columnas de Q son

$$[T(e_1)]_E, \qquad [T(e_2)]_E, \qquad [T(e_3)]_E.$$

Si T es una isometría, proposición 4.45 implica

$$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Por tanto, las columnas de Q forman una base ortonormal. En coordenadas respecto de E, esto equivale a que los productos escalares entre columnas produzcan la matriz identidad.

Proposición: caracterización matricial. Proposición 4.46 — Matriz ortogonal de una isometría Sea E una base ortonormal y

$$Q = A_E(T).$$

Entonces T es una isometría lineal si y sólo si

$$\boxed{Q^{\mathsf{T}}Q = I_3.}$$

Demostración. Las entradas de

$$Q^{\mathsf{T}}Q$$

son los productos escalares entre las columnas de Q. Como la columna j es $[T(e_j)]_E$,
tenemos

$$(Q^{\mathsf{T}}Q)_{ij} = \langle T(e_i), T(e_j)\rangle.$$

Si T es isometría, proposición 4.45 da $\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \delta_{ij}$,
por lo que

$$Q^{\mathsf{T}}Q = I_3.$$

Recíprocamente, supongamos $Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$. Para cualesquiera $u, v \in V$, escribimos

$$x = [u]_E, \qquad y = [v]_E.$$

Como E es ortonormal, $\langle u, v\rangle = x^{\mathsf{T}} y$.
Además, $[T(u)]_E = Qx, \qquad [T(v)]_E = Qy$.
Entonces

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(v)\rangle &= (Qx)^{\mathsf{T}}(Qy)\\ &= x^{\mathsf{T}} Q^{\mathsf{T}} Q y\\ &= x^{\mathsf{T}} y\\ &= \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

Por proposición 4.45, T es una isometría. □ Una matriz que satisface $Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$
se denomina **matriz ortogonal**.

Consecuencias algebraicas de la ortogonalidad. De

$$Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$$

se sigue que Q^{T} es una inversa por la izquierda. Tomando determinantes, $\det(Q^{\mathsf{T}}Q) = \det I_3 = 1$.
Por proposición 4.26 y por $\det(Q^{\mathsf{T}}) = \det Q$,
obtenemos $(\det Q)^2 = 1$. Por tanto,

$$\boxed{\det Q = \pm 1.}$$

En particular, $\det Q \neq 0$,
de modo que Q es invertible. Así,

$$\boxed{Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}.}$$

Toda isometría lineal es, por tanto, biyectiva. El signo de $\det Q$ permitirá distinguir, más adelante en esta sección, las isometrías que conservan orientación de aquellas que la invierten.

No confundir matriz ortogonal con base ortonormal. Una **base ortonormal** es una terna ordenada de vectores

$$(e_1, e_2, e_3)$$

que satisface $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Una **matriz ortogonal** es una matriz cuadrada

$$Q$$

que satisface $Q^{\mathsf{T}}Q = I$.
La relación es la siguiente:

> las columnas de una matriz ortogonal, interpretadas en una base ortonormal de referencia, forman otra base ortonormal.

Pero los dos objetos no son del mismo tipo.

Cambio pasivo frente a isometría activa. En §10 vimos que una matriz ortogonal también puede aparecer como matriz de cambio entre dos bases ortonormales. Eso no convierte automáticamente el cambio de base en una transformación activa. Si

$$S_{E\leftarrow E'}$$

relaciona dos bases ortonormales, entonces $S^{\mathsf{T}}S = I$. En el problema **pasivo**, $[v]_{E'} = S^{-1}[v]_E = S^{\mathsf{T}}[v]_E$,

mientras el vector v permanece fijo. En un problema **activo**, una isometría T con matriz

$$Q = A_E(T)$$

transforma el vector: $[T(v)]_E = Q[v]_E$.

Aunque S y Q puedan ser numéricamente iguales, describen problemas conceptualmente distintos.

Principio metodológico 4.19 — Distinguir ortogonalidad matricial de la naturaleza del proceso La condición

$$M^{\mathsf{T}}M = I$$

informa que una matriz preserva el producto escalar en coordenadas ortonormales. No indica por sí sola si la matriz se está usando:

- como cambio pasivo entre bases ortonormales;
- o como representación activa de una isometría lineal.

Declarar siempre qué objeto permanece fijo y qué objeto se transforma.

Balance: de la ortogonalidad matricial a la orientación. Ya tenemos la caracterización esencial:

$$\boxed{T \text{ isometría lineal} \iff \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle}$$

y, en una base ortonormal,

$$\boxed{T \text{ isometría lineal} \iff Q^{\mathsf{T}}Q = I.}$$

Además,

$$\boxed{Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}, \qquad \det Q = \pm 1.}$$

Todavía falta interpretar geométricamente las dos posibilidades del determinante:

- $\det Q = +1$: isometrías que conservan orientación;
- $\det Q = -1$: isometrías que invierten orientación.

Definir: isometrías propias e impropias. Definición 4.33 — Isometría propia e impropia Sea T una isometría lineal y sea

$$Q = A_E(T)$$

su matriz en una base ortonormal E.

Diremos que T es **propia** si

$$\boxed{\det Q = +1,}$$

y **impropia** si

$$\boxed{\det Q = -1.}$$

Proposición 4.44 garantiza que el determinante de la matriz de un operador no depende de la base. Por tanto, esta definición es intrínseca.

Proposición: el signo del determinante controla la orientación. Proposición 4.47 — Orientación bajo una isometría Sea

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ortonormal positivamente orientada y sea T una isometría lineal con matriz $Q = A_E(T)$. Entonces:

$$\boxed{\det Q = +1 \iff (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) \text{ tiene orientación positiva,}}$$

mientras

$$\boxed{\det Q = -1 \iff (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) \text{ tiene orientación negativa.}}$$

Demostración. Las columnas de Q son precisamente

$$[T(e_1)]_E, \qquad [T(e_2)]_E, \qquad [T(e_3)]_E.$$

Por definición 4.26, el signo de

$$\det Q$$

es exactamente la orientación relativa de la base imagen respecto de E. □ Así, una isometría propia conserva orientación y una impropia la invierte.

Definir: reflexión ortogonal respecto de un plano. Sea n un vector unitario: $\|n\| = 1$. El plano vectorial perpendicular a n es $n^\perp = \{v \in V : \langle v, n\rangle = 0\}$.

Definición 4.34 — Reflexión ortogonal respecto del plano perpendicular a n Definimos

$$\boxed{H_n(v) := v - 2\langle v, n\rangle n.}$$

Por proposición 4.16, todo vector se descompone de manera única como $v = v_\perp + v_\parallel$,
donde

$$v_\parallel = \langle v, n\rangle n$$

y

$$v_\perp \perp n.$$

Entonces $H_n(v) = v_\perp - v_\parallel$. La reflexión conserva la componente contenida en el plano $n^\perp$ e invierte la componente normal.

Proposición: la reflexión es una isometría impropia. Proposición 4.48 — Propiedades de la reflexión ortogonal Para todo vector unitario n, la aplicación H_n satisface:

1. es lineal;
2. es una isometría;
3. fija todo vector de $n^\perp$;
4. envía
$$n \longmapsto -n;$$
5. satisface
$$H_n^2 = I;$$
6. es impropia:
$$\boxed{\det H_n = -1.}$$

Demostración. La linealidad se sigue directamente de la bilinealidad del producto escalar. Si

$$v = v_\perp + \alpha n,$$

con $v_\perp \perp n$, entonces $H_n(v) = v_\perp - \alpha n$. Por Pitágoras, $\|H_n(v)\|^2 = \|v_\perp\|^2 + \alpha^2 = \|v\|^2$. Por definición 4.32, H_n es una isometría. Si $v \in n^\perp$, entonces $\langle v, n\rangle = 0$,

y por tanto

$$H_n(v) = v.$$

Además, $H_n(n) = n - 2n = -n$.

Aplicar dos veces la misma regla devuelve cada componente a su signo inicial, de modo que

$$H_n^2 = I.$$

Para el determinante, elegimos una base ortonormal positiva adaptada

$$E = (e_1, e_2, n),$$

con $e_1, e_2 \in n^\perp$. Entonces

$$A_E(H_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\det H_n = -1$.

□

La reflexión conserva todas las longitudes y ángulos, pero invierte la orientación.

Construir una base ortonormal adaptada a un eje. Sea ahora n unitario. Elegimos un vector

$$a \notin \operatorname{span}(n).$$

Su residuo perpendicular a n es $r = a - \langle a, n\rangle n$.

Como a no es paralelo a n, $r \neq 0$.

Definimos $e_1 := \frac{r}{\|r\|}$.

Entonces $e_1 \perp n, \qquad \|e_1\| = 1.$

Definimos después

$$e_2 := n \times e_1.$$

Como n y e_1 son unitarios y ortogonales, proposición 4.37 da $\|e_2\| = 1$.
Además, §9 implica $e_2 \perp n, \qquad e_2 \perp e_1$.
Finalmente, proposición 4.38 muestra que

$$(n, e_1, e_2)$$

tiene orientación positiva. La permutación cíclica

$$(e_1, e_2, n)$$

también es positiva. Así obtenemos una base ortonormal positiva adaptada al eje n.

Definir: rotación axial. Definición 4.35 — Rotación alrededor de un eje Sea n unitario y sea $\varphi \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\boxed{R_{n,\varphi}(v) := \cos\varphi\, v + (1 - \cos\varphi)\langle n, v\rangle n + \sin\varphi\,(n \times v).}$$

Esta fórmula es intrínseca: utiliza únicamente el producto escalar, el producto vectorial y el eje unitario n. Si

$$v = \alpha n + w, \qquad w \perp n,$$

entonces

$$R_{n,\varphi}(v) = \alpha n + \cos\varphi\, w + \sin\varphi\,(n \times w).$$

Por tanto, la componente axial queda fija y la componente perpendicular rota dentro del plano $n^\perp$.

Proposición: matriz y propiedades de una rotación axial. Proposición 4.49 — Rotación axial como isometría propia Sea

$$E = (e_1, e_2, n)$$

una base ortonormal positivamente orientada adaptada al eje n. Entonces

$$\boxed{A_E(R_{n,\varphi}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

En particular:
1. $R_{n,\varphi}$ es una isometría lineal;
2. fija el eje:
$$R_{n,\varphi}(n) = n;$$
3. es propia:
$$\boxed{\det R_{n,\varphi} = +1.}$$

Demostración. Por bilinealidad del producto escalar y proposición 4.34, las aplicaciones

$$v \longmapsto v, \qquad v \longmapsto \langle n, v\rangle n, \qquad v \longmapsto n \times v$$

son lineales. Por tanto, definición 4.35 define una transformación lineal

$$R_{n,\varphi} : V \longrightarrow V,$$

y definición 4.31 permite formar su matriz $A_E(R_{n,\varphi})$. Como la base es positiva, $n \times e_1 = e_2$, y por antisimetría, $n \times e_2 = -e_1$.
Además, $n \times n = 0$. Por definición 4.35,

$$R_{n,\varphi}(e_1) = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2,$$

$$R_{n,\varphi}(e_2) = -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2,$$

y

$$R_{n,\varphi}(n) = n.$$

Estas tres columnas producen la matriz indicada. Un cálculo directo da

$$A_E(R_{n,\varphi})^{\mathsf{T}} A_E(R_{n,\varphi}) = I_3,$$

usando

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Por proposición 4.46, la transformación es una isometría. Finalmente,

$$\det A_E(R_{n,\varphi}) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Por proposición 4.44, este determinante es independiente de la base elegida. □[5]

Rotación y reflexión no se distinguen por conservar distancias. Tanto una rotación axial como una reflexión ortogonal satisfacen

$$\|T(v)\| = \|v\|.$$

Por tanto, ambas conservan:
- longitudes;
- productos escalares;
- ángulos;
- ortogonalidad;
- distancias.

[5]G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7.ª ed., Academic Press, 2013, cap. 3, §3.4 «Rotations in $\mathbb{R}^3$», pp. 139–142.

La diferencia aparece en la orientación:

$$\boxed{\det R_{n,\varphi} = +1,}$$

mientras

$$\boxed{\det H_n = -1.}$$

Así, "preservar geometría métrica" no implica "preservar orientación".

Principio metodológico: qué informa el determinante. Principio metodológico 4.20 — Usar el determinante para orientación, no para identificar toda la isometría Para una matriz ortogonal Q:

$$\det Q = +1$$

indica que la isometría conserva orientación, mientras

$$\det Q = -1$$

indica que la invierte. El signo del determinante no determina por sí solo el ángulo, el eje o el plano geométrico concreto de la isometría. No toda la información de una isometría está contenida en un único escalar.

Balance: rotaciones y reflexiones. Ya tenemos dos prototipos fundamentales: **Reflexión ortogonal**

$$\boxed{H_n(v) = v - 2\langle v, n\rangle n, \qquad \det H_n = -1,}$$

y **rotación axial**

$$\boxed{R_{n,\varphi}(v) = \cos\varphi\, v + (1-\cos\varphi)\langle n, v\rangle n + \sin\varphi(n \times v), \qquad \det R_{n,\varphi} = +1.}$$

Ambas son isometrías activas, no meros cambios pasivos de base. Todavía falta completar la estructura algebraica mediante composición e inversa de isometrías y aplicar después estas distinciones en ejercicios.

Proposición: composición e inversa de isometrías. Proposición 4.50 — Composición, inversa y signo Sean T_1 y T_2 isometrías lineales. Entonces:

1. la composición

$$T_2 \circ T_1$$

es una isometría lineal;

2. cada T_i es invertible y

$$T_i^{-1}$$

es también una isometría lineal;

3. los signos de orientación se multiplican:

$$\boxed{\det(T_2 \circ T_1) = \det(T_2)\det(T_1).}$$

Demostración. Elegimos una base ortonormal E y escribimos

$$Q_1 = A_E(T_1), \qquad Q_2 = A_E(T_2).$$

Por proposición 4.46,

$$Q_1^{\mathsf{T}} Q_1 = I, \qquad Q_2^{\mathsf{T}} Q_2 = I.$$

La matriz de la composición es $A_E(T_2 \circ T_1) = Q_2 Q_1$.
Entonces

$$\begin{aligned}(Q_2Q_1)^{\mathsf{T}}(Q_2Q_1) &= Q_1^{\mathsf{T}} Q_2^{\mathsf{T}} Q_2 Q_1 \\ &= Q_1^{\mathsf{T}} I Q_1 \\ &= I.\end{aligned}$$

Por proposición 4.46, la composición es una isometría. Además, $Q_i^{-1} = Q_i^{\mathsf{T}}$,
y

$$(Q_i^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} Q_i^{\mathsf{T}} = Q_i Q_i^{\mathsf{T}} = I,$$

de modo que la inversa también es ortogonal y representa una isometría. Finalmente, proposición 4.26 da $\det(Q_2Q_1) = \det(Q_2)\det(Q_1)$.

Por proposición 4.44, este signo no depende de la base elegida. □ La proposición permite leer inmediatamente:

- propia seguida de propia ⇒ propia;
- impropia seguida de impropia ⇒ propia;
- propia seguida de impropia, o viceversa, ⇒ impropia.

Comparación estructural: rotación frente a reflexión. Rotaciones axiales y reflexiones ortogonales comparten toda la estructura métrica:

$$\boxed{\|T(v)\| = \|v\|, \qquad \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle.}$$

Pero difieren en tres rasgos fundamentales.

Orientación. Para una rotación axial, $\det R_{n,\varphi} = +1$. Para una reflexión ortogonal, $\det H_n = -1$.

Conjunto de vectores fijos. Una rotación axial fija la recta

$$\operatorname{span}(n).$$

Una reflexión ortogonal fija el plano

$$n^{\perp}.$$

Acción sobre la dirección normal. La reflexión satisface $H_n(n) = -n$. La rotación satisface $R_{n,\varphi}(n) = n$. Por tanto, conocer sólo que una transformación es una isometría no basta para decidir su tipo geométrico.

Principio metodológico 4.21 — Clasificar una isometría por capas Ante una isometría lineal, comprobar en este orden:

1. ortogonalidad de su matriz;
2. signo del determinante;
3. subespacio de vectores fijos;
4. acción sobre el complemento ortogonal.

No inferir eje, plano o ángulo únicamente a partir de $\det Q$.

Ejercicio 4.22 — Reflexión en un plano.

Función pedagógica: `Fórmula intrínseca → Matriz → Orientación`

Sea

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ortonormal positiva y consideremos la reflexión respecto del plano

$$e_3^{\perp}.$$

1. Calcula la matriz de H_{e_3} en E.
2. Verifica que es ortogonal.
3. Calcula su determinante.
4. Aplica la reflexión a

$$v = 2e_1 - e_2 + 3e_3.$$

5. Verifica directamente que la norma se conserva.

Solución desarrollada

Como

$$H_{e_3}(e_1) = e_1, \qquad H_{e_3}(e_2) = e_2, \qquad H_{e_3}(e_3) = -e_3,$$

tenemos

$$\boxed{A_E(H_{e_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Esta matriz satisface $Q^{\mathsf{T}}Q = I_3$,

y

$$\boxed{\det Q = -1}.$$

Por tanto, la reflexión es una isometría impropia.

Aplicando la fórmula,

$$\boxed{H_{e_3}(v) = 2e_1 - e_2 - 3e_3.}$$

Finalmente, $\|v\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 14$,

y

$$\|H_{e_3}(v)\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2 = 14.$$

La norma se conserva, pero la orientación global se invierte.

Ejercicio 4.23 — Rotación de cuarto de vuelta.

Función pedagógica: `Rotación axial → Matriz → Invariantes`

Sea

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

una base ortonormal positiva. Considera la rotación alrededor del eje e_3 con ángulo

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

1. Calcula su matriz en E.
2. Verifica que es ortogonal.
3. Calcula su determinante.
4. Aplica la rotación a

$$v = 2e_1 + e_2 + 3e_3.$$

5. Comprueba que la norma se conserva.
6. Determina el resultado de aplicar cuatro veces la rotación.

Solución desarrollada

Como $\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$

Proposición 4.49 da

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Un cálculo directo muestra

$$Q^{\mathsf{T}}Q = I_3.$$

Además,

$$\boxed{\det Q = +1}.$$

La isometría es propia.

Aplicando Q a

$$[v]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$[R_{e_3,\pi/2}(v)]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{R_{e_3,\pi/2}(v) = -e_1 + 2e_2 + 3e_3.}$$

Las normas satisfacen

$$\|v\|^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14,$$

y

$$\|R_{e_3,\pi/2}(v)\|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

Finalmente,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$\boxed{Q^4 = I_3.}$$

Cuatro cuartos de vuelta restauran todo vector.

Cierre de §11. La sección ha construido la noción de **transformación lineal que preserva la geometría**:

$$\boxed{T \text{ isometría} \iff \|T(v)\| = \|v\|}$$

y, equivalentemente,

$$\boxed{\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle.}$$

En una base ortonormal,

$$\boxed{Q^{\mathsf{T}}Q = I, \qquad Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}, \qquad \det Q = \pm 1.}$$

El signo del determinante separa las dos clases:

$$\boxed{\det Q = +1 \Longrightarrow \text{isometría propia,}}$$

$$\boxed{\det Q = -1 \Longrightarrow \text{isometría impropia.}}$$

Los prototipos construidos son:

$$\boxed{R_{n,\varphi} \quad \text{rotación axial, propia,}}$$

y

$$\boxed{H_n \quad \text{reflexión ortogonal, impropia.}}$$

La composición de isometrías vuelve a ser una isometría y los signos de orientación se multiplican. La siguiente sección volverá del espacio vectorial al espacio afín: estudiaremos simultáneamente cambios de origen y de base en un marco geométrico completo. El siguiente paso será el §12.

12. Cambios de origen y de marco geométrico

Activación: ahora cambian dos datos a la vez. Hasta aquí hemos estudiado por separado dos operaciones:

1. cambiar el **origen** manteniendo fija la base;
2. cambiar la **base** manteniendo fijo el vector geométrico.

Un marco afín completo contiene ambos datos: $F = (O, B)$. Por tanto, al pasar a otro marco

$$F' = (O', B'),$$

pueden cambiar simultáneamente:

- el punto elegido como origen;
- la base usada para describir los desplazamientos.

La pregunta central es:

Cambio completo de marco Dado un punto P, ¿cómo se transforma su columna de coordenadas cuando pasamos de

$$F = (O, B)$$

a

$$F' = (O', B')?$$

La respuesta combinará exactamente las leyes de §§4 y 10.

Definir: datos de un cambio de marco afín. Definición 4.36 — Cambio entre dos marcos afines Sean

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B')$$

dos marcos afines.

Definimos:

$$\boxed{a := \overrightarrow{OO'}}$$

y

$$\boxed{S := S_{B \leftarrow B'}.}$$

Es decir:

- a es el desplazamiento desde el origen antiguo al nuevo;
- las columnas de S son los vectores de la base nueva B' expresados en la base antigua B.

Usaremos

$$[a]_B$$

para la columna del desplazamiento del origen nuevo respecto del antiguo. La convención de signo queda fijada por

$$\boxed{O' = O + a.}$$

Derivación geométrica antes de escribir matrices. Para cualquier punto P,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Como $\overrightarrow{OO'} = a$,
obtenemos

$$\boxed{\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - a.}$$

Esta identidad es puramente afín y no depende de coordenadas. Ahora expresamos ambos lados en la base antigua B:

$$[\overrightarrow{O'P}]_B = [\overrightarrow{OP}]_B - [a]_B.$$

Pero la columna que buscamos en el marco nuevo utiliza la base B': $x_{F'}(P) = [\overrightarrow{O'P}]_{B'}$. Por proposición 4.39,

$$[\overrightarrow{O'P}]_{B'} = S^{-1}[\overrightarrow{O'P}]_B.$$

Sustituir la relación anterior produce la ley completa.

Proposición: ley afín de cambio de marco. Proposición 4.51 — Transformación de las coordenadas de un punto Sean

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B'),$$

con

$$a = \overrightarrow{OO'}, \qquad S = S_{B \leftarrow B'}.$$

Entonces, para todo punto P,

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).}$$

Demostración. Por definición 4.12,

$$x_F(P) = [\overrightarrow{OP}]_B,$$

y

$$x_{F'}(P) = [\overrightarrow{O'P}]_{B'}.$$

La ley del triángulo da $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - a$.
Tomando componentes en B, $[\overrightarrow{O'P}]_B = x_F(P) - [a]_B$.
Finalmente, proposición 4.39 transforma componentes desde B hacia B':

$$[\overrightarrow{O'P}]_{B'} = S^{-1}[\overrightarrow{O'P}]_B.$$

Por tanto, $x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right)$.
□
Ésta será la convención canónica para todos los cambios de marco del capítulo.

Por qué la transformación de puntos es afín, no lineal. Definamos la aplicación sobre columnas

$$\Phi_{F'\leftarrow F}(x) := S^{-1}(x - [a]_B).$$

Puede escribirse como

$$\boxed{\Phi_{F'\leftarrow F}(x) = S^{-1}x - S^{-1}[a]_B.}$$

El primer término es lineal en x. El segundo es una traslación constante. Por tanto, si

$$a \neq 0,$$

la transformación de coordenadas de puntos no es lineal: $\Phi_{F'\leftarrow F}(0) = -S^{-1}[a]_B \neq 0$. Es una transformación **afín**. Sólo cuando los dos marcos comparten el mismo origen, $a = 0$,

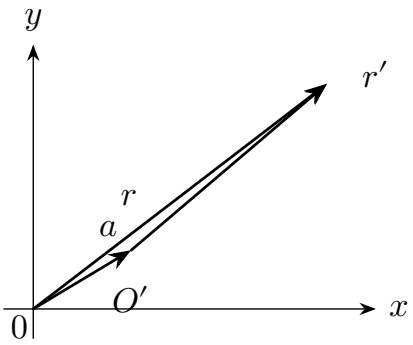


Figura 4.8. Para orígenes separados por $a = \overrightarrow{OO'}$ y bases iguales, los vectores de posición cumplen $r = a + r'$. El punto físico y las diferencias entre puntos permanecen iguales. Véase §12.

la ley se reduce al cambio lineal de base: $x_{F'}(P) = S^{-1}x_F(P)$.

Proposición: los desplazamientos no sienten el cambio de origen. Proposición 4.52 — Transformación de un desplazamiento entre marcos Para cualesquiera puntos P, Q,

$$\boxed{[\overrightarrow{PQ}]_{B'} = S^{-1}[\overrightarrow{PQ}]_B.}$$

El término de traslación asociado al cambio de origen se cancela.

Demostración. Por proposición 4.9,

$$[\overrightarrow{PQ}]_B = x_F(Q) - x_F(P),$$

y

$$[\overrightarrow{PQ}]_{B'} = x_{F'}(Q) - x_{F'}(P).$$

Aplicamos proposición 4.51:

$$x_{F'}(Q) = S^{-1}\left(x_F(Q) - [a]_B\right),$$

$$x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).$$

Restando,

$$\begin{aligned} x_{F'}(Q) - x_{F'}(P) &= S^{-1}\left(x_F(Q) - [a]_B\right) \\ &\quad - S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right) \\ &= S^{-1}\left(x_F(Q) - x_F(P)\right). \end{aligned}$$

Luego

$$[\overrightarrow{PQ}]_{B'} = S^{-1}[\overrightarrow{PQ}]_B.$$

□

La traslación afecta las coordenadas absolutas de los puntos, pero no el desplazamiento entre ellos.

Punto y vector obedecen leyes distintas. Para un **punto**:

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).}$$

Para un **vector** $v \in V$:

$$\boxed{[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B.}$$

La diferencia es exactamente el término

$$-S^{-1}[a]_B.$$

Ese término sólo aparece porque un punto no pertenece al espacio vectorial de desplazamientos. Esta es una de las razones fundamentales por las que §1 insistió en que

$$\boxed{\text{un punto no es un vector.}}$$

Dos casos límite recuperan resultados anteriores.

Sólo cambia el origen. Si

$$B' = B,$$

entonces $S = I$,

y proposición 4.51 se reduce a

$$\boxed{x_{F'}(P) = x_F(P) - [a]_B,}$$

que es exactamente proposición 4.10.

Sólo cambia la base. Si

$$O' = O,$$

entonces $a = 0$,

y proposición 4.51 se reduce a

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}x_F(P).}$$

Es la misma ley lineal que proposición 4.39 aplicada al vector de posición relativo al origen común. Así, proposición 4.51 contiene como casos particulares los dos cambios estudiados anteriormente.

Ejemplo diagnóstico de signo. Sea

$$B = (e_1, e_2, e_3),$$

y supongamos que el nuevo origen satisface $O' = O + 2e_1$.
Entonces

$$[a]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tomemos primero la misma base: $B' = B$. Para un punto con

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Proposición 4.51 da

$$x_{F'}(P) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El signo negativo es geométricamente inevitable: al mover el origen **hacia** el punto en la dirección $+e_1$, la primera coordenada del punto disminuye. Este control geométrico del signo debe hacerse antes de memorizar la fórmula.

Principio metodológico. Principio metodológico 4.22 — Separar la parte traslacional de la parte lineal En un cambio completo de marco

$$F = (O, B) \longrightarrow F' = (O', B'),$$

identificar por separado:

1. el desplazamiento del origen
$$a = \overrightarrow{OO'};$$
2. la matriz de cambio de base
$$S_{B \leftarrow B'}.$$

Las coordenadas de puntos transforman afínmente, $x_{F'} = S^{-1}(x_F - [a]_B)$,
mientras las componentes de vectores transforman linealmente, $[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B$.

Balance: ley afín y separación punto–vector. Queda establecida la ley conjunta:

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).}$$

Su estructura contiene dos capas:

$$\boxed{\text{traslación del origen} + \text{cambio lineal de base.}}$$

Y la diferencia entre puntos elimina automáticamente la parte traslacional:

$$\boxed{[\overrightarrow{PQ}]_{B'} = S^{-1}[\overrightarrow{PQ}]_B.}$$

Todavía falta estudiar cómo se componen dos cambios completos de marco, cómo se invierte uno de ellos y cómo conviene empaquetarlos algebraicamente sin borrar la distinción entre puntos y vectores.

Tres marcos y dos cambios sucesivos. Consideremos tres marcos afines:

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B'), \qquad F'' = (O'', B'').$$

Para el primer cambio definimos

$$a := \overrightarrow{OO'}, \qquad S := S_{B \leftarrow B'}.$$

Para el segundo cambio definimos

$$b := \overrightarrow{O'O''}, \qquad R := S_{B' \leftarrow B''}.$$

Por proposición 4.51, $x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right)$,
y después

$$x_{F''}(P) = R^{-1}\left(x_{F'}(P) - [b]_{B'}\right).$$

El objetivo es comparar esta ruta en dos etapas con el cambio directo

$$F \longrightarrow F''.$$

El desplazamiento total de los orígenes. La ley del triángulo afín da

$$\overrightarrow{OO''} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O''}.$$

Definimos $c := \overrightarrow{OO''}$.
Entonces

$$\boxed{c = a + b.}$$

Como a está expresado naturalmente en B y b puede venir expresado en B', para sumar sus columnas debemos convertir primero: $[b]_B = S[b]_{B'}$. Por tanto,

$$\boxed{[c]_B = [a]_B + S[b]_{B'}.}$$

La suma geométrica de vectores es intrínseca; la suma de columnas sólo es legítima cuando ambas columnas están expresadas en la misma base.

Proposición: composición de cambios completos de marco. Proposición 4.53 — Composición de cambios de marco afín Con las definiciones anteriores,

$$S_{B \leftarrow B''} = SR$$

y

$$\boxed{x_{F''}(P) = (SR)^{-1}\left(x_F(P) - [c]_B\right),}$$

donde

$$[c]_B = [a]_B + S[b]_{B'}.$$

Demostración. Sustituimos la primera transformación en la segunda:

$$x_{F''}(P) = R^{-1}\left[S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right) - [b]_{B'}\right].$$

Distribuimos:

$$x_{F''}(P) = R^{-1}S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right) - R^{-1}[b]_{B'}.$$

Como $R^{-1}S^{-1} = (SR)^{-1}$,
podemos escribir el segundo término como $R^{-1}[b]_{B'} = (SR)^{-1}S[b]_{B'}$. Por tanto,

$$x_{F''}(P) = (SR)^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B - S[b]_{B'}\right).$$

Por §12.13, $[a]_B + S[b]_{B'} = [c]_B$.
Luego

$$x_{F''}(P) = (SR)^{-1}\left(x_F(P) - [c]_B\right).$$

Finalmente, proposición 4.41 da

$$S_{B\leftarrow B''} = S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow B''} = SR.$$

□

La forma de la ley se conserva bajo composición: un cambio de marco seguido de otro sigue siendo un cambio afín del mismo tipo.

Definir: representación afín coordenada. Definición 4.37 — Par afín asociado a un cambio de marco Para

$$F = (O, B) \longrightarrow F' = (O', B'),$$

definimos $L := S^{-1}$,
y

$$t := -S^{-1}[a]_B.$$

Entonces la transformación de coordenadas de puntos adopta la forma

$$\boxed{\Phi_{F'\leftarrow F}(x) = Lx + t.}$$

El par

$$(L, t)$$

separa explícitamente:

- la parte lineal L;
- la parte traslacional t.

Esta notación no convierte los puntos en vectores: sólo representa la aplicación entre sus columnas de coordenadas.

Proposición: ley algebraica de composición de pares afines. Proposición 4.54 — Composición de pares afines Sean

$$\Phi_1(x) = L_1 x + t_1$$

y

$$\Phi_2(x) = L_2 x + t_2.$$

Entonces

$$\boxed{(\Phi_2 \circ \Phi_1)(x) = (L_2 L_1)x + (L_2 t_1 + t_2).}$$

Por tanto, la composición de los pares es

$$\boxed{(L_2, t_2) \circ (L_1, t_1) = (L_2 L_1,\ L_2 t_1 + t_2).}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(\Phi_2 \circ \Phi_1)(x) &= \Phi_2(L_1 x + t_1) \\ &= L_2(L_1 x + t_1) + t_2 \\ &= L_2 L_1 x + L_2 t_1 + t_2.\end{aligned}$$

□

Obsérvese que las traslaciones no se suman sin más: la primera debe ser transportada por la parte lineal del segundo cambio antes de combinarse.

Proposición: cambio inverso de marco. Proposición 4.55 — Inversa de un cambio de marco afín Si

$$\Phi(x) = Lx + t$$

con L invertible, entonces

$$\boxed{\Phi^{-1}(x') = L^{-1}x' - L^{-1}t.}$$

En términos de pares,

$$\boxed{(L, t)^{-1} = \left(L^{-1}, -L^{-1}t\right).}$$

Demostración. De

$$x' = Lx + t$$

obtenemos $x' - t = Lx$.
Multiplicando por L^{-1}, $x = L^{-1}(x' - t) = L^{-1}x' - L^{-1}t$.
□
Para el cambio de marco de la definición 4.36, $L = S^{-1}$, $\qquad t = -S^{-1}[a]_B$.
Así, $L^{-1} = S$,
y

$$-L^{-1}t = -S\left(-S^{-1}[a]_B\right) = [a]_B.$$

Por tanto, la transformación inversa es

$$\boxed{x_F(P) = Sx_{F'}(P) + [a]_B.}$$

Esta fórmula es exactamente la resolución de la proposición 4.51 para $x_F(P)$.

Interpretación geométrica del cambio inverso. Desde el marco nuevo hacia el antiguo, el desplazamiento del origen es $\overrightarrow{O'O} = -a$. Su columna en la base nueva es $[-a]_{B'} = -S^{-1}[a]_B$. Además, $S_{B' \leftarrow B} = S^{-1}$. Aplicando proposición 4.51 en sentido inverso,

$$x_F(P) = \left(S^{-1}\right)^{-1} \left(x_{F'}(P) - [-a]_{B'}\right).$$

Por tanto,

$$x_F(P) = S\left(x_{F'}(P) + S^{-1}[a]_B\right) = Sx_{F'}(P) + [a]_B.$$

La fórmula algebraica de la proposición 4.55 coincide exactamente con la geometría del cambio de origen invertido.

Ejemplo de consistencia por dos caminos. Tomemos

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$[a]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [b]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S[b]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$[c]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea un punto con

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ruta en dos etapas. Primero,

$$x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Después,

$$x_{F''}(P) = R^{-1}\left(x_{F'}(P) - [b]_{B'}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ruta directa. Proposición 4.53 da

$$x_{F''}(P) = (SR)^{-1}\left(x_F(P) - [c]_B\right),$$

y el resultado es nuevamente

$$\boxed{x_{F''}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.}$$

La coincidencia no es accidental: es la condición de consistencia del cambio de marcos.

Principio metodológico de tipado. Principio metodológico 4.23 — No sumar columnas escritas en bases distintas Los vectores

$$a \qquad \text{y} \qquad b$$

pueden sumarse intrínsecamente en V. Sus columnas, en cambio, sólo pueden sumarse después de expresarlas en una base común: $[c]_B = [a]_B + S[b]_{B'}$. La notación de bases funciona como un control de tipos: una suma de columnas con etiquetas incompatibles carece de interpretación geométrica hasta efectuar la conversión correspondiente.

Este principio evita uno de los errores más frecuentes al componer traslaciones y cambios de base.

Balance: composición, inversa y tipado. Los cambios completos de marco quedan ahora cerrados algebraicamente bajo composición:

$$\boxed{(L_2, t_2) \circ (L_1, t_1) = (L_2 L_1,\ L_2 t_1 + t_2),}$$

y admiten inversa:

$$\boxed{(L, t)^{-1} = (L^{-1}, -L^{-1} t).}$$

En la notación geométrica de marcos,

$$\boxed{S_{B \leftarrow B''} = S_{B \leftarrow B'} S_{B' \leftarrow B''},}$$

y

$$\boxed{[\overrightarrow{OO''}]_B = [\overrightarrow{OO'}]_B + S_{B\leftarrow B'}[\overrightarrow{O'O''}]_{B'}.}$$

La estructura afín conserva así dos capas inseparables pero distintas:

$$\boxed{\text{parte lineal} + \text{parte traslacional.}}$$

Todavía falta ejercitar estas leyes y preparar la transición desde un marco geométrico puramente matemático hacia la noción física de marco de referencia.

Proposición: marcos ortonormales y conservación de distancias. Proposición 4.56 — Invariancia métrica entre marcos ortonormales Sean

$$F = (O, E), \qquad F' = (O', E')$$

dos marcos cuyas bases E y E' son ortonormales.

Entonces, para cualesquiera puntos P, Q,

$$\boxed{\|x_{F'}(Q) - x_{F'}(P)\| = \|x_F(Q) - x_F(P)\|.}$$

Demostración. Por proposición 4.52,

$$x_{F'}(Q) - x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(Q) - x_F(P)\right),$$

donde

$$S = S_{E\leftarrow E'}.$$

Las columnas de

$$S = S_{E\leftarrow E'}$$

son $[e'_1]_E, \qquad [e'_2]_E, \qquad [e'_3]_E$.

Como E y E' son ortonormales, el producto escalar entre las columnas i y j es $\langle e'_i, e'_j\rangle = \delta_{ij}$. Por tanto, $S^{\mathsf{T}}S = I$. Así, $S^{-1} = S^{\mathsf{T}}$

y la matriz S^{-1} conserva la norma euclídea de las columnas. Por tanto,

$$\|x_{F'}(Q) - x_{F'}(P)\| = \|x_F(Q) - x_F(P)\|.$$

□

El cambio de origen modifica las coordenadas individuales de P y Q, pero desaparece al formar su diferencia. El cambio ortogonal de base, por su parte, conserva la norma de esa diferencia.

Cambio de descripción no significa movimiento del punto. En toda esta sección hemos considerado un mismo punto geométrico P descrito desde marcos distintos:

$$P \longmapsto x_F(P), \qquad P \longmapsto x_{F'}(P).$$

La relación $x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right)$

no mueve a P. Cambia únicamente su **descripción coordenada**. Esto debe distinguirse de una transformación afín activa

$$P \longmapsto A(P),$$

en la que el punto geométrico sí cambia.

Principio metodológico 4.24 — Separar cambio de marco de movimiento geométrico Una fórmula afín de la forma

$$x' = Lx + t$$

no determina por sí sola si estamos ante:

- dos descripciones del mismo punto en marcos diferentes;
- o una transformación activa que envía un punto a otro.

Antes de interpretar la fórmula, declarar explícitamente qué permanece fijo: el punto o el marco. La distinción es la versión afín del principio activo/pasivo establecido en §10.

Ejercicio 4.24 — Cambio simultáneo de origen y base.

Función pedagógica: `Marco afín → Conversión de punto → Desplazamiento → Invariante métrico`

Sea

$$F = (O, E), \qquad E = (e_1, e_2, e_3)$$

un marco ortonormal positivo.

Definimos otro marco

$$F' = (O', E')$$

mediante $\overrightarrow{OO'} = e_1 - 2e_2 + e_3$

y

$$E' = (e_2, -e_1, e_3).$$

Sean los puntos P, Q con

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x_F(Q) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcula $S_{E \leftarrow E'}$.
2. Calcula $x_{F'}(P)$ y $x_{F'}(Q)$.
3. Calcula $[\overrightarrow{PQ}]_E$ y $[\overrightarrow{PQ}]_{E'}$.
4. Verifica proposición 4.52.
5. Verifica proposición 4.56.

Solución desarrollada

Las columnas de la base nueva escritas en la antigua son

$$[e_1']_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [e_2']_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [e_3']_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como S es ortogonal,

$$S^{-1} = S^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$[a]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para P,

$$x_F(P) - [a]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y

$$\boxed{x_{F'}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.}$$

Para Q,

$$x_F(Q) - [a]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y

$$\boxed{x_{F'}(Q) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

En el marco antiguo,

$$[\overrightarrow{PQ}]_E = x_F(Q) - x_F(P) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

En el nuevo,

$$[\overrightarrow{PQ}]_{E'} = x_{F'}(Q) - x_{F'}(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Y, efectivamente,

$$S^{-1}\begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\|[\overrightarrow{PQ}]_E\|^2=(-2)^2+4^2+(-3)^2=29,$$

mientras

$$\|[\overrightarrow{PQ}]_{E'}\|^2=4^2+2^2+(-3)^2=29.$$

La descripción cambia; la distancia geométrica no.

Ejercicio 4.25 — Composición e inversa de pares afines.

Función pedagógica: `Composición afín → Verificación por dos rutas → Inversa`

Considera dos transformaciones de coordenadas

$$\Phi_1(x)=L_1x+t_1,$$

$$\Phi_2(x)=L_2x+t_2,$$

con

$$L_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad t_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

y

$$L_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad t_2=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

1. Calcula el par afín de $\Phi_2\circ\Phi_1$.
2. Evalúa las dos transformaciones sucesivamente sobre

$$x=\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}.$$

3. Verifica que el cambio compuesto da el mismo resultado.
4. Calcula la inversa del cambio compuesto.
5. Usa esa inversa para recuperar la columna inicial.

Solución desarrollada

La parte lineal compuesta es

$$L=L_2L_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

La parte traslacional es

$$\begin{aligned} t &= L_2 t_1 + t_2 \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{(\Phi_2 \circ \Phi_1)(x) = Lx + t.}$$

Aplicando primero Φ_1,

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Después,

$$\Phi_2(\Phi_1(x)) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

Por la ruta directa,

$$Lx + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Como $L^{-1} = L$,
Proposición 4.55 da $(\Phi_2 \circ \Phi_1)^{-1}(x') = Lx' - Lt$.
Tenemos

$$-Lt = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\boxed{(\Phi_2 \circ \Phi_1)^{-1}(x') = Lx' + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Aplicando esta fórmula a

$$x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$Lx' = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y finalmente

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.}$$

Síntesis geométrica. Un marco afín

$$F = (O, B)$$

contiene dos elecciones conceptualmente distintas:

$$\boxed{\text{un origen } O \quad + \quad \text{una base } B.}$$

Cambiar el origen produce una traslación de las coordenadas de puntos. Cambiar la base produce una transformación lineal de componentes. Cambiar ambas cosas produce una ley afín:

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).}$$

Para los desplazamientos, la parte traslacional desaparece:

$$\boxed{[\overrightarrow{PQ}]_{B'} = S^{-1}[\overrightarrow{PQ}]_B.}$$

Por eso un punto y un vector no pueden obedecer exactamente la misma ley de transformación.

Del marco geométrico al marco físico. Nada de lo desarrollado en §12 introduce todavía:

- un reloj;
- una variable temporal;
- un observador;
- una trayectoria;
- una velocidad;
- una aceleración;
- una hipótesis de inercialidad.

Un marco afín geométrico especifica únicamente **cómo localizar espacialmente puntos y expresar desplazamientos**. La física exige estructura adicional. Esta frontera es decisiva:

$$\boxed{\text{marco geométrico} \neq \text{marco físico de referencia.}}$$

La próxima sección incorporará exactamente esa capa conceptual, sin adelantar todavía la dinámica newtoniana.

Cierre de §12. La sección ha unificado todos los cambios geométricos de descripción construidos desde §1. Para dos marcos

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B'),$$

con

$$a = \overrightarrow{OO'}, \qquad S = S_{B \leftarrow B'},$$

la ley fundamental es

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).}$$

Su forma coordenada equivalente es

$$\boxed{\Phi(x) = Lx + t.}$$

La composición satisface

$$\boxed{(L_2, t_2) \circ (L_1, t_1) = (L_2 L_1,\ L_2 t_1 + t_2),}$$

y la inversa,

$$\boxed{(L, t)^{-1} = (L^{-1}, -L^{-1}t).}$$

La parte traslacional sólo afecta coordenadas de puntos; las diferencias entre puntos y los vectores de desplazamiento transforman linealmente. Los ejercicios 4.24–4.25 aplican estas leyes antes de pasar de la geometría del marco a su realización física. El siguiente paso será el §13.

13. Del sistema de coordenadas al marco físico de referencia

Un sistema de coordenadas no basta. Un marco geométrico

$$F = (O, B)$$

permite asignar a cada punto P una columna

$$x_F(P).$$

Esa construcción responde a una pregunta matemática:

$$\boxed{\text{¿cómo describimos un punto mediante números una vez elegidos origen y base?}}$$

Pero un experimento físico exige algo más. Para localizar de manera reproducible una ocurrencia física necesitamos saber, al menos:

- dónde está materializado el origen;
- cómo se realizan las direcciones de referencia;
- qué patrón convierte longitudes en valores medidos;
- qué procedimiento asigna una lectura temporal.

Por tanto,

$$\boxed{\text{sistema geométrico de coordenadas} \neq \text{marco físico de referencia.}}$$

De una elección matemática a un procedimiento de medición. En geometría podemos elegir formalmente un punto

$$O \in \mathcal{E}$$

y una base

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

sin preguntar cómo se construirían físicamente. En una situación experimental, en cambio, palabras como "origen", "eje x" o "un metro" deben corresponder a procedimientos reproducibles. La referencia física requiere entonces dos capas:

$$\boxed{\text{estructura geométrica} + \text{realización operacional.}}$$

La primera indica qué objetos matemáticos usamos. La segunda indica cómo se vinculan esos objetos con marcas, instrumentos y lecturas físicas.

Definir: marco físico de referencia en sentido mínimo. Definición 4.38 — Marco físico de referencia, nivel operacional mínimo En el nivel de este capítulo, un **marco físico de referencia** es una realización operacional

$$\boxed{\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}),}$$

donde:

1. $F = (O, B)$ es un marco espacial afín;
2. $\mathcal{L}$ es un convenio de **calibración de longitudes**, que fija cómo las longitudes geométricas se expresan mediante una unidad física;
3. $\mathcal{T}$ es un convenio de **lectura temporal**, que asigna una lectura escalar t mediante un reloj o procedimiento equivalente;
4. $\mathcal{O}$ representa la **realización física reproducible** del origen, las direcciones de referencia y los instrumentos asociados.[6]

Esta definición es deliberadamente mínima. No afirma que el marco sea inercial. No afirma que el origen esté en reposo respecto de otro marco. No introduce todavía una ley de movimiento.

El origen y los ejes deben estar físicamente realizables. En un dibujo podemos señalar arbitrariamente un punto como origen. En un laboratorio necesitamos una referencia reproducible que permita reconocer qué ubicación corresponde a

$$O.$$

Del mismo modo, las direcciones de la base

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

deben estar asociadas a direcciones físicamente identificables. Esto no significa que los vectores de base sean objetos materiales. Significa que existe un procedimiento para reproducir las direcciones que esos vectores representan. En un marco cartesiano físico se escogerá típicamente una base ortonormal

[6] D. Kleppner y R. J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, 2.ª ed., Cambridge University Press, 2010, cap. 2, §2.7 «Base Units and Physical Standards», p. 59 y ss.

$$E = (e_1, e_2, e_3),$$

porque entonces las componentes corresponden directamente a proyecciones métricas sobre ejes mutuamente perpendiculares.

El patrón de longitud pertenece al procedimiento físico. La geometría euclídea determina una longitud abstracta

$$\|v\|.$$

Una medición física exige además declarar una unidad. El convenio

$$\mathcal{L}$$

vincula la longitud geométrica con un valor numérico expresado, por ejemplo, en metros, centímetros u otra unidad convenida. Cambiar la unidad no cambia el vector geométrico ni el punto. Sólo cambia el número utilizado para comunicar la misma magnitud física. Por tanto debemos separar:

$$\boxed{\text{cambio de unidad} \neq \text{cambio de origen} \neq \text{cambio de base.}}$$

Estas tres operaciones modifican descripciones numéricas por razones conceptualmente diferentes.

El convenio temporal: una lectura, todavía no una cinemática. Para distinguir mediciones realizadas en ocasiones diferentes necesitamos una etiqueta temporal. En este capítulo representaremos esa lectura simplemente por $t \in \mathbb{R}$.

El símbolo t significa aquí únicamente:

$$\boxed{\text{lectura asignada por el convenio temporal } \mathcal{T}.}$$

No suponemos todavía una trayectoria

$$P(t),$$

ni definimos expresiones como $\frac{dP}{dt}$. Tampoco introducimos velocidad o aceleración. Esas estructuras pertenecen al desarrollo posterior sobre tiempo y movimiento.

Definir: registro físico de localización. Definición 4.39 — Registro de localización en un marco físico Dada una ocurrencia física localizada espacialmente en un punto P y una lectura temporal t, su registro en el marco

$$\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O})$$

es el par

$$\boxed{\mathcal{R}_{\mathfrak{R}}(P,t) := (t,\, x_F(P))\,,}$$

acompañado de las unidades determinadas por $\mathcal{L}$.

Este par es un **registro de medición**. No estamos construyendo todavía un espacio-tiempo ni identificando una ocurrencia física con un vector de dimensión cuatro. La notación sólo conserva juntas dos informaciones:

- una lectura temporal;
- una localización espacial.

Proposición: cambio espacial bajo un convenio temporal común. Proposición 4.57 — Registro de una misma ocurrencia en dos marcos con tiempo común Sean dos marcos físicos

$$\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}), \qquad \mathfrak{R}' = (F', \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}'),$$

que utilizan el mismo convenio temporal y la misma calibración de longitud.
Si

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B'),$$

con

$$a = \overrightarrow{OO'}, \qquad S = S_{B \leftarrow B'},$$

entonces una misma ocurrencia registrada como $(t,\, x_F(P))$
en $\mathfrak{R}$ se registra en $\mathfrak{R}'$ como

$$\boxed{\left(t,\, S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right)\right).}$$

Demostración. Por hipótesis, ambos marcos asignan la misma lectura temporal

$$t.$$

La parte espacial obedece exactamente a proposición 4.51: $x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right)$. Por tanto,

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{R}'}(P, t) = \left(t,\, S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right)\right).$$

□

El resultado no contiene ninguna afirmación sobre movimiento relativo: sólo compara dos procedimientos de descripción espacial que comparten la misma lectura temporal.

Tres niveles que no deben confundirse. Conviene distinguir explícitamente:
Nivel 1 — Geometría.

$$F = (O, B).$$

Es una elección matemática de origen y base.
Nivel 2 — Medición espacial.

$$(F, \mathcal{L}, \mathcal{O}).$$

El origen, los ejes y la unidad de longitud tienen una realización operacional.
Nivel 3 — Marco físico mínimo.

$$\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}).$$

Además de localizar espacialmente, el procedimiento asigna una lectura temporal. Cada nivel añade estructura. No es correcto atribuir al nivel anterior propiedades que sólo aparecen después.

No-ejemplos. Un dibujo con ejes no constituye por sí solo un marco físico Dibujar tres ejes y escribir coordenadas produce una representación geométrica, pero no especifica cómo se materializan el origen, las direcciones, la unidad ni la lectura temporal.

Elegir metros no convierte un sistema de coordenadas en un marco físico completo Una unidad de longitud aporta calibración espacial, pero todavía falta un procedimiento temporal y una realización física de las referencias.

Un marco físico no es automáticamente un marco inercial La inercialidad es una propiedad ligada a las leyes de la dinámica. No puede deducirse de la ortogonalidad de los ejes, de la elección del origen ni de la existencia de un reloj.[7]

Este último error es especialmente importante:

$$\boxed{\text{sistema cartesiano} \not\Rightarrow \text{marco inercial.}}$$

Principio metodológico. Principio metodológico 4.25 — Declarar la realización física antes de interpretar coordenadas Cuando una terna de coordenadas se use en física, identificar explícitamente:

1. qué punto realiza el origen;
2. qué direcciones realizan los ejes;
3. qué unidad calibra las longitudes;
4. qué procedimiento asigna la lectura temporal.

Sólo después interpretar una columna como resultado de una localización física. La matemática de coordenadas no sustituye la especificación del procedimiento de medición.

Balance: del marco geométrico a la realización operacional. Queda establecida la diferencia fundamental:

$$\boxed{F = (O, B)}$$

es un marco geométrico, mientras

$$\boxed{\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O})}$$

añade la estructura operacional necesaria para hablar de una referencia física. El registro mínimo de una localización es

$$\boxed{\mathcal{R}_{\mathfrak{R}}(P, t) = (t,\, x_F(P))\,.}$$

Si dos marcos comparten calibración y convenio temporal, la lectura t permanece igual y sólo cambia la descripción espacial según la ley afín de §12. Todavía falta precisar qué significa comparar observaciones realizadas desde marcos físicos distintos y por qué ninguna de estas estructuras permite decidir, por sí sola, si un marco es inercial.

[7] D. Kleppner y R. J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, 2.ª ed., Cambridge University Press, 2010, cap. 2, §2.4 «Newton's First Law and Inertial Systems», p. 51 y ss.; véase también el ejemplo 2.1 del mismo capítulo.

Definir: observador asociado a un marco. Definición 4.40 — Observador asociado a un marco físico En el nivel de este capítulo, un **observador asociado a**

$$\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O})$$

es el sistema operacional capaz de aplicar de manera reproducible los convenios de $\mathfrak{R}$ y producir registros

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{R}}(P, t).$$

La palabra "observador" no designa necesariamente una persona. Puede representar un conjunto de instrumentos, marcas, reglas de calibración y procedimientos de lectura. Tampoco identificaremos al observador con el origen O. El origen es un elemento geométrico del marco espacial; el observador es quien —o aquello que— realiza el procedimiento completo de referencia.

Una misma ocurrencia puede tener registros numéricos distintos. Supongamos que dos observadores usan marcos

$$\mathfrak{R}$$

y

$$\mathfrak{R}'$$

que comparten el convenio temporal y la calibración de longitud. La misma ocurrencia física localizada en P con lectura t puede producir:

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{R}}(P, t) = (t,\, x_{F}(P))\,,$$

y

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{R}'}(P, t) = (t,\, x_{F'}(P))\,.$$

En general, $x_{F}(P) \neq x_{F'}(P)$. Eso no significa que los observadores estén describiendo dos puntos distintos. Significa que el mismo punto recibe etiquetas espaciales diferentes porque cambió el marco utilizado para localizarlo.

Proposición: acuerdo métrico entre observadores ortonormales. Proposición 4.58 — Invariancia de la separación espacial registrada Sean dos observadores asociados a marcos físicos

$$\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}), \qquad \mathfrak{R}' = (F', \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}'),$$

con la misma calibración de longitud y el mismo convenio temporal.

Supongamos que

$$F = (O, E), \qquad F' = (O', E')$$

utilizan bases ortonormales. Si dos ocurrencias espaciales P y Q reciben la misma lectura temporal t, entonces

$$\boxed{\|x_{F'}(Q) - x_{F'}(P)\| = \|x_{F}(Q) - x_{F}(P)\|\,.}$$

Demostración. La hipótesis temporal sólo asegura que estamos comparando los dos registros bajo el mismo convenio de lectura. La parte espacial es exactamente proposición 4.56:

$$\|x_{F'}(Q) - x_{F'}(P)\| = \|x_F(Q) - x_F(P)\|\,.$$

Como ambos observadores comparten además la calibración $\mathcal{L}$, ambas normas representan la misma longitud física expresada en la misma unidad. □ Por tanto, dos observadores pueden discrepar en las columnas de coordenadas y, sin embargo, coincidir en una magnitud geométrica medible.

Desacuerdo de coordenadas no es desacuerdo físico. Consideremos, por ejemplo,

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mientras otro marco asigna

$$x_{F'}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas son distintas. Sin información adicional, no podemos concluir que se trate de puntos distintos. Debemos preguntar primero cuál es la transformación de marco que relaciona ambas descripciones. La comparación físicamente significativa exige reconstruir los objetos geométricos o sus invariantes, no comparar números aislados.

El observador no tiene por qué estar "sentado en el origen". En ejemplos elementales se dibuja con frecuencia una persona junto al origen de coordenadas. Ese dibujo puede ser útil, pero no constituye una definición. El marco puede estar realizado mediante una red de marcas y dispositivos distribuidos. Lo esencial es que exista un procedimiento reproducible para producir

$$(t,\, x_F(P))\,.$$

Por eso distinguimos:

$$\boxed{\text{observador} \neq \text{origen geométrico.}}$$

El origen forma parte de la descripción espacial; el observador implementa el sistema de referencia completo.

Todavía no hemos definido un marco "en movimiento". Para afirmar que un marco cambia respecto de otro a medida que transcurre el tiempo necesitaríamos permitir que sus datos espaciales dependieran de la lectura temporal. Por ejemplo, aparecerían objetos del tipo

$$O(t)$$

o

$$B(t).$$

Pero introducir esas dependencias equivaldría a comenzar el estudio del movimiento. En este capítulo no lo haremos. Los cambios de marco tratados hasta ahora relacionan descripciones geométricas ya dadas; no constituyen todavía una teoría de marcos móviles.

Por qué la inercialidad no puede leerse de la geometría. Un marco puede poseer:

- origen bien definido;
- ejes ortonormales;
- patrón de longitud;
- reloj;
- procedimiento reproducible de localización.

Nada de eso decide por sí solo si el marco es **inercial**. La palabra "inercial" exige comparar la descripción del movimiento con leyes dinámicas que todavía no se han introducido. Por tanto, en este punto sólo podemos afirmar:

$$\boxed{\text{marco físico bien definido} \not\Rightarrow \text{marco inercial.}}$$

La ortogonalidad de los ejes es una propiedad geométrica. La inercialidad es una propiedad físico-dinámica. Confundirlas mezcla niveles de estructura diferentes.

Falsos criterios de inercialidad. "Los ejes son cartesianos, por tanto el marco es inercial."

Falso. La geometría cartesiana no determina las leyes del movimiento observadas desde ese marco.

"El origen está materializado por un objeto físico, por tanto el marco es inercial."

Falso. Tener un origen realizable no especifica cómo se comporta ese origen en el tiempo.

"Hay un reloj, por tanto podemos decidir si el marco es inercial."

Falso. Un reloj permite asignar lecturas temporales; la inercialidad requiere estructura dinámica adicional.

Principio metodológico. Principio metodológico 4.26 — Separar diferencias de descripción de diferencias físicas Cuando dos observadores asignen registros distintos a una misma situación:

1. identificar primero sus marcos geométricos;
2. comprobar sus convenios de unidades y lectura temporal;
3. transformar las coordenadas a una descripción común;
4. comparar después los invariantes o magnitudes físicas pertinentes.

No interpretar una diferencia entre columnas numéricas como una diferencia física antes de controlar el marco y las convenciones.

Balance: observador, registro e inercialidad. Un observador queda entendido aquí como la realización operacional de un marco físico, no como un punto geométrico ni necesariamente como una persona. Dos observadores pueden asignar coordenadas diferentes a una misma ocurrencia:

$$\boxed{x_F(P) \neq x_{F'}(P)}$$

sin discrepar sobre invariantes geométricos como una separación espacial, siempre que sus calibraciones sean compatibles. Además,

$$\boxed{\text{observador} \neq \text{origen}}$$

y

$$\boxed{\text{marco físico} \not\Rightarrow \text{marco inercial.}}$$

Todavía falta ejercitar estas distinciones y cerrar la sección sin invadir el estudio del movimiento.

Qué puede inferirse de un registro y qué no. Un registro

$$(t,\, x_F(P))$$

permite afirmar que, bajo los convenios del marco utilizado:

- se asignó la lectura temporal t;
- la localización espacial recibió la columna $x_F(P)$;
- las unidades están determinadas por la calibración declarada.

Pero ese registro, por sí solo, no permite concluir:

- que el punto esté moviéndose o en reposo;
- que el marco se mueva respecto de otro;
- que el marco sea inercial;
- que exista una velocidad;
- que exista una aceleración.

Todas esas afirmaciones requieren estructura adicional.

Principio metodológico de nivel de estructura. Principio metodológico 4.27 — Declarar el nivel de estructura antes de inferir física Antes de extraer una conclusión, identificar qué estructura está realmente disponible:

1. **coordenadas geométricas:** origen y base;
2. **marco físico mínimo:** geometría + calibración + lectura temporal + realización operacional;
3. **cinemática:** dependencia temporal de posiciones;
4. **dinámica:** leyes que relacionan movimiento e interacciones.

No atribuir a un nivel propiedades que requieren uno posterior. En particular,

$$\boxed{\text{tener } (t, x_F(P)) \not\Rightarrow \text{tener una ley de movimiento.}}$$

Ejercicio 4.26 — ¿Qué estructura está realmente dada?.

Función pedagógica: `Diagnóstico conceptual → Jerarquía de estructura → Control de inferencias`

Para cada afirmación, indica qué puede concluirse y qué no.

Caso A. Se da un origen O y una base ortonormal E.

Caso B. Además se especifica una unidad de longitud y un reloj.

Caso C. Además existe un procedimiento reproducible que materializa el origen, los ejes y las lecturas.

Caso D. Se afirma que, como los ejes son ortonormales, el marco es inercial.

Solución desarrollada

Caso A. Tenemos un marco geométrico

$$F = (O, E).$$

Podemos asignar coordenadas espaciales a puntos. No tenemos todavía un marco físico completo.

Caso B. Ahora existen una calibración de longitud y una lectura temporal, pero falta especificar cómo se realizan físicamente el origen y las direcciones. La estructura operacional sigue incompleta.

Caso C. Ya disponemos del nivel mínimo de marco físico:

$$\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}).$$

Podemos producir registros

$$(t,\, x_F(P))\,.$$

Sin embargo, aún no hemos definido trayectorias, velocidades, aceleraciones ni inercialidad.

Caso D. La inferencia es inválida.

$$\boxed{E \text{ ortonormal} \not\Rightarrow \mathfrak{R} \text{ inercial.}}$$

La ortonormalidad pertenece a la geometría; la inercialidad requiere dinámica.

Ejercicio 4.27 — Dos observadores, una misma geometría.

Función pedagógica: `Cambio de marco → Registros distintos → Invariante común`

Dos observadores comparten la misma calibración de longitud y el mismo convenio temporal. El primero usa

$$F = (O, E), \qquad E = (e_1, e_2, e_3).$$

El segundo usa

$$F' = (O', E'),$$

con

$$\overrightarrow{OO'} = e_1 - 2e_2 + e_3$$

y

$$E' = (e_2, -e_1, e_3).$$

A la lectura

$$t = 12\,\mathrm{s},$$

se registran dos localizaciones P y Q:

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{m}, \qquad x_F(Q) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{m}.$$

1. Calcula los registros espaciales de P y Q en F'.
2. Comprueba que las columnas cambian.
3. Calcula la separación espacial en ambos marcos.
4. Explica qué puede concluirse y qué no puede concluirse sobre el movimiento.

Solución desarrollada

La matriz de cambio es

$$S_{E\leftarrow E'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$[a]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m}.$$

Para P:

$$x_F(P) - [a]_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m},$$

y por la proposición 4.57,

$$\boxed{x_{F'}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m}.}$$

Para Q:

$$x_F(Q) - [a]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m},$$

de modo que

$$\boxed{x_{F'}(Q) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m}.}$$

Los registros espaciales son numéricamente distintos en los dos marcos. En F,

$$x_F(Q) - x_F(P) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m},$$

por lo que

$$\|x_F(Q) - x_F(P)\| = 5\,\text{m}.$$

En F',

$$x_{F'}(Q) - x_{F'}(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m},$$

y

$$\|x_{F'}(Q) - x_{F'}(P)\| = 5\,\text{m}.$$

Así,

$$\boxed{\text{coordenadas distintas} \quad \text{pero} \quad \text{misma separación física.}}$$

Como sólo disponemos de registros correspondientes a una lectura temporal común, no podemos concluir si P o Q se mueven, ni definir velocidades o aceleraciones.

Síntesis operacional. La arquitectura conceptual de la sección puede resumirse como una cadena de estructura creciente:

$$\boxed{\text{geometría} \longrightarrow \text{medición espacial} \longrightarrow \text{marco físico mínimo.}}$$

En símbolos, $F = (O, B)$
se amplía a

$$\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O}).$$

El marco físico permite producir registros

$$\boxed{(t,\, x_{_F}(P))\,.}$$

Un observador es el sistema operacional capaz de producirlos. Dos observadores pueden asignar coordenadas distintas sin desacuerdo físico, siempre que las cantidades comparadas se transformen correctamente y se atienda a los invariantes relevantes.

Cierre de §13. La sección ha mostrado por qué una terna de números no basta para constituir una referencia física. Un marco físico mínimo requiere:

$$\boxed{\text{origen y ejes} + \text{calibración espacial} + \text{lectura temporal} + \text{realización operacional.}}$$

La misma ocurrencia puede recibir registros diferentes: $(t,\, x_{_F}(P))$
y

$$(t,\, x_{_{F'}}(P))\,,$$

sin que cambie el punto geométrico descrito. Cuando los marcos espaciales son ortonormales y las calibraciones compatibles, las separaciones geométricas permanecen invariantes. Finalmente, quedan bloqueadas dos inferencias:

$$\boxed{\text{registro temporal} \not\Rightarrow \text{movimiento}}$$

y

$$\boxed{\text{marco físico} \not\Rightarrow \text{marco inercial.}}$$

Los ejercicios 4.26–4.27 obligan a separar explícitamente geometría, realización operacional, observador e inercialidad. La última sección del capítulo integrará todas las distinciones construidas —puntos, vectores, coordenadas, bases, orientación, isometrías y marcos— antes de entregar el concepto de posición dependiente del tiempo al capítulo 5. El siguiente paso será el §14.

14. Integración: una geometría, varias descripciones

Una geometría, varias descripciones. A lo largo del capítulo hemos repetido una misma operación conceptual:

1. identificar un objeto geométrico;
2. elegir una descripción;
3. traducir el objeto a números;
4. cambiar la descripción;
5. reconstruir el mismo objeto.

El principio rector puede escribirse como

$$\boxed{\text{objeto geométrico} \neq \text{representación numérica.}}$$

Un punto no es su terna de coordenadas. Un vector no es su columna de componentes. Una transformación lineal no es una única matriz. Un marco físico no es un dibujo con ejes. La descripción depende de elecciones; el objeto descrito no queda creado por esas elecciones.

La jerarquía construida desde §1. El capítulo ha introducido una cadena de estructuras:

$$\boxed{\mathcal{E} \longrightarrow V \longrightarrow \text{estructura euclídea} \longrightarrow \text{marcos} \longrightarrow \text{registros físicos.}}$$

Más explícitamente:

- $\mathcal{E}$: puntos del espacio afín;
- V: vectores de desplazamiento;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: producto escalar;
- orientación: elección adicional en dimensión tres;
- $F = (O, B)$: marco geométrico;
- $\mathfrak{R} = (F, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{O})$: marco físico mínimo.

Cada nivel añade estructura. Ningún nivel debe confundirse con la representación coordenada usada para describirlo.

Definir: invariante de descripción. Definición 4.41 — Invariante bajo cambio de descripción Una cantidad asociada a una configuración geométrica será llamada **invariante de descripción** si su valor no cambia cuando modificamos únicamente el marco o la base usados para describir esa misma configuración, manteniendo fija la estructura geométrica pertinente.

La palabra "invariante" exige declarar **respecto de qué cambios**. Por ejemplo, entre marcos ortonormales compatibles, la distancia entre dos puntos satisface

$$\boxed{d(P, Q) = \|x_F(Q) - x_F(P)\| = \|x_{F'}(Q) - x_{F'}(P)\|\,.}$$

Las coordenadas cambian; la distancia no.

No todo lo que cambia deja de ser geométricamente válido. Supongamos que

$$[v]_B \neq [v]_{B'}.$$

No hay contradicción. Las dos columnas representan el mismo vector siempre que estén relacionadas por $[v]_{B'} = S^{-1}_{B \leftarrow B'}[v]_B$. Del mismo modo, $x_F(P) \neq x_{F'}(P)$

puede describir un único punto P cuando

$$x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).$$

Por tanto, una representación puede cambiar de manera sistemática sin que cambie el objeto geométrico.

Definición 4.42 — Ley covariante de representación En esta sección usaremos **covariante** en un sentido local y operativo:

una familia de representaciones es covariante respecto de un cambio de descripción cuando sus datos numéricos cambian según una ley de transformación compatible con el tipo de objeto y con la composición de cambios de marco o base.

Este uso no introduce todavía cálculo tensorial. Significa simplemente que las representaciones no cambian arbitrariamente. Cada tipo de objeto posee su propia ley:

Vector.

$$\boxed{[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B.}$$

Punto.

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).}$$

Operador lineal.

$$\boxed{A_{B'}(T) = S^{-1}A_B(T)S.}$$

Las tres fórmulas son diferentes porque describen objetos de tipos diferentes.

Composición como prueba de coherencia. Una ley de transformación no es sólo una receta para pasar de una descripción a otra. Debe ser compatible con cambios sucesivos. Para vectores,

$$S_{B\leftarrow C} = S_{B\leftarrow B'}S_{B'\leftarrow C}.$$

Para cambios afines,

$$(L_2, t_2)\circ(L_1, t_1) = (L_2L_1,\ L_2t_1 + t_2).$$

Por tanto, pasar directamente o mediante una descripción intermedia debe producir el mismo resultado. Esta consistencia es una de las señales de que estamos cambiando la representación de un mismo objeto y no introduciendo datos arbitrarios.

Proposición: reconstrucción independiente de la descripción. Proposición 4.59 — El objeto reconstruido no depende de la representación

(a) Vectores. Sean B y B' dos bases de V. Si

$$[v]_{B'} = S^{-1}_{B\leftarrow B'}[v]_B,$$

entonces reconstruir el vector desde cualquiera de las dos columnas produce el mismo

$$v \in V.$$

(b) Puntos. Sean

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B')$$

dos marcos afines relacionados por

$$a = \overrightarrow{OO'}, \qquad S = S_{B\leftarrow B'}.$$

Si

$$x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right),$$

entonces reconstruir el punto desde F o desde F' produce el mismo

$$P \in \mathcal{E}.$$

Demostración.

Parte (a). Escribamos

$$[v]_B = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad [v]_{B'} = \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix}.$$

Por definición de componentes, $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$.
Proposición 4.39 establece que

$$[v]_B = S_{B \leftarrow B'} [v]_{B'}.$$

Pero las columnas de $S_{B \leftarrow B'}$ son precisamente

$$[e'_1]_B, \qquad [e'_2]_B, \qquad [e'_3]_B.$$

Por tanto,

$$[v]_B = \left[v'^1 e'_1 + v'^2 e'_2 + v'^3 e'_3\right]_B.$$

La unicidad de componentes en B implica $v = v'^1 e'_1 + v'^2 e'_2 + v'^3 e'_3$.
Ambas columnas reconstruyen el mismo vector.

Parte (b). Desde el marco F, $P = O + \overrightarrow{OP}$,
con

$$[\overrightarrow{OP}]_B = x_F(P).$$

Desde F', $P = O' + \overrightarrow{O'P}$,
con

$$[\overrightarrow{O'P}]_{B'} = x_{F'}(P).$$

Proposición 4.51 equivale a

$$[\overrightarrow{O'P}]_{B'} = S^{-1}\left([\overrightarrow{OP}]_B - [a]_B\right).$$

Por proposición 4.39, esto significa geométricamente

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - a.$$

Como $O' = O + a$,
obtenemos

$$O' + \overrightarrow{O'P} = O + a + \overrightarrow{OP} - a = O + \overrightarrow{OP} = P.$$

□

La proposición formaliza la idea central del capítulo:

cambiar la descripción no cambia el objeto.

Qué cambia y qué permanece. Podemos resumir los principales objetos así:

Objeto	Representación dependiente de elección	Ley de cambio	Qué permanece
Punto P	$x_F(P)$	afín	el punto P
Vector v	$[v]_B$	lineal	el vector v
Desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$	$[\overrightarrow{PQ}]_B$	lineal	el desplazamiento
Operador T	$A_B(T)$	conjugación	el operador T
Distancia $d(P,Q)$	cálculo desde coordenadas	compatible con la métrica	la distancia
Ángulo $\theta(u,v)$	cálculo desde componentes	compatible con la métrica	el ángulo

La última columna contiene objetos o cantidades geométricas. Las columnas intermedias contienen representaciones.

Invariante no significa "mismo número en cualquier fórmula mal usada". La invariancia no permite ignorar las leyes de transformación. Por ejemplo, en una base no ortonormal la norma no se calcula, en general, mediante $(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$.

Debe emplearse la estructura métrica adecuada, representada por la matriz de Gram correspondiente. Por tanto, el contenido correcto es:

la cantidad geométrica es invariante; su fórmula coordenada puede depender de la descripción.

Este punto evita confundir invariancia geométrica con invariancia literal de una expresión numérica particular.

Principio metodológico. Principio metodológico 4.28 — Preguntar primero por el objeto, después por sus números Ante una fórmula con coordenadas o matrices:

1. identificar el objeto geométrico representado;
2. identificar las elecciones de origen, base, orientación y unidades;
3. escribir la ley de transformación correcta para ese tipo de objeto;
4. distinguir qué datos cambian de representación y qué cantidades permanecen invariantes;
5. sólo entonces comparar números.

Este principio resume la disciplina conceptual desarrollada desde §1.

Balance: objeto, representación e invariancia. La síntesis inicial queda organizada por dos ideas complementarias.

Invariancia.

el objeto o la cantidad geométrica pertinente permanece.

Covariancia de representación.

$$\boxed{\text{los datos numéricos cambian mediante una ley coherente.}}$$

Así, "varias descripciones" no significa "varias geometrías". El mismo punto, vector, desplazamiento u operador puede aparecer mediante números diferentes sin perder identidad geométrica. Todavía falta integrar estas ideas en situaciones completas y reconocer errores de tipo mediante los tres ejercicios finales ejercicios 4.28–4.30.

Invariantes métricos bajo marcos ortonormales. Sean

$$F = (O, E), \qquad F' = (O', E')$$

dos marcos con bases ortonormales. Para dos puntos P, Q, proposición 4.52 da

$$[\overrightarrow{PQ}]_{E'} = S^{-1}[\overrightarrow{PQ}]_E,$$

y proposición 4.56 ya estableció que, entre bases ortonormales, $S^{\mathsf{T}}S = I, \qquad S^{-1} = S^{\mathsf{T}}$. Por tanto S^{-1} también es ortogonal y,

$$\boxed{d(P, Q) = \left\|[\overrightarrow{PQ}]_E\right\| = \left\|[\overrightarrow{PQ}]_{E'}\right\|.}$$

Del mismo modo, para dos vectores u, v,

$$\boxed{\langle u, v\rangle = [u]_E^{\mathsf{T}}[v]_E = [u]_{E'}^{\mathsf{T}}[v]_{E'}.}$$

En consecuencia, también permanece el ángulo:

$$\boxed{\theta(u, v) = \theta_E(u, v) = \theta_{E'}(u, v).}$$

Las columnas cambian; las relaciones métricas no.

La orientación requiere una capa adicional. La métrica por sí sola no distingue una base ortonormal positiva de una negativa. Si

$$S_{E \leftarrow E'}$$

es ortogonal, entonces $\det S = \pm 1$. El signo informa si el cambio de descripción conserva o invierte la orientación relativa de las bases. Para una terna de vectores

$$(u, v, w),$$

el volumen geométrico no orientado satisface

$$\boxed{\left|\mathrm{Vol}^{\mathrm{or}}(u, v, w)\right|}$$

independientemente de la base ortonormal usada para calcularlo. Pero el signo de un determinante coordenado sólo puede interpretarse después de declarar la orientación de la base de referencia. Por tanto:

$$\boxed{\text{métrica} \neq \text{orientación.}}$$

Esta distinción explica por qué una reflexión puede conservar todas las distancias y, sin embargo, invertir orientación.

Triangulación y trilateración no son lo mismo. En problemas de localización se emplean dos familias de procedimientos que conviene distinguir.

Triangulación. Reconstruye una posición a partir de **direcciones o ángulos** medidos desde referencias conocidas.

Trilateración. Reconstruye una posición a partir de **distancias** a puntos de referencia conocidos. En esta sección utilizaremos trilateración porque permite expresar la consistencia directamente mediante los invariantes métricos ya desarrollados. No usaremos ambos términos como sinónimos.

Definir: datos métricos de localización. Definición 4.43 — Datos de trilateración respecto de cuatro referencias Sean

$$A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{E}$$

cuatro puntos afínmente independientes. Para un punto P, definimos sus datos métricos de localización por

$$\boxed{\Lambda(P) := \begin{pmatrix} d(P,A_0)^2 \\ d(P,A_1)^2 \\ d(P,A_2)^2 \\ d(P,A_3)^2 \end{pmatrix}.}$$

La independencia afín significa que

$$\overrightarrow{A_0A_1}, \qquad \overrightarrow{A_0A_2}, \qquad \overrightarrow{A_0A_3}$$

forman una base de V. Los datos $\Lambda(P)$ están formados por cantidades métricas, no por coordenadas del punto.

Proposición: cuatro distancias determinan un punto en dimensión tres. Proposición 4.60 — Unicidad de la trilateración en dimensión tres Sean

$$A_0, A_1, A_2, A_3$$

cuatro puntos afínmente independientes. Si dos puntos P, Q satisfacen

$$\Lambda(P) = \Lambda(Q),$$

entonces

$$\boxed{P = Q.}$$

Demostración. Tomamos

$$O := A_0,$$

y definimos

$$p := \overrightarrow{OP}, \qquad q := \overrightarrow{OQ},$$

$$a_i := \overrightarrow{OA_i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Como $\Lambda(P) = \Lambda(Q)$,
tenemos para cada i: $d(P, A_i)^2 - d(P, A_0)^2 = d(Q, A_i)^2 - d(Q, A_0)^2$.

Ahora, $d(P, A_i)^2 = \|p - a_i\|^2$,
y

$$d(P, A_0)^2 = \|p\|^2.$$

Por tanto, $\|p - a_i\|^2 - \|p\|^2 = \|q - a_i\|^2 - \|q\|^2$.
Expandimos:

$$\|p\|^2 - 2\langle p, a_i\rangle + \|a_i\|^2 - \|p\|^2$$

es igual a

$$\|q\|^2 - 2\langle q, a_i\rangle + \|a_i\|^2 - \|q\|^2.$$

Luego, $\langle p - q, a_i\rangle = 0$
para

$$i = 1, 2, 3.$$

Como los tres vectores

$$a_1, a_2, a_3$$

forman una base de V, el vector

$$p - q$$

es ortogonal a todo V. En particular, $\langle p - q, p - q\rangle = 0$. Por positividad del producto escalar, $p - q = 0$. Así, $p = q$,
y por tanto

$$P = Q.$$

□

La proposición no afirma que cualquier cuádrupla de números positivos corresponda a un punto. Afirma únicamente **unicidad** cuando un punto compatible con esos datos existe.

Consistencia de los datos bajo cambio de marco. Como cada entrada de

$$\Lambda(P)$$

es una distancia geométrica, un cambio entre marcos ortonormales no modifica el vector de datos:

$$\boxed{\Lambda_F(P) = \Lambda_{F'}(P).}$$

Lo que sí cambia es la columna coordenada del punto reconstruido: $x_F(P) \neq x_{F'}(P)$
en general. Pero proposición 4.51 relaciona ambas columnas mediante $x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right)$.
Así obtenemos dos niveles simultáneos:

$$\boxed{\text{datos métricos invariantes}}$$

y

coordenadas covariantes.

Proposición: la reconstrucción métrica es compatible con el cambio de marco.
Proposición 4.61 — Consistencia de la trilateración entre marcos ortonormales Sean

$$A_0, A_1, A_2, A_3$$

cuatro referencias afínmente independientes y sean F, F' dos marcos ortonormales. Si un punto P es compatible con los datos

$$\Lambda(P),$$

entonces la reconstrucción realizada en F y la reconstrucción realizada en F' corresponden al mismo punto geométrico. Sus columnas satisfacen

$$\boxed{x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_B\right).}$$

Demostración. Las distancias que forman

$$\Lambda(P)$$

son invariantes entre F y F'. Por proposición 4.60, existe a lo sumo un punto geométrico compatible con esos cuatro valores. Por tanto, si ambos procedimientos reconstruyen un punto compatible, ambos deben reconstruir el mismo P. Sus representaciones quedan entonces relacionadas por la proposición 4.51. □ La consistencia entre observadores no requiere que produzcan la misma terna de coordenadas. Requiere que sus ternas representen el mismo objeto y respeten la ley de transformación correspondiente.

Ejemplo exacto de localización por distancias. Tomemos una base ortonormal

$$E = (e_1, e_2, e_3)$$

y cuatro referencias:

$$A_0 = O,$$

$$A_1 = O + e_1, \qquad A_2 = O + e_2, \qquad A_3 = O + e_3.$$

Sea

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$d(P, A_0)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29,$$

$$d(P, A_1)^2 = 1^2 + 3^2 + 4^2 = 26,$$

$$d(P, A_2)^2 = 2^2 + 2^2 + 4^2 = 24,$$

y

$$d(P, A_3)^2 = 2^2 + 3^2 + 3^2 = 22.$$

Así,

$$\boxed{\Lambda(P) = \begin{pmatrix} 29 \\ 26 \\ 24 \\ 22 \end{pmatrix}.}$$

Si otro marco ortonormal asigna a P una columna diferente, estos cuatro valores permanecen exactamente iguales.

Cómo se recuperan las coordenadas en el ejemplo. En el ejemplo anterior, si

$$x_{_F}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

entonces $d(P, A_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Restando la distancia a A_1: $d(P, A_0)^2 - d(P, A_1)^2 = 2x - 1$. Por tanto, $x = \frac{d(P,A_0)^2 - d(P,A_1)^2 + 1}{2}$. Análogamente,

$$y = \frac{d(P, A_0)^2 - d(P, A_2)^2 + 1}{2},$$

$$z = \frac{d(P, A_0)^2 - d(P, A_3)^2 + 1}{2}.$$

Con los datos

$$29,\ 26,\ 24,\ 22,$$

obtenemos $x = 2, \qquad y = 3, \qquad z = 4$. La reconstrucción coordenada depende del marco elegido. El conjunto de distancias no.

Principio metodológico de consistencia entre observadores. Principio metodológico 4.29 — Comparar invariantes antes de comparar coordenadas Cuando dos descripciones de una misma configuración parezcan incompatibles:

1. transformar primero ambas al mismo marco o reconstruir el objeto geométrico;
2. comparar distancias, ángulos u otros invariantes pertinentes;
3. verificar la ley covariante de las representaciones;
4. sólo entonces diagnosticar una discrepancia física o experimental.

Dos columnas diferentes no constituyen por sí solas datos contradictorios.

Balance: reconstrucción e invariantes. La integración geométrica queda ahora organizada en tres niveles:

Objeto.

$$\boxed{P,\ v,\ \overrightarrow{PQ},\ T}$$

Representación covariante.

$$\boxed{x_F(P),\ [v]_B,\ [\overrightarrow{PQ}]_B,\ A_B(T)}$$

Invariantes.

$$\boxed{d(P,Q),\ \|v\|,\ \langle u,v\rangle,\ \theta(u,v)}$$

y, cuando la orientación forma parte de la estructura, las cantidades orientadas deben interpretarse respecto de esa elección. La reconstrucción por cuatro distancias muestra concretamente que distintos observadores pueden utilizar coordenadas diferentes y, sin embargo, recuperar una única posición geométrica compatible con los mismos datos métricos. Todavía faltan los tres ejercicios integradores ejercicios 4.28–4.30 y la transición final hacia el capítulo 5.

Ejercicio 4.28 — Un punto y un vector, dos descripciones.

Función pedagógica: `Tipos de objeto → Leyes distintas → Reconstrucción → Invariante`

Sea

$$F = (O, E), \qquad E = (e_1, e_2, e_3)$$

un marco ortonormal positivo.

Definimos $F' = (O', E')$

mediante $\overrightarrow{OO'} = e_1 - 2e_2 + e_3$

y

$$E' = (e_2, -e_1, e_3).$$

Se dan

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad [v]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcula $x_{F'}(P)$.
2. Calcula $[v]_{E'}$.
3. Explica por qué el punto y el vector no obedecen la misma fórmula.
4. Reconstruye P y v desde los datos en F'.
5. Comprueba que $\|v\|$ es invariante.

Solución desarrollada

La matriz de cambio es

$$S_{E\leftarrow E'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$[a]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para el punto:

$$x_{F'}(P) = S^{-1}\left(x_F(P) - [a]_E\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Para el vector no aparece traslación:

$$[v]_{E'} = S^{-1}[v]_E = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

La diferencia entre ambas leyes proviene del tipo de objeto:

$$\boxed{\text{punto} \to \text{ley afín}, \qquad \text{vector} \to \text{ley lineal.}}$$

Reconstruimos el desplazamiento desde O': $2e'_1 - 4e'_2 + e'_3 = 2e_2 + 4e_1 + e_3$.
Como $O' = O + e_1 - 2e_2 + e_3$,
obtenemos $P = O' + 2e'_1 - 4e'_2 + e'_3 = O + 5e_1 + 2e_3$,
que coincide con la reconstrucción desde

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para el vector, $-e'_1 - 2e'_2 + 2e'_3 = -e_2 + 2e_1 + 2e_3 = v$.
Finalmente, $\|v\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9$,
y

$$\|[v]_{E'}\|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9.$$

Las representaciones cambian; el punto, el vector y la norma del vector permanecen.

Ejercicio 4.29 — Trilateración en dos marcos.

Función pedagógica: `Datos invariantes → Coordenadas covariantes → Reconstrucción única`

En un marco ortonormal

$$F = (O, E)$$

se toman las referencias

$$A_0 = O,$$

$$A_1 = O + e_1, \qquad A_2 = O + e_2, \qquad A_3 = O + e_3.$$

Un punto P tiene

$$x_F(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\Lambda(P) = \begin{pmatrix} 29 \\ 26 \\ 24 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Considera ahora

$$O' = O + e_1,$$

$$E' = (e_2, -e_1, e_3).$$

1. Calcula las coordenadas de P y de las cuatro referencias en F'.
2. Recalcula las cuatro distancias cuadradas usando únicamente las coordenadas en F'.
3. Explica por qué proposiciones 4.60–4.61 garantizan que ambos marcos reconstruyen el mismo punto.

Solución desarrollada

Tenemos

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$[a]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para P:

$$\boxed{x_{F'}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.}$$

Las referencias quedan:

$$x_{F'}(A_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_{F'}(A_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_{F'}(A_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_{F'}(A_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$x_{F'}(P) - x_{F'}(A_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y

$$d(P, A_0)^2 = 3^2 + (-2)^2 + 4^2 = 29.$$

Asimismo,

$$d(P, A_1)^2 = 3^2 + (-1)^2 + 4^2 = 26,$$

$$d(P, A_2)^2 = 2^2 + (-2)^2 + 4^2 = 24,$$

y

$$d(P, A_3)^2 = 3^2 + (-2)^2 + 3^2 = 22.$$

Por tanto,

$$\boxed{\Lambda_{F'}(P) = \Lambda_F(P) = \begin{pmatrix} 29 \\ 26 \\ 24 \\ 22 \end{pmatrix}.}$$

Proposición 4.60 garantiza que esos cuatro datos son compatibles con a lo sumo un punto geométrico.

Proposición 4.61 garantiza que las reconstrucciones en F y F' son representaciones del mismo P y obedecen la ley afín de cambio de marco.

Ejercicio 4.30 — Auditoría conceptual del capítulo.

Función pedagógica: `Integración global → Detección de falsos amigos → Preparación del capítulo siguiente`

Decide si cada afirmación es correcta o incorrecta y justifica brevemente.

1. Si dos puntos tienen la misma terna numérica en marcos diferentes, representan necesariamente el mismo punto.
2. Un vector puede tener columnas distintas en dos bases sin cambiar como objeto geométrico.
3. Cambiar el origen modifica el desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$.
4. Una matriz ortogonal representa necesariamente una transformación activa.
5. Una reflexión conserva distancias aunque invierta orientación.

6. Cuatro distancias a referencias afínmente independientes determinan a lo sumo un punto en dimensión tres.
7. Un marco físico dotado de reloj es automáticamente inercial.
8. Conocer un único registro $(t, x_F(P))$ basta para decidir si P se mueve.
9. La invariancia de una cantidad significa que cualquier fórmula coordenada ingenua produce siempre el mismo número.
10. Para comenzar a estudiar movimiento será necesario añadir dependencia temporal a la posición.

Solución desarrollada

1. Incorrecta. La misma terna numérica puede representar puntos diferentes si cambian origen o base. Debe conocerse la relación entre marcos.

2. Correcta. Las columnas obedecen

$$[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B,$$

mientras v permanece fijo.

3. Incorrecta. El cambio de origen altera coordenadas de puntos, pero el desplazamiento entre dos puntos no depende del origen.

4. Incorrecta. Una matriz ortogonal puede aparecer tanto en un cambio pasivo entre bases ortonormales como en la representación activa de una isometría.

5. Correcta. Para una reflexión ortogonal,

$$Q^{\mathsf{T}}Q = I, \qquad \det Q = -1.$$

Conserva la métrica e invierte orientación.

6. Correcta. Es exactamente proposición 4.60, bajo la hipótesis de independencia afín de las referencias.

7. Incorrecta. Un reloj aporta lectura temporal; la inercialidad requiere estructura dinámica adicional.

8. Incorrecta. Un único registro sólo localiza una ocurrencia bajo ciertos convenios. No proporciona una ley de dependencia temporal.

9. Incorrecta. La cantidad geométrica puede ser invariante mientras su fórmula coordenada cambia. En una base no ortonormal, por ejemplo, debe usarse la matriz de Gram correspondiente.

10. Correcta. El paso siguiente consiste precisamente en permitir que la localización espacial dependa de la lectura temporal. Esa estructura pertenece al capítulo 5 y no se desarrolla aquí.

La red conceptual completa del capítulo. El capítulo 4 puede condensarse en la siguiente cadena:

$$\boxed{\text{puntos} \longrightarrow \text{desplazamientos} \longrightarrow \text{vectores} \longrightarrow \text{métrica} \longrightarrow \text{orientación}}$$

seguida por

$$\boxed{\text{bases} \longrightarrow \text{coordenadas} \longrightarrow \text{cambios de descripción} \longrightarrow \text{marcos} \longrightarrow \text{registros físicos.}}$$

Cada flecha añade una capa de estructura o de representación. Ninguna permite borrar las distinciones de tipo establecidas antes.

Lo que el capítulo deja establecido. Al cerrar capítulo 4 disponemos de:

- espacio afín y desplazamientos;
- espacio vectorial de traslaciones;
- bases y componentes;
- producto escalar, norma, distancia, proyección y ángulo;
- bases ortonormales;
- orientación, determinante y volumen orientado;
- producto vectorial en dimensión tres;
- cambios pasivos de base;
- transformaciones activas e isometrías;
- rotaciones y reflexiones;
- cambios afines de origen y marco;
- realización operacional mínima de un marco físico;
- noción de observador como sistema de referencia operacional;
- invariantes y leyes coherentes de representación.

Todo ello se ha construido sin introducir todavía una ley de movimiento.

La puerta hacia el capítulo 5. Hasta aquí, un punto P ha sido considerado como una localización geométrica fija dentro de cada problema. El siguiente paso conceptual será permitir que la posición asignada a un cuerpo dependa de la lectura temporal. Eso exigirá introducir una aplicación temporal del tipo

$$t \longmapsto P(t),$$

y estudiar su geometría. El capítulo 4 no desarrolla todavía esa estructura. Sólo deja preparado el lenguaje necesario para que, cuando aparezca una posición dependiente del tiempo, quede claro:

- qué es el punto geométrico;
- qué es su vector de posición relativo a un origen;
- qué son sus coordenadas;
- cómo cambian esas coordenadas al cambiar de marco;
- qué cantidades geométricas son independientes de la descripción.

Cierre de §14 y de la redacción del capítulo 4. La afirmación que organiza todo el capítulo es:

$$\boxed{\text{una geometría puede admitir muchas descripciones numéricas coherentes.}}$$

Las representaciones cambian de acuerdo con el tipo de objeto:

$$\boxed{\text{punto: ley afín,}}$$

$$\boxed{\text{vector: ley lineal,}}$$

$$\boxed{\text{operador: conjugación.}}$$

Mientras tanto, las cantidades geométricas pertinentes se preservan bajo los cambios de descripción que respetan la estructura correspondiente. Los ejercicios 4.28–4.30 completan la integración conceptual del capítulo mediante comparación de tipos, invariantes y leyes de cambio.

Capítulo 5

Tiempo, movimiento y curvas

1. De una localización a una historia temporal

El problema que deja abierto una posición aislada. El capítulo 4 construyó el aparato necesario para responder una pregunta estática: **¿dónde está un punto físico y cómo cambia su descripción al cambiar de marco?** Una vez fijado un marco espacial F, una ocurrencia puede registrarse mediante una lectura temporal t y unas coordenadas espaciales $x_F(P)$. Pero un registro aislado no describe movimiento. Saber que un objeto estaba en el punto P_0 cuando el reloj marcaba t_0 sólo proporciona una localización asociada a un instante. Incluso dos registros,

$$(t_0, P_0), \qquad (t_1, P_1),$$

no determinan por sí solos qué ocurrió entre ambos. La nueva dificultad de este capítulo comienza precisamente aquí: **pasar de localizar ocurrencias a organizar una historia temporal de posiciones**.

Activación Si una cámara registra un objeto a las 12:00 en un punto P_0 y a las 12:01 en un punto P_1, ¿conocemos ya su movimiento durante todo ese minuto? ¿Qué información falta?

Tiempo y posición son datos de tipos distintos. En el marco clásico adoptado en este tomo, una lectura temporal se representa por un número real

$$t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

mientras que una posición física es un punto

$$P \in \mathcal{E}.$$

Estos objetos pertenecen a espacios distintos. El tiempo no es una cuarta coordenada añadida a las tres coordenadas espaciales, y el par (t, P) no será interpretado aquí como un vector de espacio-tiempo. Esa construcción pertenece a la relatividad y queda fuera del alcance del capítulo 5. Si además elegimos un marco espacial fijo $F = (O, B)$, el punto P adquiere una representación numérica

$$x_F(P) \in \mathbb{R}^3.$$

Por tanto, debemos distinguir al menos:

- la lectura temporal $t \in \mathbb{R}$;
- el punto físico $P \in \mathcal{E}$;
- la columna de coordenadas $x_F(P) \in \mathbb{R}^3$;
- el par (t, P) que vincula una lectura temporal con una localización.

La separación de tipos evita una confusión que sería especialmente peligrosa en este capítulo: **una representación numérica del punto no es el punto, y asociar un tiempo a un punto todavía no produce una ley de movimiento**.

Definición 5.1 — Evento clásico localizado Un **evento clásico localizado** es un par

$$(t, P), \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \qquad P \in \mathcal{E},$$

que registra que la ocurrencia considerada está localizada en el punto P para la lectura temporal t. La palabra *evento* se usa aquí en un sentido estrictamente clásico y operacional: una ocurrencia a la que asociamos una lectura temporal y una posición espacial. No estamos construyendo un espacio-tiempo ni suponiendo que (t, P) posea estructura vectorial. En un marco fijo F, el mismo evento puede registrarse numéricamente como $\big(t, x_F(P)\big)$.

La primera componente no cambia por elegir otro marco **espacial** fijo dentro del alcance actual; la segunda sí cambia según la ley afín estudiada en el capítulo 4.

Principio metodológico: un registro no es una historia. Principio metodológico 5.1 — Una lectura temporal no es todavía una ley de movimiento Un dato (t, P) —o su representación $(t, x_F(P))$— localiza una ocurrencia. Para describir movimiento se necesitará una regla que asigne posiciones a una colección de valores del parámetro temporal; esa regla se definirá formalmente en §2.

Esta distinción también vale para una lista finita de observaciones. Por ejemplo,
$(t_0, P_0),\ (t_1, P_1),\ \dots,\ (t_n, P_n)$
puede constituir un conjunto de datos experimentales, pero no determina automáticamente una única historia entre los instantes registrados. Distintas interpolaciones o modelos pueden ser compatibles con los mismos datos. La física añadirá después criterios para decidir qué descripciones son adecuadas; por ahora sólo fijamos la estructura lógica mínima: **los datos temporales localizados son entradas posibles para construir un movimiento, no el movimiento mismo**.[1]

Reconstruir el evento desde sus coordenadas. Recordemos 4.8: una vez fijado un marco $F = (O, B)$, la aplicación de coordenadas espaciales

$$x_F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es biyectiva. Por ello, la representación numérica de un punto en ese marco determina el punto de manera única.

Proposición 5.1 — Reconstrucción de un evento desde un registro en marco fijo Fijado un marco espacial F, todo registro numérico

$$(t, y), \qquad t \in I, \qquad y \in \mathbb{R}^3,$$

determina unívocamente un evento clásico localizado (t, P) cuyas coordenadas espaciales son y.

Demostración. La lectura temporal t ya está dada. Como F está fijado, 4.8 proporciona una aplicación de coordenadas biyectiva $x_F : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$. Por tanto, para la columna y existe un único punto

$$P = x_F^{-1}(y)$$

[1] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics*, Expanded ed., Yale University Press, 2019, cap. 1, §1.2 «Kinematics and dynamics», pp. 2–3. Se usa aquí como control de la frontera entre descripción cinemática y explicación dinámica.

que satisface $x_F(P) = y$. Así, el registro (t, y) determina exactamente un único par (t, P). □
Autoexplicación de la prueba. El argumento sólo reconstruye una **ocurrencia individual**. La biyectividad del sistema de coordenadas recupera el punto a partir de sus números, pero no relaciona posiciones correspondientes a tiempos diferentes. La transición de registros aislados a una aplicación temporal será el paso conceptual siguiente.

Balance del primer tramo. Hasta aquí hemos añadido tiempo sin introducir todavía cinemática diferencial:

$$\boxed{\text{lectura temporal} + \text{localización espacial} \longrightarrow \text{evento clásico localizado.}}$$

Todavía no hemos definido trayectoria, velocidad ni aceleración. El siguiente paso dentro de §1 será examinar con más cuidado qué puede y qué no puede inferirse de varios registros temporales y preparar, sin anticiparla, la definición de movimiento parametrizado de §2.

Varios registros siguen siendo sólo una muestra. Supongamos que observamos el mismo objeto en una sucesión finita de lecturas temporales: $(t_0, P_0),\ (t_1, P_1),\ \dots,\ (t_n, P_n)$,
con $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Esta colección contiene más información que un solo evento: permite comparar localizaciones en instantes distintos. Sin embargo, sigue siendo una **muestra discreta**. Entre t_i y t_{i+1} no hemos especificado todavía qué punto corresponde a cada lectura temporal intermedia. En un marco fijo F, los mismos datos pueden escribirse como

$$(t_0, x_F(P_0)),\ (t_1, x_F(P_1)),\ \dots,\ (t_n, x_F(P_n)).$$

La escritura coordenada facilita cálculos e interpolaciones, pero no elimina la subdeterminación. Dos reglas distintas para las coordenadas pueden coincidir exactamente en todos los tiempos observados y diferir entre ellos. De los datos al modelo Un conjunto finito de registros no contiene por sí mismo los valores no observados. Para completar la historia hace falta introducir una regla adicional —una hipótesis matemática o física— y distinguirla de los datos que pretende describir.

Un ejemplo de subdeterminación. Para no ocultar unidades dentro de un polinomio, fijemos una escala temporal $T_* > 0$ y una escala de longitud $L_* > 0$, y trabajemos sólo en este ejemplo con las variables adimensionales

$$\tau := \frac{t}{T_*}, \qquad \xi := \frac{x}{L_*}.$$

Supongamos que tres registros de la primera coordenada dan

$$\xi(0) = 0, \qquad \xi(1) = 1, \qquad \xi(2) = 0.$$

La regla

$$\xi_1(\tau) = \tau(2 - \tau)$$

reproduce los tres datos. Pero también lo hace

$$\xi_2(\tau) = \tau(2 - \tau) + \tau(\tau - 1)(\tau - 2),$$

porque el término añadido se anula para $\tau = 0, 1, 2$. Las dos reglas no coinciden en general; por ejemplo,

$$\xi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \xi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}.$$

Por tanto, incluso observaciones exactas en varios instantes no seleccionan automáticamente una única historia temporal. El fenómeno es general: si una regla candidata $\xi_0(\tau)$ reproduce observaciones en $\tau_0, \dots, \tau_n$, entonces

$$\xi_\lambda(\tau) = \xi_0(\tau) + \lambda \prod_{k=0}^{n} (\tau - \tau_k)$$

reproduce los mismos datos para cualquier constante adimensional λ, aunque las reglas sean diferentes cuando $\lambda \neq 0$. Esto no significa que todas las reglas sean físicamente igualmente buenas. Significa algo más elemental: **la elección de una historia requiere información o supuestos que no están contenidos en una lista finita de registros**.

Auditoría de tipos de un registro temporal. Ejercicio 5.1 · Diagnóstico y tipado En un marco espacial fijo F, un registro experimental entrega t_0, un punto P_0 y sus coordenadas $x_F(P_0)$. Clasifica los objetos

$$t_0, \qquad P_0, \qquad x_F(P_0), \qquad (t_0, P_0), \qquad (t_0, x_F(P_0)),$$

indicando en qué conjunto vive cada uno. Explica después por qué el último objeto, aunque, una vez fijadas las unidades, pueda representarse mediante cuatro números reales, no debe identificarse en el capítulo 5 con un vector de espacio-tiempo.

Solución desarrollada Los tipos son

$$t_0 \in \mathbb{R}, \qquad P_0 \in \mathcal{E}, \qquad x_F(P_0) \in \mathbb{R}^3,$$

y por tanto

$$(t_0, P_0) \in I \times \mathcal{E}, \qquad (t_0, x_F(P_0)) \in I \times \mathbb{R}^3.$$

El primer par es el evento clásico localizado de la definición 5.1; el segundo es su representación numérica en el marco F. Que $I \times \mathbb{R}^3$ sea un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y pueda representarse mediante cuatro números reales no introduce por sí solo una estructura física de espacio-tiempo. En este capítulo no se ha definido una métrica espacio-temporal, una ley de transformación que mezcle tiempo y espacio ni una interpretación vectorial del evento. Tratar automáticamente esos cuatro números como un vector físico añadiría estructura no autorizada por las definiciones vigentes.

Los datos discretos no fijan una historia única. Ejercicio 5.2 · Contraejemplo y modelización Se fijan escalas $T_* > 0$ y $L_* > 0$ y se usan las variables adimensionales $\tau = t/T_*$ y $\xi = x/L_*$. En un eje de un marco fijo se registran exactamente los datos

$$\xi(0) = 0, \qquad \xi(1) = 1, \qquad \xi(2) = 0.$$

Construye dos reglas continuas distintas que reproduzcan los tres registros. Verifica que coinciden en los tiempos observados y exhibe un valor intermedio de τ en el que difieran. Explica qué muestra el ejemplo acerca de la relación entre datos e historia temporal.

Solución desarrollada Podemos tomar

$$\xi_1(\tau) = \tau(2 - \tau),$$

y

$$\xi_2(\tau) = \tau(2-\tau) + \tau(\tau-1)(\tau-2).$$

Para $\tau = 0, 1, 2$, el producto $\tau(\tau-1)(\tau-2)$ vale cero. Por ello ambas reglas satisfacen exactamente los tres registros dados. En cambio, para $\tau = \frac{1}{2}$,

$$\xi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \xi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}.$$

Así, los mismos datos discretos son compatibles con historias intermedias diferentes. La conclusión no es que no podamos construir una descripción temporal, sino que **la descripción no se deduce únicamente de una muestra finita**: debe añadirse una regla de interpolación, un modelo o una ley física y después contrastarla con observaciones adicionales.

Cierre conceptual: del registro a la regla temporal. La progresión de esta sección puede resumirse así:

$$\boxed{\text{localización} \longrightarrow \text{evento } (t,P) \longrightarrow \text{familia de registros} \not\Longrightarrow \text{historia única.}}$$

Un evento individual puede reconstruirse desde sus coordenadas en un marco fijo, pero una lista finita de eventos no rellena automáticamente los intervalos entre observaciones. El paso siguiente consiste, por tanto, en introducir explícitamente **una regla que asigne una posición a cada valor del parámetro temporal considerado**. Esa regla será definida formalmente en §2. Allí podremos distinguir, por primera vez con precisión, la aplicación parametrizada de su imagen geométrica. Hasta entonces no necesitamos velocidad, aceleración ni leyes dinámicas.

2. Movimiento parametrizado y trayectoria geométrica

De una muestra de eventos a una regla temporal. En §1 vimos que una colección finita de registros

$$(t_0, P_0), \dots, (t_n, P_n)$$

no determina una historia única. Para describir matemáticamente una historia debemos añadir algo que los datos aislados no contienen: una regla que asigne una posición a cada lectura temporal del intervalo que queremos estudiar. Elegimos, por tanto, un intervalo

$$I \subseteq \mathbb{R},$$

y pedimos que para cada $t \in I$ quede especificado un único punto del espacio físico modelado por $\mathcal{E}$. Éste es el paso mínimo que convierte una colección de ocurrencias en un objeto matemático capaz de representar movimiento.

Activación ¿Qué información contiene una regla $t \mapsto P(t)$ que no contiene una fotografía de la trayectoria dibujada sobre el espacio?

Definir: movimiento parametrizado. Definición 5.2 — Movimiento parametrizado de un punto material Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Un **movimiento parametrizado de un punto material** es una aplicación

$$P : I \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad t \longmapsto P(t).$$

Para cada $t \in I$, el valor $P(t)$ es el punto ocupado por el objeto modelado en la lectura temporal t.[2]

La definición contiene tres piezas que deben mantenerse separadas: el **dominio** I, el **codominio** $\mathcal{E}$ y la **regla de asignación** $t \mapsto P(t)$. Cambiar cualquiera de ellas puede cambiar el objeto matemático. En definición 5.2 no exigimos todavía continuidad ni derivabilidad. Esas propiedades serán hipótesis adicionales cuando hagan falta. Tampoco introducimos masa, fuerza ni ecuaciones de movimiento: aquí sólo describimos una historia de posiciones.

Punto material El término *punto material* indica la idealización en la que sólo seguimos una localización espacial. No afirma todavía nada sobre masa, dinámica interna, rotación o extensión del cuerpo.

Definir: trayectoria geométrica. A partir de una aplicación $P : I \to \mathcal{E}$ podemos olvidar qué tiempo corresponde a cada posición y conservar únicamente el conjunto de puntos visitados. Esa operación produce la imagen de P.

Definición 5.3 — Trayectoria geométrica La **trayectoria geométrica** del movimiento parametrizado $P : I \to \mathcal{E}$ es su imagen

$$\Gamma_P := P(I) = \{P(t) : t \in I\} \subseteq \mathcal{E}.$$

La diferencia de tipos es fundamental: $P : I \to \mathcal{E}$
es una **aplicación**, mientras que

$$\Gamma_P \subseteq \mathcal{E}$$

es un **conjunto de puntos**. La trayectoria conserva dónde pasó el movimiento, pero no conserva por sí sola cuándo pasó por cada punto ni cuántas veces lo hizo.

Principio metodológico: aplicación, imagen y parámetro. Principio metodológico 5.2 — Separar aplicación, imagen y parámetro Al analizar una curva, distinguir siempre: el parámetro y su dominio, la aplicación P que asigna puntos y la imagen geométrica $\Gamma_P = P(I)$. Una curva parametrizada contiene más información que su trayectoria.

Esta regla evita una identificación muy común: dibujar una curva en el espacio y tratar el dibujo como si ya especificara el movimiento completo. El dibujo puede representar la imagen, pero no registra necesariamente el orden temporal de los puntos ni la correspondencia entre posiciones y valores de t.

---

[2] Michael Spivak, *Physics for Mathematicians: Mechanics I*, Publish or Perish, 2010, cap. 1, pp. 9–10; véase también Michael Spivak, *Calculus*, 4.ª ed., Publish or Perish, 2008, cap. 12, apéndice «Parametric Representation of Curves», pp. 244–248.

Una misma imagen puede provenir de reglas distintas. Sean $A, B \in \mathcal{E}$, con $A \neq B$, y fijemos una escala temporal $T > 0$. En $I = [0, T]$ consideremos

$$P(t) = A + \frac{t}{T}\,\overrightarrow{AB},$$

y

$$Q(t) = A + \left(\frac{t}{T}\right)^2 \overrightarrow{AB}.$$

Los coeficientes t/T y $(t/T)^2$ son adimensionales y recorren todos los valores de $[0, 1]$ cuando $t \in [0, T]$. Por ello ambas aplicaciones tienen la misma imagen: el segmento afín de A a B. Sin embargo, las aplicaciones no son iguales. Por ejemplo,

$$P\left(\frac{T}{2}\right) = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad Q\left(\frac{T}{2}\right) = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Por tanto,

$$\boxed{P(I) = Q(I) \quad \not\Longrightarrow \quad P = Q.}$$

Todavía no necesitamos hablar de velocidad para distinguirlas: basta observar que, para la misma lectura temporal $t = T/2$, las reglas asignan puntos diferentes.

Balance del primer tramo. El paso conceptual de esta sección es

$$\boxed{\text{regla temporal } P : I \to \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad \text{imagen } \Gamma_P = P(I),}$$

pero la flecha no puede invertirse de manera única: conocer sólo la imagen no reconstruye la parametrización. Para precisar qué información se pierde, debemos distinguir al menos dos fenómenos adicionales: el **orden** en que se visitan los puntos y la posibilidad de visitar un mismo punto **más de una vez**. Ninguno de ellos requiere todavía introducir derivadas.

La imagen tampoco conserva el orden temporal. La pérdida de información al pasar de P a Γ_P no consiste sólo en olvidar *en qué instante* se visita cada punto. También puede perderse el **orden** en que se recorren los puntos de la imagen. Sean $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$, y fijemos una escala temporal $T > 0$. En el intervalo $I = [0, T]$ consideremos

$$P(t) = A + \frac{t}{T}\,\overrightarrow{AB},$$

y

$$Q(t) = A + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\overrightarrow{AB}.$$

Ambas aplicaciones tienen como imagen el mismo segmento de A a B. Sin embargo, $P(0) = A, \qquad P(T) = B,$

mientras que

$$Q(0) = B, \qquad Q(T) = A.$$

La trayectoria geométrica no contiene ninguna marca que permita decidir cuál de estos dos órdenes temporales fue usado. Error plausible «Si dos movimientos tienen la misma trayectoria,

entonces pasan por los mismos puntos en el mismo orden». La igualdad $\Gamma_P = \Gamma_Q$ sólo afirma igualdad de imágenes como conjuntos. No relaciona los valores de $P(t)$ y $Q(t)$ para tiempos concretos.

Una trayectoria puede recorrerse más de una vez. Una aplicación tampoco tiene por qué ser inyectiva. El mismo punto de la trayectoria puede corresponder a varios valores del parámetro temporal. Fijemos otra vez $A \neq B$ y una escala $T > 0$. Definamos $R : [0, 2T] \to \mathcal{E}$ por

$$R(t) = \begin{cases} A + \dfrac{t}{T}\,\overrightarrow{AB}, & 0 \leq t \leq T, \\ A + \left(2 - \dfrac{t}{T}\right)\overrightarrow{AB}, & T \leq t \leq 2T. \end{cases}$$

Durante el primer tramo temporal la regla asigna sucesivamente los puntos del segmento desde A hasta B; durante el segundo vuelve a asignarlos en el orden inverso. Su imagen sigue siendo exactamente el mismo segmento: $\Gamma_R = \{A + s\,\overrightarrow{AB} : 0 \leq s \leq 1\}$.

Pero la parametrización contiene información adicional. Para cada $s \in (0, 1)$, el punto

$$X_s = A + s\,\overrightarrow{AB}$$

aparece en dos tiempos distintos: $t_1 = sT, \qquad t_2 = (2 - s)T$.

Además, $R(0) = R(2T) = A, \qquad R(T) = B$. Por tanto, conocer Γ_R no permite saber cuántas veces se visitó un punto ni cuáles fueron los valores temporales correspondientes. Lectura de una parametrización no inyectiva Si $P(t_1) = P(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$, no concluyas que «el tiempo se repite». Lo que se repite es la **posición espacial** asignada por la aplicación; los dos valores del parámetro siguen siendo distintos.

Misma imagen, orden temporal distinto. Ejercicio 5.3 · Representación y contraejemplo Sean $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$, y $T > 0$. En $I = [0, T]$ se definen

$$P(t) = A + \frac{t}{T}\,\overrightarrow{AB}, \qquad Q(t) = A + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\overrightarrow{AB}.$$

1. Demuestra que $P(I) = Q(I)$.
2. Compara $P(0), P(T), Q(0), Q(T)$.
3. Explica qué información conserva la trayectoria común y qué información pierde, sin usar velocidad ni derivadas.

Solución desarrollada Cuando t recorre $[0, T]$, el cociente t/T recorre $[0, 1]$. Por tanto,

$$P(I) = \{A + s\,\overrightarrow{AB} : 0 \leq s \leq 1\}.$$

Del mismo modo, $1 - t/T$ también toma todos los valores de $[0, 1]$, aunque en orden inverso, de modo que

$$Q(I) = \{A + s\,\overrightarrow{AB} : 0 \leq s \leq 1\} = P(I).$$

Sin embargo, $P(0) = A, \qquad P(T) = B,$

mientras

$$Q(0) = B, \qquad Q(T) = A.$$

La trayectoria común conserva el conjunto de puntos visitados, pero no indica cuál se visita primero ni qué lectura temporal corresponde a cada punto. El ejemplo demuestra directamente que una misma imagen geométrica puede admitir parametrizaciones con órdenes temporales opuestos.

Recorrido repetido y multiplicidad de paso. Ejercicio 5.4 · Tipado y lectura geométrica Sean $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$, $T > 0$, y sea $R : [0, 2T] \to \mathcal{E}$ la aplicación

$$R(t) = \begin{cases} A + \dfrac{t}{T}\,\overrightarrow{AB}, & 0 \le t \le T, \\ A + \left(2 - \dfrac{t}{T}\right)\overrightarrow{AB}, & T \le t \le 2T. \end{cases}$$

1. Determina Γ_R.
2. Para $s \in (0, 1)$, encuentra todos los tiempos t tales que
$$R(t) = A + s\,\overrightarrow{AB}.$$
3. Determina cuántas veces aparecen A y B en el intervalo $[0, 2T]$.
4. Explica por qué esta información no puede recuperarse conociendo solamente Γ_R.

Solución desarrollada En $0 \le t \le T$, el coeficiente de $\overrightarrow{AB}$ es t/T y recorre $[0, 1]$. En $T \le t \le 2T$, el coeficiente es $2 - t/T$ y recorre $[1, 0]$. Por ello,

$$\Gamma_R = \{A + s\,\overrightarrow{AB} : 0 \le s \le 1\}.$$

Sea $s \in (0, 1)$. En el primer tramo, $\frac{t}{T} = s \quad \Longrightarrow \quad t = sT$. En el segundo,

$$2 - \frac{t}{T} = s \quad \Longrightarrow \quad t = (2 - s)T.$$

Como $s \in (0, 1)$, estos dos tiempos son distintos y pertenecen respectivamente a $(0, T)$ y $(T, 2T)$. Así, cada punto interior del segmento aparece dos veces. Para los extremos, $R(0) = R(2T) = A, \qquad R(T) = B$. Por tanto, A aparece en dos tiempos y B en uno. La trayectoria Γ_R sólo registra que todos esos puntos pertenecen a la imagen; no almacena la preimagen temporal de cada punto ni su multiplicidad de paso.

Cierre conceptual: qué se pierde al olvidar la parametrización. La relación entre movimiento y trayectoria puede resumirse así:

$$\boxed{P : I \to \mathcal{E} \quad \xrightarrow{\text{tomar imagen}} \quad \Gamma_P = P(I)}$$

Al aplicar esta operación podemos perder, entre otras cosas:

- qué valor temporal corresponde a cada punto;
- en qué orden se visitan los puntos;
- si un mismo punto se visita una o varias veces.

Por eso la trayectoria geométrica no debe identificarse con el movimiento parametrizado. Esta distinción será indispensable en §3, donde representaremos una misma curva mediante un origen y un marco fijos sin confundir el objeto geométrico con sus coordenadas. Todavía no hemos usado derivadas; tampoco las necesitaremos para establecer esa relación de representación.

3. Posición relativa y coordenadas de una curva

Un movimiento, tres niveles de descripción. En §2 construimos un movimiento como una aplicación

$$P : I \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Para cada $t \in I$, el valor $P(t)$ es un **punto** del espacio afín. Sin embargo, para calcular conviene traducir esa historia a objetos que vivan en un espacio vectorial y, después, a columnas numéricas. Fijemos un origen espacial $O \in \mathcal{E}$. Cada punto $P(t)$ determina entonces el vector

$$\overrightarrow{OP(t)} \in V.$$

Si además fijamos una base ordenada $B = (e_1, e_2, e_3)$ y el marco

$$F = (O, B),$$

ese vector posee una columna de componentes en $\mathbb{R}^3$. Así aparecen tres niveles distintos:

$$P(t) \in \mathcal{E}, \qquad \overrightarrow{OP(t)} \in V, \qquad x_F(P(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Activación Si dos columnas numéricas cambian porque elegimos otro origen o base, ¿qué objeto físico-geométrico intentaban representar antes y después del cambio?

Definición 5.4 — Curva de posición relativa a un origen fijo Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento parametrizado y sea $O \in \mathcal{E}$ un origen fijo. Definimos

$$r_O : I \longrightarrow V, \qquad r_O(t) := \overrightarrow{OP(t)}.$$

Para cada t, $r_O(t)$ es el vector de posición del punto $P(t)$ relativo al origen elegido O. El subíndice O es esencial: la curva r_O depende de la elección de origen. El movimiento geométrico P, en cambio, ya estaba definido antes de escogerlo. En toda esta sección, O es una elección **fija**: no depende de t.

Definir: curva coordenada en un marco fijo. Fijemos ahora un marco afín

$$F = (O, B), \qquad B = (e_1, e_2, e_3),$$

con origen y base independientes de t. El capítulo 4 construyó la aplicación de coordenadas

$$x_F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Aplicarla punto a punto al movimiento produce una nueva función.

Definición 5.5 — Curva coordenada en un marco fijo Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento y $F = (O, B)$ un marco fijo. Definimos

$$x_F : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad x_F(t) := x_F(P(t)).$$

Escribiremos

$$x_F(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix}.$$

La misma letra x_F se usa, por economía notacional, tanto para la aplicación de coordenadas sobre puntos como para su composición con P; el argumento distingue ambos usos: $x_F(P)$ recibe un punto, mientras $x_F(t)$ recibe un valor temporal y significa $x_F(P(t))$.

Relación punto a punto entre las tres descripciones. Por la definición de coordenadas afines del capítulo 4, para cada $t \in I$ se tiene

$$\boxed{x_F(t) = [r_O(t)]_B.}$$

Si

$$x_F(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix},$$

entonces la reconstrucción puntual del capítulo 4 da $P(t) = O + x^1(t)e_1 + x^2(t)e_2 + x^3(t)e_3$.

Estas igualdades no identifican los objetos. Expresan relaciones de representación entre un punto de $\mathcal{E}$, un vector de V y una columna de $\mathbb{R}^3$.

Principio metodológico: conservar el tipo del objeto. Principio metodológico 5.3 — Mantener el tipado afín Durante todo el capítulo distinguir explícitamente

$$P(t) \in \mathcal{E}, \qquad r_O(t) \in V, \qquad x_F(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Un punto, un vector de posición y su columna de componentes pueden representar una misma localización relativa a elecciones declaradas, pero no son el mismo tipo de objeto. Esta disciplina será especialmente importante cuando aparezcan operaciones algebraicas. En V y en $\mathbb{R}^3$ podemos sumar y restar elementos según sus estructuras; no debemos trasladar automáticamente esas operaciones a los puntos de $\mathcal{E}$.

Error plausible «Como $x_F(t)$ es una terna, entonces $P(t)$ es una terna». No: $x_F(t)$ es la representación numérica del punto $P(t)$ en el marco F. La biyección de coordenadas permite pasar de uno a otra una vez fijado el marco, pero no convierte $\mathcal{E}$ en $\mathbb{R}^3$ de manera canónica.

Balance: representar sin confundir. La cadena de representación construida hasta aquí es

$$\boxed{P : I \to \mathcal{E} \quad \overset{O}{\longrightarrow} r_O : I \to V \quad \overset{B}{\longrightarrow} x_F : I \to \mathbb{R}^3.}$$

El primer paso requiere elegir un origen; el segundo, además, una base. Ninguna de esas elecciones modifica por sí misma la curva geométrica P. Todavía no hemos comparado dos orígenes ni dos marcos. Esa comparación permitirá precisar qué cambia en r_O y en x_F cuando cambia la descripción, y qué permanece asociado al mismo movimiento.

Cambiar el origen cambia la curva de posición, no el movimiento. Sean $O, O' \in \mathcal{E}$ dos orígenes fijos y definamos

$$c := \overrightarrow{OO'} \in V, \qquad O' = O + c.$$

Para cada instante t, la ley del triángulo aplicada a $O, O', P(t)$ da

$$\overrightarrow{OP(t)} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P(t)}.$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{O'P(t)} = \overrightarrow{OP(t)} - c.$$

Proposición 5.2 — Cambio de origen de una curva de posición Sean O y O' dos orígenes fijos y sea

$$c = \overrightarrow{OO'}.$$

Entonces, para todo $t \in I$,

$$\boxed{r_{O'}(t) = r_O(t) - c.}$$

Demostración. Por definición 5.4,

$$r_O(t) = \overrightarrow{OP(t)}, \qquad r_{O'}(t) = \overrightarrow{O'P(t)}.$$

La identidad afín anterior da directamente

$$r_{O'}(t) = \overrightarrow{O'P(t)} = \overrightarrow{OP(t)} - \overrightarrow{OO'} = r_O(t) - c.$$

Como O y O' son fijos, c es el mismo vector para todos los valores de t. □ **Autoexplicación de la prueba.** No hemos movido la curva P. Sólo hemos cambiado el punto desde el cual construimos sus vectores de posición. Por eso todas las posiciones vectoriales se trasladan por el mismo vector constante $-c$.

Reconstruir una curva desde una curva coordenada. La representación coordenada no pierde información una vez fijado el marco. El capítulo 4 demostró que

$$x_F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es biyectiva. Podemos aplicar su inversa a cada valor temporal de una función con valores en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 5.3 — Reconstrucción de una curva desde sus coordenadas en un marco fijo Fijado un marco $F = (O, B)$, toda aplicación

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

determina una única aplicación

$$P : I \longrightarrow \mathcal{E}$$

tal que

$$\boxed{x_F(P(t)) = x(t)}$$

para todo $t \in I$.

Demostración. Como $x_F : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$ es biyectiva, para cada $t \in I$ existe un único punto

$$P(t) := x_F^{-1}(x(t)).$$

Esta asignación define una aplicación $P : I \to \mathcal{E}$ y satisface

$$x_F(P(t)) = x_F(x_F^{-1}(x(t))) = x(t).$$

Si $Q : I \to \mathcal{E}$ tuviera las mismas coordenadas, entonces $x_F(Q(t)) = x(t) = x_F(P(t))$

para todo t. La inyectividad de x_F implica $Q(t) = P(t)$ para cada t, luego $Q = P$. □ **Lectura guiada.** La proposición es punto a punto: no necesita continuidad ni derivadas. Fijado el marco, una historia completa de columnas determina una historia completa de puntos.

Dos marcos fijos describen la misma curva con columnas distintas. Sean

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B')$$

dos marcos fijos. Introduzcamos los mismos datos de cambio de marco usados en el capítulo 4:

$$c := \overrightarrow{OO'}, \qquad S := S_{B \leftarrow B'}.$$

Por proposición 5.2, $r_{O'}(t) = r_O(t) - c$.

Tomando componentes en la base B, $[r_{O'}(t)]_B = [r_O(t)]_B - [c]_B = x_F(t) - [c]_B$. El cambio de componentes de B a B' da $[r_{O'}(t)]_{B'} = S^{-1}[r_{O'}(t)]_B$. Como $x_{F'}(t) = [r_{O'}(t)]_{B'}$, obtenemos la ley completa.

Proposición 5.4 — Ley afín punto a punto entre dos marcos fijos Sean $F = (O, B)$ y $F' = (O', B')$ marcos fijos, con

$$c = \overrightarrow{OO'}, \qquad S = S_{B \leftarrow B'}.$$

Entonces, para todo $t \in I$,

$$\boxed{x_{F'}(t) = S^{-1}(x_F(t) - [c]_B)\,.}$$

Demostración. La derivación precedente prueba la fórmula usando proposición 5.2 y la ley de cambio de componentes del capítulo 4. Equivalentemente, puede aplicarse 4.51 al punto $P(t)$ para cada $t \in I$. Como ambos marcos son fijos, c y S no dependen de t. □ **Autoexplicación de la prueba.** La traslación del origen produce el término $-[c]_B$; el cambio de base produce el factor lineal S^{-1}. La columna cambia, pero el punto $P(t)$ que ambas columnas representan es el mismo.

Error plausible «Si $x_F(t)$ y $x_{F'}(t)$ son funciones distintas, entonces describen movimientos distintos». No necesariamente. Proposición 5.4 muestra precisamente cómo dos funciones coordenadas diferentes pueden representar la **misma** aplicación geométrica $P : I \to \mathcal{E}$.

Balance: objeto geométrico y descripciones fijas. Las relaciones construidas en esta sección pueden organizarse como

$$\boxed{P(t) \;\longleftrightarrow\; r_O(t) \;\longleftrightarrow\; x_F(t),}$$

siempre que las elecciones auxiliares correspondientes estén fijadas. Cambiar de origen modifica r_O mediante una traslación vectorial constante; cambiar de marco modifica x_F mediante una ley afín. Ninguna de estas operaciones, por sí sola, cambia el movimiento geométrico P. Esta distinción prepara la comparación entre posiciones correspondientes a **dos instantes distintos**. Esa comparación requerirá formar un desplazamiento entre puntos y pertenece a §4.

Cambiar origen sin cambiar la curva física. Ejercicio 5.5 · Transferencia y prueba Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento y sean $O, O' \in \mathcal{E}$ dos orígenes fijos con

$$c := \overrightarrow{OO'}.$$

Supón conocida la curva de posición relativa a O, $r_O : I \to V$.

1. Obtén la curva $r_{O'}$ relativa al origen O'.

2. Reconstruye $P(t)$ usando primero O y después O'.
3. Demuestra que ambas reconstrucciones producen el mismo punto para todo $t \in I$.

Solución desarrollada Por proposición 5.2,

$$\boxed{r_{O'}(t) = r_O(t) - c.}$$

Respecto de O, la reconstrucción del punto es $P(t) = O + r_O(t)$.
Respecto de O', debe ser

$$P(t) = O' + r_{O'}(t).$$

Como $O' = O + c$, sustituimos proposición 5.2:

$$\begin{aligned} O' + r_{O'}(t) &= (O + c) + (r_O(t) - c) \\ &= O + r_O(t). \end{aligned}$$

Por tanto, las dos expresiones reconstruyen exactamente el mismo punto $P(t)$ para cada valor temporal. Cambió el origen usado para representar la posición, no la curva física.

Una curva, dos marcos fijos. Ejercicio 5.6 · Cálculo e invariancia de representación Sea

$$F = (O, B), \qquad B = (e_1, e_2, e_3),$$

y define un segundo marco fijo por $O' = O + e_1, \qquad B' = (e_2, e_1, e_3)$. En el marco F, una curva tiene coordenadas

$$x_F(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha, \beta, \gamma : I \to \mathbb{R}$ son funciones arbitrarias.

1. Determina $[c]_B$ para $c = \overrightarrow{OO'}$ y la matriz $S = S_{B \leftarrow B'}$.
2. Usa proposición 5.4 para calcular $x_{F'}(t)$.
3. Reconstruye $P(t)$ desde ambos marcos y comprueba punto a punto que se obtiene el mismo punto.

Solución desarrollada Como $O' = O + e_1$,

$$c = e_1, \qquad [c]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas de $S_{B \leftarrow B'}$ son los vectores de B' expresados en B. Por tanto,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = S.$$

Proposición 5.4 da

$$\begin{aligned} x_{F'}(t) &= S^{-1}\left(x_F(t) - [c]_B\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) - 1 \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \beta(t) \\ \alpha(t) - 1 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Desde F reconstruimos

$$P(t) = O + \alpha(t)e_1 + \beta(t)e_2 + \gamma(t)e_3.$$

Desde F' obtenemos

$$\begin{aligned} P(t) &= O' + \beta(t)e_2 + (\alpha(t) - 1)e_1 + \gamma(t)e_3 \\ &= O + e_1 + \beta(t)e_2 + (\alpha(t) - 1)e_1 + \gamma(t)e_3 \\ &= O + \alpha(t)e_1 + \beta(t)e_2 + \gamma(t)e_3. \end{aligned}$$

Las columnas son distintas, pero ambas reconstruyen el mismo punto $P(t)$ en cada instante. La transformación de coordenadas cambia la descripción, no el movimiento geométrico.

Cierre conceptual: una curva, varias descripciones. La sección deja separadas tres capas:

$$\boxed{P : I \to \mathcal{E}, \qquad r_O : I \to V, \qquad x_F : I \to \mathbb{R}^3.}$$

La primera es el movimiento geométrico. Las otras dos dependen de elecciones auxiliares fijas. Proposición 5.2 describe el efecto de cambiar sólo el origen; proposición 5.3 garantiza que una curva coordenada determina unívocamente la curva geométrica cuando el marco está fijado; proposición 5.4 combina cambio de origen y cambio de base. Por tanto, comparar dos descripciones exige preguntar primero **qué objeto está cambiando**: el movimiento, el origen, la base o sólo sus números. En §4 compararemos, en cambio, dos posiciones de la misma curva correspondientes a tiempos distintos y construiremos a partir de ellas un desplazamiento temporal.

4. Desplazamiento temporal y velocidad media

Dos instantes, dos puntos y un vector entre ellos. Hasta ahora hemos estudiado una posición a la vez. Para un movimiento

$$P : I \longrightarrow \mathcal{E},$$

dos lecturas temporales $t_1, t_2 \in I$ seleccionan dos puntos

$$P(t_1), \qquad P(t_2) \in \mathcal{E}.$$

Comparar estas posiciones no significa restar números ni dividir puntos. La estructura afín del capítulo 4 ya nos proporciona el objeto correcto: el vector de desplazamiento que lleva el primer punto al segundo.

Activación Si el objeto vuelve al mismo punto después de cierto tiempo, ¿qué debe valer su desplazamiento neto entre esos dos instantes aunque durante el intervalo haya recorrido otros lugares?

Definición 5.6 — Desplazamiento entre dos instantes Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento y sean $t_1, t_2 \in I$. Definimos el **desplazamiento temporal** desde t_1 hasta t_2 por

$$\boxed{\Delta P_{t_1,t_2} := \overrightarrow{P(t_1)P(t_2)} \in V.}$$

El orden importa: $\Delta P_{t_1,t_2}$ apunta desde la posición correspondiente a t_1 hacia la posición correspondiente a t_2. Por las identidades afines ya demostradas en el capítulo 4, $\Delta P_{t_2,t_1} = -\Delta P_{t_1,t_2}$,

y, si $t_1 = t_2$, $\Delta P_{t_1,t_1} = 0$. En particular, un desplazamiento nulo entre dos instantes distintos no implica que el movimiento haya permanecido inmóvil entre ellos: sólo afirma que las posiciones inicial y final coinciden.

Desplazamiento no es distancia recorrida. El desplazamiento $\Delta P_{t_1,t_2}$ es un **vector**. Su norma es la distancia euclídea entre las dos posiciones extremas:

$$\|\Delta P_{t_1,t_2}\| = d(P(t_1), P(t_2)).$$

Esta cantidad sólo compara los extremos. No mide todavía cuánto camino se recorrió entre ellos. Un movimiento puede salir de un punto, seguir una trayectoria larga y regresar al mismo lugar; entonces $\Delta P_{t_1,t_2} = 0$,

aunque el camino recorrido no haya sido nulo. La longitud del recorrido se construirá más adelante a partir de particiones y longitud geométrica. Extremos frente a recorrido La norma del desplazamiento es la distancia entre las posiciones inicial y final. No debe llamarse automáticamente «distancia recorrida».

El intervalo temporal y el cociente medio. Para $t_1 \neq t_2$, definimos el incremento temporal orientado

$$\Delta t_{12} := t_2 - t_1 \neq 0.$$

Cuando describimos evolución desde un instante anterior a uno posterior tomaremos normalmente $t_1 < t_2$, de modo que $\Delta t_{12} > 0$. El dato geométrico disponible es $\Delta P_{t_1,t_2} \in V$; dividir ese vector por el escalar temporal produce de nuevo un vector.

Definición 5.7 — Velocidad media en un intervalo temporal Para $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 \neq t_2$, la **velocidad media** del movimiento entre ambos instantes es

$$\boxed{\bar{v}_{[t_1,t_2]} := \frac{\Delta P_{t_1,t_2}}{t_2 - t_1} \in V.}$$

La palabra *media* no presupone todavía una función de velocidad instantánea que estemos promediando. En este punto significa simplemente **desplazamiento neto por unidad de intervalo temporal**.[3]

[3] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I*, Expanded ed., Yale University Press, 2019, cap. 1, §1.3 «Average and instantaneous quantities», pp. 4–6; D. Kleppner y R. J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, 2.ª ed., Cambridge University Press, 2010, cap. 1, §§1.5–1.6, pp. 11–18.

Principio metodológico: primero el vector, después el cociente. Principio metodológico 5.4 — Antes de dividir por tiempo, formar un desplazamiento vectorial legítimo El cociente temporal debe construirse a partir de

$$\overrightarrow{P(t_1)P(t_2)} \in V,$$

no a partir de una división informal de puntos de $\mathcal{E}$ por números. Primero se forma un vector bien tipado; sólo entonces puede dividirse por un escalar temporal no nulo. Esta regla será decisiva en §5. Allí el paso de un intervalo temporal finito a uno cada vez más pequeño conservará exactamente el mismo principio de tipado: el numerador seguirá siendo un desplazamiento vectorial.

Auditoría dimensional y frontera con la velocidad instantánea. Si las posiciones espaciales tienen dimensión de longitud, entonces $[\Delta P] = L, \qquad [\Delta t] = T,$

y por tanto

$$\boxed{[\bar{v}] = \frac{L}{T}.}$$

La definición definición 5.7 sólo utiliza dos instantes distintos y un cociente finito. No hemos tomado ningún límite ni definido velocidad instantánea. Tampoco hemos introducido aceleración ni leyes dinámicas. El paso conceptual construido hasta aquí es

$$\boxed{P(t_1), P(t_2) \longrightarrow \Delta P_{t_1,t_2} \in V \longrightarrow \bar{v}_{[t_1,t_2]} \in V.}$$

Aún debemos demostrar cómo este desplazamiento se expresa mediante r_O, cómo se compone al introducir un tercer instante y cómo cambia su representación entre marcos fijos. Esos resultados completarán §4 antes de cualquier paso al límite.

El desplazamiento como diferencia de posiciones relativas. Sea $O \in \mathcal{E}$ un origen fijo. Las posiciones relativas a O son

$$r_O(t_1) = \overrightarrow{OP(t_1)}, \qquad r_O(t_2) = \overrightarrow{OP(t_2)}.$$

La ley del triángulo aplicada a $O, P(t_1), P(t_2)$ da

$$\overrightarrow{OP(t_1)} + \overrightarrow{P(t_1)P(t_2)} = \overrightarrow{OP(t_2)}.$$

Por tanto, el desplazamiento temporal puede recuperarse restando dos vectores de posición construidos respecto del mismo origen.

Proposición 5.5 — Desplazamiento temporal como diferencia de posiciones relativas Para cualquier origen fijo $O \in \mathcal{E}$ y cualesquiera $t_1, t_2 \in I$,

$$\boxed{\Delta P_{t_1,t_2} = r_O(t_2) - r_O(t_1).}$$

Demostración. Por definición 5.4 y definición 5.6,

$$r_O(t_i) = \overrightarrow{OP(t_i)}, \qquad \Delta P_{t_1,t_2} = \overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}.$$

La identidad afín anterior implica $r_O(t_1) + \Delta P_{t_1,t_2} = r_O(t_2),$

y, como los tres términos viven en V, podemos restar $r_O(t_1)$ en el espacio vectorial: $\Delta P_{t_1,t_2} = r_O(t_2) - r_O(t_1)$.

□ **Autoexplicación de la prueba.** No hemos restado puntos. Primero convertimos cada punto en un vector de posición respecto del mismo origen; sólo entonces tomamos una diferencia vectorial. El origen desaparecerá de la diferencia porque contribuye del mismo modo a ambos términos.

Aditividad al insertar un tercer instante. Sean $t_1, t_2, t_3 \in I$. La ley del triángulo entre los tres puntos de la curva produce inmediatamente una composición temporal de desplazamientos.

Proposición 5.6 — Aditividad temporal del desplazamiento Para cualesquiera $t_1, t_2, t_3 \in I$,

$$\boxed{\Delta P_{t_1,t_2} + \Delta P_{t_2,t_3} = \Delta P_{t_1,t_3}.}$$

Demostración. Por definición 5.6,

$$\Delta P_{t_1,t_2} = \overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}, \qquad \Delta P_{t_2,t_3} = \overrightarrow{P(t_2)P(t_3)}.$$

La ley del triángulo en el espacio afín da

$$\overrightarrow{P(t_1)P(t_2)} + \overrightarrow{P(t_2)P(t_3)} = \overrightarrow{P(t_1)P(t_3)},$$

que es exactamente la identidad afirmada. □ **Lectura guiada.** El resultado no supone que $t_1 < t_2 < t_3$; es una identidad algebraica de desplazamientos orientados. Cuando los tiempos están ordenados, además admite la lectura física natural de concatenar dos intervalos consecutivos.

La velocidad media y los cambios de descripción fija. Proposición 5.5 permite escribir, para cualquier origen fijo O,

$$\bar{v}_{[t_1,t_2]} = \frac{r_O(t_2) - r_O(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Si cambiamos a otro origen fijo $O' = O + c$, proposición 5.2 da $r_{O'}(t) = r_O(t) - c$. Por tanto, $r_{O'}(t_2) - r_{O'}(t_1) = r_O(t_2) - r_O(t_1)$. La traslación constante se cancela antes de dividir por el intervalo temporal. Ahora sean $F = (O, B)$ y $F' = (O', B')$ dos marcos fijos, con

$$c = \overrightarrow{OO'}, \qquad S = S_{B \leftarrow B'}.$$

Proposición 5.4 establece

$$x_{F'}(t) = S^{-1}(x_F(t) - [c]_B)\,.$$

Al restar los valores en t_2 y t_1,

$$x_{F'}(t_2) - x_{F'}(t_1) = S^{-1}(x_F(t_2) - x_F(t_1))\,.$$

Dividir por el mismo escalar $t_2 - t_1$ sólo transforma las componentes por la matriz lineal S^{-1}.

Proposición 5.7 — Velocidad media bajo cambios de origen y base fijos Sean $t_1 \neq t_2$. La velocidad media

$$\bar{v}_{[t_1,t_2]} = \frac{\Delta P_{t_1,t_2}}{t_2 - t_1} \in V$$

es independiente de la elección de origen fijo usada para representarla. Si $F = (O, B)$ y $F' = (O', B')$ son dos marcos fijos y $S = S_{B \leftarrow B'}$, entonces sus columnas satisfacen

$$\boxed{[\bar{v}_{[t_1,t_2]}]_{B'} = S^{-1}[\bar{v}_{[t_1,t_2]}]_B.}$$

Equivalentemente,

$$\boxed{[\bar{v}_{[t_1,t_2]}]_B = \frac{x_F(t_2) - x_F(t_1)}{t_2 - t_1}.}$$

Demostración. La independencia respecto del origen sigue de la proposición 5.5 y de la cancelación

$$(r_O(t_2) - c) - (r_O(t_1) - c) = r_O(t_2) - r_O(t_1).$$

Para las componentes, definición 5.5 y proposición 5.5 dan

$$[\Delta P_{t_1,t_2}]_B = x_F(t_2) - x_F(t_1).$$

Dividiendo por $t_2 - t_1$ obtenemos la segunda fórmula enmarcada. La ley de cambio de marco de la proposición 5.4 implica

$$x_{F'}(t_2) - x_{F'}(t_1) = S^{-1}(x_F(t_2) - x_F(t_1)),$$

y una nueva división por $t_2 - t_1$ produce

$$[\bar{v}_{[t_1,t_2]}]_{B'} = S^{-1}[\bar{v}_{[t_1,t_2]}]_B.$$

□ **Autoexplicación de la prueba.** El vector medio es el mismo objeto geométrico; lo que cambia de una base a otra es su columna. La parte traslacional del cambio de marco desaparece porque una diferencia de posiciones elimina cualquier término constante común.

Balance: diferencias temporales antes de los límites. Hasta aquí hemos construido tres hechos puramente finitos:

$$\boxed{\Delta P_{t_1,t_2} = r_O(t_2) - r_O(t_1),}$$

$$\boxed{\Delta P_{t_1,t_2} + \Delta P_{t_2,t_3} = \Delta P_{t_1,t_3},}$$

y

$$\boxed{[\bar{v}]_{B'} = S^{-1}[\bar{v}]_B}$$

para marcos fijos. Ninguna de estas identidades utiliza límites ni derivadas. Los ejercicios siguientes aplican estas propiedades y examinan un caso en que el desplazamiento neto —y por tanto la velocidad media— es cero aunque el movimiento no sea constante.

Composición temporal de desplazamientos. Ejercicio 5.7 · Prueba y tipado Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento y sean $t_1, t_2, t_3 \in I$ cualesquiera.

1. Usa proposición 5.5 para expresar $\Delta P_{t_1,t_2}$, $\Delta P_{t_2,t_3}$ y $\Delta P_{t_1,t_3}$ mediante una misma curva de posición relativa r_O.
2. Demuestra
$$\Delta P_{t_1,t_2} + \Delta P_{t_2,t_3} = \Delta P_{t_1,t_3}.$$
3. Explica por qué la suma del lado izquierdo está bien definida y por qué no se está sumando ningún punto de $\mathcal{E}$.

Solución desarrollada Fijemos un origen O. Por proposición 5.5,

$$\Delta P_{t_1,t_2} = r_O(t_2) - r_O(t_1),$$

$$\Delta P_{t_2,t_3} = r_O(t_3) - r_O(t_2),$$

y

$$\Delta P_{t_1,t_3} = r_O(t_3) - r_O(t_1).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Delta P_{t_1,t_2} + \Delta P_{t_2,t_3} &= (r_O(t_2) - r_O(t_1)) + (r_O(t_3) - r_O(t_2)) \\ &= r_O(t_3) - r_O(t_1) \\ &= \Delta P_{t_1,t_3}.\end{aligned}$$

Cada desplazamiento pertenece a V, de modo que la suma y las restas son operaciones del espacio vectorial. Los puntos $P(t_i) \in \mathcal{E}$ sólo intervienen al construir los desplazamientos; nunca se suman directamente entre sí.

Velocidad media cero en un movimiento no constante. Ejercicio 5.8 · Contraejemplo e interpretación Sean $A, B \in \mathcal{E}$, con $A \neq B$, y sea $T > 0$. Define

$$P : [0, T] \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + 4\frac{t}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)\overrightarrow{AB}.$$

1. Calcula $P(0)$, $P(T/2)$ y $P(T)$.
2. Demuestra que el movimiento no es constante.
3. Calcula $\Delta P_{0,T}$.
4. Calcula $\bar{v}_{[0,T]}$.
5. Explica por qué una velocidad media nula no implica que el punto haya ocupado siempre la misma posición durante el intervalo.

Solución desarrollada En los extremos,

$$P(0) = A, \qquad P(T) = A,$$

porque el coeficiente

$$4\frac{t}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

se anula para $t = 0$ y $t = T$. En cambio,

$$P\left(\frac{T}{2}\right) = A + 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AB} = B.$$

Como $A \neq B$, la aplicación P no es constante. Sin embargo,

$$\Delta P_{0,T} = \overrightarrow{P(0)P(T)} = \overrightarrow{AA} = 0.$$

Por definición 5.7,

$$\boxed{\bar{v}_{[0,T]} = \frac{\Delta P_{0,T}}{T} = 0.}$$

La velocidad media sólo usa el desplazamiento neto entre los extremos del intervalo. Aquí el movimiento parte de A, alcanza B en $T/2$ y regresa a A en T; por eso el desplazamiento total se cancela aunque la historia temporal sea no constante.

Cierre conceptual: lo que un cociente finito sí afirma. La sección ha construido una cadena puramente finita:

$$\boxed{P(t_1), P(t_2) \longrightarrow \Delta P_{t_1,t_2} \longrightarrow \bar{v}_{[t_1,t_2]}.}$$

El desplazamiento depende sólo de las dos posiciones extremas y vive en V; puede expresarse como diferencia de posiciones relativas respecto de cualquier origen fijo y compone aditivamente al insertar instantes intermedios. La velocidad media es ese vector dividido por un intervalo temporal no nulo. En particular, $\bar{v}_{[t_1,t_2]} = 0$

sólo implica $P(t_1) = P(t_2)$,

no que P sea constante entre ambos instantes. El siguiente nivel conceptual será preguntar qué ocurre cuando el segundo instante se acerca al primero. Esa pregunta pertenece a §5 y exigirá un límite; no forma parte de las definiciones ni resultados de esta sección.

5. Velocidad instantánea como derivada de una curva afín

Del cociente finito a una pregunta local. En §4 definimos, para $t_1 \neq t_2$,

$$\bar{v}_{[t_1,t_2]} = \frac{\overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}}{t_2 - t_1}.$$

Esta cantidad compara dos posiciones separadas por un intervalo temporal finito. Para preguntar por el comportamiento del movimiento **en un instante** t, fijamos la primera posición y hacemos variar la segunda: $t_1 = t, \qquad t_2 = t + h$. Mientras $h \neq 0$ y $t + h \in I$, el cociente correspondiente es $\frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} \in V$.

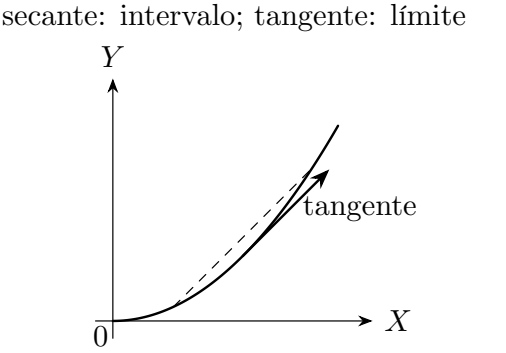


Figura 5.1. Para la parábola $Y = X^2/3$, la secante une dos instantes y la tangente tiene pendiente $2X/3$. En $X = 1{,}5$, esa pendiente vale uno. Véase §5.

La pregunta instantánea no consiste en «poner $h = 0$», porque entonces el cociente dejaría de estar definido. Consiste en estudiar si estos vectores se aproximan a un único vector cuando $h \to 0$.

Activación ¿Qué debe permanecer bien tipado mientras el intervalo temporal se hace cada vez más pequeño? ¿Por qué el numerador sigue siendo un vector aunque sus extremos sean puntos?

Derivar una curva con valores en V. M3 proporciona la derivada para funciones escalares. Aquí necesitamos reconstruir la extensión correspondiente a una curva

$$q : I \longrightarrow V.$$

Como V es un espacio euclídeo, dispone de una norma $\|\cdot\|$. Por tanto, tiene sentido preguntar si una familia de vectores converge en esa norma.

Definición 5.8 — Derivada de una curva con valores en V Sea $q : I \to V$ y sea t un punto interior de I. Si existe el límite

$$\boxed{q'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{q(t+h) - q(t)}{h}}$$

en la norma euclídea de V, decimos que q es **derivable en** t y llamamos a $q'(t) \in V$ su derivada en ese instante.

La condición de punto interior garantiza que podemos considerar valores de h positivos y negativos suficientemente pequeños con $t + h \in I$. Si t es un extremo de un intervalo, sólo hablaremos de derivada lateral cuando esa convención se declare explícitamente. Definición 5.8 no se importa como una caja negra desde M3. La derivada escalar es un prerrequisito; la extensión a una curva con valores en V forma parte de la interfaz matemática que debemos construir en este capítulo. Su relación con las componentes en una base fija se demostrará más adelante en esta misma sección.

Principio metodológico: derivar diferencias, no puntos. La forma de la definición 5.8 hace visible una operación esencial: antes de dividir por h, el numerador debe ser una **diferencia vectorial legítima**. Esto continúa exactamente el principio usado para la velocidad media.

Principio metodológico 5.5 — Derivar diferencias, no puntos Nunca interpretar una expresión como

$$\frac{P(t)}{t}$$

como velocidad. Un punto $P(t) \in \mathcal{E}$ no puede dividirse por un escalar. El cociente cinemático debe construirse a partir de un desplazamiento

$$\overrightarrow{P(t)P(t+h)} \in V.$$

Error de tipo Escribir $P(t+h) - P(t)$ sólo es legítimo si previamente se ha pasado a una representación vectorial, por ejemplo $r_O(t+h) - r_O(t)$. Intrínsecamente, entre dos puntos del espacio afín usamos el desplazamiento $\overrightarrow{P(t)P(t+h)}$. Esta disciplina evita que la notación de cálculo oculte la diferencia entre un punto del espacio afín y un vector del espacio asociado.

Definir: velocidad instantánea. Volvamos ahora al movimiento

$$P : I \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Para $h \neq 0$, el cociente

$$\frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h}$$

es precisamente la velocidad media entre t y $t+h$. Si estos vectores poseen un límite cuando el intervalo temporal colapsa sobre t, obtenemos una magnitud instantánea.

Definición 5.9 — Velocidad instantánea de una curva afín Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento y sea t un punto interior de I. Si existe el límite

$$\boxed{v(t) := \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} \in V,}$$

llamamos a $v(t)$ la **velocidad instantánea** del movimiento en t.[4]

En un extremo del intervalo sólo emplearemos un límite lateral cuando se declare explícitamente. La existencia de $v(t)$ no se presupone para todo movimiento: es una propiedad adicional de la curva en el instante considerado. La definición es intrínseca respecto de la estructura afín: su numerador es el desplazamiento entre dos puntos de la propia curva. Todavía no hemos demostrado su relación con $r'_O(t)$ ni con las derivadas de las coordenadas; esas equivalencias serán resultados de esta sección.

Principio metodológico: auditar las dimensiones de una derivada física. El cociente incremental conserva la misma estructura dimensional que la velocidad media. Si el parámetro t representa tiempo físico y el desplazamiento tiene dimensión de longitud,

$$\left[\frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} \right] = \frac{L}{T}.$$

Si el límite existe, no cambia esa dimensión.

Principio metodológico 5.6 — Auditar dimensiones en toda derivada física Para la velocidad,

$$[v] = \frac{L}{T}.$$

[4]Shankar, *Fundamentals of Physics I*, cap. 2, §2.5 «Derivatives of the position vector **r**», pp. 26–27; Kleppner–Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, cap. 1, §1.6 «Velocity and Acceleration», pp. 13–18.

Cuando más adelante se introduzca la aceleración como derivada temporal de la velocidad, deberá cumplirse

$$[a] = \frac{L}{T^2}.$$

La segunda igualdad es aquí sólo una **previsión dimensional**; la aceleración no se define en esta sección.

Balance: del intervalo finito al límite vectorial. La transición conceptual puede resumirse así:

$$\boxed{\frac{\Delta P_{t,t+h}}{h} = \frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} \quad \xrightarrow[h\to 0]{} \quad v(t) \in V,}$$

cuando el límite existe. La novedad de §5 no es abandonar el tipado construido antes, sino conservarlo durante el paso al límite: el numerador sigue siendo un desplazamiento vectorial, el cociente vive en V y el límite —si existe— también vive en V. Quedan por demostrar tres hechos fundamentales antes de completar esta sección: cómo se calcula la derivada de una curva V-valuada componente a componente, por qué $v(t) = r'_O(t)$ para cualquier origen fijo y cómo se expresan sus componentes en un marco fijo. Ninguno de ellos requiere todavía introducir recta tangente, regularidad o instantes de reposo; esos conceptos pertenecen a §6.

Proposición: derivación componente a componente. Proposición 5.8 — Derivación componente a componente en V Sea

$$q : I \longrightarrow V$$

y sea $B = (e_1, e_2, e_3)$ una base fija. Escribamos

$$[q(t)]_B = \begin{pmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ q^3(t) \end{pmatrix}.$$

Para un punto interior $t \in I$, la derivada $q'(t)$ existe si y sólo si existen las tres derivadas escalares

$$(q^1)'(t), \qquad (q^2)'(t), \qquad (q^3)'(t).$$

En ese caso,

$$\boxed{[q'(t)]_B = \begin{pmatrix} (q^1)'(t) \\ (q^2)'(t) \\ (q^3)'(t) \end{pmatrix}.}$$

Demostración. Supongamos primero que las tres derivadas escalares existen. Para $h \neq 0$ suficientemente pequeño,

$$\frac{q(t+h) - q(t)}{h} = \sum_{i=1}^{3} \frac{q^i(t+h) - q^i(t)}{h}\, e_i.$$

Definamos

$$w := \sum_{i=1}^{3} (q^i)'(t) e_i.$$

Entonces, por la desigualdad triangular,

$$\left\| \frac{q(t+h) - q(t)}{h} - w \right\| \leq \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{q^i(t+h) - q^i(t)}{h} - (q^i)'(t) \right| \|e_i\|.$$

Cada término escalar del lado derecho tiende a cero cuando $h \to 0$. Como sólo hay tres términos y los vectores de la base son fijos, el lado derecho tiende a cero. Por definición 5.8, $q'(t) = w$. Por tanto,

$$[q'(t)]_B = \begin{pmatrix} (q^1)'(t) \\ (q^2)'(t) \\ (q^3)'(t) \end{pmatrix}.$$

Supongamos ahora que $q'(t)$ existe. Sea

$$E = (f_1, f_2, f_3)$$

una base ortonormal de V, cuya existencia quedó construida en el capítulo 4. Si

$$y_h := \frac{q(t+h) - q(t)}{h},$$

entonces $y_h \longrightarrow q'(t)$
en norma. Para cada j,

$$\left| \langle y_h - q'(t), f_j \rangle \right| \leq \|y_h - q'(t)\|$$

por Cauchy–Schwarz. Por tanto, las componentes de y_h en la base ortonormal E convergen a las componentes de $q'(t)$ en E. Sea

$$S = S_{E \leftarrow B}.$$

La ley de cambio de base del capítulo 4 da $[y_h]_B = S^{-1}[y_h]_E$. Como S^{-1} es una matriz fija, cada componente de $[y_h]_B$ es una combinación lineal fija de las componentes de $[y_h]_E$ y, por las leyes escalares de límites de M3, $[y_h]_B \longrightarrow [q'(t)]_B$.

Pero

$$[y_h]_B = \begin{pmatrix} \dfrac{q^1(t+h) - q^1(t)}{h} \\ \dfrac{q^2(t+h) - q^2(t)}{h} \\ \dfrac{q^3(t+h) - q^3(t)}{h} \end{pmatrix}.$$

Luego existen las tres derivadas escalares y sus valores son precisamente las componentes de $q'(t)$. □ El contenido de la proposición 5.8 es importante por una razón metodológica: podemos **calcular** una derivada vectorial componente a componente en cualquier base fija, pero la derivada resultante sigue siendo un vector de V, no una columna privilegiada.

Proposición: la velocidad es la derivada del vector de posición. Fijemos un origen $O \in \mathcal{E}$ y consideremos la curva de posición relativa

$$r_O(t) = \overrightarrow{OP(t)}.$$

La diferencia entre dos valores de esta curva es exactamente el desplazamiento temporal de §4.

Proposición 5.9 — Equivalencia entre velocidad afín y derivada del vector de posición Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento y sea t un punto interior de I. Para cualquier origen fijo O, la velocidad $v(t)$ existe si y sólo si existe $r'_O(t)$, y en ese caso

$$\boxed{v(t) = r'_O(t).}$$

Demostración. Por proposición 5.5, aplicado a los instantes t y $t + h$,

$$\overrightarrow{P(t)P(t+h)} = r_O(t+h) - r_O(t).$$

Por tanto, para todo $h \neq 0$ admisible,

$$\frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} = \frac{r_O(t+h) - r_O(t)}{h}.$$

Los dos cocientes incrementales son literalmente el mismo vector de V. En consecuencia, uno posee límite cuando $h \to 0$ si y sólo si lo posee el otro, y cuando existe el límite sus valores coinciden: $v(t) = r'_O(t)$.

□ proposición 5.9 no identifica el punto $P(t)$ con un vector. La derivada aparece después de elegir un origen sólo porque r_O convierte la curva afín en una curva V-valuada; el cociente incremental que determina la velocidad ya era intrínseco.

Corolario: cambiar un origen fijo no cambia la velocidad. La fórmula anterior permite separar una dependencia descriptiva de una cantidad geométrica.

Proposición 5.10 — Independencia de la velocidad respecto de un cambio de origen fijo Sean $O, O' \in \mathcal{E}$ dos orígenes fijos. Si

$$O' = O + c, \qquad c \in V$$

con c independiente de t, entonces, donde la velocidad exista,

$$\boxed{r'_{O'}(t) = r'_O(t) = v(t).}$$

Demostración. Por proposición 5.2,

$$r_{O'}(t) = r_O(t) - c.$$

Como c es constante respecto de t, $r'_{O'}(t) = r'_O(t) - 0 = r'_O(t)$.

Proposición 5.9 identifica ambas derivadas con la misma velocidad intrínseca $v(t)$. □ La hipótesis de **origen fijo** es esencial para el alcance de este capítulo. Si el origen dependiera del tiempo aparecería un término adicional al derivar. Ese problema pertenece a los marcos móviles posteriores y no se anticipará aquí.

Proposición: componentes de la velocidad en un marco fijo. Fijemos ahora un marco geométrico

$$F = (O, B)$$

cuyos datos no dependen del tiempo. La curva coordenada es $x_F(t) = [r_O(t)]_B$.

Proposición 5.11 — Componentes de la velocidad en un marco fijo Sea $P : I \to \mathcal{E}$ derivable en t y sea $F = (O, B)$ un marco fijo. Si

$$x_F(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix},$$

entonces

$$\boxed{[v(t)]_B = \frac{d}{dt} x_F(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{pmatrix}.}$$

Demostración. Por proposición 5.9,

$$v(t) = r'_O(t).$$

Como B es una base fija, proposición 5.8 aplicado a la curva $r_O : I \to V$ permite derivar sus componentes una a una: $[r'_O(t)]_B = \frac{d}{dt}[r_O(t)]_B$. Pero

$$[r_O(t)]_B = x_F(t).$$

Por tanto, $[v(t)]_B = \frac{d}{dt} x_F(t)$.

□ La igualdad anterior no define la velocidad por coordenadas: expresa en una base fija el vector ya definido intrínsecamente por la definición 5.9. Si cambiamos a otra base fija, las columnas cambian según la ley lineal correspondiente, mientras el vector $v(t) \in V$ permanece siendo el mismo objeto geométrico.

Balance. La cadena construida en §§5.7–5.10 queda cerrada:

$$\boxed{\text{cociente incremental afín} \longrightarrow v(t) \longleftrightarrow r'_O(t) \longleftrightarrow \frac{d}{dt} x_F(t)}$$

con una condición que debe permanecer visible: el origen y la base usados para derivar coordenadas son **fijos**. Proposición 5.8 justifica la derivación componente a componente sin importar cálculo multivariable. Proposición 5.9 muestra que la velocidad es la derivada de cualquier vector de posición construido desde un origen fijo. Proposición 5.10 demuestra que el origen fijo se elimina al derivar. Proposición 5.11 proporciona la regla práctica de cálculo en coordenadas sin confundir la representación con el vector. Los ejercicios siguientes obligarán a ejecutar esta cadena desde el cociente incremental, comprobar su independencia respecto del origen y reparar una notación de tipo incorrecto. La recta tangente, la regularidad, los instantes de reposo y la aceleración permanecen fuera de §5.

Del cociente secante al vector velocidad. Ejercicio 5.9 · Derivación y reconstrucción intrínseca Sea $F = (O, B)$ un marco fijo con $B = (e_1, e_2, e_3)$ y sea $P : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ el movimiento definido por

$$r_O(t) = t^2 e_1 + t^3 e_2 + 2te_3.$$

1. Escribe $\overrightarrow{P(1)P(1+h)}$ en la base B.
2. Calcula, para $h \neq 0$, el cociente
$$\frac{\overrightarrow{P(1)P(1+h)}}{h}.$$
3. Haz $h \to 0$ y determina $v(1)$ usando definición 5.9, sin comenzar derivando directamente las coordenadas.
4. Verifica después el resultado mediante proposición 5.11.

Solución desarrollada Por proposición 5.5, el desplazamiento entre los instantes 1 y $1 + h$ es

$$\overrightarrow{P(1)P(1+h)} = r_O(1+h) - r_O(1).$$

Como $r_O(1) = e_1 + e_2 + 2e_3$
y

$$r_O(1+h) = (1+h)^2 e_1 + (1+h)^3 e_2 + 2(1+h)e_3,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P(1)P(1+h)} &= ((1+h)^2 - 1)e_1 + ((1+h)^3 - 1)e_2 + 2he_3 \\ &= (2h + h^2)e_1 + (3h + 3h^2 + h^3)e_2 + 2he_3.\end{aligned}$$

Para $h \neq 0$,

$$\frac{\overrightarrow{P(1)P(1+h)}}{h} = (2+h)e_1 + (3 + 3h + h^2)e_2 + 2e_3.$$

Al tomar el límite en V,

$$\boxed{v(1) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3.}$$

La verificación coordenada usa

$$x_F(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 2t \end{pmatrix},$$

de modo que proposición 5.11 da

$$[v(1)]_B = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 2t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que representa el mismo vector obtenido intrínsecamente.

Independencia del origen. Ejercicio 5.10 · Invariancia y prueba Conserva el movimiento y la base B del ejercicio 5.9. Elige ahora otro origen fijo

$$O' = O + c, \qquad c = e_1 - 2e_2 + e_3.$$

1. Determina $r_{O'}(t)$.
2. Forma directamente $(r_{O'}(1+h) - r_{O'}(1))/h$.
3. Calcula el límite cuando $h \to 0$.
4. Explica algebraicamente por qué el mismo argumento funciona para cualquier traslación fija $O' = O + c$.

Solución desarrollada Por proposición 5.2,

$$r_{O'}(t) = r_O(t) - c.$$

Por tanto, $r_{O'}(t) = (t^2 - 1)e_1 + (t^3 + 2)e_2 + (2t - 1)e_3$.

Al formar la diferencia incremental, el vector constante c se cancela:

$$\begin{aligned} r_{O'}(1+h) - r_{O'}(1) &= (r_O(1+h) - c) - (r_O(1) - c) \\ &= r_O(1+h) - r_O(1). \end{aligned}$$

En consecuencia, para $h \neq 0$,

$$\frac{r_{O'}(1+h) - r_{O'}(1)}{h} = \frac{r_O(1+h) - r_O(1)}{h},$$

y ejercicio 5.9 ya calculó el límite del lado derecho. Así,

$$\boxed{r'_{O'}(1) = r'_O(1) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3.}$$

El argumento no usa ninguna propiedad especial de c salvo que sea **constante respecto de** t. Por eso cualquier cambio de origen fijo desaparece al formar la diferencia y, por la proposición 5.10, no altera la velocidad.

ejercicio 5.11 — Por qué $P(t)/t$ no es velocidad. Ejercicio 5.11 · Error plausible y reparación Para el movimiento del ejercicio 5.9, un estudiante escribe

$$\text{«}v(t) = \frac{P(t)}{t}\text{»}.$$

1. Explica por qué la expresión está mal tipada en el espacio afín.
2. Si el estudiante intenta repararla eligiendo un origen O y escribiendo $r_O(t)/t$, explica por qué esa cantidad tampoco es, en general, la velocidad instantánea.
3. Compara en $t = 1$ el vector $r_O(1)/1$ con el valor correcto $v(1)$.
4. Escribe la fórmula correcta que debe sustituir al razonamiento del estudiante.

Solución desarrollada El punto $P(t)$ pertenece a $\mathcal{E}$, no al espacio vectorial V. En la estructura afín no existe una operación de división de puntos por escalares, de modo que $P(t)/t$ no está definida.

Si elegimos un origen, sí podemos formar el vector $r_O(t) = \overrightarrow{OP(t)}$ y dividirlo por un escalar no nulo. Pero

$$\frac{r_O(t)}{t}$$

compara la posición relativa al origen con el valor del parámetro medido desde 0; no estudia el cambio local de la posición alrededor del instante t. Además, depende de la elección de origen. En $t = 1$, $\frac{r_O(1)}{1} = e_1 + e_2 + 2e_3$,

mientras ejercicio 5.9 demostró que

$$v(1) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3.$$

Los vectores son distintos. La reparación correcta consiste en formar primero un desplazamiento entre dos posiciones cercanas y sólo después dividir por el intervalo temporal:

$$\boxed{v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h}.}$$

Equivalentemente, tras elegir cualquier origen **fijo**, proposición 5.9 permite escribir

$$v(t) = r'_O(t).$$

Cierre conceptual: derivar sin perder la geometría. La sección ha construido la velocidad instantánea sin identificar puntos con vectores. El paso fundamental es

$$\boxed{P(t), P(t+h) \longrightarrow \overrightarrow{P(t)P(t+h)} \longrightarrow \frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} \longrightarrow v(t) \in V.}$$

Cuando se elige un origen fijo, el mismo vector puede calcularse como

$$\boxed{v(t) = r'_O(t),}$$

y, en un marco fijo $F = (O, B)$, sus componentes satisfacen

$$\boxed{[v(t)]_B = \frac{d}{dt} x_F(t).}$$

Estas fórmulas no crean tres conceptos distintos de velocidad. Son tres niveles de descripción del mismo objeto: definición afín intrínseca, representación mediante vector de posición y representación mediante componentes. El cambio de origen fijo desaparece al derivar, mientras un cambio de base fija transforma sólo la columna del vector. Ejercicio 5.9 muestra cómo nace el límite desde secantes afines; ejercicio 5.10 hace visible la invariancia respecto del origen; ejercicio 5.11 derrota el falso amigo $P(t)/t$. El capítulo ya puede pasar, en §6, de la existencia del vector velocidad a la geometría de la dirección tangente, la regularidad y los instantes con velocidad nula. Todavía no se define aceleración ni se introduce dinámica.

6. Tangente, regularidad e instantes de reposo

Activación: una velocidad no nula determina una dirección. En §5 construimos la velocidad instantánea como un vector

$$v(t_0) \in V.$$

Si este vector es no nulo, contiene una dirección geométrica bien determinada. Esa dirección debe compararse con las secantes de la curva que pasan por el punto

$$P(t_0).$$

Para $h \neq 0$ y $t_0 + h \in I$, la secante entre $P(t_0)$ y $P(t_0 + h)$ posee como vector director el desplazamiento

$$\overrightarrow{P(t_0)P(t_0 + h)}.$$

El mismo vector director puede reescalarse por cualquier escalar no nulo sin cambiar la recta. En particular, podemos usar

$$q_h := \frac{\overrightarrow{P(t_0)P(t_0 + h)}}{h}.$$

Por definición 5.9, $q_h \longrightarrow v(t_0) \qquad (h \to 0)$

cuando la velocidad existe. Así, en un instante con velocidad no nula, los vectores directores de las secantes pueden elegirse de modo que converjan al vector velocidad.

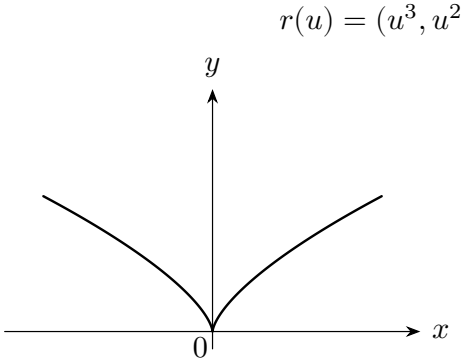


Figura 5.2. La curva $r(u) = (u^3, u^2)$ tiene $r'(0) = 0$. La fórmula del vector tangente unitario $r'/\|r'\|$ no está definida allí. El ejemplo obliga a comprobar regularidad antes de usar esa expresión. Véase §6.

Activación Si dos vectores directores difieren sólo por un factor escalar no nulo, ¿describen rectas diferentes o la misma recta? ¿Qué información conserva entonces la recta y qué información del movimiento pierde?

Qué afirmamos —y qué no— al hablar de secantes. Para cada $h \neq 0$, definamos la recta secante afín

$$\mathcal{S}_h := \left\{ P(t_0) + \lambda \, \overrightarrow{P(t_0)P(t_0 + h)} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como $\overrightarrow{P(t_0)P(t_0 + h)} = h \, q_h$,

y $h \neq 0$, también podemos escribir

$$\mathcal{S}_h = \{P(t_0) + \mu q_h : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Esta segunda expresión es la útil para el límite porque

$$q_h \to v(t_0).$$

No introduciremos aquí una topología sobre el conjunto de rectas ni afirmaremos una convergencia de conjuntos $\mathcal{S}_h$. El contenido suficiente para este capítulo es más elemental: **las secantes admiten vectores directores que convergen al vector velocidad**.

Definición 5.10 — Instante regular Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento derivable en t_0. Decimos que t_0 es un **instante regular** si

$$\boxed{v(t_0) \neq 0.}$$

La condición de regularidad no afirma que la velocidad sea constante ni que la trayectoria sea una recta. Sólo garantiza que, en ese instante, la velocidad proporciona un vector director no nulo. El calificativo «regular» pertenece aquí a la **parametrización**: exige una propiedad de la derivada de la aplicación P. No debe confundirse todavía con una clasificación abstracta de la trayectoria como conjunto geométrico.

Definir: recta tangente afín. Definición 5.11 — Recta tangente afín en un instante regular Si t_0 es regular, definimos la **recta tangente afín** al movimiento en t_0 por

$$\boxed{\mathcal{T}_{t_0} := \{P(t_0) + \lambda v(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

La recta tangente contiene el punto $P(t_0)$ y utiliza $v(t_0)$ como vector director. Como toda recta afín, no distingue entre $v(t_0)$ y cualquier múltiplo escalar no nulo de ese vector. Por ello la recta tangente conserva una **dirección geométrica**, pero no retiene por sí sola la magnitud ni el sentido temporal completo de la velocidad.

Proposición: la dirección tangente nace de las secantes. Proposición 5.12 — Recta tangente en un instante regular Sea $P : I \to \mathcal{E}$ derivable en un punto interior t_0 y supongamos que

$$v(t_0) \neq 0.$$

Para $h \neq 0$ suficientemente pequeño, sea

$$q_h := \frac{\overrightarrow{P(t_0)P(t_0+h)}}{h}.$$

Entonces, para $h \neq 0$ suficientemente pequeño:

1. $q_h \neq 0$ y es un vector director de la secante $\mathcal{S}_h$;
2. $$q_h \longrightarrow v(t_0);$$
3. la recta afín determinada por $P(t_0)$ y $v(t_0)$ es
$$\mathcal{T}_{t_0} = \{P(t_0) + \lambda v(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\};$$

4. para todo $c \neq 0$,

$$\{P(t_0) + \lambda\, c\, v(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathcal{T}_{t_0}.$$

Demostración. Por definición 5.9,

$$q_h \longrightarrow v(t_0) \neq 0.$$

Tomemos $\varepsilon = \|v(t_0)\|/2$. Existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < |h| < \delta$, $\|q_h - v(t_0)\| < \frac{\|v(t_0)\|}{2}$. Si para uno de esos valores fuese $q_h = 0$, entonces $\|v(t_0)\| = \|q_h - v(t_0)\| < \frac{\|v(t_0)\|}{2}$,

una contradicción. Por tanto, $q_h \neq 0$ para h suficientemente pequeño. Además, para $h \neq 0$, $\overrightarrow{P(t_0)P(t_0+h)} = h\, q_h$. Como multiplicar un vector director no nulo por un escalar no nulo no cambia la recta que genera,

$$\mathcal{S}_h = \{P(t_0) + \mu q_h : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

La recta límite se define entonces por el vector no nulo $v(t_0)$, y por la definición 5.11 es precisamente

$$\mathcal{T}_{t_0} = \{P(t_0) + \lambda v(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Finalmente, si $c \neq 0$,

$$\{P(t_0) + \lambda c\, v(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{P(t_0) + \mu v(t_0) : \mu \in \mathbb{R}\},$$

porque $\mu = \lambda c$ recorre todos los números reales cuando λ los recorre. Por tanto, reescalar un vector director no nulo no altera la recta tangente. □ proposición 5.12 justifica la recta tangente al nivel elemental adoptado en este tratado: no necesitamos una teoría general de variedades ni una noción abstracta de convergencia de rectas. Basta la convergencia de los vectores secantes escalados al vector velocidad.

Principio metodológico: el dibujo no contiene la parametrización. Principio metodológico 5.7 — No leer la tangente temporal sólo desde el dibujo de la trayectoria La imagen geométrica de una curva puede sugerir una dirección tangente, pero no determina por sí sola el vector velocidad.

El vector $v(t_0)$ depende de cómo la curva está parametrizada en torno a t_0; la recta tangente olvida parte de esa información porque todos los múltiplos no nulos de $v(t_0)$ generan la misma recta.

Así, debemos distinguir:

$$\boxed{\text{recta tangente} \neq \text{vector velocidad.}}$$

La primera es una recta afín; el segundo es un vector de V con magnitud y sentido. Más adelante formalizaremos cómo cambia la velocidad bajo reparametrización, pero esa teoría no se necesita para definir la recta tangente en el caso regular.

Balance del caso regular. Para un instante regular hemos construido la cadena

$$\boxed{\text{secantes parametrizadas} \longrightarrow q_h \longrightarrow v(t_0) \neq 0 \longrightarrow \mathcal{T}_{t_0}.}$$

El punto clave es que la tangencia se obtiene sin abandonar la estructura afín: las secantes y la tangente son rectas de $\mathcal{E}$, mientras sus vectores directores viven en V. Queda deliberadamente abierto el caso

$$v(t_0) = 0.$$

Cuando la velocidad se anula, definición 5.11 no produce un vector director no nulo y debemos separar cuidadosamente «instante de reposo» de «trayectoria geométricamente degenerada». A continuación analizamos ese caso; todavía no se introduce aceleración.

El caso degenerado: cuando la velocidad se anula. Supongamos ahora que el movimiento es derivable en t_0 pero

$$v(t_0) = 0.$$

En este caso, el procedimiento de la definición 5.11 no produce una recta tangente: el vector cero no puede actuar como vector director de una recta afín. Esto no significa, sin embargo, que la trayectoria geométrica tenga necesariamente una esquina, una cúspide o una degeneración como conjunto. La dificultad pertenece primero a la **parametrización**. La velocidad pregunta cómo cambia $P(t)$ respecto del parámetro temporal; la imagen

$$\Gamma = P(I)$$

sólo registra qué puntos fueron recorridos. Dos movimientos pueden tener la misma imagen y comportarse de forma distinta respecto del parámetro.

Definición 5.12 — Instante de reposo Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento derivable en t_0. Decimos que t_0 es un **instante de reposo** si

$$\boxed{v(t_0) = 0.}$$

La definición es puntual. Afirma que la velocidad se anula en ese instante; no afirma que el movimiento sea constante en un intervalo alrededor de t_0. Por tanto,

$$\boxed{\text{instante de reposo} \not\Rightarrow \text{movimiento constante en un entorno}}$$

sin hipótesis adicionales.

Primer contraste: reposo instantáneo sin reposo permanente. Sea $u \in V$ no nulo y fijemos un punto $A \in \mathcal{E}$. Consideremos

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + t^3 u.$$

Respecto del origen A, la curva de posición es $r_A(t) = t^3 u$,
y por la proposición 5.9, $v(t) = r'_A(t) = 3t^2 u$. En particular,

$$\boxed{v(0) = 0,}$$

de modo que $t = 0$ es un instante de reposo según la definición 5.12. Pero el movimiento no es constante: si $t \neq 0$, entonces $P(t) = A + t^3 u \neq A$. El punto se aproxima a A, alcanza velocidad nula en $t = 0$ y continúa ocupando posiciones distintas para valores posteriores del parámetro.

Segundo contraste: la misma imagen puede admitir una parametrización regular. El ejemplo anterior permite aislar la diferencia entre movimiento e imagen. Como la función

$$t \longmapsto t^3$$

recorre todos los números reales, la trayectoria de P es $\Gamma_P = \{A + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$,
es decir, una recta afín completa. Consideremos ahora otro movimiento

$$Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad Q(s) = A + su.$$

Su trayectoria es exactamente la misma:

$$\Gamma_Q = \{A + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} = \Gamma_P.$$

Sin embargo, $v_Q(s) = u \neq 0$
para todo s, mientras que P satisface

$$v_P(0) = 0.$$

Así, una velocidad nula en una parametrización no autoriza a concluir que la **imagen geométrica** sea singular o degenerada. En este ejemplo, la imagen es la misma recta afín que admite la parametrización regular Q. Error plausible «Si $v(t_0) = 0$, entonces la trayectoria no tiene dirección geométrica en $P(t_0)$.»

La conclusión es demasiado fuerte. Lo único que podemos afirmar con las definiciones 5.10–5.12 es que **esa parametrización**, en ese instante, no suministra un vector velocidad no nulo con el cual definir definición 5.11. La geometría de la imagen puede ser perfectamente simple, como muestra $P(t) = A + t^3 u$.

Qué sí puede concluirse de $v(t_0) = 0$. De la igualdad $v(t_0) = 0$
podemos concluir exactamente:

- t_0 no es regular según la definición 5.10;
- t_0 es un instante de reposo según la definición 5.12;
- definición 5.11 no define allí una recta tangente usando la velocidad como vector director.

No podemos concluir sólo a partir de esa igualdad:

- que P sea constante cerca de t_0;
- que la imagen $P(I)$ sea un punto;
- que la trayectoria tenga una esquina o una cúspide;
- que no exista otra parametrización de la misma imagen con velocidad no nula.

La distinción puede resumirse así:

propiedad de la parametrización $\neq$ propiedad automática de la imagen.

Balance del caso de reposo. §6 distingue ahora dos regímenes:

$v(t_0) \neq 0$	$\Longrightarrow$ instante regular y recta tangente definida por la definición 5.11,
$v(t_0) = 0$	$\Longrightarrow$ instante de reposo; definición 5.11 no se aplica directamente.

El segundo caso no debe interpretarse como una afirmación sobre la complejidad geométrica de la trayectoria. El ejemplo $A+t^3u$ muestra que una parametrización puede detenerse instantáneamente sobre una imagen tan simple como una recta. Los ejercicios 5.12–5.13 usarán estas dos ideas: primero calcular una recta tangente en el caso regular; después comparar dos parametrizaciones de una misma recta, una regular y otra con velocidad nula en un instante. La aceleración continúa fuera de §6.

Recta tangente desde la velocidad. Ejercicio 5.12 · Geometría y cálculo Sea $F = (O, B)$ un marco fijo con $B = (e_1, e_2, e_3)$ y sea

$$r_O(t) = t^2 e_1 + t e_2 + t^3 e_3, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Considera el instante $t_0 = 1$.

1. Calcula $P(1)$ y $v(1)$.
2. Verifica que $t_0 = 1$ es regular.
3. Escribe la recta tangente $\mathcal{T}_1$ en forma afín.
4. Sustituye el vector director $v(1)$ por $-2v(1)$ y demuestra directamente que se obtiene la misma recta.

Solución desarrollada Como

$$r_O(1) = e_1 + e_2 + e_3,$$

tenemos $P(1) = O + e_1 + e_2 + e_3$. Por proposición 5.11,

$$[v(t)]_B = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{v(1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3.}$$

Como $v(1) \neq 0$, definición 5.10 implica que $t_0 = 1$ es regular. Por definición 5.11,

$$\boxed{\mathcal{T}_1 = \{O + e_1 + e_2 + e_3 + \lambda(2e_1 + e_2 + 3e_3) : \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

Si usamos en cambio el vector director

$$-2v(1) = -4e_1 - 2e_2 - 6e_3,$$

obtenemos

$$\widetilde{\mathcal{T}}_1 = \{P(1) + \mu[-2v(1)] : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Si ponemos

$$\lambda = -2\mu,$$

entonces λ recorre todo $\mathbb{R}$ cuando μ lo recorre, y por ello

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{T}}_1 = \mathcal{T}_1.}$$

La recta tangente depende de la dirección generada por el vector velocidad, no de una normalización particular de su vector director.

Velocidad nula con la misma imagen geométrica. Ejercicio 5.13 · Contraejemplo y distinción parametrización–imagen Sean $A \in \mathcal{E}$ y $u \in V$ con $u \neq 0$. Considera los movimientos

$$P(t) = A + t^3 u, \qquad Q(s) = A + su, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

1. Demuestra que $P(\mathbb{R}) = Q(\mathbb{R})$.
2. Calcula las velocidades $v_P(t)$ y $v_Q(s)$.
3. Clasifica el parámetro 0 para cada movimiento usando definición 5.10 y definición 5.12.
4. Explica por qué $v_P(0) = 0$ no permite concluir que la imagen de P tenga una esquina, una cúspide o se reduzca a un punto.
5. ¿Qué recta tangente proporciona definición 5.11 para Q en $s = 0$? ¿Por qué definición 5.11 no puede usarse directamente para P en $t = 0$?

Solución desarrollada La función real

$$t \longmapsto t^3$$

es sobreyectiva sobre $\mathbb{R}$. Por tanto,

$$P(\mathbb{R}) = \{A + t^3 u : t \in \mathbb{R}\} = \{A + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Para Q,

$$Q(\mathbb{R}) = \{A + su : s \in \mathbb{R}\} = \{A + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Luego

$$\boxed{P(\mathbb{R}) = Q(\mathbb{R}).}$$

Tomando A como origen auxiliar y usando proposición 5.9, $v_P(t) = \frac{d}{dt}(t^3 u) = 3t^2 u$, mientras

$$v_Q(s) = \frac{d}{ds}(su) = u.$$

Así, $v_P(0) = 0, \qquad v_Q(0) = u \neq 0$. Por definición 5.12, $t = 0$ es un instante de reposo para P. Por definición 5.10, $s = 0$ es un instante regular para Q. Sin embargo, ambos movimientos poseen exactamente la misma imagen: una recta afín completa. Por eso la anulación de $v_P(0)$ no autoriza a atribuir por sí sola una singularidad geométrica a la imagen. Lo que falla en ese instante es la posibilidad de usar la velocidad de **esa parametrización** como vector director no nulo.

Para Q, definición 5.11 da

$$\boxed{\mathcal{T}_0^{\,Q} = \{A + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\},}$$

que coincide con toda la trayectoria geométrica. Para P, definición 5.11 no se aplica directamente en $t = 0$ porque requeriría un vector director no nulo y

$$v_P(0) = 0.$$

El contraste muestra exactamente la separación buscada:

$$\boxed{\text{misma imagen } \not\Rightarrow \text{ misma regularidad de la parametrización.}}$$

Cierre conceptual: dirección tangente y fallo de la parametrización. La sección distingue dos situaciones sin introducir todavía ninguna estructura dinámica. Si

$$v(t_0) \neq 0,$$

el instante es regular y la velocidad determina la recta tangente afín

$$\mathcal{T}_{t_0} = \{P(t_0) + \lambda v(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Las secantes poseen vectores directores escalados que convergen a $v(t_0)$, y cualquier múltiplo no nulo de ese vector genera la misma recta. Si, en cambio, $v(t_0) = 0$,

el instante es de reposo y definición 5.11 no suministra una recta tangente mediante la velocidad. Esta afirmación pertenece a la parametrización y no determina por sí sola la geometría de la imagen. Ejercicio 5.12 hizo explícito el caso regular y la irrelevancia del reescalado del vector director. Ejercicio 5.13 mostró el caso complementario: dos movimientos pueden recorrer exactamente la misma recta y, sin embargo, uno de ellos tener velocidad nula en un instante mientras el otro es regular allí. La síntesis de §6 es, por tanto,

$$\boxed{\text{imagen geométrica} + \text{parametrización} \longrightarrow \text{información tangencial del movimiento.}}$$

La aceleración requiere derivar la curva de velocidades y pertenece íntegramente a §7; no se ha utilizado en esta sección.

7. Aceleración como segunda derivada

Activación: una velocidad también puede variar. Hasta ahora la derivada se aplicó a una curva de posiciones para construir la velocidad

$$v(t) \in V.$$

Pero la velocidad misma puede cambiar con el tiempo. Dos movimientos pueden poseer en un instante velocidades de igual magnitud y, sin embargo, comportarse de manera diferente inmediatamente después porque sus vectores velocidad evolucionan de modo distinto. La pregunta de §7 es, por tanto,

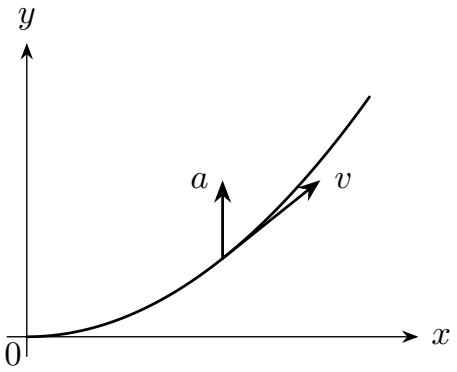


Figura 5.3. Para $r(u) = (u, u^2/5)$, la velocidad es $(1, 2u/5)$ y la aceleración es $(0, 2/5)$. La aceleración no tiene por qué ser paralela a la trayectoria ni a la velocidad. Véase §7.

¿cómo cambia instantáneamente el vector velocidad?

La respuesta utiliza exactamente la misma noción de derivada vectorial construida en la definición 5.8: ahora la curva que derivamos no toma valores en el espacio afín $\mathcal{E}$, sino directamente en el espacio vectorial V.

Activación Si $v(t)$ ya es un vector de V, ¿qué tipo de objeto debe ser su cociente incremental

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h}?$$

¿Qué ventaja de tipado aparece aquí respecto del paso desde posiciones a velocidades?

Del cambio de posición al cambio de velocidad. Para $h \neq 0$, la diferencia

$$v(t+h) - v(t)$$

está definida directamente en V. Por tanto, $\frac{v(t+h)-v(t)}{h} \in V$.

Si estos cocientes convergen cuando $h \to 0$, el límite vuelve a ser un vector de V. No necesitamos construir primero un desplazamiento afín porque estamos comparando dos vectores, no dos puntos. Esta diferencia de tipos conviene hacerla visible:

$$\begin{array}{rcl} P(t+h), P(t) \in \mathcal{E} & \Longrightarrow & \overrightarrow{P(t)P(t+h)} \in V, \\ v(t+h), v(t) \in V & \Longrightarrow & v(t+h) - v(t) \in V. \end{array}$$

La aceleración nacerá de la segunda línea.

Definición 5.13 — Aceleración Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento cuya velocidad

$$v : I \longrightarrow V$$

sea derivable en un punto interior $t \in I$. Definimos la **aceleración** en t por

$$a(t) := v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \in V.$$

La existencia de $v(t)$ no garantiza por sí sola la existencia de $a(t)$. Definición 5.13 exige una condición adicional: la curva de velocidades debe ser derivable en el instante considerado. La aceleración es, por definición, un **vector**. No es todavía una causa, una fuerza ni una ecuación de movimiento.

Control dimensional. Si t representa tiempo físico y

$$[v] = \frac{L}{T},$$

entonces el cociente incremental de la definición 5.13 posee dimensión

$$\left[\frac{v(t+h)-v(t)}{h}\right] = \frac{L/T}{T} = \frac{L}{T^2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{[a] = \frac{L}{T^2}.}$$

Esta comprobación coincide con la previsión dimensional de principio metodológico 5.6. El análisis dimensional verifica consistencia, pero no sustituye la definición por límite.

Principio metodológico: cinemática no es dinámica. Principio metodológico 5.8 — Aceleración cinemática no implica todavía fuerza La afirmación

$$a(t) \neq 0$$

describe cómo cambia la velocidad del movimiento. En el capítulo 5 no autoriza a concluir qué causa ese cambio. No introducir todavía expresiones como $F = ma$

ni inferir fuerzas, masas o mecanismos dinámicos a partir de la aceleración. Esas relaciones pertenecen al capítulo 9. Error de nivel estructural «Como el movimiento tiene aceleración no nula, debe existir una fuerza neta no nula.» Esa conclusión pertenece a una teoría dinámica adicional. Definición 5.13 sólo define una propiedad cinemática de una curva parametrizada.[5]

La separación es deliberada:

cinemática: cómo cambia el movimiento	$\neq$	dinámica: por qué cambia.

Qué falta demostrar. Definición 5.13 define la aceleración derivando directamente la curva de velocidades. Antes de usarla sistemáticamente debemos demostrar dos conexiones con las representaciones ya construidas:

1. para cualquier origen fijo O,
$$a(t) = r''_O(t);$$
2. en un marco fijo $F = (O, B)$,
$$[a(t)]_B = \frac{d^2}{dt^2} x_F(t),$$
y un cambio de origen fijo no altera la aceleración. Estos serán proposición 5.13 y proposición 5.14. Todavía no los usamos como resultados establecidos.

[5] Shankar, *Fundamentals of Physics I*, cap. 1, §1.2 «Kinematics and dynamics», pp. 2–3; §1.3, pp. 4–6. La referencia documenta la separación entre descripción del movimiento y explicación dinámica.

Balance conceptual. La nueva cadena conceptual es

$$\boxed{P(t) \longrightarrow v(t) \in V \longrightarrow \frac{v(t+h)-v(t)}{h} \longrightarrow a(t) \in V.}$$

La aceleración exige una derivada adicional respecto de la velocidad y tiene dimensión L/T^2. Su significado en este capítulo es exclusivamente cinemático. Las proposiciones siguientes relacionan $a(t)$ con la segunda derivada del vector de posición y con las coordenadas en un marco fijo. Fuerza, masa, ecuaciones de Newton y marcos móviles permanecen fuera de §7.

Proposición: la aceleración es la segunda derivada de la posición relativa. En §5 demostramos que, para cualquier origen fijo O, $v(t) = r'_O(t)$. Si la velocidad es derivable, podemos derivar una vez más esta identidad. El resultado no introduce una nueva noción de aceleración: conecta definición 5.13 con la representación vectorial de la posición.

Proposición 5.13 — Aceleración como segunda derivada de la posición relativa Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento y sea $O \in \mathcal{E}$ un origen fijo. Supongamos que $r_O : I \to V$ es dos veces derivable en un punto interior $t \in I$. Entonces la aceleración existe en t y

$$\boxed{a(t) = r''_O(t).}$$

Demostración. Por proposición 5.9,

$$v(t) = r'_O(t).$$

Como r_O es dos veces derivable en t, la curva r'_O es derivable allí. Por tanto, la curva de velocidades v es derivable en t y definición 5.13 da $a(t) = v'(t)$. Sustituyendo $v = r'_O$, $a(t) = \frac{d}{dt} r'_O(t) = r''_O(t)$.

□ La igualdad

$$a(t) = r''_O(t)$$

es válida para **cualquier origen fijo**. La palabra «fijo» es esencial: si el origen dependiera del tiempo, la relación entre las derivadas contendría términos adicionales que pertenecen al estudio posterior de marcos móviles.

Independencia del origen fijo. Sean dos orígenes fijos

$$O' = O + c, \qquad c \in V.$$

Por proposición 5.2, $r_{O'}(t) = r_O(t) - c$.

Como c no depende del tiempo, $r'_{O'}(t) = r'_O(t)$

y, si existen las segundas derivadas,

$$r''_{O'}(t) = r''_O(t).$$

Junto con la proposición 5.13,

$$\boxed{r''_{O'}(t) = r''_O(t) = a(t).}$$

Así como una traslación constante del origen desaparece al calcular la velocidad, también desaparece al calcular la aceleración.

Proposición: componentes de la aceleración en un marco fijo. Fijemos un marco

$$F = (O, B), \qquad B = (e_1, e_2, e_3),$$

cuyos datos no dependen del tiempo. En §5 obtuvimos

$$[v(t)]_B = \frac{d}{dt} x_F(t).$$

Como ahora $v : I \to V$ es una curva vectorial derivable, proposición 5.8 permite derivarla componente a componente.

Proposición 5.14 — Componentes e independencia del origen de la aceleración Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento dos veces derivable en t y sea $F = (O, B)$ un marco fijo. Entonces

$$\boxed{[a(t)]_B = \frac{d^2}{dt^2} x_F(t).}$$

Además, si $O' = O + c$ con $c \in V$ constante y se conserva la misma base fija B, el cambio de origen no altera la aceleración:

$$\boxed{r''_{O'}(t) = r''_O(t) = a(t).}$$

Demostración. Por definición 5.13,

$$a(t) = v'(t).$$

Aplicamos proposición 5.8 a la curva vectorial $v : I \to V$ en la base fija B: $[a(t)]_B = [v'(t)]_B = \frac{d}{dt}[v(t)]_B$. Por proposición 5.11, $[v(t)]_B = \frac{d}{dt} x_F(t)$. Por tanto,

$$[a(t)]_B = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} x_F(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2} x_F(t).$$

La independencia respecto del origen fijo ya se obtiene de

$$r_{O'}(t) = r_O(t) - c$$

con c constante. Al derivar dos veces, $r''_{O'}(t) = r''_O(t)$,

y proposición 5.13 identifica ambas segundas derivadas con $a(t)$. □ proposición 5.14 permite calcular la aceleración mediante coordenadas sin convertir la columna coordenada en el objeto geométrico. La aceleración sigue siendo un vector de V; la columna

$$\frac{d^2}{dt^2} x_F(t)$$

es sólo su representación en la base fija B.

Balance de las representaciones. La aceleración posee ahora tres descripciones coherentes:

$$\boxed{a(t) = v'(t) = r''_O(t),}$$

y, en cualquier marco fijo $F = (O, B)$,

$$\boxed{[a(t)]_B = \frac{d^2}{dt^2} x_F(t).}$$

La primera fórmula es la definición cinemática de la definición 5.13; la segunda conecta la aceleración con la posición relativa; la tercera proporciona el cálculo por componentes. Cambiar un origen **fijo** no modifica ninguna de ellas. Todavía no hemos estudiado cómo cambian las componentes al cambiar de base o de marco fijo: esa covariancia pertenece a §8. Tampoco hemos introducido fuerza, masa ni leyes de Newton. Quedan ejercicios 5.14–5.15 para ejercitar el cálculo de v y a, auditar dimensiones y distinguir cuidadosamente velocidad nula, velocidad constante y aceleración nula antes del cierre local de §7.

Aceleración sin dinámica. Ejercicio 5.14 · Cálculo y análisis dimensional Sea $F = (O, B)$ un marco fijo con $B = (e_1, e_2, e_3)$. Un movimiento tiene coordenadas

$$x_F(t) = \begin{pmatrix} \alpha t^2 \\ \beta t \\ \ell \end{pmatrix},$$

donde

$$[\alpha] = \frac{L}{T^2}, \qquad [\beta] = \frac{L}{T}, \qquad [\ell] = L.$$

1. Calcula $[v(t)]_B$ y $[a(t)]_B$.
2. Verifica las dimensiones de cada componente de la velocidad y de la aceleración.
3. Decide si la aceleración depende del instante t.
4. Explica qué puede afirmarse cinemáticamente cuando $\alpha \neq 0$ y qué **no** puede concluirse todavía sobre fuerzas o causas físicas.

Solución desarrollada Por proposición 5.11,

$$[v(t)]_B = \frac{d}{dt} x_F(t) = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por proposición 5.14,

$$[a(t)]_B = \frac{d^2}{dt^2} x_F(t) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para la primera componente de la velocidad, $[2\alpha t] = \frac{L}{T^2}\, T = \frac{L}{T}$. La segunda componente ya tiene dimensión L/T y la tercera es nula. Por tanto, $[v] = \frac{L}{T}$. Para la aceleración, $[2\alpha] = \frac{L}{T^2}$,
de modo que

$$[a] = \frac{L}{T^2}.$$

La columna de la aceleración no depende de t:

$$\boxed{[a(t)]_B = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{para todo } t.}$$

Si $\alpha \neq 0$, podemos afirmar cinemáticamente que la velocidad cambia y que la aceleración es un vector constante no nulo. No podemos concluir en el capítulo 5 cuál es la causa de ese cambio, ni introducir una fuerza o una masa para explicarlo. Eso requeriría la teoría dinámica posterior.

Reposo, aceleración nula y velocidad constante. Ejercicio 5.15 · Concepto y contraejemplo Fija un origen O y considera tres movimientos cuyas curvas de posición relativa son

$$r_A(t) = \frac{1}{2}t^2 a_0,$$

$$r_B(t) = tv_0 + \frac{1}{6}t^3 b_0,$$

$$r_C(t) = r_0 + tv_0,$$

donde $a_0, v_0, b_0, r_0 \in V$, con

$$a_0 \neq 0, \qquad v_0 \neq 0, \qquad b_0 \neq 0,$$

y las dimensiones son las apropiadas para que cada término de r_A, r_B, r_C tenga dimensión de longitud.

1. Calcula v_A, a_A, v_B, a_B y v_C, a_C.
2. Clasifica el instante $t = 0$ en cada movimiento: ¿hay reposo instantáneo?, ¿aceleración nula en ese instante?, ¿aceleración idénticamente nula?
3. Decide en qué caso la velocidad es constante en todo el intervalo.
4. Explica por qué $a(0) = 0$ no implica $a \equiv 0$, y por qué $v(0) = 0$ no implica $a(0) = 0$.
5. Formula las conclusiones sin introducir fuerzas ni causas dinámicas.

Solución desarrollada Para A,

$$v_A(t) = ta_0, \qquad a_A(t) = a_0.$$

En particular, $v_A(0) = 0, \qquad a_A(0) = a_0 \neq 0$. Por definición 5.12, $t = 0$ es un instante de reposo, pero la aceleración no se anula allí. Para B, $v_B(t) = v_0 + \frac{1}{2}t^2 b_0$,

y

$$a_B(t) = tb_0.$$

Luego

$$v_B(0) = v_0 \neq 0, \qquad a_B(0) = 0,$$

pero, para $t \neq 0$, $a_B(t) = tb_0 \neq 0$. Por tanto, $a_B(0) = 0$ no implica $a_B \equiv 0$. Para C, $v_C(t) = v_0, \qquad a_C(t) = 0$

para todo t. Aquí sí tenemos

$$\boxed{a_C \equiv 0}$$

y la velocidad es constante en todo el intervalo.

El cuadro conceptual es:

movimiento	$v(0)$	$a(0)$	$a \equiv 0$
A	0	$a_0 \neq 0$	no
B	$v_0 \neq 0$	0	no
C	$v_0 \neq 0$	0	sí

Así, las tres afirmaciones

$$v(t_0) = 0, \qquad a(t_0) = 0, \qquad a \equiv 0$$

son lógicamente distintas. En el tercer ejemplo calculamos directamente $v_C(t) = v_0$ para todo t, de modo que la velocidad es constante y $a_C \equiv 0$. Ninguna de estas conclusiones necesita todavía una ley dinámica.

Cierre conceptual: segunda derivada sin causalidad dinámica. §7 ha construido la aceleración exclusivamente a partir de la evolución temporal de la velocidad:

$$\boxed{P(t) \longrightarrow v(t) \longrightarrow a(t) = v'(t).}$$

Para cualquier origen fijo O,

$$\boxed{a(t) = r_O''(t),}$$

y, en un marco fijo $F = (O, B)$,

$$\boxed{[a(t)]_B = \frac{d^2}{dt^2} x_F(t).}$$

La aceleración tiene dimensión L/T^2 y un cambio de origen fijo no la altera. Ejercicio 5.14 hizo explícito el cálculo y la auditoría dimensional; ejercicio 5.15 separó tres condiciones que no deben confundirse: reposo instantáneo, aceleración nula en un instante y aceleración idénticamente nula. El resultado pedagógico central es

$$\boxed{\text{describir } a(t) \neq \text{explicar la causa de } a(t).}$$

Fuerzas, masas y leyes de Newton permanecen fuera del capítulo 5. La siguiente sección estudiará únicamente cómo se representan v y a cuando cambiamos entre **marcos espaciales fijos**; los marcos móviles continuarán reservados para capítulos posteriores.

8. Marcos fijos y covariancia de las derivadas

Activación: el mismo vector, columnas distintas. En §§5 y 7 construimos dos objetos geométricos: $v(t) \in V, \qquad a(t) \in V$. En un marco fijo

$$F = (O, B),$$

los representamos mediante columnas

$$[v(t)]_B, \qquad [a(t)]_B.$$

Si otro observador matemático usa otro marco fijo

$$F' = (O', B'),$$

las columnas pueden ser distintas aunque los vectores geométricos sean exactamente los mismos. La pregunta central de esta sección es

¿qué cambia al cambiar la descripción y qué objeto permanece?

Activación Si dos columnas numéricas diferentes representan el mismo vector en bases distintas, ¿ha cambiado el movimiento o sólo su descripción? ¿Qué hipótesis necesitamos sobre los marcos antes de derivar sus coordenadas?

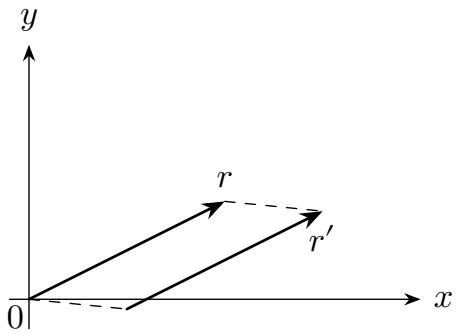


Figura 5.4. Entre marcos de igual base y orígenes separados por una constante, las posiciones difieren en esa constante. Derivarla da cero y las velocidades representadas coinciden. El dibujo compara vectores de posición, no dos fuerzas. Véase §8.

Recordatorio: la ley afín para las posiciones. Sean

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B')$$

dos marcos geométricos. Escribamos

$$O' = O + c, \qquad c \in V,$$

y sea S la matriz cuyas columnas son los vectores de la base B' expresados en la base B. El capítulo 4 y proposición 5.4 de este capítulo proporcionan, punto a punto,

$$\boxed{x_{F'}(t) = S^{-1}\left(x_F(t) - [c]_B\right).}$$

Esta fórmula contiene dos operaciones conceptualmente distintas:

- la traslación del origen, representada por $[c]_B$;
- el cambio de base, representado por S^{-1}.

Para posiciones, ambas aparecen. Para derivadas temporales, debemos controlar primero si S y c cambian o no con t.

Definición 5.14 — Marco espacial fijo durante un movimiento Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento. Un marco espacial

$$F = (O, B)$$

se llama **fijo durante el movimiento** si el origen O y todos los vectores de la base ordenada

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

son independientes del parámetro temporal $t \in I$.

La palabra «fijo» se refiere aquí únicamente a la ausencia de dependencia temporal de los datos geométricos del marco. No significa todavía:

- que el marco sea inercial;
- que exista una ley dinámica;
- que el marco esté físicamente en reposo en algún sentido absoluto;
- que hayamos comparado observadores móviles.

Es una hipótesis matemática sobre la descripción usada durante la derivación.

Dos marcos fijos implican datos de cambio constantes. Supongamos que

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B')$$

son ambos fijos en el sentido de la definición 5.14. Entonces el vector

$$c = \overrightarrow{OO'}$$

es constante respecto de t, y la matriz de cambio de base

$$S = S_{B \leftarrow B'}$$

también es constante respecto de t. Por tanto, en la ley

$$x_{F'}(t) = S^{-1} \left(x_F(t) - [c]_B \right),$$

los únicos términos que pueden variar temporalmente son las coordenadas de la curva

$$x_F(t).$$

Esta observación será la clave de la proposición 5.15 y proposición 5.16.

Qué ocurriría si el marco dependiera del tiempo. Conviene identificar el límite del método antes de aplicar derivadas. Si permitiéramos, por ejemplo, $c = c(t)$

o

$$S = S(t),$$

la fórmula de coordenadas tomaría la forma

$$x_{F'}(t) = S(t)^{-1} \left(x_F(t) - [c(t)]_B \right).$$

Al derivar ya no sería legítimo tratar S^{-1} y $[c]_B$ como constantes. Aparecerían términos adicionales provenientes de la variación temporal del origen o de la base. No calcularemos esos términos aquí. Ese problema pertenece a la cinemática en marcos móviles y, posteriormente, a los marcos no inerciales. En el capítulo 5 se trabaja únicamente con marcos fijos.

Principio metodológico: congelar el marco antes de derivar. Principio metodológico 5.9 — Congelar el marco antes de derivar coordenadas Antes de derivar una ley de transformación de coordenadas, declarar explícitamente si el origen y la base dependen de t.

En §8 sólo se permite derivar

$$x_{F'}(t) = S^{-1}\left(x_F(t) - [c]_B\right)$$

bajo la hipótesis

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = 0, \qquad \frac{dc}{dt} = 0.}$$

Estas igualdades expresan abreviadamente que S y c son constantes respecto del parámetro temporal; no introducen una teoría de matrices o marcos dependientes del tiempo.

La finalidad de principio metodológico 5.9 es impedir una manipulación aparentemente inocente:

$$\frac{d}{dt}\left[S^{-1}\left(x_F - [c]_B\right)\right] = S^{-1}\dot{x}_F$$

sin haber comprobado antes que S y c son constantes.

Objeto geométrico frente a representación. La velocidad fue definida intrínsecamente por la definición 5.9:

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h}.$$

La aceleración fue definida por la definición 5.13: $a(t) = v'(t)$.

Estas definiciones no contienen ninguna base. En cambio,

$$[v(t)]_B, \qquad [v(t)]_{B'}, \qquad [a(t)]_B, \qquad [a(t)]_{B'}$$

son representaciones numéricas relativas a bases concretas. Por eso debemos separar dos afirmaciones:

$$\boxed{\text{el vector geométrico permanece}}$$

y

$$\boxed{\text{sus componentes se transforman.}}$$

Principio metodológico: invariancia de objeto y covariancia de representación. Principio metodológico 5.10 — Distinguir invariancia de objeto y covariancia de representación Cuando dos marcos fijos describan el mismo movimiento:

1. identificar primero el objeto geométrico, por ejemplo $v(t) \in V$ o $a(t) \in V$;
2. distinguirlo de sus columnas $[v(t)]_B$, $[v(t)]_{B'}$, $[a(t)]_B$, $[a(t)]_{B'}$;
3. interpretar el cambio de columnas como una **ley de transformación de la representación**, no como una transformación física automática del vector.

En particular, $[v(t)]_B \neq [v(t)]_{B'}$

puede ocurrir aunque ambos símbolos representen el mismo vector $v(t)$. Esta distinción es la forma elemental de la covariancia que necesitamos aquí: la descripción cambia de acuerdo con una regla precisa, mientras el objeto geométrico descrito no se multiplica ni se desplaza por el mero acto de cambiar de coordenadas.

Un ejemplo mínimo de representación. Sea un vector

$$u \in V$$

y dos bases fijas B y B' relacionadas por $[u]_B = S[u]_{B'}$.

Equivalentemente, $[u]_{B'} = S^{-1}[u]_B$. Si $u = v(t)$ en un instante concreto, la misma regla algebraica relacionará sus componentes. Si $u = a(t)$, ocurrirá lo mismo. La novedad de las proposiciones 5.15–5.16 no será esta regla de cambio de base aislada, ya conocida desdel capítulo 4, sino demostrar que **derivar las coordenadas de una curva en dos marcos fijos produce exactamente columnas compatibles con esa misma ley**.

Balance conceptual. La sección queda preparada sobre tres separaciones:

$$\boxed{\text{marco fijo} \neq \text{marco móvil},}$$

$$\boxed{\text{vector geométrico} \neq \text{columna de componentes},}$$

y

$$\boxed{\text{cambio de descripción} \neq \text{cambio físico del movimiento.}}$$

Definición 5.14 garantiza que los datos del marco no dependen de t. principio metodológico 5.9 obliga a comprobar esa hipótesis antes de derivar coordenadas. principio metodológico 5.10 impide confundir la transformación de componentes con una transformación del objeto geométrico. Las proposiciones siguientes establecen proposiciones 5.15–5.17: las leyes de transformación de las componentes de v y a entre marcos fijos y la invariancia de $\|v(t)\|$ cuando los cambios de base son ortonormales. El nombre formal **rapidez** sigue reservado para §11.

Proposición: transformación de la velocidad entre marcos fijos. Sean

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B')$$

dos marcos fijos. Escribamos

$$O' = O + c$$

y sea S la matriz cuyas columnas son los vectores de B' expresados en B. Por proposición 5.4, $x_{F'}(t) = S^{-1}\left(x_F(t) - [c]_B\right)$. Como S y c son constantes respecto de t, podemos derivar esta identidad sin términos adicionales.

Proposición 5.15 — Transformación de la velocidad entre marcos fijos Sean $F = (O, B)$ y $F' = (O', B')$ dos marcos fijos relacionados como arriba. Si el movimiento es derivable en t, entonces

$$\boxed{[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B.}$$

La traslación entre los orígenes no aparece en la ley de transformación de la velocidad.

Demostración. Derivamos la ley afín de las coordenadas:

$$\frac{d}{dt}x_{F'}(t) = \frac{d}{dt}\left[S^{-1}\left(x_F(t) - [c]_B\right)\right].$$

Por definición 5.14, S^{-1} y $[c]_B$ son constantes. Luego

$$\frac{d}{dt}x_{F'}(t) = S^{-1}\frac{d}{dt}x_F(t).$$

Aplicando proposición 5.11 en ambos marcos, $[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B$.

□ proposición 5.15 expresa covariancia de componentes: las dos columnas pueden ser distintas, pero ambas representan el mismo vector geométrico $v(t) \in V$.

Proposición: transformación de la aceleración entre marcos fijos. La misma hipótesis permite derivar una segunda vez. Como la matriz de cambio sigue siendo constante, la ley lineal de transformación se conserva para la aceleración.

Proposición 5.16 — Transformación de la aceleración entre marcos fijos Bajo las hipótesis de la proposición 5.15, si el movimiento es dos veces derivable en t, entonces

$$\boxed{[a(t)]_{B'} = S^{-1}[a(t)]_B.}$$

Demostración. proposición 5.15 vale como identidad de curvas de componentes donde las derivadas necesarias existen:

$$[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B.$$

Derivamos respecto de t. Como S^{-1} es constante,

$$\frac{d}{dt}[v(t)]_{B'} = S^{-1}\frac{d}{dt}[v(t)]_B.$$

Por proposición 5.8 aplicado a la curva vectorial $v : I \to V$, $\frac{d}{dt}[v(t)]_{B'} = [a(t)]_{B'}$,
y

$$\frac{d}{dt}[v(t)]_B = [a(t)]_B.$$

Por tanto, $[a(t)]_{B'} = S^{-1}[a(t)]_B$.

□ La aceleración tampoco adquiere un término de traslación cuando ambos orígenes son fijos. Los términos adicionales aparecen sólo si se permite que el marco varíe con el tiempo, situación excluida por la definición 5.14.

Marcos ortonormales y norma de la velocidad. Supongamos ahora que las bases B y B' son ortonormales respecto del mismo producto escalar euclídeo de V. Entonces la matriz de cambio S es ortogonal: $S^{\mathsf{T}}S = I, \qquad S^{-1} = S^{\mathsf{T}}$. En una base ortonormal, la norma geométrica de un vector coincide con la norma euclídea de su columna: $\|v\|^2 = [v]_B^{\mathsf{T}}[v]_B$.

Lo mismo vale en B'.

Proposición 5.17 — Invariancia de la norma de la velocidad entre marcos ortonormales fijos Sean $F = (O, B)$ y $F' = (O', B')$ dos marcos fijos cuyas bases B y B' son ortonormales respecto del mismo producto escalar. Entonces, para todo instante donde exista la velocidad,

$$\boxed{\|v(t)\| = \|[v(t)]_B\|_2 = \|[v(t)]_{B'}\|_2.}$$

En particular, cambiar entre esos marcos no altera la norma geométrica de la velocidad.

Demostración. Por proposición 5.15,

$$[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B.$$

Como S es ortogonal, $(S^{-1})^{\mathsf{T}} S^{-1} = I$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|[v(t)]_{B'}\|_2^2 &= [v(t)]_{B'}^{\mathsf{T}}[v(t)]_{B'} \\ &= [v(t)]_B^{\mathsf{T}}(S^{-1})^{\mathsf{T}} S^{-1}[v(t)]_B \\ &= [v(t)]_B^{\mathsf{T}}[v(t)]_B \\ &= \|[v(t)]_B\|_2^2. \end{aligned}$$

Ambas cantidades son no negativas, de modo que

$$\|[v(t)]_{B'}\|_2 = \|[v(t)]_B\|_2.$$

Como B y B' son ortonormales, cada una de estas normas coordenadas coincide con la norma geométrica $\|v(t)\|$. □ proposición 5.17 no afirma que cualquier norma de cualquier columna sea una magnitud geométrica. La identificación con la norma euclídea ordinaria de las componentes depende aquí de la **ortonormalidad** de la base. En una base no ortonormal debe intervenir la matriz de Gram correspondiente. El nombre formal de $\|v(t)\|$ como **rapidez** continúa reservado para §11.

Balance de las leyes de transformación. Para marcos fijos hemos demostrado la cadena

$$\boxed{x_{F'}(t) = S^{-1}(x_F(t) - [c]_B),}$$

$$\boxed{[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B,}$$

y

$$\boxed{[a(t)]_{B'} = S^{-1}[a(t)]_B.}$$

La traslación del origen aparece en las coordenadas de posición y desaparece al derivar porque es constante. El cambio de base permanece como una transformación lineal de las componentes. Si además las bases son ortonormales,

$$\boxed{\|[v(t)]_{B'}\|_2 = \|[v(t)]_B\|_2 = \|v(t)\|.}$$

Así queda visible la distinción de principio metodológico 5.10: el objeto geométrico $v(t)$ o $a(t)$ es el mismo; lo que cambia covariantemente es su columna de componentes. Ejercicios 5.16–5.17 aplican estas leyes y contrastan un cambio ortonormal con uno no ortonormal. Los marcos móviles y la reparametrización de §9 permanecen fuera de §8.

Transformar posición, velocidad y aceleración en dos marcos fijos. Ejercicio 5.16 · Cálculo y covariancia Sea $F = (O, B)$ un marco fijo con base ortonormal $B = (e_1, e_2, e_3)$ y sea un movimiento cuyas coordenadas son

$$x_F(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Considera otro marco fijo $F' = (O', B')$ definido por

$$[c]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad O' = O + c,$$

y por la matriz de cambio de base

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyas columnas son los vectores de B' expresados en B.

1. Calcula S^{-1}.
2. Obtén $x_{F'}(t)$ usando la ley afín de cambio de marco.
3. Calcula $[v(t)]_B$ y $[a(t)]_B$.
4. Calcula $[v(t)]_{B'}$ y $[a(t)]_{B'}$ derivando $x_{F'}(t)$.
5. Verifica directamente proposición 5.15 y proposición 5.16.

Solución desarrollada Como S es ortogonal,

$$S^{-1} = S^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ley afín entre los marcos fijos es $x_{F'}(t) = S^{-1}\left(x_F(t) - [c]_B\right)$.
Primero,

$$x_F(t) - [c]_B = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 + 2 \\ 2t - 3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{x_{F'}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 2 \\ 1 - t^2 \\ 2t - 3 \end{pmatrix}.}$$

En el marco F,

$$[v(t)]_B = \frac{d}{dt} x_F(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y

$$[a(t)]_B = \frac{d^2}{dt^2} x_F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Derivando las coordenadas en F',

$$\boxed{[v(t)]_{B'} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix},}$$

y

$$\boxed{[a(t)]_{B'} = \begin{pmatrix} 6t \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

Ahora verificamos proposición 5.15:

$$S^{-1}[v(t)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix} = [v(t)]_{B'}.$$

Del mismo modo,

$$S^{-1}[a(t)]_B = \begin{pmatrix} 6t \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = [a(t)]_{B'},$$

que verifica proposición 5.16. La traslación $[c]_B$ afecta a $x_{F'}$, pero desaparece de las leyes de transformación de v y a porque es constante.

Norma geométrica y bases no ortonormales. Ejercicio 5.17 · Métrica y error plausible Conserva el movimiento del ejercicio 5.16 y considera el instante $t = 1$. En la base ortonormal B,

$$[v(1)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Usa la base ortonormal B' del ejercicio 5.16 para calcular $[v(1)]_{B'}$ y compara las normas euclídeas de ambas columnas.
2. Introduce ahora la base no ortonormal
$$B'' = (2e_1, e_2, e_3).$$
Determina $[v(1)]_{B''}$.
3. Compara $\|[v(1)]_{B''}\|_2$ con la norma geométrica $\|v(1)\|$.
4. Calcula la matriz de Gram G'' de B'' y verifica que
$$\|v(1)\|^2 = [v(1)]_{B''}^{\mathsf{T}} G'' [v(1)]_{B''}.$$
5. Explica por qué el error «la norma de cualquier columna de velocidad es siempre $\|v\|$» es falso.

Solución desarrollada En ejercicio 5.16 obtuvimos

$$[v(1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como B y B' son ortonormales, $\|[v(1)]_B\|_2^2 = 2^2 + 3^2 + 2^2 = 17$,
y

$$\|[v(1)]_{B'}\|_2^2 = 3^2 + (-2)^2 + 2^2 = 17.$$

Así,

$$\boxed{\|[v(1)]_B\|_2 = \|[v(1)]_{B'}\|_2 = \sqrt{17} = \|v(1)\|.}$$

Para la base

$$B'' = (2e_1, e_2, e_3),$$

la matriz cuyas columnas son los vectores de B'' expresados en B es

$$S'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $[v(1)]_{B''} = (S'')^{-1}[v(1)]_B$,
resulta

$$\boxed{[v(1)]_{B''} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.}$$

Su norma euclídea ordinaria es

$$\|[v(1)]_{B''}\|_2 = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14},$$

que **no** coincide con $\|v(1)\| = \sqrt{17}$. La matriz de Gram de B'' es

$$G'' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} [v(1)]_{B''}^{\mathsf{T}} G'' [v(1)]_{B''} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 4 + 9 + 4 \\ &= 17. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\|v(1)\|^2 = [v(1)]_{B''}^{\mathsf{T}} G'' [v(1)]_{B''}.}$$

El error consiste en confundir la columna con el vector geométrico y en olvidar la métrica asociada a la base. La norma euclídea ordinaria de las componentes representa directamente $\|v\|$ sólo cuando la base es ortonormal. El nombre formal de esta norma de la velocidad continúa reservado para §11.

Cierre conceptual: cambiar la descripción sin cambiar el movimiento. §8 ha separado de manera explícita tres niveles:

$$\boxed{\text{posición: cambio afín de coordenadas,}}$$

$$\boxed{\text{velocidad y aceleración: cambio lineal de componentes,}}$$

y

$$\boxed{\text{norma geométrica: invariante bajo bases ortonormales.}}$$

Para dos marcos fijos, $x_{F'}(t) = S^{-1}(x_F(t) - [c]_B)$,
mientras

$$[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B, \qquad [a(t)]_{B'} = S^{-1}[a(t)]_B.$$

La traslación desaparece al derivar porque es constante. Si las bases son ortonormales, la norma euclídea de las columnas coincide con la norma geométrica del vector; si no lo son, debe incorporarse la matriz de Gram. Ejercicio 5.16 verificó la covariancia de posición, velocidad y aceleración en un ejemplo concreto. Ejercicio 5.17 mostró por qué la métrica no puede olvidarse al pasar a una base no ortonormal. La conclusión metodológica es

$$\boxed{\text{cambiar coordenadas} \neq \text{cambiar el movimiento físico.}}$$

La sección siguiente cambiará otra cosa distinta: no el marco espacial, sino el **parámetro** con el que se recorre una curva. Esa operación pertenece a §9 y no se ha utilizado en §8.

9. Reparametrización y regla de la cadena

Activación: una misma imagen puede recorrerse con otro parámetro. Sea

$$P : I \longrightarrow \mathcal{E}$$

una curva parametrizada. La aplicación contiene dos tipos de información:

- qué puntos del espacio afín son recorridos;
- qué valor del parámetro se asigna a cada punto del recorrido.

Si introducimos otro intervalo J y una función

$$\phi : J \longrightarrow I,$$

podemos formar una nueva curva

$$P \circ \phi : J \longrightarrow \mathcal{E}.$$

El punto espacial no se obtiene mediante una transformación del espacio: seguimos evaluando la misma curva P, pero ahora el valor de su parámetro se determina a partir de $u \in J$ mediante $\phi(u)$. La pregunta central de esta sección será

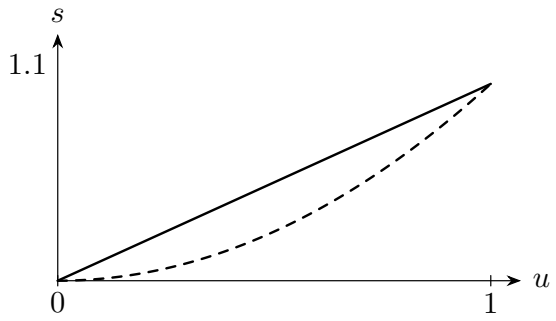


Figura 5.5. Las leyes $s = u$ y $s = u^2$ recorren el mismo intervalo con velocidades distintas. Bajo un cambio $s = \phi(u)$, la derivada de $r(\phi(u))$ contiene el factor $\phi'(u)$. En $u = 0$, el segundo reloj deja de ser regular. Véase §9.

¿qué propiedades cambian cuando cambiamos el parámetro de una curva?

Antes de responder necesitamos distinguir con precisión qué significa el nuevo parámetro y qué hipótesis imponemos sobre ϕ.

Activación Si escribimos $\widetilde{P}(u) = P(\phi(u))$, ¿hemos cambiado necesariamente la trayectoria geométrica? ¿Hemos cambiado necesariamente el movimiento físico? ¿Son la misma pregunta?

Definición 5.15 — Reparametrización de una curva Sea

$$P : I \to \mathcal{E}$$

una curva y sea

$$\phi : J \to I$$

una aplicación entre intervalos reales. La curva

$$\boxed{\widetilde{P} := P \circ \phi : J \to \mathcal{E}, \qquad \widetilde{P}(u) = P(\phi(u)),}$$

se llama una **reparametrización de P por ϕ.**[6]

Definición 5.15 no exige todavía que ϕ sea biyectiva ni derivable. Por tanto, una reparametrización en este sentido amplio puede:

- recorrer sólo una parte de la imagen de P;
- recorrer algunos puntos varias veces;
- detenerse sobre un mismo valor de P durante un intervalo;
- invertir el orden con que se recorren los puntos.

Las propiedades más fuertes aparecerán al imponer condiciones adicionales.

[6]Michael Spivak, *Calculus*, 4.ª ed., Publish or Perish, 2008, cap. 12, apéndice «Parametric Representation of Curves», especialmente p. 247; para la regla de la cadena escalar, cap. 10, p. 178.

El parámetro nuevo no recibe significado físico automáticamente. La letra usada para parametrizar una curva no determina por sí sola qué magnitud representa. Podemos escribir

$$P(t)$$

cuando t se interpreta como tiempo físico, pero también podemos estudiar la misma aplicación geométrica mediante un parámetro abstracto

$$u.$$

Por ello, al formar

$$\widetilde{P}(u) = P(\phi(u)),$$

no debemos declarar automáticamente que u es un nuevo tiempo físico. Esta distinción es crucial porque dos situaciones matemáticamente parecidas pueden expresar preguntas físicas distintas:

1. **cambio de parámetro geométrico:** usamos otra variable para describir el mismo recorrido;
2. **nueva ley temporal:** interpretamos el nuevo parámetro como tiempo físico y, con ello, potencialmente cambiamos la historia temporal del movimiento.

§9 construirá primero la transformación matemática. La interpretación física del nuevo parámetro deberá declararse explícitamente.

Principio metodológico: declarar qué significa el parámetro. Principio metodológico 5.11 — Declarar qué significa el parámetro antes de reparametrizar Antes de interpretar

$$\widetilde{P}(u) = P(\phi(u)),$$

declarar si u es:

- una variable auxiliar o geométrica;
- una nueva lectura temporal física;
- u otro parámetro con significado previamente especificado.

La igualdad formal

$$\widetilde{P} = P \circ \phi$$

no decide por sí sola esa interpretación.

principio metodológico 5.11 evita el falso razonamiento:

> «Como P y $\widetilde{P}$ tienen la misma imagen, describen necesariamente el mismo movimiento físico.»

La imagen geométrica y la ley temporal son niveles diferentes. §10 desarrollará esa distinción con más detalle.

Por qué necesitamos una clase de reparametrizaciones admisibles. Si queremos comparar derivadas y conservar un control regular del recorrido, no basta una aplicación arbitraria ϕ. Por ejemplo, si

$$\phi'(u_0) = 0,$$

la variación del nuevo parámetro puede colapsar localmente y alterar la regularidad de la curva reparametrizada. Si ϕ no es biyectiva, distintos valores de u pueden corresponder al mismo valor

del parámetro original o quedar partes del intervalo I sin alcanzar. Para los resultados estructurales de esta sección necesitaremos una clase más restrictiva.

Definir: reparametrización regular admisible. En esta sección adoptamos una convención única para intervalos con extremos incluidos: las derivadas en puntos interiores son derivadas ordinarias; en un extremo incluido, una expresión como $\phi'(u)$ designa la derivada lateral correspondiente. Así, C^1 en un intervalo cerrado significa que la derivada interior admite las extensiones laterales continuas necesarias en los extremos.

Definición 5.16 — Reparametrización regular admisible Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos. Una aplicación

$$\phi : J \longrightarrow I$$

es una **reparametrización regular admisible** si:

1. ϕ es biyectiva;
2. ϕ es de clase C^1;
3. para todo $u \in J$,

$$\boxed{\phi'(u) \neq 0.}$$

La condición $\phi'(u) \neq 0$ impide que el cambio de parámetro se detenga localmente. Como J es un intervalo y ϕ' es continua, esa derivada no puede cambiar de signo sin anularse en algún punto. Por tanto, para una reparametrización regular admisible ocurre exactamente una de las dos posibilidades:

$$\phi'(u) > 0 \quad \text{para todo } u \in J,$$

o

$$\phi'(u) < 0 \quad \text{para todo } u \in J.$$

Además, en el nivel unidimensional importado de M3, la condición $\phi'(u) \neq 0$ permite aplicar el teorema de la función inversa localmente; junto con la biyectividad entre intervalos, obtenemos la regularidad C^1 de la inversa en el nivel requerido por este capítulo.

Definición 5.17 — Orientación del parámetro Sea $\phi : J \to I$ una reparametrización regular admisible.

- Si

$$\boxed{\phi'(u) > 0 \quad \text{para todo } u \in J,}$$

decimos que ϕ **preserva la orientación del parámetro**.

- Si

$$\boxed{\phi'(u) < 0 \quad \text{para todo } u \in J,}$$

decimos que ϕ **invierte la orientación del parámetro**.

En intervalos, esta definición coincide con el comportamiento monótono esperado:

- $\phi' > 0$ corresponde a una parametrización estrictamente creciente;
- $\phi' < 0$ corresponde a una parametrización estrictamente decreciente.

La palabra «orientación» se refiere aquí al orden del parámetro, no a la orientación espacial de una base tridimensional estudiada en el capítulo 4.

Ejemplos mínimos de admisibilidad. Consideremos

$$\phi_1(u) = 2u + 1.$$

Como $\phi_1'(u) = 2 > 0$,

en intervalos adecuados donde sea biyectiva, ϕ_1 es admisible y preserva orientación. En cambio, $\phi_2(u) = 1 - u$

satisface $\phi_2'(u) = -1 < 0$,

de modo que una vez fijados dominio y codominio compatibles es admisible e invierte orientación. Finalmente, $\phi_3(u) = u^3$

es biyectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, pero

$$\phi_3'(0) = 0.$$

Por tanto, **no** es una reparametrización regular admisible según la definición 5.16. Este último ejemplo conecta con §6: la parametrización cúbica puede conservar una imagen geométrica muy simple y, sin embargo, introducir un instante con velocidad nula.

Principio metodológico: auditar la reparametrización antes de derivar. Principio metodológico 5.12 — Comprobar dominio, biyectividad, signo y no anulación de ϕ' Antes de aplicar una regla de transformación a una curva reparametrizada:

1. declarar los intervalos J e I;
2. comprobar que $\phi : J \to I$ está bien definida;
3. verificar si ϕ es biyectiva cuando se requiera una reparametrización admisible;
4. comprobar que ϕ es C^1;
5. verificar
$$\phi'(u) \neq 0;$$
6. determinar el signo de ϕ' y, con ello, si la orientación se preserva o se invierte.

No utilizar la frase «sólo cambiamos de parámetro» como sustituto de estas comprobaciones. principio metodológico 5.12 será especialmente importante antes de las proposiciones 5.18–5.21, porque la regla de la cadena puede escribirse algebraicamente para situaciones más amplias, pero las conclusiones sobre regularidad, orientación y conservación controlada del recorrido dependen de hipótesis precisas.

Qué todavía no hemos demostrado. A partir de

$$\widetilde{P} = P \circ \phi$$

esperamos relacionar la velocidad de $\widetilde{P}$ con la velocidad de P. La fórmula que deberá demostrarse será $\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u)$.

Todavía no la usamos como resultado establecido. También quedan por demostrar:

- cuándo la imagen geométrica se conserva exactamente;
- por qué una reparametrización admisible conserva regularidad;
- cómo cambia la norma de la velocidad.

Esos serán proposiciones 5.18–5.21.

Balance de definiciones y criterios. La sección queda preparada mediante la cadena

$$\boxed{P : I \to \mathcal{E} \quad + \quad \phi : J \to I \quad \longrightarrow \quad \widetilde{P} = P \circ \phi : J \to \mathcal{E}.}$$

Definición 5.15 define la operación general. Definición 5.16 identifica la clase de cambios de parámetro regulares y biyectivos que utilizaremos para los resultados estructurales. Definición 5.17 separa preservación e inversión de orientación mediante el signo de ϕ'. principio metodológico 5.11 exige declarar el significado físico o geométrico del parámetro. principio metodológico 5.12 obliga a auditar dominio, biyectividad, regularidad y signo antes de extraer conclusiones. Las proposiciones siguientes demuestran proposiciones 5.18–5.21; ejercicios 5.18–5.19 aplican después estas leyes. La distinción física desarrollada en §10 permanece fuera de esta sección hasta su transición final.

Proposición: regla de la cadena para la velocidad reparametrizada. Sea

$$P : I \to \mathcal{E}$$

una curva derivable y sea

$$\phi : J \to I$$

una función derivable. Definamos

$$\widetilde{P} = P \circ \phi.$$

La derivada de $\widetilde{P}$ debe reconstruirse sin tratar puntos de $\mathcal{E}$ como vectores. Para ello fijamos un origen auxiliar O y pasamos a la curva vectorial

$$r_O : I \to V, \qquad r_O(t) = \overrightarrow{OP(t)}.$$

Entonces

$$\tilde{r}_O(u) := \overrightarrow{O\widetilde{P}(u)} = r_O(\phi(u)).$$

Proposición 5.18 — Regla de la cadena para la velocidad reparametrizada Sea $P : I \to \mathcal{E}$ derivable en $\phi(u)$ y sea $\phi : J \to I$ derivable en u. Entonces $\widetilde{P} = P \circ \phi$ es derivable en u y

$$\boxed{\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u).}$$

Demostración. Fijemos una base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de V y escribamos

$$[r_O(t)]_B = \begin{pmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ q^3(t) \end{pmatrix}.$$

Por proposición 5.8, como r_O es derivable en $\phi(u)$, las funciones escalares q^i son derivables allí. Además,

$$[\tilde{r}_O(u)]_B = \begin{pmatrix} q^1(\phi(u)) \\ q^2(\phi(u)) \\ q^3(\phi(u)) \end{pmatrix}.$$

Aplicando la regla de la cadena escalar importada de M3 a cada componente,

$$\frac{d}{du}q^i(\phi(u)) = (q^i)'(\phi(u))\,\phi'(u).$$

Por proposición 5.8, esto reconstruye la derivada vectorial: $\tilde{r}'_O(u) = r'_O(\phi(u))\,\phi'(u)$.

Finalmente, proposición 5.9 identifica

$$\tilde{v}(u) = \tilde{r}'_O(u)$$

y

$$v(\phi(u)) = r'_O(\phi(u)).$$

Por tanto,

$$\boxed{\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u).}$$

□ proposición 5.18 muestra con precisión qué cambia bajo reparametrización: el vector velocidad original se evalúa en el parámetro correspondiente y luego se multiplica por el factor escalar $\phi'(u)$.

Proposición: conservación de la trayectoria bajo sobreyectividad. La imagen de una curva reparametrizada satisface siempre

$$\widetilde{P}(J) = P(\phi(J)).$$

Por ello, conservar exactamente la trayectoria geométrica requiere que ϕ alcance todo el intervalo original.

Proposición 5.19 — Conservación de la trayectoria bajo reparametrización sobreyectiva Sea $P : I \to \mathcal{E}$ y sea $\phi : J \to I$ una aplicación sobreyectiva. Si

$$\widetilde{P} = P \circ \phi,$$

entonces

$$\boxed{\widetilde{P}(J) = P(I).}$$

Demostración. Por definición,

$$\widetilde{P}(J) = \{P(\phi(u)) : u \in J\} = P(\phi(J)).$$

Como ϕ es sobreyectiva, $\phi(J) = I$. Por tanto, $\widetilde{P}(J) = P(I)$.

□ proposición 5.19 es puramente conjuntista: no requiere derivabilidad ni regularidad. La sobreyectividad basta para conservar la imagen geométrica completa.

Proposición: regularidad bajo reparametrización admisible. Supongamos ahora que ϕ es regular admisible en el sentido de la definición 5.16. Si la curva original es regular en el punto correspondiente, $v(\phi(u)) \neq 0$,

y además

$$\phi'(u) \neq 0,$$

Proposición 5.18 expresa $\tilde{v}(u)$ como un producto de dos factores no nulos.

Proposición 5.20 — Conservación de regularidad bajo reparametrización admisible Sea $\phi : J \to I$ una reparametrización regular admisible y sea $\widetilde{P} = P \circ \phi$. Si

$$v(\phi(u)) \neq 0,$$

entonces

$$\boxed{\tilde{v}(u) \neq 0.}$$

Demostración. Por proposición 5.18,

$$\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u).$$

Por definición 5.16, $\phi'(u) \neq 0$.

Como $v(\phi(u)) \neq 0$, el producto de un vector no nulo por un escalar no nulo tampoco puede ser el vector cero. Luego

$$\tilde{v}(u) \neq 0.$$

□ Así, una reparametrización regular admisible no crea un instante de reposo allí donde la curva original es regular. El ejemplo $\phi(u) = u^3$ queda deliberadamente fuera de esta conclusión porque $\phi'(0) = 0$.

Proposición: transformación de la norma de la velocidad. La norma euclídea de V es homogénea: $\|\lambda w\| = |\lambda|\,\|w\|$.

Aplicando esta propiedad a proposición 5.18 obtenemos la transformación de la norma de la velocidad.

Proposición 5.21 — Transformación de la norma de la velocidad bajo reparametrización Bajo las hipótesis de la proposición 5.18,

$$\boxed{\|\tilde{v}(u)\| = \|v(\phi(u))\|\,|\phi'(u)|.}$$

Demostración. Por proposición 5.18,

$$\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u).$$

Por homogeneidad de la norma,

$$\|\tilde{v}(u)\| = \|v(\phi(u))\,\phi'(u)\| = |\phi'(u)|\,\|v(\phi(u))\|.$$

□ El valor absoluto es esencial. Si $\phi'(u) < 0$, la orientación del parámetro se invierte, pero la norma del vector velocidad sigue siendo no negativa. El nombre formal **rapidez** para $\|v\|$ continúa reservado para §11.

Orientación y dirección del vector velocidad. Proposición 5.18 permite interpretar el signo de ϕ'. Si

$$\phi'(u) > 0,$$

entonces $\tilde{v}(u)$ es un múltiplo positivo de $v(\phi(u))$: la dirección orientada del vector se conserva. Si

$$\phi'(u) < 0,$$

entonces $\tilde{v}(u)$ es un múltiplo negativo de $v(\phi(u))$: el vector velocidad cambia de sentido. Por tanto,

$$\boxed{\phi'(u) > 0 \Longrightarrow \tilde{v}(u) \text{ conserva el sentido,}}$$

mientras

$$\boxed{\phi'(u) < 0 \Longrightarrow \tilde{v}(u) \text{ invierte el sentido.}}$$

La recta tangente afín, sin embargo, permanece asociada a la misma dirección no orientada siempre que ambos vectores sean no nulos, porque multiplicar un vector director por un escalar no nulo no cambia la recta.

Balance de las leyes de reparametrización. Hemos demostrado cuatro efectos distintos de una reparametrización:

$$\boxed{\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u),}$$

$$\boxed{\phi(J) = I \Longrightarrow \widetilde{P}(J) = P(I),}$$

$$\boxed{v(\phi(u)) \neq 0,\ \phi'(u) \neq 0 \Longrightarrow \tilde{v}(u) \neq 0,}$$

y

$$\boxed{\|\tilde{v}(u)\| = \|v(\phi(u))\|\,|\phi'(u)|.}$$

Así quedan separados cuatro niveles:

- imagen geométrica;
- regularidad;
- orientación del parámetro;
- escala del vector velocidad.

Una reparametrización admisible conserva la trayectoria completa y la regularidad, pero puede modificar la velocidad como vector función del parámetro. Si además invierte orientación, invierte el sentido del vector velocidad. Ejercicios 5.18–5.19 aplican estas leyes de forma explícita. La cuestión de si dos parametrizaciones con la misma imagen representan o no el **mismo movimiento físico** pertenece a §10.

Regla de la cadena vectorial. Ejercicio 5.18 · Prueba y cálculo Sean $A \in \mathcal{E}$ y $e_1, e_2 \in V$ dos vectores linealmente independientes. Considera

$$P : (0,\infty) \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + te_1 + t^2 e_2,$$

y la función

$$\phi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \qquad \phi(u) = u^2.$$

Define

$$\widetilde{P} = P \circ \phi.$$

1. Verifica que ϕ es una reparametrización regular admisible y que preserva orientación.
2. Calcula $v(t)$.
3. Calcula $\widetilde{P}(u)$ y deriva directamente para obtener $\tilde{v}(u)$.

4. Verifica proposición 5.18:
$$\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u).$$
5. Comprueba proposición 5.21 comparando $\|\tilde{v}(u)\|$ con $\|v(\phi(u))\|\,|\phi'(u)|$.

Solución desarrollada La función
$$\phi(u) = u^2$$
es biyectiva de $(0,\infty)$ sobre $(0,\infty)$, es de clase C^1 y satisface $\phi'(u) = 2u > 0$
para todo $u > 0$. Por definición 5.16 es regular admisible y, por la definición 5.17, preserva orientación.

Tomando A como origen auxiliar, $r_A(t) = te_1 + t^2e_2$. Por proposición 5.9,
$$\boxed{v(t) = e_1 + 2te_2.}$$
La curva reparametrizada es $\widetilde{P}(u) = P(u^2) = A + u^2e_1 + u^4e_2$. Por tanto,
$$\boxed{\tilde{v}(u) = 2u\,e_1 + 4u^3e_2.}$$
Ahora evaluamos el lado derecho de la proposición 5.18: $v(\phi(u)) = v(u^2) = e_1 + 2u^2e_2$,
y
$$\phi'(u) = 2u.$$
Luego
$$v(\phi(u))\,\phi'(u) = (e_1 + 2u^2e_2)\,2u = 2u\,e_1 + 4u^3e_2 = \tilde{v}(u).$$
Así,
$$\boxed{\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\,\phi'(u).}$$
Para la norma, proposición 5.21 da $\|\tilde{v}(u)\| = \|v(u^2)\|\,2u$,
porque $u > 0$. Esta igualdad también se obtiene directamente por homogeneidad:
$$\|\tilde{v}(u)\| = \big\|2u\,(e_1 + 2u^2e_2)\big\| = 2u\,\|e_1 + 2u^2e_2\|.$$
El ejercicio muestra que el factor $\phi'(u)$ modifica el vector velocidad aun cuando la imagen geométrica se conserva.

Preservar o invertir orientación. Ejercicio 5.19 · Variación y signo Sean $A \in \mathcal{E}$ y $e_1, e_2 \in V$ linealmente independientes. Considera
$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + te_1 + t^2e_2.$$
Define dos reparametrizaciones
$$\phi_+(u) = 2u, \qquad \phi_-(u) = -2u, \qquad u \in \mathbb{R},$$
y las curvas
$$P_+ := P \circ \phi_+, \qquad P_- := P \circ \phi_-.$$
1. Verifica que ϕ_+ y ϕ_- son regulares admisibles.

2. Determina cuál preserva y cuál invierte la orientación.
3. Calcula $v(t)$, $v_+(u)$ y $v_-(u)$.
4. Verifica proposición 5.18 en ambos casos.
5. Compara $\|v_+(u)\|$ y $\|v_-(u)\|$ con las normas de las velocidades originales en los parámetros correspondientes.
6. Explica qué cambia en el sentido del vector velocidad y qué ocurre con la recta tangente.

Solución desarrollada Ambas funciones son biyectivas de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ y de clase C^1. Sus derivadas son

$$\phi'_+(u) = 2 > 0, \qquad \phi'_-(u) = -2 < 0.$$

Por definición 5.16, ambas son regulares admisibles. Por definición 5.17, ϕ_+ preserva orientación y ϕ_- la invierte. La velocidad de la curva original es

$$\boxed{v(t) = e_1 + 2te_2.}$$

Para P_+, $P_+(u) = A + 2u\,e_1 + 4u^2 e_2$,
de modo que

$$\boxed{v_+(u) = 2e_1 + 8u\,e_2.}$$

Proposición 5.18 produce exactamente el mismo resultado:

$$v(\phi_+(u))\,\phi'_+(u) = (e_1 + 4u\,e_2)\,2 = 2e_1 + 8u\,e_2.$$

Para P_-, $P_-(u) = A - 2u\,e_1 + 4u^2 e_2$,
por lo que

$$\boxed{v_-(u) = -2e_1 + 8u\,e_2.}$$

Nuevamente proposición 5.18 coincide:

$$v(\phi_-(u))\,\phi'_-(u) = (e_1 - 4u\,e_2)\,(-2) = -2e_1 + 8u\,e_2.$$

Las normas satisfacen

$$\boxed{\|v_+(u)\| = 2\,\|v(2u)\|,}$$

y

$$\boxed{\|v_-(u)\| = 2\,\|v(-2u)\|.}$$

El signo negativo de ϕ'_- no vuelve negativa una norma: proposición 5.21 introduce el valor absoluto. En el caso ϕ_+, $v_+(u)$ tiene el mismo sentido que $v(2u)$. En el caso ϕ_-, $v_-(u)$ tiene el sentido opuesto a $v(-2u)$.

Sin embargo, siempre que los vectores sean no nulos, multiplicarlos por el escalar 2 o -2 no cambia la **recta tangente afín** que generan. Lo que cambia con el signo es la orientación del recorrido, no la dirección no orientada de la recta tangente.

Cierre conceptual: misma curva geométrica, otro parámetro. §9 ha separado cuatro preguntas que suelen mezclarse:

$$\boxed{\text{¿qué imagen se recorre?}}$$

$$\boxed{\text{¿con qué parámetro se recorre?}}$$

$$\boxed{\text{¿con qué orientación se recorre?}}$$

y

$$\boxed{\text{¿qué significado físico atribuimos a ese parámetro?}}$$

Para una reparametrización

$$\widetilde{P} = P \circ \phi,$$

Proposición 5.18 establece

$$\tilde{v} = (v \circ \phi)\phi',$$

Proposición 5.19 identifica la condición de sobreyectividad que conserva la trayectoria completa, proposición 5.20 muestra que una reparametrización regular admisible conserva regularidad y proposición 5.21 controla la norma de la velocidad mediante $\|\tilde{v}\| = (\|v\| \circ \phi)|\phi'|$. ejercicio 5.18 mostró cómo una reparametrización no lineal modifica la velocidad según la regla de la cadena. Ejercicio 5.19 separó el caso que preserva orientación del que la invierte y mostró que el signo de ϕ' cambia el sentido del vector velocidad, pero no la recta tangente no orientada. La conclusión metodológica es

$$\boxed{\text{cambiar el parámetro} \neq \text{cambiar automáticamente el significado físico del tiempo.}}$$

§10 estudiará precisamente la diferencia entre compartir una misma trayectoria geométrica y representar el mismo movimiento físico. Esa cuestión no se anticipa aquí.

10. La misma trayectoria no significa el mismo movimiento

Activación: ver el camino no basta para conocer el movimiento. Una trayectoria geométrica es un conjunto de puntos: $\Gamma = P(I) \subseteq \mathcal{E}$. Un movimiento, en cambio, es una aplicación parametrizada

$$P : I \to \mathcal{E}.$$

La imagen responde a la pregunta

$$\boxed{\text{¿por qué puntos pasa el móvil?}}$$

mientras la aplicación completa responde también a

$$\boxed{\text{¿qué posición corresponde a cada valor del parámetro?}}$$

Dos curvas pueden dibujar exactamente la misma figura en el espacio y, sin embargo, asignar tiempos distintos a sus puntos, recorrerlos con velocidades diferentes o hacerlo en sentidos opuestos.

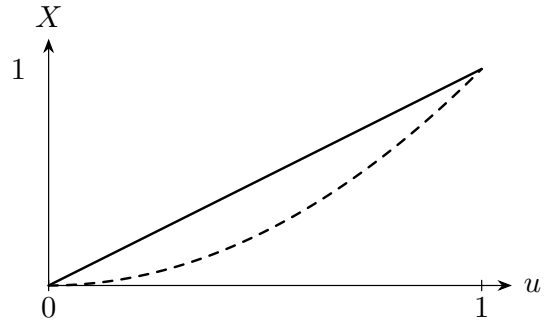


Figura 5.6. En $0 \le u \le 1$, las leyes $X_A = u$ y $X_B = u^2$ recorren el mismo segmento. En $u = 1/2$ ocupan lugares distintos, y sus velocidades iniciales también difieren. Véase §10.

Activación Si sólo conocemos la figura trazada por un movimiento, ¿podemos reconstruir en qué instante se ocupó cada punto? ¿Podemos reconstruir su velocidad?

Definición 5.18 — Igualdad de trayectoria geométrica Sean

$$P : I \to \mathcal{E}, \qquad Q : J \to \mathcal{E}$$

dos movimientos parametrizados. Decimos que tienen la **misma trayectoria geométrica** si

$$\boxed{P(I) = Q(J).}$$

Definición 5.18 compara únicamente las imágenes como subconjuntos de $\mathcal{E}$. No afirma:

- que $I = J$;
- que $P = Q$ como aplicaciones;
- que los mismos valores del parámetro correspondan a los mismos puntos;
- que las velocidades coincidan;
- que el orden temporal de recorrido sea el mismo.

La igualdad de trayectoria es, por tanto, una afirmación geométrica más débil que la igualdad de movimiento parametrizado.

Tres niveles que no deben confundirse. Conviene distinguir explícitamente:

$$\boxed{\text{imagen geométrica}}$$

$$\boxed{\text{curva parametrizada}}$$

y

$$\boxed{\text{movimiento con parámetro interpretado como tiempo físico.}}$$

El primer nivel sólo conserva el conjunto de puntos. El segundo conserva también cómo el parámetro recorre esos puntos. El tercero añade una interpretación física al parámetro: sus valores representan lecturas temporales. Una reparametrización puede ser perfectamente legítima como descripción geométrica y, al mismo tiempo, producir una ley temporal distinta si el nuevo parámetro se declara nuevamente como tiempo físico.

Principio metodológico 5.13 — Misma imagen no implica mismo movimiento físico De

$$P(I) = Q(J)$$

sólo puede concluirse que ambos movimientos tienen la misma trayectoria geométrica.

Para comparar movimientos físicos hay que preguntar además:

1. qué significa cada parámetro;
2. qué punto corresponde a cada lectura temporal;
3. en qué orden se recorren los puntos;
4. cómo se transforman las velocidades.

En particular, si ambos parámetros se interpretan como tiempo físico, dos curvas con la misma imagen pueden representar historias distintas. Error plausible «Como dos movimientos recorren exactamente la misma curva, son el mismo movimiento.» La conclusión confunde trayectoria con ley temporal. La trayectoria no contiene por sí sola información suficiente para reconstruir tiempos de paso ni velocidades.

Primer contraste: misma recta, distintas leyes temporales. Sea

$$A \in \mathcal{E}, \qquad u \in V, \qquad u \neq 0.$$

Consideremos

$$P : \mathbb{R} \to \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + t\,u,$$

y

$$Q : \mathbb{R} \to \mathcal{E}, \qquad Q(t) = A + 2t\,u.$$

Sus imágenes son

$$P(\mathbb{R}) = \{A + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

y

$$Q(\mathbb{R}) = \{A + \mu u : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Como ambos parámetros recorren todos los números reales,

$$\boxed{P(\mathbb{R}) = Q(\mathbb{R}).}$$

Sin embargo, en la misma lectura numérica $t = 1$, $P(1) = A + u$,
mientras

$$Q(1) = A + 2u.$$

Por tanto, $P \neq Q$
como aplicaciones. Además, $v_P(t) = u$,
y

$$v_Q(t) = 2u.$$

Si el parámetro de ambas curvas se interpreta como tiempo físico, tenemos dos historias temporales distintas sobre la misma trayectoria.

La relación con la reparametrización. El ejemplo anterior no es arbitrario. Definamos

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \phi(t) = 2t.$$

Entonces $Q = P \circ \phi$. La función ϕ es una reparametrización regular admisible: $\phi'(t) = 2 > 0$. Por proposición 5.19, la imagen se conserva: $Q(\mathbb{R}) = P(\mathbb{R})$. Por proposición 5.18, $v_Q(t) = v_P(\phi(t))\,\phi'(t)$. Como $v_P \equiv u$, $v_Q(t) = u \cdot 2 = 2u$.

Así, la misma operación matemática puede leerse de dos maneras diferentes:

- como cambio de parámetro de una misma curva geométrica;
- como una nueva ley de movimiento si el nuevo parámetro vuelve a interpretarse como tiempo físico.

La matemática de la composición no decide cuál interpretación física se adopta.

Proposición 5.22 — Una trayectoria no determina una única ley de movimiento Existen dos movimientos parametrizados con la misma trayectoria geométrica y distintas velocidades como funciones del parámetro.

En particular, una reparametrización regular admisible no trivial puede preservar la imagen y modificar la velocidad.

Demostración. Sean

$$P(t) = A + t\,u, \qquad u \neq 0,$$

y

$$\phi(t) = 2t.$$

Definamos

$$Q = P \circ \phi.$$

Como ϕ es biyectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, proposición 5.19 da $Q(\mathbb{R}) = P(\mathbb{R})$. Por proposición 5.18, $v_Q(t) = v_P(2t) \cdot 2$. Pero

$$v_P(t) = u,$$

de modo que

$$\boxed{v_Q(t) = 2u \neq u = v_P(t).}$$

Así, P y Q tienen la misma trayectoria geométrica pero velocidades distintas como funciones del parámetro. Por tanto, la trayectoria no determina una única ley de movimiento. □ proposición 5.22 es una afirmación de existencia: basta un ejemplo explícito para descartar la identificación

$$\text{trayectoria} = \text{movimiento}.$$

Qué información pierde la trayectoria. Al pasar de

$$P : I \to \mathcal{E}$$

a su imagen

$$\Gamma = P(I),$$

olvidamos, en general:

- el dominio del parámetro;
- los tiempos de paso;
- el sentido de recorrido;
- la multiplicidad con que pueden visitarse puntos;
- la velocidad;
- la escala temporal local.

La trayectoria retiene geometría espacial, pero no la historia completa del recorrido. Esta pérdida de información puede resumirse como

$$\boxed{P \longmapsto P(I)}$$

una operación que, en general, no es invertible.

Balance conceptual. §10 fija ahora la distinción central:

$$\boxed{P(I) = Q(J) \not\Rightarrow P = Q.}$$

Si además los parámetros se interpretan como tiempo físico,

$$\boxed{\text{misma trayectoria} \not\Rightarrow \text{misma historia temporal.}}$$

Definición 5.18 formaliza la igualdad geométrica de trayectoria. principio metodológico 5.13 obliga a no convertir esa igualdad en una afirmación física más fuerte. Proposición 5.22 demuestra constructivamente que una misma trayectoria admite leyes parametrizadas distintas. Ejercicios 5.20–5.21 harán explícita la diferencia entre varios «relojes» sobre una misma trayectoria y entre reparametrización geométrica y reinterpretación temporal. La noción formal de rapidez pertenece a §11 y no se introduce todavía.

Tres relojes sobre el mismo segmento. Ejercicio 5.20 · Síntesis y contraejemplo Sean $A, B \in \mathcal{E}$, con $A \neq B$, y define

$$d := \overrightarrow{AB} \in V.$$

Considera los tres movimientos

$$P_1 : [0,1] \to \mathcal{E}, \qquad P_1(t) = A + t\,d,$$

$$P_2 : [0,2] \to \mathcal{E}, \qquad P_2(s) = A + \frac{s}{2}\,d,$$

y

$$P_3 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathcal{E}, \qquad P_3(r) = A + 2r\,d.$$

1. Demuestra que los tres movimientos tienen la misma trayectoria geométrica.
2. Determina el tiempo total de recorrido de cada uno si sus parámetros se interpretan como tiempo físico.
3. Sea
$$M = A + \frac{1}{2}d$$
el punto medio del segmento. Determina en qué lectura temporal llega cada movimiento a M.

4. Calcula las velocidades v_1, v_2 y v_3.
5. Explica por qué conocer sólo el segmento $\overline{AB}$ no permite reconstruir ninguna de estas tres historias temporales.

Solución desarrollada En los tres casos, el coeficiente que multiplica a d recorre todo el intervalo $[0,1]$.

$$P_1([0,1]) = P_2([0,2]) = P_3\Big(\Big[0,\frac{1}{2}\Big]\Big) = \{A+\lambda d : 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Por tanto, los tres movimientos tienen la misma trayectoria geométrica. Si los parámetros se interpretan como tiempo físico,

$$\boxed{T_1 = 1, \qquad T_2 = 2, \qquad T_3 = \frac{1}{2}.}$$

Para alcanzar

$$M = A + \frac{1}{2}d,$$

los coeficientes de d deben valer $1/2$. Así,

$$\boxed{t_M = \frac{1}{2}, \qquad s_M = 1, \qquad r_M = \frac{1}{4}.}$$

Las velocidades son

$$\boxed{v_1(t) = d,}$$

$$\boxed{v_2(s) = \frac{1}{2}d,}$$

y

$$\boxed{v_3(r) = 2d.}$$

Los tres movimientos comparten exactamente el mismo segmento como trayectoria, pero asignan distintos tiempos de paso a sus puntos y poseen velocidades distintas. La trayectoria geométrica, por sí sola, no contiene la escala temporal del recorrido.

Reparametrización geométrica versus reinterpretación temporal. Ejercicio 5.21 · Auditoría conceptual Sean $A, B \in \mathcal{E}$, con $A \neq B$, y

$$d := \overrightarrow{AB}.$$

Considera

$$P : [0,1] \to \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + t\,d,$$

y

$$\phi : \Big[0,\frac{1}{2}\Big] \to [0,1], \qquad \phi(u) = 2u.$$

Define

$$\widetilde{P} = P \circ \phi, \qquad \widetilde{P}(u) = A + 2u\, d.$$

Analiza por separado:

A. u es sólo un parámetro auxiliar.

B. u se declara un nuevo tiempo físico, medido en la misma unidad que t.

Decide qué ocurre con:

1. igualdad de trayectoria geométrica;
2. orden de recorrido;
3. relación $t = 2u$;
4. identidad
$$\tilde{v}(u) = 2\, v(2u);$$
5. duración física total del recorrido;
6. igualdad como movimientos físicos.

Solución desarrollada Como ϕ es biyectiva y

$$\phi'(u) = 2 > 0,$$

es una reparametrización regular admisible que preserva orientación. Por proposición 5.19,

$$\boxed{\widetilde{P}\Big(\Big[0, \frac{1}{2}\Big]\Big) = P([0,1]).}$$

Por tanto, la trayectoria geométrica es la misma en ambas interpretaciones. Como $\phi'(u) > 0$, también se conserva el orden del recorrido. La relación

$$\boxed{t = 2u}$$

es simplemente la definición de ϕ. Por proposición 5.18,

$$\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\, \phi'(u) = 2\, v(2u).$$

Esta identidad es matemática y vale con independencia de la interpretación física de u.

Interpretación A: u es auxiliar.

$\widetilde{P}$ es una descripción geométrica alternativa. El tiempo físico sigue siendo t, de modo que el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ de u no representa una nueva duración física. Tampoco se ha definido una nueva ley temporal física.

Interpretación B: u es un nuevo tiempo físico.

Entonces sí tenemos una nueva historia temporal. El movimiento original tarda

$$T_P = 1,$$

mientras el nuevo tarda

$$T_{\widetilde{P}} = \frac{1}{2}.$$

Además, $v_P(t) = d, \qquad v_{\widetilde{P}}(u) = 2d$. Por tanto, si ambos parámetros son tiempos físicos medidos en la misma unidad, los movimientos son distintos aunque la trayectoria sea la misma.

La diferencia puede resumirse así:

misma reparametrización matemática	+	interpretación distinta del parámetro	$\Longrightarrow$	conclusión física distinta.

Cierre conceptual: la trayectoria no contiene un reloj. §10 ha hecho explícita una pérdida de información fundamental:

$$P : I \to \mathcal{E} \quad \longmapsto \quad P(I) \subseteq \mathcal{E}$$

olvida la ley que asigna valores del parámetro a los puntos de la trayectoria. Por eso,

$$\boxed{\text{misma trayectoria} \not\Rightarrow \text{mismo movimiento parametrizado,}}$$

y, cuando los parámetros se interpretan como tiempo físico,

$$\boxed{\text{misma trayectoria} \not\Rightarrow \text{misma historia temporal.}}$$

Proposición 5.22 mostró constructivamente que una misma trayectoria admite velocidades distintas. Ejercicio 5.20 añadió tres escalas temporales diferentes sobre un mismo segmento. Ejercicio 5.21 separó reparametrización geométrica de reinterpretación temporal. La conclusión de la sección puede expresarse como

$$\boxed{\text{la trayectoria describe dónde;} \qquad \text{la parametrización añade cómo y cuándo.}}$$

§11 introducirá formalmente la norma de la velocidad como magnitud escalar y comenzará a comparar desplazamiento neto con aproximaciones al camino recorrido.

11. Rapidez, desplazamiento y aproximaciones al camino recorrido

Activación: un vector y una magnitud escalar no responden a la misma pregunta. La velocidad instantánea es un vector

$$v(t) \in V.$$

Por tanto, contiene información de magnitud y dirección. Sin embargo, muchas preguntas físicas requieren sólo una magnitud escalar: cuánto vale el tamaño de ese vector, independientemente de la dirección espacial que tenga. La estructura euclídea de V ya proporciona una norma $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$.

Aplicarla a la velocidad produce una función escalar del parámetro.

Activación ¿Qué información se pierde cuando reemplazamos $v(t)$ por $\|v(t)\|$? ¿Puede haber dos velocidades distintas con la misma norma?

Definición 5.19 — Rapidez Sea $P : I \to \mathcal{E}$ un movimiento derivable y sea

$$v : I \to V$$

su velocidad. Definimos la **rapidez** por

$$\boxed{\sigma(t) := \|v(t)\| \geq 0.}$$

La rapidez es un **escalar no negativo**. En cambio, la velocidad es un vector.[7] Por tanto,

$$\boxed{\sigma(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad v(t) \in V.}$$

[7] Kleppner–Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, 2.ª ed., cap. 1, §1.6 «Velocity and Acceleration», pp. 13–18; Shankar, *Fundamentals of Physics I*, cap. 1, §1.3, pp. 4–6.

Si t representa tiempo físico, $[\sigma] = [v] = \frac{L}{T}$. La norma elimina la dirección, pero conserva la magnitud del vector velocidad.

Principio metodológico 5.14 — Rapidez es norma; velocidad conserva dirección No usar «rapidez» y «velocidad» como sinónimos.

La velocidad

$$v(t) \in V$$

es vectorial. La rapidez

$$\sigma(t) = \|v(t)\|$$

es escalar.

Dos movimientos pueden satisfacer

$$\|v_1(t)\| = \|v_2(t)\|$$

y, sin embargo, $v_1(t) \neq v_2(t)$

porque sus direcciones o sentidos son distintos. Este principio será importante cuando comparemos recorridos: una suma de **distancias** entre puntos produce escalares, mientras una suma de **desplazamientos** produce vectores.

Desplazamiento neto y recorrido intermedio. Sean $a < b$ dos instantes. El desplazamiento neto entre los extremos es

$$\Delta P_{a,b} = \overrightarrow{P(a)P(b)} \in V.$$

Su norma es la distancia entre los puntos extremos: $\|\Delta P_{a,b}\| = d(P(a), P(b))$. Pero conocer sólo los extremos no registra por dónde pasó la curva entre a y b. Para recuperar información intermedia podemos insertar tiempos adicionales

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

y considerar la sucesión de posiciones

$$P(t_0), P(t_1), \ldots, P(t_n).$$

Uniendo posiciones consecutivas mediante segmentos obtenemos un recorrido poligonal que aproxima la curva observada en esos instantes.

Definición 5.20 — Partición temporal Sea $[a, b] \subseteq I$. Si $a < b$, una **partición temporal** de $[a, b]$ es una colección finita ordenada

$$\boxed{\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.}$$

Si $a = b$, admitimos la **partición trivial**

$$\boxed{\Pi = \{a\}.}$$

Los puntos t_i pertenecen al dominio del parámetro; no son puntos del espacio físico. Cada partición selecciona una muestra finita de posiciones sobre la curva. Una partición puede ser gruesa, con pocos instantes, o más fina, incorporando tiempos intermedios adicionales. La comparación sistemática entre refinamientos pertenecerá a §12.

Definición 5.21 — Longitud poligonal asociada a una partición Sea $P : [a, b] \to \mathcal{E}$ y sea

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

una partición. Definimos la **longitud poligonal de P asociada a Π** por

$$\boxed{L_\Pi(P) := \sum_{i=1}^{n} d(P(t_{i-1}), P(t_i)).}$$

Cuando $a = b$ y $\Pi = \{a\}$, la suma de la definición 5.21 es vacía y, por convención, vale 0. Cada término es un escalar no negativo con dimensión de longitud. Por tanto, $L_\Pi(P) \geq 0$, $\qquad [L_\Pi] = L$. También podemos escribir

$$d(P(t_{i-1}), P(t_i)) = \left\| \overrightarrow{P(t_{i-1})P(t_i)} \right\|.$$

Así,

$$L_\Pi(P) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \Delta P_{t_{i-1}, t_i} \right\|.$$

La norma se aplica **antes** de sumar.

Sumar desplazamientos no es sumar distancias. Por proposición 5.6,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta P_{t_{i-1}, t_i} = \Delta P_{a,b}.$$

El lado izquierdo es una suma de vectores y las cancelaciones de dirección son posibles. En cambio,

$$L_\Pi(P) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \Delta P_{t_{i-1}, t_i} \right\|$$

es una suma de escalares no negativos. Por eso no debemos confundir

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \Delta P_{t_{i-1}, t_i} \right\|$$

con

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \Delta P_{t_{i-1}, t_i} \right\|.$$

La primera expresión mide la norma del desplazamiento neto; la segunda mide la longitud del recorrido poligonal determinado por la partición.

Principio metodológico 5.15 — No confundir desplazamiento neto con camino recorrido Para un intervalo $[a, b]$ distinguir siempre:

$$\boxed{\Delta P_{a,b} = \overrightarrow{P(a)P(b)}}$$

del escalar

$$\boxed{L_\Pi(P) = \sum_i d(P(t_{i-1}), P(t_i)).}$$

El desplazamiento neto depende sólo de los extremos y vive en V. La longitud poligonal depende de la partición, usa posiciones intermedias y es un escalar no negativo. Todavía no llamamos a $L_\Pi(P)$ «longitud de la curva». Para una partición fija es sólo una aproximación poligonal finita.

Ejemplo mínimo: regresar al punto de partida. Supongamos que

$$P(a) = P(b),$$

pero que existe un instante intermedio $c \in (a, b)$ tal que

$$P(c) \neq P(a).$$

Entonces $\Delta P_{a,b} = 0$
y

$$d(P(a), P(b)) = 0.$$

Sin embargo, para la partición

$$\Pi = \{a, c, b\},$$

tenemos $L_\Pi(P) = d(P(a), P(c)) + d(P(c), P(b))$.
Como $P(c) \neq P(a) = P(b)$, $L_\Pi(P) > 0$. El ejemplo hace visible que un desplazamiento neto nulo no implica un recorrido poligonal nulo.

Qué todavía no hemos demostrado. La desigualdad triangular sugiere que, para cualquier partición, $d(P(a), P(b)) \leq L_\Pi(P)$. Éste será proposición 5.23 y todavía no lo usamos como resultado establecido. También esperamos relacionar rapidez nula e instante de reposo mediante $\sigma(t) = 0 \iff v(t) = 0$.
Éste será proposición 5.24. Finalmente, una sola partición no define todavía una longitud geométrica exacta de la curva. Para ello tendremos que considerar **todas** las particiones y una operación de supremo. Esa construcción pertenece a §12.

Balance de definiciones. La sección introduce tres objetos de tipos distintos:

$$\boxed{v(t) \in V, \qquad \sigma(t) = \|v(t)\| \in \mathbb{R}_{\geq 0},}$$

$$\boxed{\Delta P_{a,b} \in V,}$$

y

$$\boxed{L_\Pi(P) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.}$$

Definición 5.19 convierte la velocidad en una magnitud escalar mediante la norma. Definición 5.20 selecciona una muestra temporal finita. Definición 5.21 mide la longitud del recorrido poligonal que une las posiciones seleccionadas. principio metodológico 5.14 impide identificar rapidez y velocidad. principio metodológico 5.15 impide identificar desplazamiento neto y camino aproximado. Las

proposiciones siguientes demuestran proposiciones 5.23–5.24 y ejercicios 5.22–5.23 aplican después esas relaciones. La longitud geométrica exacta continúa reservada para §12.

Proposición: toda longitud poligonal domina el desplazamiento neto. La relación entre desplazamiento neto y longitud poligonal se obtiene combinando dos hechos ya establecidos:
1. los desplazamientos sucesivos se suman telescópicamente;
2. la norma satisface la desigualdad triangular.

Proposición 5.23 — Toda longitud poligonal domina el desplazamiento neto Sea

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

una partición temporal. Entonces

$$\boxed{d(P(a), P(b)) \leq L_\Pi(P).}$$

Demostración. Por proposición 5.6, aplicado sucesivamente,

$$\Delta P_{a,b} = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_{t_{i-1},t_i}.$$

Tomando normas,

$$d(P(a), P(b)) = \|\Delta P_{a,b}\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \Delta P_{t_{i-1},t_i} \right\|.$$

Por la desigualdad triangular finita,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \Delta P_{t_{i-1},t_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \Delta P_{t_{i-1},t_i} \right\|.$$

Por definición 5.21,

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \Delta P_{t_{i-1},t_i} \right\| = L_\Pi(P).$$

Luego

$$\boxed{d(P(a), P(b)) \leq L_\Pi(P).}$$

□ proposición 5.23 formaliza una idea geométrica básica: cualquier camino poligonal construido con puntos intermedios de la curva no puede ser más corto que la cuerda que une directamente los extremos. La desigualdad no afirma todavía que exista una «longitud de la curva» independiente de la partición. Sólo compara una partición concreta con el desplazamiento neto.

Consecuencia conceptual: los extremos no contienen el recorrido. Proposición 5.23 permite ordenar dos cantidades escalares: $d(P(a), P(b)) \leq L_\Pi(P)$. El lado izquierdo depende únicamente de los extremos. El lado derecho depende también de los puntos intermedios seleccionados por Π. Por tanto, incluso cuando ambas cantidades tienen la misma dimensión física, no contienen la misma información. En particular, si

$$P(a) = P(b),$$

entonces $d(P(a), P(b)) = 0$,
pero proposición 5.23 sólo obliga a

$$0 \leq L_{\Pi}(P),$$

y una partición con posiciones intermedias distintas puede dar una longitud poligonal estrictamente positiva.

Proposición: rapidez nula e instante de reposo. La rapidez se definió como la norma de la velocidad: $\sigma(t) = \|v(t)\|$. En un espacio euclídeo, la norma es definida positiva: $\|w\| = 0 \iff w = 0$.

Proposición 5.24 — Rapidez nula e instante de reposo Para todo instante donde exista la velocidad,

$$\boxed{\sigma(t) = 0 \iff v(t) = 0.}$$

En consecuencia,

$$\boxed{\sigma(t) = 0 \iff t \text{ es un instante de reposo.}}$$

Demostración. Por definición 5.19,

$$\sigma(t) = \|v(t)\|.$$

Si

$$\sigma(t) = 0,$$

entonces $\|v(t)\| = 0$. Por definitud positiva de la norma, $v(t) = 0$.
Recíprocamente, si

$$v(t) = 0,$$

entonces $\sigma(t) = \|0\| = 0$.
Así, $\sigma(t) = 0 \iff v(t) = 0$.
Por definición 5.12, la condición $v(t) = 0$ equivale exactamente a que t sea un instante de reposo. □ proposición 5.24 no añade una nueva noción de reposo: sólo expresa la misma condición mediante la magnitud escalar de la velocidad.

Balance de las desigualdades y equivalencias. La sección dispone ahora de dos relaciones fundamentales:

$$\boxed{d(P(a), P(b)) \leq L_{\Pi}(P),}$$

y

$$\boxed{\sigma(t) = 0 \iff v(t) = 0.}$$

Proposición 5.23 separa la distancia entre extremos de una aproximación al camino recorrido. Proposición 5.24 conecta una condición vectorial de reposo con una condición escalar de rapidez nula. La arquitectura sigue siendo deliberadamente finita:

$$\text{partición} \longrightarrow \text{longitud poligonal}$$

y todavía no

todas las particiones $\longrightarrow$ supremo.

Ese paso pertenece a §12. Ejercicios 5.22–5.23 aplicarán la distinción velocidad/rapidez y la desigualdad entre cuerda y recorrido poligonal antes del cierre local de §11.

Velocidad versus rapidez. Ejercicio 5.22 · Tipado y métrica Sea $B = (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormal de V. Considera dos movimientos con velocidades constantes

$$v_1 = 3e_1 + 4e_2,$$

y

$$v_2 = 4e_1 - 3e_2.$$

1. Calcula las rapidez σ_1 y σ_2.
2. Decide si $v_1 = v_2$.
3. Compara sus direcciones y explica por qué tener igual rapidez no implica tener igual velocidad.
4. Si las componentes están expresadas en unidades de longitud/tiempo, audita las unidades de v_1, v_2, σ_1 y σ_2.
5. Construye un tercer vector velocidad v_3 con la misma rapidez pero sentido opuesto a v_1.

Solución desarrollada Como B es ortonormal,

$$\sigma_1 = \|v_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

y

$$\sigma_2 = \|v_2\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = 5.}$$

Sin embargo, $v_1 = 3e_1 + 4e_2$

y

$$v_2 = 4e_1 - 3e_2$$

tienen componentes diferentes y, por tanto,

$$\boxed{v_1 \neq v_2.}$$

De hecho, sus direcciones no orientadas también son diferentes: no existe un escalar no nulo λ tal que $v_2 = \lambda v_1$. Así,

$$\boxed{\|v_1\| = \|v_2\| \nRightarrow v_1 = v_2.}$$

La rapidez conserva sólo la magnitud de la velocidad; la dirección y el sentido pertenecen al vector velocidad. Si las componentes de v_1 y v_2 se miden en unidades de longitud/tiempo, entonces $[v_1] = [v_2] = \frac{L}{T}$,

y, por la definición 5.19, $[\sigma_1] = [\sigma_2] = \frac{L}{T}$. Para obtener la misma rapidez con sentido opuesto a v_1, basta tomar

$$\boxed{v_3 = -v_1 = -3e_1 - 4e_2.}$$

Entonces $\|v_3\| = \|-v_1\| = \|v_1\| = 5$,
pero v_3 apunta en sentido opuesto.

Camino poligonal versus desplazamiento neto. Ejercicio 5.23 · Geometría y desigualdad Sea $B = (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormal de V y sea $A \in \mathcal{E}$. Considera un movimiento $P : [0, 2] \to \mathcal{E}$ que pasa por

$$P(0) = A,$$

$$P(1) = A + 3e_1,$$

y

$$P(2) = A + 3e_1 + 4e_2.$$

Para la partición

$$\Pi = \{0, 1, 2\},$$

1. calcula los dos desplazamientos parciales;
2. calcula $L_\Pi(P)$;
3. calcula el desplazamiento neto $\Delta P_{0,2}$ y su norma;
4. verifica explícitamente proposición 5.23;
5. explica qué información distingue $L_\Pi(P)$ de $d(P(0), P(2))$.

Solución desarrollada Los desplazamientos parciales son

$$\Delta P_{0,1} = \overrightarrow{P(0)P(1)} = 3e_1,$$

y

$$\Delta P_{1,2} = \overrightarrow{P(1)P(2)} = 4e_2.$$

Sus normas son

$$\|\Delta P_{0,1}\| = 3, \qquad \|\Delta P_{1,2}\| = 4.$$

Por definición 5.21,

$$L_\Pi(P) = 3 + 4 = \boxed{7}.$$

El desplazamiento neto es $\Delta P_{0,2} = 3e_1 + 4e_2$.
Como la base es ortonormal,

$$d(P(0), P(2)) = \|\Delta P_{0,2}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \boxed{5}.$$

Así,

$$\boxed{d(P(0), P(2)) = 5 \leq 7 = L_\Pi(P),}$$

lo que verifica proposición 5.23.
La diferencia entre ambas cantidades es conceptual:

- $d(P(0), P(2))$ depende sólo de los extremos;
- $L_\Pi(P)$ incorpora también la posición intermedia $P(1)$.

En este ejemplo, el recorrido poligonal obliga a avanzar primero 3 unidades en la dirección e_1 y luego 4 unidades en la dirección e_2, mientras la cuerda entre los extremos mide sólo 5 unidades. Por tanto,

$$\boxed{\text{desplazamiento neto} \neq \text{camino poligonal asociado a } \Pi.}$$

Cierre conceptual: magnitud instantánea y camino finito. §11 ha conectado dos escalas de descripción. En un instante,

$$\boxed{\sigma(t) = \|v(t)\|}$$

extrae la magnitud escalar de la velocidad. Sobre un intervalo y una partición,

$$\boxed{L_\Pi(P) = \sum_i d(P(t_{i-1}), P(t_i))}$$

mide un recorrido poligonal finito construido a partir de posiciones muestreadas. Proposición 5.23 establece que

$$d(P(a), P(b)) \leq L_\Pi(P),$$

mientras proposición 5.24 identifica

$$\sigma(t) = 0 \iff v(t) = 0.$$

Ejercicio 5.22 mostró que igual rapidez no implica igual velocidad. Ejercicio 5.23 mostró que la longitud de un recorrido poligonal puede superar estrictamente la distancia entre los extremos. La sección queda cerrada sin identificar todavía ninguna longitud poligonal concreta con la **longitud geométrica de la curva**. Ese paso exige considerar todas las particiones y definir un supremo. Pertenece íntegramente a §12.

12. Longitud geométrica de una curva

Activación: una sola partición no basta. En §11, una partición temporal

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

produce una longitud poligonal

$$L_\Pi(P) = \sum_{i=1}^{n} d(P(t_{i-1}), P(t_i)).$$

Pero esta cantidad depende de la partición elegida. Una partición gruesa puede ignorar parte del recorrido intermedio. Si añadimos nuevos instantes, el polígono puede seguir más de cerca la curva y revelar una longitud mayor. La pregunta geométrica es, por tanto,

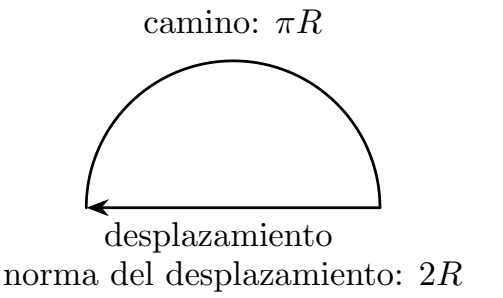


Figura 5.7. Una semicircunferencia de radio R tiene longitud πR. El desplazamiento une sus extremos y tiene norma $2R$; ambas cantidades miden objetos distintos. Véase §12.

¿cómo extraer una longitud de la curva que no dependa de una partición concreta?

La respuesta no será una fórmula integral. Primero construiremos una definición puramente geométrica a partir de **todas** las longitudes poligonales.

La familia de todas las longitudes poligonales. Sea

$$P : [a, b] \to \mathcal{E}.$$

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{L}(P; [a, b]) := \{L_\Pi(P) : \Pi \text{ partición de } [a, b]\}.$$

Cada elemento de $\mathcal{L}(P; [a, b])$ es un número real no negativo. Por proposición 5.23, toda partición satisface $d(P(a), P(b)) \leq L_\Pi(P)$. Así, las aproximaciones poligonales están acotadas inferiormente por la distancia entre los extremos. Lo que todavía no sabemos es si están acotadas superiormente. Puede ocurrir que las longitudes poligonales crezcan sin cota al considerar particiones cada vez más finas. Por eso la definición deberá permitir tanto un valor real finito como la posibilidad de longitud infinita.

Principio metodológico: definir longitud geométricamente antes de integrar. Principio metodológico 5.16 — Definir longitud geométricamente antes de usar una fórmula integral La longitud de una curva no se introduce mediante

$$\int_a^b \|v(t)\|\, dt.$$

Primero se define geométricamente a partir de las longitudes poligonales

$$L_\Pi(P).$$

Sólo más adelante, bajo hipótesis de regularidad suficientes, se demostrará que esa definición geométrica coincide con una fórmula integral.

principio metodológico 5.16 fija una prioridad lógica importante:

definición geométrica $\longrightarrow$ teorema integral,

y no al revés. Esto evita que la integral oculte qué cantidad geométrica está midiendo.

Definir: longitud geométrica de una curva. Definición 5.22 — Longitud geométrica de una curva sobre $[a, b]$ Sea

$$P : [a, b] \to \mathcal{E}.$$

Definimos la **longitud geométrica** de P sobre $[a, b]$ por

$$\boxed{L(P; [a, b]) := \sup_{\Pi} L_{\Pi}(P),}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones temporales finitas de $[a, b]$. Si el conjunto de longitudes poligonales no está acotado superiormente, escribimos

$$L(P; [a, b]) = +\infty.$$

La definición no requiere que P sea derivable. Tampoco depende de una base ni de coordenadas: sólo usa distancias entre puntos del espacio euclídeo afín. Por tanto, definición 5.22 es una definición geométrica primaria.

Qué significa el supremo en esta definición. El valor

$$L(P; [a, b]) = \sup_{\Pi} L_{\Pi}(P)$$

es el menor número —si existe finito— que domina todas las longitudes poligonales. Equivale a exigir:

1. para toda partición Π,
$$L_{\Pi}(P) \leq L(P; [a, b]);$$
2. si $M < L(P; [a, b])$, entonces existe alguna partición Π tal que
$$L_{\Pi}(P) > M.$$

La longitud geométrica no tiene por qué coincidir con la longitud poligonal de una partición particular. Puede ser aproximada desde abajo por longitudes poligonales cada vez mayores, pero la existencia de una partición que alcance exactamente el supremo no forma parte de la definición.

Definición 5.23 — Curva rectificable Una curva

$$P : [a, b] \to \mathcal{E}$$

se llama **rectificable** si

$$\boxed{L(P; [a, b]) < \infty.}$$

Ser rectificable significa, por tanto, que todas las longitudes poligonales de la curva están acotadas superiormente por una constante finita. La definición no afirma todavía que la longitud pueda calcularse mediante una integral ni que la curva sea derivable.

Una jerarquía de cantidades. En §§11–12 aparecen ahora tres cantidades escalares distintas:

$$d(P(a), P(b)),$$

$$L_\Pi(P),$$

y

$$L(P; [a, b]).$$

La primera depende sólo de los extremos. La segunda depende de una partición concreta. La tercera reúne la información de **todas** las particiones mediante el supremo. Conceptualmente,

$$\boxed{\text{cuerda} \longrightarrow \text{polígono asociado a } \Pi \longrightarrow \text{longitud geométrica.}}$$

Proposición 5.23 ya garantiza, para toda partición, $d(P(a), P(b)) \le L_\Pi(P)$.
Más adelante proposición 5.26 hará explícita la consecuencia

$$d(P(a), P(b)) \le L(P; [a, b]).$$

Todavía no la usamos como resultado formal.

Refinar una partición: intuición antes del teorema. Supongamos que una partición Π' se obtiene de Π añadiendo uno o más instantes intermedios. Geométricamente, cada segmento del polígono original se reemplaza por una cadena de segmentos que pasa por más puntos de la curva. La desigualdad triangular sugiere que esa operación no puede disminuir la suma total de longitudes. Es decir, esperamos demostrar

$$L_{\Pi'}(P) \ge L_\Pi(P)$$

cuando Π' refina Π. Éste será proposición 5.25. La monotonía bajo refinamiento explica por qué las aproximaciones poligonales pueden entenderse como aproximaciones **desde abajo** a la longitud geométrica.

Principio metodológico: las particiones aproximan desde abajo. Principio metodológico 5.17 — Las particiones aproximan desde abajo la longitud; refinar no debe acortarlas Al comparar particiones:

1. declarar cuál refina a cuál;
2. comparar localmente un segmento con la cadena de segmentos que lo sustituye;
3. usar la desigualdad triangular;
4. concluir que el refinamiento no reduce la longitud poligonal.

No interpretar una partición concreta como si ya fuese la longitud geométrica. La idea central es

$$\boxed{\Pi' \text{ refina } \Pi \quad \Longrightarrow \quad L_{\Pi'}(P) \ge L_\Pi(P),}$$

pero esta implicación seguirá siendo una **expectativa** hasta demostrar proposición 5.25.

Curvas rectificables y no rectificables. Definición 5.23 permite dos regímenes. Si existe una cota finita común para todas las longitudes poligonales, entonces $L(P;[a,b]) < \infty$

y la curva es rectificable. Si, en cambio, para todo $M > 0$ podemos encontrar una partición Π con

$$L_\Pi(P) > M,$$

entonces $L(P;[a,b]) = +\infty$

y la curva no es rectificable. En este capítulo no necesitamos todavía construir ejemplos patológicos sofisticados. Lo importante es que la definición definición 5.22 admite ambas posibilidades.

Qué todavía no hemos demostrado. Quedan tres resultados estructurales:

1. **proposición 5.25 — monotonía bajo refinamiento**
$$\Pi' \text{ refina } \Pi \Longrightarrow L_{\Pi'}(P) \geq L_\Pi(P);$$
2. **proposición 5.26 — la longitud geométrica domina la cuerda**
$$L(P;[a,b]) \geq d(P(a),P(b));$$
3. **proposición 5.27 — invariancia bajo reparametrización monótona y biyectiva** la longitud geométrica debe depender del recorrido geométrico, no de una parametrización monótona elegida para describirlo. Ninguno de estos resultados requiere todavía la fórmula integral de §13.

Balance de la definición geométrica. La arquitectura conceptual queda fijada:

$$\boxed{\Pi \longmapsto L_\Pi(P)}$$

y después

$$\boxed{L(P;[a,b]) = \sup_\Pi L_\Pi(P).}$$

Definición 5.22 define la longitud geométrica sin derivadas ni integrales. Definición 5.23 distingue las curvas cuya longitud es finita. principio metodológico 5.16 protege la prioridad de la definición geométrica frente a la futura fórmula integral. principio metodológico 5.17 prepara la idea de que refinamientos sucesivos producen mejores aproximaciones poligonales desde abajo. Las proposiciones siguientes demuestran proposiciones 5.25–5.27 y ejercicios 5.24–5.26 aplican después esas propiedades. La fórmula integral permanece reservada para §13.

Proposición: monotonía de la longitud poligonal bajo refinamiento. Recordemos que una partición

$$\Pi' : a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$$

refina a

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

si todo punto de Π pertenece también a Π'. La afirmación que debemos demostrar es que añadir puntos intermedios nunca disminuye la suma de distancias.

Proposición 5.25 — Monotonía bajo refinamiento Si Π' refina a Π, entonces

$$\boxed{L_{\Pi'}(P) \geq L_\Pi(P).}$$

Demostración. Comenzamos con el caso elemental en que Π' se obtiene de Π insertando un único punto

$$\tau \in (t_{k-1}, t_k).$$

Todos los términos de la suma poligonal permanecen iguales excepto

$$d(P(t_{k-1}), P(t_k)),$$

que en la partición refinada se reemplaza por

$$d(P(t_{k-1}), P(\tau)) + d(P(\tau), P(t_k)).$$

Por la desigualdad triangular,

$$d(P(t_{k-1}), P(t_k)) \leq d(P(t_{k-1}), P(\tau)) + d(P(\tau), P(t_k)).$$

Por tanto, $L_{\Pi'}(P) \geq L_{\Pi}(P)$. Si Π' contiene varios puntos nuevos, podemos obtenerla a partir de Π mediante una sucesión finita de inserciones de un solo punto. Aplicando el argumento anterior en cada paso,

$$L_{\Pi}(P) \leq L_{\Pi_1}(P) \leq \cdots \leq L_{\Pi'}(P).$$

Luego

$$\boxed{L_{\Pi'}(P) \geq L_{\Pi}(P).}$$

□ proposición 5.25 justifica rigurosamente la lectura de principio metodológico 5.17: un refinamiento puede mantener o aumentar la longitud poligonal, pero nunca acortarla.

Proposición: la longitud geométrica domina la cuerda. Proposición 5.23 ya estableció que, para toda partición Π, $d(P(a), P(b)) \leq L_{\Pi}(P)$.

Como la longitud geométrica es el supremo de todas las longitudes poligonales, la misma cota inferior debe valer también para el supremo.

Proposición 5.26 — La longitud geométrica domina la cuerda Para toda curva

$$P : [a, b] \to \mathcal{E},$$

se tiene

$$\boxed{L(P; [a, b]) \geq d(P(a), P(b)).}$$

Demostración. Por proposición 5.23, para toda partición Π,

$$d(P(a), P(b)) \leq L_{\Pi}(P).$$

Por definición 5.22, $L(P; [a, b]) = \sup_{\Pi} L_{\Pi}(P)$.

Todo elemento $L_{\Pi}(P)$ es menor o igual que ese supremo: $L_{\Pi}(P) \leq L(P; [a, b])$. Por transitividad, $d(P(a), P(b)) \leq L(P; [a, b])$. Por tanto,

$$\boxed{L(P; [a, b]) \geq d(P(a), P(b)).}$$

□ La desigualdad sigue siendo válida cuando

$$L(P;[a,b]) = +\infty.$$

Proposición 5.26 expresa que ninguna curva que une dos puntos puede tener longitud geométrica menor que la distancia euclídea entre ellos.

Proposición: invariancia bajo reparametrización monótona. Sea

$$P : [a,b] \to \mathcal{E}$$

y sea

$$\phi : [c,d] \to [a,b]$$

una biyección estrictamente monótona. Definimos $Q := P \circ \phi : [c,d] \to \mathcal{E}$. Queremos demostrar que P y Q tienen la misma longitud geométrica. La idea no usa derivadas. Basta comprobar que cada partición de un intervalo produce una partición correspondiente del otro con exactamente la misma suma poligonal.

Proposición 5.27 — Invariancia de la longitud geométrica bajo reparametrización estrictamente monótona y biyectiva Sea

$$P : [a,b] \to \mathcal{E},$$

y sea

$$\phi : [c,d] \to [a,b]$$

una biyección estrictamente monótona. Si

$$Q = P \circ \phi,$$

entonces

$$\boxed{L(Q;[c,d]) = L(P;[a,b]).}$$

Demostración. Distinguimos dos casos.

Caso 1: ϕ es estrictamente creciente. Como ϕ es biyectiva entre los intervalos compactos, $\phi(c) = a, \qquad \phi(d) = b.$

Sea

$$\Sigma : c = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = d$$

una partición de $[c,d]$. Como ϕ es estrictamente creciente,

$$a = \phi(u_0) < \phi(u_1) < \cdots < \phi(u_n) = b.$$

Por tanto, $\Phi(\Sigma) := \{\phi(u_0), \dots, \phi(u_n)\}$
es una partición de $[a,b]$. Además,

$$\begin{aligned} L_\Sigma(Q) &= \sum_{i=1}^{n} d\big(Q(u_{i-1}), Q(u_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d\big(P(\phi(u_{i-1})), P(\phi(u_i))\big) \\ &= L_{\Phi(\Sigma)}(P). \end{aligned}$$

Como ϕ^{-1} también es estrictamente creciente, toda partición de $[a,b]$ se obtiene de manera única a partir de una partición de $[c,d]$ mediante este procedimiento. Por tanto, los conjuntos de longitudes poligonales coinciden:

$$\{L_\Sigma(Q) : \Sigma \text{ partición de } [c,d]\} = \{L_\Pi(P) : \Pi \text{ partición de } [a,b]\}.$$

Caso 2: ϕ es estrictamente decreciente. Ahora

$$\phi(c) = b, \qquad \phi(d) = a.$$

Sea de nuevo

$$\Sigma : c = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = d.$$

Entonces

$$b = \phi(u_0) > \phi(u_1) > \cdots > \phi(u_n) = a.$$

Para obtener una partición ordenada de $[a,b]$, invertimos el orden:

$$\Phi(\Sigma) : a = \phi(u_n) < \phi(u_{n-1}) < \cdots < \phi(u_0) = b.$$

La longitud poligonal correspondiente es

$$L_{\Phi(\Sigma)}(P) = \sum_{i=1}^{n} d\big(P(\phi(u_i)), P(\phi(u_{i-1}))\big).$$

Por simetría de la distancia,

$$d\big(P(\phi(u_i)), P(\phi(u_{i-1}))\big) = d\big(P(\phi(u_{i-1})), P(\phi(u_i))\big).$$

Luego

$$L_{\Phi(\Sigma)}(P) = L_\Sigma(Q).$$

La inversa ϕ^{-1} es también estrictamente decreciente, de modo que nuevamente obtenemos una correspondencia biyectiva entre las particiones de ambos intervalos que conserva exactamente las longitudes poligonales. En ambos casos, los conjuntos de longitudes poligonales de P y Q son iguales. Sus supremos, por tanto, son iguales:

$$\boxed{L(Q;[c,d]) = L(P;[a,b]).}$$

□ proposición 5.27 muestra que la longitud geométrica es independiente de una reparametrización monótona y biyectiva: cambiar el «reloj» de la curva, incluso invirtiendo el sentido de recorrido, no cambia su longitud geométrica.

Balance de las propiedades estructurales. Quedan ahora demostradas tres propiedades estructurales:

$$\boxed{\Pi' \text{ refina } \Pi \Longrightarrow L_{\Pi'}(P) \geq L_{\Pi}(P),}$$

$$\boxed{L(P;[a,b]) \geq d(P(a),P(b)),}$$

y

$$\boxed{L(P\circ\phi;[c,d]) = L(P;[a,b])}$$

para toda biyección estrictamente monótona

$$\phi : [c,d] \to [a,b].$$

Proposición 5.25 formaliza la aproximación desde abajo por refinamientos. Proposición 5.26 relaciona la longitud geométrica con la cuerda entre los extremos. Proposición 5.27 establece que la longitud geométrica no depende de la parametrización monótona elegida para recorrer la misma curva. Ninguna de estas pruebas usa derivadas ni integrales. Ejercicios 5.24–5.26 aplicarán estas propiedades antes del cierre local de §12. La fórmula integral y el parámetro natural siguen reservados para §13.

Refinar una partición. Ejercicio 5.24 · Prueba Sea $B = (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormal de V y sea $A \in \mathcal{E}$. Considera una curva $P : [0,2] \to \mathcal{E}$ tal que

$$P(0) = A,$$

$$P(1) = A + 3e_1,$$

y

$$P(2) = A + 3e_1 + 4e_2.$$

Compara las particiones

$$\Pi = \{0,2\}, \qquad \Pi' = \{0,1,2\}.$$

1. Calcula $L_{\Pi}(P)$.
2. Calcula $L_{\Pi'}(P)$.
3. Verifica directamente proposición 5.25.
4. Identifica en qué paso aparece la desigualdad triangular.

Solución desarrollada Para la partición gruesa,

$$L_{\Pi}(P) = d(P(0),P(2)).$$

Como $\overrightarrow{P(0)P(2)} = 3e_1 + 4e_2$,
y la base es ortonormal,

$$\boxed{L_{\Pi}(P) = \sqrt{3^2+4^2} = 5.}$$

Para la partición refinada, $L_{\Pi'}(P) = d(P(0),P(1)) + d(P(1),P(2))$.
Como $d(P(0),P(1)) = 3$

y

$$d(P(1), P(2)) = 4,$$

obtenemos

$$\boxed{L_{\Pi'}(P) = 3 + 4 = 7.}$$

Así,

$$\boxed{L_{\Pi'}(P) = 7 \geq 5 = L_{\Pi}(P),}$$

lo que verifica proposición 5.25. La desigualdad triangular aparece precisamente al comparar el segmento directo entre $P(0)$ y $P(2)$ con la cadena que pasa por $P(1)$: $d(P(0), P(2)) \leq d(P(0), P(1)) + d(P(1), P(2))$.

Cuerda y longitud geométrica. Ejercicio 5.25 · Transferencia y desigualdad Conserva los mismos puntos del ejercicio 5.24 y supón ahora que la curva completa es el recorrido quebrado

$$P(t) = \begin{cases} A + 3t\, e_1, & 0 \leq t \leq 1, \\ A + 3e_1 + 4(t-1)e_2, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

1. Calcula la distancia entre los extremos.
2. Usa la partición $\{0, 1, 2\}$ para obtener una cota inferior de $L(P; [0, 2])$.
3. Demuestra que, para cualquier partición Π de $[0, 2]$,
$$L_{\Pi}(P) \leq 7.$$
4. Concluye el valor exacto de $L(P; [0, 2])$.
5. Compara la cuerda con la longitud geométrica.

Solución desarrollada Los extremos son

$$P(0) = A, \qquad P(2) = A + 3e_1 + 4e_2.$$

Por tanto,

$$d(P(0), P(2)) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \boxed{5}.$$

Para

$$\Pi_0 = \{0, 1, 2\},$$

Ejercicio 5.24 dio

$$L_{\Pi_0}(P) = 7.$$

Como la longitud geométrica es el supremo de todas las longitudes poligonales, $L(P; [0, 2]) \geq 7$.

Falta demostrar la cota superior.

Sea Π una partición arbitraria. Añadamos, si es necesario, el instante 1 y obtengamos un refinamiento Π'. Por proposición 5.25, $L_{\Pi}(P) \leq L_{\Pi'}(P)$. En el intervalo $[0, 1]$, todos los puntos de la curva están sobre el mismo segmento y en el mismo orden. Por tanto, las distancias sucesivas telescopan escalarmente y su suma es exactamente

$$d(P(0), P(1)) = 3.$$

Del mismo modo, en $[1, 2]$ la suma de las distancias sucesivas es exactamente

$$d(P(1), P(2)) = 4.$$

Luego

$$L_{\Pi'}(P) = 3 + 4 = 7.$$

Así, $L_{\Pi}(P) \leq 7$
para toda partición Π.
Como ya existe una partición con longitud poligonal igual a 7,

$$\boxed{L(P; [0, 2]) = 7.}$$

Finalmente,

$$\boxed{d(P(0), P(2)) = 5 < 7 = L(P; [0, 2]).}$$

La cuerda mide la distancia directa entre los extremos; la longitud geométrica mide el recorrido completo de la curva.

Longitud bajo una reparametrización monótona no lineal. Ejercicio 5.26 · Invariancia y prueba Sean $A \in \mathcal{E}$ y $d \in V$, con $d \neq 0$. Considera

$$P : [0, 1] \to \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + t\, d,$$

y la biyección estrictamente creciente

$$\phi : [0, 1] \to [0, 1], \qquad \phi(u) = u^2.$$

Define

$$Q = P \circ \phi, \qquad Q(u) = A + u^2 d.$$

1. Sea
$$\Sigma : 0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = 1$$
una partición de $[0, 1]$. Construye la partición correspondiente de P.
2. Verifica que
$$L_{\Sigma}(Q) = L_{\Phi(\Sigma)}(P).$$
3. Comprueba directamente que ambas longitudes poligonales valen $\|d\|$.
4. Concluye que
$$L(Q; [0, 1]) = L(P; [0, 1]) = \|d\|.$$
5. Explica por qué este ejercicio no necesita derivar ϕ.

Solución desarrollada Como $\phi(u) = u^2$ es estrictamente creciente y biyectiva en $[0,1]$, la imagen de la partición

$$\Sigma : 0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = 1$$

es $\Phi(\Sigma) : 0 = u_0^2 < u_1^2 < \cdots < u_n^2 = 1$.
Ésta es una partición de $[0,1]$.
Además, $Q(u_i) = P(u_i^2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} L_\Sigma(Q) &= \sum_{i=1}^{n} d(Q(u_{i-1}), Q(u_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d(P(u_{i-1}^2), P(u_i^2)) \\ &= L_{\Phi(\Sigma)}(P). \end{aligned}$$

Como $P(t) = A + td$,
para $0 \le s < t \le 1$, $d(P(s), P(t)) = \|(t-s)d\| = (t-s)\|d\|$.
Luego

$$\begin{aligned} L_{\Phi(\Sigma)}(P) &= \sum_{i=1}^{n} (u_i^2 - u_{i-1}^2)\|d\| \\ &= (1-0)\|d\| \\ &= \|d\|. \end{aligned}$$

En consecuencia, $L_\Sigma(Q) = \|d\|$
para toda partición Σ. Por definición 5.22,

$$\boxed{L(Q;[0,1]) = L(P;[0,1]) = \|d\|.}$$

No fue necesario calcular $\phi'(u)$. Proposición 5.27 es un resultado geométrico sobre correspondencia de particiones, no una consecuencia de la fórmula integral de longitud de arco.

Cierre conceptual: longitud antes que integral. §12 ha construido la longitud de una curva sin usar derivadas ni integrales. La secuencia lógica completa es

$$\boxed{\Pi \longmapsto L_\Pi(P) \longmapsto \sup_\Pi L_\Pi(P) = L(P;[a,b]).}$$

Proposición 5.25 garantiza que refinar una partición no acorta la aproximación poligonal. Proposición 5.26 establece

$$d(P(a), P(b)) \le L(P;[a,b]).$$

Proposición 5.27 muestra que la longitud geométrica es invariante bajo reparametrizaciones estrictamente monótonas y biyectivas. Ejercicio 5.24 verificó el crecimiento bajo refinamiento. Ejercicio 5.25 distinguió con un ejemplo exacto una cuerda de longitud 5 y un recorrido geométrico de longitud 7. Ejercicio 5.26 comprobó la invariancia bajo la reparametrización no lineal $u \mapsto u^2$ sin derivadas. La sección queda cerrada con una definición puramente geométrica de longitud. Sólo en

§13 demostraremos, bajo hipótesis de regularidad suficientes, que esta cantidad coincide con una integral de la rapidez.

13. Fórmula de longitud de arco y parámetro natural

Activación: de una definición geométrica a una fórmula de cálculo. En §12 definimos la longitud geométrica mediante $L(P;[a,b]) = \sup_{\Pi} L_{\Pi}(P)$,

sin usar derivadas ni integrales. Ahora suponemos que, para un origen fijo O, $r_O : [a,b] \to V$

es de clase C^1. En un intervalo cerrado usamos la misma convención de §9: las derivadas en los extremos son laterales y C^1 significa que la derivada interior se extiende continuamente hasta los extremos mediante esas derivadas laterales. Por proposición 5.9, $v(t) = r'_O(t)$.

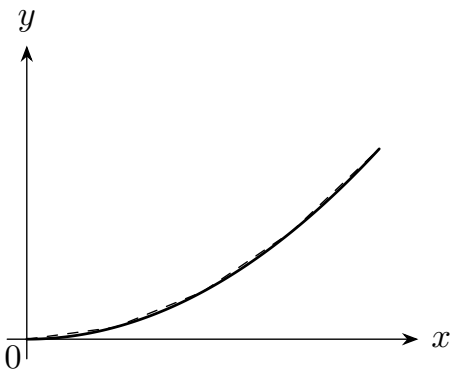


Figura 5.8. Las cuerdas de una partición aproximan la longitud de una curva regular. El límite es $\int \|r'(u)\|\,du$; la norma se integra antes de confundirla con el desplazamiento entre extremos. Véase §13.

Como v es continua, la rapidez

$$\sigma(t) = \|v(t)\|$$

también es continua y, por tanto, integrable en $[a,b]$. La pregunta de esta sección es si la cantidad analítica

$$\int_a^b \|v(t)\|\,dt$$

coincide con la longitud geométrica ya definida.

La hipótesis C^1 no depende del origen fijo. Sean O y O' dos orígenes fijos y sea

$$c = \overrightarrow{OO'}.$$

Por proposición 5.2, $r_{O'}(t) = r_O(t) - c$.

Como c es constante, $r'_{O'}(t) = r'_O(t)$. Por tanto, r_O es C^1 si y sólo si $r_{O'}$ es C^1. La hipótesis de la proposición 5.28 es, pues, geométricamente bien definida aunque usemos un origen auxiliar para representar la curva en V.[8]

[8]Sadri Hassani, *Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields*, 2.ª ed., Springer, 2009, cap. 11, §11.1.4, pp. 322–323, como control de la fórmula estándar de longitud de arco; Spivak, *Calculus*, cap. 13, p. 253 y ss., y cap. 14, p. 285 y ss., para integral de Riemann y teorema fundamental del cálculo.

Principio metodológico: la fórmula integral es un teorema. Principio metodológico 5.18 — La fórmula $\int \|v\|$ es un teorema, no la definición primaria de longitud La igualdad

$$L(P;[a,b]) = \int_a^b \|v(t)\|\,dt$$

debe demostrarse a partir de la definición 5.22. La prueba deberá establecer por separado: $L(P;[a,b]) \le \int_a^b \|v(t)\|\,dt$,

y

$$\int_a^b \|v(t)\|\,dt \le L(P;[a,b]).$$

Ninguna de estas desigualdades puede suponerse por interpretación física o por una fórmula memorizada. Esta doble estimación será la estructura completa de la proposición 5.28.

Paso técnico interno: norma de una integral vectorial. Necesitaremos una desigualdad elemental para funciones continuas

$$w : [\alpha,\beta] \to V.$$

La integral vectorial se entiende componente a componente en una base fija. Esta construcción no depende de la base elegida. En efecto, si B y B' son bases fijas y

$$[w(t)]_B = S[w(t)]_{B'},$$

con S constante, la linealidad de la integral escalar da

$$\int_\alpha^\beta [w(t)]_B\,dt = S\int_\alpha^\beta [w(t)]_{B'}\,dt.$$

Las dos integraciones componente a componente satisfacen exactamente la ley de cambio de componentes del mismo vector de V; por tanto, definen una integral vectorial intrínseca. Afirmamos que

$$\boxed{\left\|\int_\alpha^\beta w(t)\,dt\right\| \le \int_\alpha^\beta \|w(t)\|\,dt.}$$

No asignamos un ID formal a este resultado: es un paso técnico interno de la proposición 5.28.

Demostración. Sea

$$z = \int_\alpha^\beta w(t)\,dt.$$

Si $z = 0$, la desigualdad es inmediata. Supongamos $z \neq 0$ y definamos

$$e = \frac{z}{\|z\|}.$$

Entonces $\|e\| = 1$ y

$$\|z\| = \langle e, z\rangle.$$

Por linealidad de la integral componente a componente,

$$\langle e, z\rangle = \int_\alpha^\beta \langle e, w(t)\rangle\, dt.$$

Por Cauchy–Schwarz,

$$\langle e, w(t)\rangle \le |\langle e, w(t)\rangle| \le \|e\|\,\|w(t)\| = \|w(t)\|.$$

Integrando, $\|z\| \le \int_\alpha^\beta \|w(t)\|\,dt$.
Así,

$$\boxed{\left\|\int_\alpha^\beta w(t)\,dt\right\| \le \int_\alpha^\beta \|w(t)\|\,dt.}$$

Primera desigualdad: la longitud geométrica no supera la integral de la rapidez. Sea

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

una partición arbitraria. Por el teorema fundamental del cálculo aplicado componente a componente,

$$r_O(t_i) - r_O(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(t)\,dt.$$

Por tanto,

$$d(P(t_{i-1}), P(t_i)) = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} v(t)\,dt\right\|.$$

Usando la desigualdad del paso anterior,

$$d(P(t_{i-1}), P(t_i)) \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|v(t)\|\,dt.$$

Sumando sobre todos los subintervalos,

$$L_\Pi(P) \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|v(t)\|\,dt = \int_a^b \|v(t)\|\,dt.$$

Como esta desigualdad vale para toda partición, $\sup_\Pi L_\Pi(P) \le \int_a^b \|v(t)\|\,dt$. Por definición 5.22,

$$\boxed{L(P;[a,b]) \le \int_a^b \|v(t)\|\,dt.}$$

En particular, la integral es finita y la curva resulta rectificable.

Preparación de la desigualdad inversa: continuidad uniforme de v. Falta demostrar que la longitud geométrica no es menor que la integral. Como v es continua en el intervalo compacto $[a, b]$, es uniformemente continua. Si $a = b$, ambas cantidades son cero y no hay nada que demostrar. Supongamos $a < b$.

Sea

$$\varepsilon > 0.$$

Definimos $\eta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Por continuidad uniforme de v, existe

$$\delta > 0$$

tal que

$$|s - t| < \delta \Longrightarrow \|v(s) - v(t)\| < \eta.$$

Elegimos una partición

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

cuya malla satisfaga

$$\max_i (t_i - t_{i-1}) < \delta.$$

En cada subintervalo elegimos un punto

$$\tau_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Escribimos

$$h_i = t_i - t_{i-1}.$$

Entonces, para todo $t \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$\|v(t) - v(\tau_i)\| < \eta.$$

Paso técnico interno: comparar incremento e integral local de la rapidez. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$r_O(t_i) - r_O(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(t)\, dt.$$

Separamos el valor constante $v(\tau_i)$:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} v(t)\, dt = h_i v(\tau_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (v(t) - v(\tau_i))\, dt.$$

Por la desigualdad triangular inversa,

$$d(P(t_{i-1}), P(t_i)) = \left\| h_i v(\tau_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (v(t) - v(\tau_i))\, dt \right\|$$
$$\geq h_i \|v(\tau_i)\| - \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (v(t) - v(\tau_i))\, dt \right\|.$$

Aplicando la desigualdad de §13.4 al término de error,

$$\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (v(t) - v(\tau_i))\, dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|v(t) - v(\tau_i)\|\, dt < \eta h_i.$$

Así,

$$d(P(t_{i-1}), P(t_i)) \geq h_i \|v(\tau_i)\| - \eta h_i.$$

Por otro lado,

$$\|v(t)\| \leq \|v(\tau_i)\| + \|v(t) - v(\tau_i)\| < \|v(\tau_i)\| + \eta.$$

Integrando,

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|v(t)\|\, dt \leq h_i \|v(\tau_i)\| + \eta h_i.$$

Combinando ambas estimaciones,

$$\boxed{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|v(t)\|\, dt \leq d(P(t_{i-1}), P(t_i)) + 2\eta h_i.}$$

Éste es el segundo paso técnico interno requerido para proposición 5.28.

Segunda desigualdad: la integral de la rapidez no supera la longitud geométrica. Sumamos la desigualdad anterior sobre todos los subintervalos:

$$\int_a^b \|v(t)\|\, dt \leq L_\Pi(P) + 2\eta \sum_{i=1}^{n} h_i.$$

Como $\sum_{i=1}^{n} h_i = b - a$,
obtenemos $\int_a^b \|v(t)\|\, dt \leq L_\Pi(P) + 2\eta(b-a)$. Por la elección de η, $2\eta(b-a) = \varepsilon$. Luego

$$\int_a^b \|v(t)\|\, dt \leq L_\Pi(P) + \varepsilon.$$

Y, como $L_\Pi(P) \leq L(P; [a, b])$,
resulta $\int_a^b \|v(t)\|\, dt \leq L(P; [a, b]) + \varepsilon$. Esta desigualdad vale para todo $\varepsilon > 0$. Por tanto,

$$\boxed{\int_a^b \|v(t)\|\, dt \leq L(P; [a, b]).}$$

Proposición: fórmula de longitud de arco para curvas C^1. Proposición 5.28 — Fórmula de longitud de arco para curvas C^1 Sea

$$P : [a, b] \to \mathcal{E}.$$

Supongamos que, para un origen fijo O, la curva vectorial

$$r_O : [a, b] \to V$$

es de clase C^1. Entonces P es rectificable y

$$\boxed{L(P; [a, b]) = \int_a^b \|v(t)\| \, dt.}$$

La hipótesis C^1 es independiente de la elección del origen fijo.
Demostración. En §13.5 demostramos

$$L(P; [a, b]) \leq \int_a^b \|v(t)\| \, dt.$$

En §13.8 demostramos

$$\int_a^b \|v(t)\| \, dt \leq L(P; [a, b]).$$

Por antisimetría del orden real,

$$\boxed{L(P; [a, b]) = \int_a^b \|v(t)\| \, dt.}$$

Como la rapidez es continua en el compacto $[a, b]$, la integral es finita. Por definición 5.23, P es rectificable. □

Qué proposición 5.28 permite afirmar —y qué todavía no. Proposición 5.28 cierra el puente entre la definición geométrica de §12 y el cálculo de una variable:

$$\boxed{\sup_{\Pi} L_{\Pi}(P) = \int_a^b \|v(t)\| \, dt}$$

para curvas C^1. La integral aparece ahora como **fórmula demostrada** para una cantidad ya definida geométricamente. Todavía no definimos $s(t) = \int_a^t \|v(\tau)\| \, d\tau$. Ese objeto recibirá el nombre de longitud de arco acumulada sólo en la definición 5.24, después de la proposición 5.28, tal como exige el orden canónico. Tampoco introducimos todavía parametrización por longitud de arco ni velocidad unitaria.

Balance de la fórmula de longitud. La construcción respeta el orden

$$\boxed{\text{definición 5.22} \longrightarrow \text{proposición 5.28}}$$

antes de cualquier definición de parámetro natural. La prueba de la proposición 5.28 contiene exactamente los dos controles internos exigidos por la arquitectura:

1. la desigualdad
$$\left\| \int w \right\| \leq \int \|w\|;$$
2. la estimación inversa obtenida por continuidad uniforme de v.

No se han creado IDs adicionales para estos pasos técnicos. A continuación se introducen, en este orden, `definición 5.24 → definición 5.25 → proposición 5.29`; ejercicios 5.27–5.29 aplican después estos resultados. La síntesis transversal pertenece a §14.

Definir: función longitud de arco acumulada. Proposición 5.28 permite ahora interpretar integralmente una longitud que ya fue definida geométricamente.

Definición 5.24 — Función longitud de arco acumulada Sea

$$P : [a, b] \to \mathcal{E}$$

una curva de clase C^1. Definimos su **función longitud de arco acumulada desde** a por

$$\boxed{s(t) := \int_a^t \|v(\tau)\|\, d\tau, \qquad t \in [a, b].}$$

Por proposición 5.28 aplicado a la restricción de P al intervalo $[a, t]$,

$$\boxed{s(t) = L(P; [a, t]).}$$

Así, $s(t)$ no es sólo una integral auxiliar: mide exactamente la longitud geométrica recorrida desde el extremo inicial a hasta el instante t. En particular, $s(a) = 0$

y

$$s(b) = L(P; [a, b]).$$

Propiedades inmediatas de la función s. Como la rapidez es continua, $s(t) = \int_a^t \|v(\tau)\|\, d\tau$ es de clase C^1. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\boxed{s'(t) = \|v(t)\|.}$$

Como la rapidez es no negativa, $s'(t) \geq 0$. Por tanto, s es no decreciente. Si además

$$v(t) \neq 0$$

para todo $t \in [a, b]$, entonces

$$\|v(t)\| > 0$$

y, por tanto, $s'(t) > 0$. En ese caso, s es estrictamente creciente.

Definir: parametrización por longitud de arco. Definición 5.25 — Parametrización por longitud de arco / velocidad unitaria Una parametrización derivable

$$\widehat{P} : J \to \mathcal{E}$$

se llama una **parametrización por longitud de arco** o **parametrización de velocidad unitaria** si

$$\boxed{\|\hat{v}(\ell)\| = 1}$$

en todo punto del dominio donde esté definida su derivada. El parámetro ℓ tiene entonces significado geométrico de longitud acumulada. La condición $\|\hat{v}(\ell)\| = 1$

no significa que el vector velocidad sea constante. Sólo fija su norma. La dirección puede variar a lo largo de la curva.

Principio metodológico 5.19 — Declarar regularidad e invertibilidad antes de usar parámetro natural Antes de construir una parametrización por longitud de arco:

1. comprobar que la curva es C^1;
2. verificar
$$v(t) \neq 0$$
en todo el intervalo;
3. concluir
$$s'(t) = \|v(t)\| > 0;$$
4. justificar que s es estrictamente creciente;
5. invocar explícitamente el teorema inverso unidimensional para obtener s^{-1};
6. sólo entonces definir la curva reparametrizada por longitud de arco.

No escribir $t = t(s)$ ni usar

$$\frac{dt}{ds}$$

antes de justificar la invertibilidad de s.

principio metodológico 5.19 evita que la construcción del parámetro natural oculte su hipótesis decisiva: la ausencia de instantes de reposo.

Preparación de la proposición 5.29: invertir la longitud acumulada. Supongamos desde ahora que

$$v(t) \neq 0$$

para todo

$$t \in [a, b].$$

Entonces $s'(t) = \|v(t)\| > 0$. Por tanto, s es estrictamente creciente y lleva biyectivamente

$$[a, b]$$

sobre

$$[0, L],$$

donde

$$L := L(P; [a, b]) = s(b).$$

Así, $s : [a, b] \to [0, L]$
posee una inversa

$$s^{-1} : [0, L] \to [a, b].$$

Por el teorema inverso unidimensional importado de M3, esta inversa es C^1 en el nivel requerido y satisface, en puntos interiores,

$$\boxed{\frac{d}{d\ell} s^{-1}(\ell) = \frac{1}{s'(s^{-1}(\ell))}.}$$

Como $s'(t) = \|v(t)\|$,
obtenemos

$$\boxed{\frac{d}{d\ell} s^{-1}(\ell) = \frac{1}{\|v(s^{-1}(\ell))\|}.}$$

Construir la curva parametrizada por longitud de arco. Definimos $\widehat{P} : [0, L] \to \mathcal{E}$
por

$$\boxed{\widehat{P}(\ell) = P(s^{-1}(\ell)).}$$

Esta curva tiene la misma trayectoria geométrica que P porque s^{-1} es biyectiva. Además, proposición 5.18 da la transformación de la velocidad:

$$\hat{v}(\ell) = v(s^{-1}(\ell)) \frac{d}{d\ell} s^{-1}(\ell).$$

Sustituyendo la derivada de la inversa,

$$\hat{v}(\ell) = \frac{v(s^{-1}(\ell))}{\|v(s^{-1}(\ell))\|}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\|\hat{v}(\ell)\| = 1.}$$

La nueva parametrización conserva la dirección orientada de la velocidad y normaliza su magnitud.

Proposición 5.29 — Parámetro de arco y velocidad unitaria Sea

$$P : [a, b] \to \mathcal{E}$$

una curva tal que, para un origen fijo O, $r_O : [a, b] \to V$
es de clase C^1, y supongamos $v(t) \neq 0$
para todo $t \in [a, b]$.
Definamos

$$s(t) = \int_a^t \|v(\tau)\|\, d\tau.$$

Entonces:

1. s es estrictamente creciente;
2. $$\boxed{s'(t) = \|v(t)\| > 0;}$$
3. s es biyectiva de $[a, b]$ sobre
$$[0, L(P; [a, b])];$$
4. la reparametrización
$$\widehat{P}(\ell) := P(s^{-1}(\ell))$$
satisface
$$\boxed{\|\hat{v}(\ell)\| = 1.}$$

Por tanto, $\widehat{P}$ es una parametrización por longitud de arco en el sentido de la definición 5.25.

Demostración. Por definición 5.24 y el teorema fundamental del cálculo,

$$s'(t) = \|v(t)\|.$$

Como $v(t) \neq 0$,
tenemos $\|v(t)\| > 0$,
y por tanto

$$s'(t) > 0.$$

Así, s es estrictamente creciente. Además, $s(a) = 0$
y, por la proposición 5.28, $s(b) = \int_a^b \|v(t)\|\, dt = L(P; [a, b])$. Por continuidad y monotonía estricta,
$s : [a, b] \to [0, L(P; [a, b])]$
es biyectiva. Por el teorema inverso unidimensional,

$$\frac{d}{d\ell} s^{-1}(\ell) = \frac{1}{s'(s^{-1}(\ell))} = \frac{1}{\|v(s^{-1}(\ell))\|}.$$

Aplicando proposición 5.18 a

$$\widehat{P} = P \circ s^{-1},$$

obtenemos

$$\hat{v}(\ell) = v(s^{-1}(\ell)) \frac{d}{d\ell} s^{-1}(\ell).$$

Por tanto,

$$\hat{v}(\ell) = \frac{v(s^{-1}(\ell))}{\|v(s^{-1}(\ell))\|}.$$

Tomando normas,

$$\boxed{\|\hat{v}(\ell)\| = 1.}$$

Luego $\widehat{P}$ es una parametrización por longitud de arco. □

Qué significa realmente el parámetro de arco. En la parametrización original, $s(t) = L(P;[a,t])$. En la nueva parametrización, $\widehat{P}(\ell) = P(s^{-1}(\ell))$,
el propio parámetro mide longitud geométrica acumulada desde el punto inicial. Por eso, para

$$0 \le \ell_1 < \ell_2 \le L,$$

la longitud geométrica del tramo correspondiente es

$$\boxed{L(\widehat{P};[\ell_1,\ell_2]) = \ell_2 - \ell_1.}$$

En efecto, por la proposición 5.28 aplicado a $\widehat{P}$,

$$L(\widehat{P};[\ell_1,\ell_2]) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \|\hat{v}(\ell)\|\, d\ell = \int_{\ell_1}^{\ell_2} 1\, d\ell = \ell_2 - \ell_1.$$

Ésta es la razón geométrica por la cual ℓ recibe el nombre de parámetro de longitud de arco.

Balance del parámetro natural. El orden canónico queda ahora completado:

$$\boxed{\text{proposición 5.28} \longrightarrow \text{definición 5.24} \longrightarrow \text{definición 5.25} \longrightarrow \text{proposición 5.29.}}$$

Proposición 5.28 justificó la fórmula integral. Definición 5.24 permitió definir

$$s(t) = L(P;[a,t]).$$

Definición 5.25 fijó qué significa estar parametrizado por longitud de arco. principio metodológico 5.19 obligó a declarar regularidad e invertibilidad antes de usar s^{-1}. Proposición 5.29 demostró que, para una curva C^1 sin instantes de reposo, la función s produce una reparametrización con

$$\|\hat{v}\| = 1.$$

Ejercicios 5.27–5.29 aplicarán proposición 5.28 y proposición 5.29 antes del cierre local de §13. §14 continúa cerrado.

Comprobar la fórmula integral de longitud. Ejercicio 5.27 · Cálculo y comprobación Sea $B = (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormal de V, sea $A \in \mathcal{E}$ y considera

$$P : [0,2] \to \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + 3t\, e_1 + 4t\, e_2.$$

1. Calcula $v(t)$ y la rapidez $\sigma(t)$.
2. Usa proposición 5.28 para calcular $L(P;[0,2])$.
3. Contrasta el resultado con la geometría de la trayectoria.

Solución desarrollada La velocidad es constante:

$$v(t) = 3e_1 + 4e_2.$$

Como B es ortonormal, $\sigma(t) = \|v(t)\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Por proposición 5.28,

$$L(P;[0,2]) = \int_0^2 5\, dt = \boxed{10}.$$

Geométricamente, la trayectoria es el segmento que une

$$P(0) = A$$

con

$$P(2) = A + 6e_1 + 8e_2.$$

Su longitud euclídea es $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,
de modo que la fórmula integral coincide con la longitud geométrica esperada.

Construir la función longitud de arco acumulada. Ejercicio 5.28 · FTC e inversa Sea e_1 un vector unitario y considera

$$P : [1, 2] \to \mathcal{E}, \qquad P(t) = A + t^2 e_1.$$

1. Calcula $v(t)$ y $\|v(t)\|$.
2. Construye
$$s(t) = \int_1^t \|v(\tau)\|\, d\tau.$$
3. Verifica que s es estrictamente creciente.
4. Determina $s([1, 2])$.
5. Obtén explícitamente s^{-1}.

Solución desarrollada La velocidad es

$$v(t) = 2t\, e_1.$$

Como $t \in [1, 2]$ y $\|e_1\| = 1$, $\|v(t)\| = 2t$.
Entonces $s(t) = \int_1^t 2\tau\, d\tau = t^2 - 1$. Por tanto,

$$\boxed{s(t) = t^2 - 1.}$$

Además, $s'(t) = 2t > 0$
en todo $[1, 2]$, de modo que s es estrictamente creciente. Sus valores extremos son $s(1) = 0$, $s(2) = 3$. Por tanto,

$$\boxed{s : [1, 2] \to [0, 3]}$$

es biyectiva.
Si

$$\ell = s(t) = t^2 - 1,$$

entonces $t = \sqrt{\ell + 1}$,
porque $t > 0$ en el dominio.
Así,

$$\boxed{s^{-1}(\ell) = \sqrt{\ell + 1}, \qquad 0 \le \ell \le 3.}$$

Parametrización unitaria. Ejercicio 5.29 · Prueba y síntesis Conserva la curva del ejercicio 5.28:

$$P(t) = A + t^2 e_1, \qquad 1 \le t \le 2.$$

Usa

$$s^{-1}(\ell) = \sqrt{\ell + 1}$$

para construir

$$\widehat{P}(\ell) = P(s^{-1}(\ell)).$$

1. Obtén una fórmula explícita para $\widehat{P}(\ell)$.
2. Calcula $\hat{v}(\ell)$.
3. Verifica directamente que
$$\|\hat{v}(\ell)\| = 1.$$
4. Comprueba que el parámetro ℓ mide longitud geométrica acumulada.

Solución desarrollada Sustituyendo

$$t = s^{-1}(\ell) = \sqrt{\ell + 1}$$

en P,

$$\widehat{P}(\ell) = A + \left(\sqrt{\ell + 1}\right)^2 e_1 = A + (\ell + 1)e_1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\widehat{P}(\ell) = A + (\ell + 1)e_1, \qquad 0 \le \ell \le 3.}$$

Derivando, $\hat{v}(\ell) = e_1$.
Como $\|e_1\| = 1$,

$$\boxed{\|\hat{v}(\ell)\| = 1.}$$

Por proposición 5.28,

$$L(\widehat{P}; [0, \ell]) = \int_0^\ell \|\hat{v}(\lambda)\|\, d\lambda = \int_0^\ell 1\, d\lambda = \ell.$$

Así, el propio parámetro ℓ coincide con la longitud geométrica acumulada desde el punto inicial de la nueva parametrización.

Cierre conceptual: de la definición geométrica al parámetro natural. §13 completa una cadena que comenzó en §11:

$$\boxed{\text{longitudes poligonales} \longrightarrow \text{longitud geométrica} \longrightarrow \int \|v\| \longrightarrow \text{parámetro de arco.}}$$

Proposición 5.28 demostró que, para curvas C^1, $L(P; [a, b]) = \int_a^b \|v(t)\|\, dt$.
Definición 5.24 convirtió esa fórmula en una función acumulada

$$s(t) = L(P; [a, t]).$$

Definición 5.25 fijó el significado de parametrización por longitud de arco. Proposición 5.29 mostró que una curva C^1 sin instantes de reposo puede reparametrizarse de modo que

$$\|\hat{v}\| = 1.$$

Ejercicio 5.27 verificó la fórmula integral en una curva lineal elemental. Ejercicio 5.28 construyó e invirtió una función de arco no lineal. Ejercicio 5.29 verificó directamente que la reparametrización resultante tiene velocidad unitaria y que el nuevo parámetro mide longitud geométrica. La sección queda cerrada con la distinción lógica preservada:

la integral calcula una longitud previamente definida; no la define retrospectivamente.

§14 integrará los distintos niveles construidos a lo largo del capítulo sin introducir nueva matemática estructural.

14. Integración: una curva, varios relojes y varias descripciones

Activación: una misma curva puede cambiar de descripción de varias maneras. A lo largo del capítulo aparecieron tres operaciones conceptualmente diferentes:

1. cambiar el **marco espacial fijo**;
2. cambiar el **parámetro** de una curva;
3. olvidar la parametrización y conservar sólo la **trayectoria geométrica**.

Estas operaciones no afectan de la misma manera a todos los objetos. Un punto puede recibir coordenadas distintas. Un vector velocidad puede recibir columnas distintas. Una reparametrización puede modificar la velocidad como función del nuevo parámetro. La trayectoria geométrica puede permanecer igual. La longitud geométrica puede permanecer invariante. La tarea final del capítulo es separar sistemáticamente esos niveles.

Principio metodológico final. Principio metodológico 5.20 — En toda comparación final preguntar: objeto, parámetro, marco y magnitud invariante Antes de afirmar que dos descripciones «son iguales» o «son distintas», responder:

1. **Objeto:** ¿se compara un punto, un vector, una columna de componentes, una curva parametrizada o una trayectoria?
2. **Parámetro:** ¿se conserva el mismo parámetro o se usa una reparametrización?
3. **Marco:** ¿se usa el mismo marco espacial fijo o se cambia de marco?
4. **Invariante:** ¿qué magnitud geométrica debe permanecer igual bajo el cambio considerado?

No mezclar una transformación de representación con una transformación física.
principio metodológico 5.20 resume la disciplina tipológica del capítulo.

Matriz de transformación y permanencia. Para dos marcos fijos

$$F = (O, B), \qquad F' = (O', B'),$$

con ley

$$x_{F'}(t) = S^{-1}(x_F(t) - [c]_B),$$

tenemos:

- punto físico $P(t)$: **permanece**;
- coordenadas del punto: **cambian afínmente**;
- velocidad $v(t) \in V$: **permanece como vector geométrico**;
- componentes de velocidad:
$$[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B;$$
- aceleración $a(t) \in V$: **permanece como vector geométrico**;
- componentes de aceleración:
$$[a(t)]_{B'} = S^{-1}[a(t)]_B.$$

Si ambos marcos son ortonormales, $\|v(t)\|$
permanece invariante.

Efecto de una reparametrización. Sea

$$\widetilde{P} = P \circ \phi.$$

Entonces proposición 5.18 establece

$$\tilde{v}(u) = v(\phi(u))\phi'(u).$$

Por proposición 5.21,

$$\|\tilde{v}(u)\| = \|v(\phi(u))\|\,|\phi'(u)|.$$

Si ϕ es biyectiva y estrictamente monótona, proposición 5.27 garantiza

$$L(\widetilde{P}; J) = L(P; I).$$

Por tanto, una reparametrización puede cambiar la velocidad y la rapidez como funciones del parámetro sin cambiar la longitud geométrica total.

Proposición de síntesis. Proposición 5.30 — Coherencia de las descripciones fijas de un mismo movimiento Considérese un movimiento

$$P : I \to \mathcal{E}$$

descrito en dos marcos euclídeos fijos $F = (O, B)$ y $F' = (O', B')$. Las afirmaciones sobre posición y trayectoria no requieren derivabilidad; las afirmaciones sobre velocidad y rapidez se entienden en los instantes donde P sea derivable, y las afirmaciones sobre aceleración en los instantes donde P sea dos veces derivable.

Entonces:

1. las coordenadas de posición cambian afínmente:
$$x_{F'}(t) = S^{-1}(x_F(t) - [c]_B);$$
2. las componentes de velocidad y aceleración cambian linealmente:
$$[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B,$$
$$[a(t)]_{B'} = S^{-1}[a(t)]_B;$$
3. si B y B' son ortonormales,
$$\|v(t)\|$$
es independiente del marco;

4. la trayectoria geométrica

$$P(I)$$

es independiente del marco;

5. la longitud geométrica es independiente del marco y, además, permanece invariante bajo reparametrizaciones estrictamente monótonas y biyectivas.

En consecuencia, cambiar una descripción fija no modifica por sí mismo el movimiento geométrico descrito.

Demostración. La afirmación 1 es proposición 5.4.

Las afirmaciones 2 son proposición 5.15 y proposición 5.16. La afirmación 3 es proposición 5.17. La trayectoria

$$P(I) \subseteq \mathcal{E}$$

está formada por puntos del espacio afín y no por sus columnas de coordenadas; por tanto, cambiar de marco no cambia el conjunto de puntos recorridos. La longitud geométrica definición 5.22 se construye únicamente mediante distancias

$$d(P(t_{i-1}), P(t_i)),$$

que son magnitudes geométricas independientes de un marco ortonormal fijo. Por ello un cambio de marco euclídeo fijo no altera las longitudes poligonales ni su supremo. Finalmente, proposición 5.27 establece la invariancia de la longitud bajo una reparametrización estrictamente monótona y biyectiva. Todas estas transformaciones son compatibles: cambian la representación o el parámetro según reglas precisas, sin confundir esos cambios con una modificación automática del objeto físico. □

Qué cambia y qué permanece: tabla conceptual.

Objeto o magnitud	Cambio de marco fijo	Reparametrización
Punto P	no cambia	se evalúa en otro parámetro
Coordenadas x_F	cambio afín	composición con ϕ
Trayectoria $P(I)$	no cambia	se conserva si ϕ es sobreyectiva
Velocidad v	mismo vector, otras componentes	se multiplica por ϕ'
Aceleración a	mismo vector, otras componentes	su transformación requiere derivar nuevamente; no se desarrolla aquí
Rapidez $\|v\|$	invariante entre marcos ortonormales	se multiplica por $\|\phi'\|$
Longitud geométrica	invariante	invariante bajo ϕ monótona y biyectiva

La fila de aceleración bajo reparametrización marca deliberadamente una frontera: el capítulo no necesita desarrollar una fórmula adicional para cerrar su arquitectura.

Auditoría global de un movimiento en dos marcos y dos parametrizaciones. Ejercicio 5.30 · Síntesis, transferencia y frontera Sea $F = (O, B)$ un marco ortonormal con

$$B = (e_1, e_2, e_3),$$

y considera el movimiento

$$P : [0, 1] \to \mathcal{E}$$

definido por $P(t) = O + t\, e_1 + t^2 e_2$.
Considera un segundo marco ortonormal fijo

$$F' = (O', B'),$$

con

$$O' = O + c, \qquad [c]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, introduce

$$\phi : [0, 2] \to [0, 1], \qquad \phi(u) = \frac{u}{2},$$

y

$$\widetilde{P} = P \circ \phi.$$

Audita:
1. $x_F(t)$ y $x_{F'}(t)$;
2. $v(t)$, $a(t)$ y sus componentes en ambos marcos;
3. la rapidez en ambos marcos;
4. la trayectoria de P y $\widetilde{P}$;
5. $\tilde{v}(u)$ y su rapidez;
6. la longitud geométrica total de P y $\widetilde{P}$;
7. qué cambia si u se interpreta como nuevo tiempo físico;
8. qué preguntas quedan fuera del capítulo 5 y pertenecen a capítulos 6–9.

Solución desarrollada En el marco F,

$$\boxed{x_F(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

Como

$$S^{-1} = S^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la ley afín da

$$x_{F'}(t) = S^{-1}\left[\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Por tanto,

$$\boxed{x_{F'}(t) = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

La velocidad y la aceleración geométricas son

$$\boxed{v(t) = e_1 + 2t\, e_2,}$$

y

$$\boxed{a(t) = 2e_2.}$$

En B,

$$[v(t)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [a(t)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En B',

$$[v(t)]_{B'} = S^{-1}[v(t)]_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}},$$

y

$$[a(t)]_{B'} = S^{-1}[a(t)]_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Como ambas bases son ortonormales,

$$\boxed{\|v(t)\| = \sqrt{1+4t^2}}$$

en ambos marcos. La reparametrización es $\widetilde{P}(u) = P\left(\frac{u}{2}\right)$.
Como ϕ es biyectiva,

$$\boxed{\widetilde{P}([0,2]) = P([0,1]).}$$

Por proposición 5.18, $\tilde{v}(u) = v\left(\frac{u}{2}\right)\frac{1}{2}$.

Como $v\left(\frac{u}{2}\right) = e_1 + u\, e_2$,
obtenemos

$$\boxed{\tilde{v}(u) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{u}{2}e_2.}$$

Su rapidez es

$$\boxed{\|\tilde{v}(u)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+u^2}.}$$

La rapidez no permanece igual como función del nuevo parámetro: se transforma con el factor $|\phi'| = 1/2$.

La longitud geométrica total sí permanece:

$$\boxed{L(\widetilde{P}; [0,2]) = L(P; [0,1]).}$$

Esto sigue directamente de la proposición 5.27. Si se desea calcularla, proposición 5.28 permite escribir

$$L(P; [0,1]) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt,$$

mientras

$$L(\widetilde{P}; [0,2]) = \int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{1+u^2}\, du.$$

La sustitución $u = 2t$ muestra que ambas integrales son iguales, en concordancia con la invariancia geométrica. Si u se interpreta como nuevo tiempo físico medido en la misma unidad que t, la nueva historia temporal dura 2 unidades en lugar de 1. La trayectoria es la misma, pero la ley temporal cambia.

Finalmente, la frontera del capítulo es:

- **capítulo 6:** modelización física, aproximaciones, escalas, linealización de modelos y control sistemático de regímenes;
- **capítulo 7:** cinemática sistemática en una dimensión, gráficas $x(t), v(t), a(t)$, condiciones iniciales y problemas inversos;
- **capítulo 8:** cinemática en varias dimensiones, coordenadas polares/cilíndricas, bases móviles y composición de movimientos;
- **capítulo 9:** masa, fuerza, leyes de Newton, ecuaciones de movimiento y causalidad dinámica.

El capítulo 5 termina antes de introducir cualquiera de esas estructuras.

Cierre conceptual del capítulo. El capítulo 5 comenzó con una localización temporalmente etiquetada y terminó con una teoría elemental de curvas afines parametrizadas. La cadena conceptual construida es

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{evento} \to \text{movimiento} \\ \Downarrow \\ \text{trayectoria} \to \text{desplazamiento} \\ \Downarrow \\ v \to a \\ \Downarrow \\ \text{reparametrización} \to \text{rapidez} \\ \Downarrow \\ \text{longitud} \to \text{parámetro natural.}\end{array}}$$

A lo largo de esa cadena se mantuvieron tres separaciones fundamentales:

$$\boxed{\text{objeto geométrico} \neq \text{representación coordenada},}$$

$$\boxed{\text{trayectoria} \neq \text{ley temporal},}$$

y

$$\boxed{\text{cinemática} \neq \text{dinámica}.}$$

La salida del capítulo no es todavía un catálogo de movimientos físicos, sino una infraestructura matemática y conceptual para construirlos después con control de tipos, parámetros, marcos e invariantes.

Capítulo 6

Modelos, aproximaciones, escalas y linealización

Este capítulo utiliza álgebra, geometría euclídea y cálculo de una variable: límites, derivadas, integrales y estimaciones. Importa de los capítulos 1–5 el lenguaje de los modelos físicos, las magnitudes y escalas, la medición, el espacio y las curvas. El objetivo es construir y validar simplificaciones mediante condiciones y cotas explícitas.

1. Aproximar es formular una afirmación con condiciones

La distancia entre dos puntos separados por una longitud horizontal $L > 0$ y una altura h es, dentro del modelo geométrico euclídeo, $d = \sqrt{L^2 + h^2}$. Si la altura parece pequeña, suele reemplazarse esa distancia por L. La igualdad de Pitágoras y el reemplazo responden a operaciones diferentes: la primera es una consecuencia exacta de la geometría adoptada; el segundo pierde una parte de la distancia. Para juzgar esa pérdida hay que compararla con alguna referencia.

Dividir por L permite reconocer la comparación pertinente. Si $u = h/L$, la relación exacta es $d/L = \sqrt{1 + u^2}$. El valor numérico de h depende de la unidad; u compara la altura con la longitud del propio problema. Además, racionalizar la diferencia da

$$\frac{d - L}{L} = \sqrt{1 + u^2} - 1 = \frac{u^2}{\sqrt{1 + u^2} + 1} \leq \frac{u^2}{2}.$$

La última relación es una cota, no una igualdad aproximada. Por ejemplo, $|h| \leq L/10$ garantiza que sustituir d por L pierde como máximo $0.005L$. Quien necesite conocer la distancia con error inferior a una milésima de L todavía no tiene esa garantía. El mismo reemplazo puede servir para una pregunta y resultar insuficiente para otra.

Una afirmación que pueda comprobarse. Definición 6.1 — Aproximación con criterio declarado. Sean q y $\tilde{q}$ dos cantidades escalares del mismo tipo, definidas para los datos de un dominio $\mathcal{R}$. Fijada una escala positiva S del mismo tipo y una tolerancia adimensional $\tau \geq 0$, diremos que $\tilde{q}$ aproxima a q con ese criterio si, para todo dato admisible de $\mathcal{R}$,

$$|q - \tilde{q}| \leq \tau S.$$

La escala puede depender de los datos, siempre que su definición y su positividad se declaren en todo el dominio.

El cuantificador «para todo» convierte una comprobación aislada en una garantía sobre un régimen. No exige que la cota sea la mejor posible. Tampoco afirma que el modelo geométrico represente cualquier situación real: si una cuerda se curva, la distancia entre extremos y la longitud de la cuerda son observables distintas. Primero se elige el modelo y la cantidad que interesa; después se aproxima su predicción.

El símbolo $\approx$ podrá abreviar una aproximación cuyo criterio ya se haya explicado. Escribir $d \approx L$ sin más información oculta tanto el cociente h/L como la precisión que se pretende. Para el

ejemplo anterior, una declaración completa sería: «En el modelo euclídeo, para $L > 0$ y $|h|/L \le 0.1$, la sustitución $d \approx L$ tiene error referido a L no mayor que 0.005».

Principio 6.1 — Declarar el objeto y el criterio. Una aproximación debe identificar la cantidad objetivo, el modelo que la define, los datos admitidos y la medida con la que se juzga la pérdida de información. La corrección del cálculo dentro del modelo y la adecuación del modelo al fenómeno requieren controles distintos.

Acumular simplificaciones. Una aproximación suele construirse en varios pasos. El riesgo es que cada paso sea pequeño según una referencia distinta y que se sumen sus cifras como si fueran comparables.

Proposición 6.1 — Composición de cotas sobre una escala común. Sean q_0, q_1, q_2 cantidades del mismo tipo en un dominio $\mathcal{R}$, y sea $S > 0$ una escala común. Si $|q_0 - q_1| \le \alpha S$ y $|q_1 - q_2| \le \beta S$ en todo ese dominio, con $\alpha, \beta \ge 0$, entonces

$$|q_0 - q_2| \le (\alpha + \beta) S.$$

Demostración. La identidad $q_0 - q_2 = (q_0 - q_1) + (q_1 - q_2)$ permite aplicar la desigualdad triangular. Al insertar las dos cotas se obtiene $|q_0 - q_2| \le |q_0 - q_1| + |q_1 - q_2| \le (\alpha + \beta)S$. Todas las desigualdades valen para los mismos datos. □

La prueba explica por qué importa la escala común. Si las cotas fueran αS_1 y βS_2, lo que podría sumarse serían esas cantidades, no las tolerancias solas. También importa el dominio común: dos aproximaciones válidas en regiones disjuntas no forman una cadena certificada.

Ejercicios. Ejercicio 6.1. Se afirma que $1/(1 + x) \approx 1$ «cuando x es pequeño», con $x \ge 0$. Repara la afirmación de dos maneras: usando error referido a la escala 1 y usando error relativo al valor exacto. Para una tolerancia $0 < \tau < 1$, determina en cada caso el dominio máximo dentro de $x \ge 0$.

Solución. La diferencia es $1 - 1/(1 + x) = x/(1 + x)$. Referida a la escala 1, la condición es $x/(1+x) \le \tau$. Como el denominador es positivo, multiplicar no cambia el sentido de la desigualdad; queda $(1 - \tau)x \le \tau$, equivalente a $0 \le x \le \tau/(1 - \tau)$. Para referirla al valor exacto hay que dividir por $1/(1 + x) > 0$, de modo que el error relativo es x y el dominio es $0 \le x \le \tau$. Ambas respuestas son exactas para el criterio declarado. Una tolerancia numérica idéntica produce dominios diferentes porque cambió la referencia del error.

Ejercicio 6.2. En un dominio común se conocen $|q_0 - q_1| \le 0.02S$ y $|q_1 - q_2| \le 0.03S$. Demuestra una garantía para q_2. Si la segunda cota estuviera referida a $10S$, ¿qué garantía quedaría? Explica por qué ninguna de ellas demuestra que el error alcance el máximo permitido.

Solución. proposición 6.1 da $|q_0 - q_2| \le 0.05S$ en el primer caso. En el segundo, $0.03(10S) = 0.30S$, por lo que la misma prueba da $0.32S$. Las cifras 0.02 y 0.03 sólo pueden sumarse tras expresar las cotas sobre la misma escala. Son límites superiores: si los defectos tienen signos opuestos pueden cancelarse, y si ambas aproximaciones son exactas el error es cero. La garantía no es una predicción del error efectivo.

La distancia inicial ofrece ya una aproximación controlada, pero todavía deja abierta la elección de L como referencia. Esa elección pertenece al problema físico y determina qué cociente habrá que observar.

Referencia interna utilizada: capítulo 3, §12. El ejemplo y la proposición son construcciones propias.

2. Escalas y variables adimensionales: interfaz con el capítulo 2

El capítulo 2 construyó las escalas características y la adimensionalización. Aquí se usan para decidir qué simplificación conviene probar. La elección de una escala reorganiza el modelo y hace visibles ciertas razones; por sí sola no elimina ningún término.

Consideremos la relación

$$q + \frac{q^2}{Q} = b, \qquad Q > 0, \quad b \geq 0, \quad q \geq 0,$$

en la que q, Q, b tienen el mismo tipo de magnitud. Se adopta como modelo algebraico de una respuesta con una contribución proporcional a q y otra cuadrática. No se afirma que sea una ley física universal. Su utilidad didáctica consiste en que permite seguir exactamente qué información conserva cada reducción.

Si se escoge Q como escala de q, las variables $y = q/Q$ y $a = b/Q$ convierten la relación en $y + y^2 = a$. La suma queda libre de unidades explícitas y el tamaño de la entrada se expresa mediante a. Si, en cambio, se escoge una escala positiva general S, la sustitución $q = Sy$ da

$$y + \varepsilon y^2 = a, \qquad \varepsilon = \frac{S}{Q}, \qquad a = \frac{b}{S}.$$

Ambas formas describen el mismo modelo. La segunda separa dos números adimensionales que pueden variar de maneras diferentes cuando cambian los datos.

La relación normalizada. Definición 6.2 — Relación de modelo en variables normalizadas. Llamaremos relación normalizada a la expresión de un modelo obtenida sustituyendo cada cantidad por su escala positiva multiplicada por su variable adimensional y dividiendo, cuando corresponda, por una escala común no nula de los términos de la relación. Las escalas y variables son las del capítulo 2; esta definición nombra la forma de trabajo que usaremos al comparar términos.

En el ejemplo, dividir por S es legítimo porque $S > 0$. Las condiciones $q \geq 0$ y $b \geq 0$ se convierten en $y \geq 0$ y $a \geq 0$: adimensionalizar no autoriza a olvidar las restricciones de dominio. La variable y conserva una lectura física, pues cuenta cuántas veces la respuesta contiene la escala escogida.

Principio 6.2 — Elegir escalas conservando su interpretación. Una escala debe justificarse por los datos, la geometría o la pregunta. Después de normalizar se conservan sus relaciones con las cantidades originales para poder interpretar tanto el resultado como su error.

El modelo también muestra el peligro de mirar sólo el coeficiente ε. Aunque ε sea pequeño, la razón del término cuadrático al término lineal es εy para $y > 0$. Si y aumenta lo suficiente, el término cuadrático deja de ser pequeño. La normalización hace visible esta dependencia; la sección siguiente fijará cómo expresar el régimen.

Cambiar la referencia sin cambiar la exactitud. Proposición 6.2 — Invariancia del error relativo bajo escala común. Sean $q \neq 0$ y $\tilde{q}$ cantidades del mismo tipo. Para cualquier escala $S > 0$, si $y = q/S$ y $\tilde{y} = \tilde{q}/S$, entonces

$$\frac{|y - \tilde{y}|}{|y|} = \frac{|q - \tilde{q}|}{|q|}.$$

Demostración. El numerador de la izquierda es $|q - \tilde{q}|/S$ y su denominador es $|q|/S$. Dividir cancela el factor positivo $1/S$. La condición $q \neq 0$ garantiza que ambos cocientes estén definidos. □

La invariancia se refiere al error relativo respecto al valor exacto. El error referido a una escala elegida, $|q - \tilde{q}|/S$, sí cambia al cambiar esa escala. No hay contradicción: uno compara con el valor

de la cantidad y el otro con una referencia escogida. Tampoco se está afirmando que el cambio de escala altere la discrepancia física $|q-\tilde{q}|$.

Para mantener separadas las operaciones, una relación normalizada se escribirá con igualdad exacta mientras sólo haya sustituciones reversibles. El signo de aproximación aparecerá cuando se omita una contribución o se sustituya una función por otra.

Ejercicios. Ejercicio 6.3. Normaliza $q+q^2/Q=b$, primero mediante Q y después mediante b cuando $b>0$. Indica las restricciones y explica qué coeficiente permite comparar los dos términos de la segunda forma.

Solución. Con $y=q/Q$ y $a=b/Q$, sustituir y dividir por $Q>0$ da $y+y^2=a$, con $y,a\geq 0$. Para $b>0$, ponemos $z=q/b$ y $\eta=b/Q$; dividir por b da $z+\eta z^2=1$, con $z\geq 0$ y $\eta>0$. Si $z>0$, la razón cuadrático/lineal es ηz. El coeficiente η es un parámetro, pero el tamaño relativo del término depende también de la solución z. Cuando $b=0$, la escala b no está permitida; la primera normalización sigue disponible y el dominio original exige $q=0$. Las dos formas para $b>0$ se conectan mediante $y=az$ y $\eta=a$.

Ejercicio 6.4. Sean $Q'=cQ$, $c>0$, y las coordenadas normalizadas $y=q/Q$, $y'=q/Q'$. Haz lo mismo para un candidato $\tilde{q}$. Compara los errores normalizados y relativos. En este ejercicio Q' cambia la referencia de representación; no se cambia el parámetro físico Q del modelo anterior.

Solución. Las nuevas coordenadas satisfacen $y'=y/c$ y $\tilde{y}'=\tilde{y}/c$. Por tanto, $|y'-\tilde{y}'|=|y-\tilde{y}|/c$. El número que expresa el error sobre la referencia escogida cambia. Si $q\neq 0$, dividir por $|y'|=|y|/c$ recupera el mismo error relativo. Si $q=0$, esa comparación relativa no está definida, aunque ambos errores referidos a escala sí lo estén. Elegir una escala mayor puede hacer pequeño el número normalizado; no mejora la aproximación.

Referencia interna utilizada: capítulo 2, §9 y capítulo 2, §10. No se reconstruye la teoría dimensional ni Buckingham.

3. Parámetros adimensionales y definición de régimen

En la relación $y+\varepsilon y^2=a$, decir «ε es pequeño» deja una parte del problema sin especificar. Si y permanece cercano a uno, la contribución cuadrática es pequeña frente a la lineal. Si y se acerca a $1/\varepsilon$, ambas contribuciones tienen tamaños comparables. La misma familia puede recorrer situaciones distintas según cómo varíe a y qué valores alcance la solución.

La diferencia aparece incluso antes de resolver una ecuación. Para $0<\varepsilon\leq 1$, la función εx tiende a cero cuando x queda fijo. En el dominio $0\leq x\leq 1$ tenemos la garantía $0\leq \varepsilon x\leq \varepsilon$. En el dominio creciente $0\leq x\leq 1/\varepsilon$, el extremo $x=1/\varepsilon$ produce el valor 1 para todo ε. La pequeñez del parámetro no basta para controlar una expresión en cualquier dominio.

Régimen y límite. Definición 6.3 — Régimen de trabajo. Un régimen es un conjunto explícito de condiciones sobre datos, variables y parámetros dentro del cual se formula una aproximación o comparación de tamaños. Si la comparación se refiere a un límite, se indica qué parámetro tiende a qué valor, qué cantidades quedan fijas y qué dominio se controla.

Un régimen puede ser finito, por ejemplo $0\leq\varepsilon\leq 0.01$ y $0\leq x\leq 2$. También puede describir una familia límite, como $\varepsilon\to 0^+$ con a fijo y positivo. No son declaraciones intercambiables: un límite dice cómo se comporta una familia; una aplicación concreta exige además escoger un umbral que garantice la tolerancia requerida.

En este capítulo $\varepsilon\ll 1$ será una abreviatura interpretativa, respaldada por un límite o por una desigualdad cuantitativa. No fijaremos un número universal para «mucho menor». El umbral

depende de la expresión y del error permitido. En geometría, $|h|/L \le 0.1$ garantizaba una pérdida de distancia no mayor que $0.005L$; otro modelo puede necesitar un cociente más pequeño para la misma tolerancia.

Principio 6.3 — Declarar la familia comparada. En un razonamiento con parámetro pequeño hay que registrar qué varía junto con él. Una cota demostrada para datos fijos no se convierte automáticamente en una cota válida para datos que aumentan cuando el parámetro disminuye.

Control puntual y control sobre un dominio. La diferencia entre comprobar cada valor fijo y controlar todo un dominio admite una formulación elemental. Para una función $r(\varepsilon, x)$, comprobar $r(\varepsilon, x) \to 0$ para cada x fijo permite que el umbral elegido dependa de ese x. Una garantía uniforme en un dominio X_ε exige una cota válida simultáneamente para todos sus puntos, con el mismo umbral.

No hace falta introducir todavía una nueva notación para reconocer el problema. Si $|r(\varepsilon, x)| \le C\varepsilon$ para todos los x admitidos, con C independiente de ε y x, entonces cualquier tolerancia $\tau > 0$ queda garantizada al exigir $0 < \varepsilon \le \tau/C$, cuando $C > 0$. Si la supuesta constante aumenta como $1/\varepsilon$, la conclusión desaparece.

En una aplicación física, el dominio puede ser un intervalo de posiciones, alturas o tiempos. La condición de validez debe acompañar ese intervalo: una descripción local de una curva no promete representar todo el movimiento. El capítulo 5 ya separó la información local de una curva de su recorrido completo; aquí esa separación se convierte en una obligación de aproximación.

Ejercicios. Ejercicio 6.5. Para $r(\varepsilon, x) = \varepsilon x$, $0 < \varepsilon \le 1$, determina el mayor tamaño de $|r|$ en los dominios $[0, 1]$ y $[0, 1/\varepsilon]$. Compara con el límite para x fijo. ¿En cuál de los dos dominios puedes garantizar $|r| \le 0.01$ sólo imponiendo que ε sea suficientemente pequeño?

Solución. La función es creciente en $x \ge 0$. En $[0, 1]$ el máximo es ε, así que $\varepsilon \le 0.01$ basta. En $[0, 1/\varepsilon]$ el máximo es 1, por lo que ningún umbral positivo de ε garantiza la tolerancia en todo el dominio. Para cada x fijo y finito, $\varepsilon x \to 0$; si $x > 0$, basta $\varepsilon \le 0.01/x$ para ese punto. Esa elección depende de x y no resuelve el segundo problema. El fallo no está en el límite puntual, sino en utilizarlo como garantía simultánea sobre un intervalo que crece.

Ejercicio 6.6. Para $f(\varepsilon) = 1/(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon \ge 0$, busca el régimen exacto que permite sustituir f por 1 con error referido a la escala 1 no mayor que τ, donde $0 < \tau < 1$. Interpreta el caso $\tau = 0.02$ y distingue un umbral necesario y suficiente de uno meramente suficiente.

Solución. La diferencia es $\varepsilon/(1 + \varepsilon)$. Resolver la desigualdad como en el ejercicio 6.1 da $\varepsilon \le \tau/(1 - \tau)$. Para $\tau = 0.02$, el umbral exacto es $1/49$, aproximadamente 0.020408. La condición más simple $\varepsilon \le 0.02$ también garantiza la tolerancia, pues $\varepsilon/(1 + \varepsilon) \le \varepsilon$, pero excluye algunos valores permitidos. El primer umbral es necesario y suficiente para el criterio elegido; el segundo sólo es suficiente. En ambos se explica qué significa «pequeño».

Referencia: Hinch, *Perturbation Methods* (1991), cap. 1, §§1.1–1.2, pp. 1–7.

4. Comparar tamaños: órdenes de magnitud

Antes de eliminar un término conviene escribir la comparación que lo autoriza. En $y + \varepsilon y^2 = a$, el coeficiente ε no es el objeto que se compara con y. Para $y > 0$, el cociente pertinente es $(\varepsilon y^2)/y = \varepsilon y$. Esta operación exige comparar términos del mismo tipo de magnitud; si se comparan cantidades de dimensiones distintas, primero debe justificarse una normalización que las lleve a una misma relación.

El capítulo 2 y capítulo 3 introdujeron órdenes de magnitud como escalas numéricas. El trabajo presente necesita además saber cómo cambia una razón dentro de una familia. Dos números cercanos en una situación concreta no necesariamente conservan esa cercanía al variar el parámetro.

Dos relaciones diferentes. Definición 6.4 — Término subdominante. Sean $A(\varepsilon)$ y $B(\varepsilon)$ términos comparables dimensionalmente, con $B(\varepsilon) \neq 0$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Diremos que A es subdominante respecto a B cuando $\varepsilon \to 0^+$ si

$$\frac{|A(\varepsilon)|}{|B(\varepsilon)|} \longrightarrow 0.$$

Si hay otras variables en un dominio declarado, una afirmación uniforme exige que la misma pequeñez se alcance simultáneamente en ese dominio.

La definición compara módulos y no signos. Un término puede ser negativo y subdominante. Tampoco afirma que A tienda a cero: si $A = \varepsilon^{-1}$ y $B = \varepsilon^{-2}$, ambos crecen en módulo, pero la razón es ε.

Definición 6.5 — Términos comparables en tamaño. En un régimen, dos términos no nulos A, B son comparables si existen constantes $c, C > 0$, independientes de los puntos de ese régimen, tales que

$$c \leq \frac{|A|}{|B|} \leq C.$$

Para un régimen límite, las cotas han de valer en un intervalo suficientemente pequeño del parámetro.

Comparabilidad no significa igualdad ni razón tendiendo a uno. Los términos $2\varepsilon^2$ y ε^2 son comparables y mantienen razón 2. El símbolo $\sim$, cuando se emplee con significado asintótico, se reservará a una razón que tiende a uno; no se usará aquí como abreviatura de comparabilidad. Esta convención evita trasladar inadvertidamente los distintos usos de «orden» de capítulos anteriores.

Una clasificación reutilizable. Proposición 6.3 — Comparación de potencias. Sean $A = c\varepsilon^{\alpha}$ y $B = d\varepsilon^{\beta}$, con c, d constantes reales no nulas, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $0 < \varepsilon \to 0$. Entonces A es subdominante respecto a B si $\alpha > \beta$; son comparables si $\alpha = \beta$; y B es subdominante respecto a A si $\alpha < \beta$.

Demostración. El cociente de módulos es $|c/d|\varepsilon^{\alpha-\beta}$. Si el exponente es positivo, tiende a cero; si es cero, vale la constante positiva $|c/d|$; si es negativo, su inversa tiende a cero. Son las tres posibilidades exhaustivas para $\alpha - \beta$. □

Para $0 < \varepsilon \leq 1$, esta clasificación sitúa ε^3 por debajo de ε^2, pero no convierte $10^6\varepsilon^3$ en un término despreciable para todo valor del intervalo. Su razón a ε^2 es $10^6\varepsilon$; un problema con tolerancia 0.01 exige $\varepsilon \leq 10^{-8}$. El límite reconoce la jerarquía eventual; la cota establece cuándo puede utilizarse.

Cancelaciones y cantidades objetivo. Comparar los sumandos no siempre basta para controlar su suma. La expresión $(1+\varepsilon) - 1 = \varepsilon$ contiene dos términos comparables de tamaño cercano a uno, cuya diferencia es mucho menor. Sustituir $1 + \varepsilon$ por 1 tiene un defecto pequeño frente a uno, pero destruye la diferencia completa. Si la observable que interesa es ese incremento, la aproximación debe juzgarse respecto al incremento.

Principio 6.4 — Comparar términos completos y revisar cancelaciones. Una comparación debe incluir coeficientes, variables y dominio. Si el denominador elegido puede anularse, hay que separar esos puntos o usar una escala positiva distinta. Cuando la observable resulta de una cancelación, se controla el error después de formar esa observable.

La advertencia tiene una interpretación geométrica inmediata. En la distancia de §1, aproximar d por L puede ser adecuado para la distancia total y ser inadecuado para estudiar cuánto aumenta respecto a L. La pregunta decide cuál de las dos diferencias necesita conservarse.

Ejercicios. Ejercicio 6.7. Clasifica $A = \varepsilon^3$, $B = \varepsilon^2$ y $C = \varepsilon^2(2+\varepsilon)$ para $0 < \varepsilon \le 1$ y en el límite $\varepsilon \to 0^+$. Escribe una cota bilateral y dos cocientes que tiendan a cero.

Solución. Se tiene $C/B = 2+\varepsilon$, de modo que $2 < C/B \le 3$; por tanto B y C son comparables. Además, $A/B = \varepsilon \to 0$ y $A/C = \varepsilon/(2+\varepsilon) \le \varepsilon/2 \to 0$. En el intervalo completo los cocientes son positivos y están acotados, pero la palabra «subdominante» describe su comportamiento límite. Ninguna igualdad $B = C$ se deduce de la comparabilidad.

Ejercicio 6.8. Un informe sustituye $1+\varepsilon$ por 1 y concluye que el incremento $(1+\varepsilon)-1$ queda bien aproximado por cero. Calcula el error relativo del incremento para $\varepsilon > 0$. Otro informe elimina εx^2 frente a x porque $0 < \varepsilon \ll 1$, sin restringir $x > 0$. Encuentra valores que refuten su argumento.

Solución. El incremento exacto es ε y el aproximado es cero. El error relativo es $|\varepsilon - 0|/\varepsilon = 1$, aunque el error respecto a la escala 1 sea ε. La primera conclusión confunde las dos observables. En el segundo caso, la razón es εx. Para $x = 1/\varepsilon$ vale 1; para $x = 1/\varepsilon^2$ vale $1/\varepsilon$ y aumenta sin cota al disminuir el parámetro. El coeficiente pequeño no justifica la eliminación. Una reparación posible es declarar un dominio $0 < x \le X$ con X fijo y exigir εX menor que la tolerancia.

Referencias internas utilizadas: capítulo 2, §9 y capítulo 3, §10. Las definiciones comparativas y proposición 6.3 se construyen localmente.

5. Términos dominantes y balance dominante

La relación normalizada $y + \varepsilon y^2 = a$, con $a, \varepsilon > 0$ y $y \ge 0$, puede simplificarse de dos maneras que parecen incompatibles. Si se omite el término cuadrático, queda $y = a$. Si se omite el término lineal, queda $\varepsilon y^2 = a$ y, en el dominio no negativo, $y = \sqrt{a/\varepsilon}$. Elegir una de esas respuestas por la apariencia del coeficiente deja sin resolver el problema principal: qué término es pequeño sobre la respuesta que acabamos de obtener.

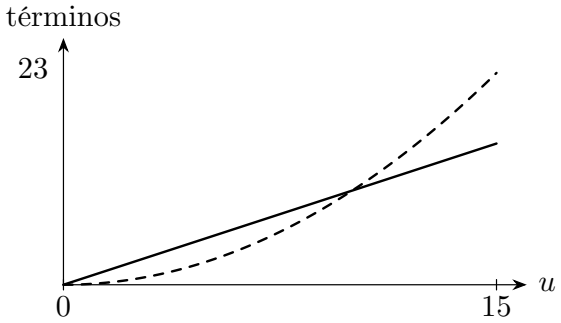


Figura 6.1. Los términos u y εu^2, con $\varepsilon = 0{,}1$, son iguales en $u = 10$. El segundo es pequeño respecto del primero sólo si $\varepsilon u \ll 1$, aunque ε sea pequeño. Véase §5.

Para el primer candidato, la razón cuadrático/lineal vale εa. Para el segundo, la razón lineal/cuadrático vale $1/\sqrt{\varepsilon a}$. Las dos reducciones proponen regímenes diferentes de la misma relación. La combinación $\eta = \varepsilon a$ decide cuál de las comparaciones puede hacerse pequeña. Un parámetro ε diminuto no impide que η sea grande si la entrada a aumenta lo suficiente.

La ecuación completa tiene una solución positiva: la función $F(y) = y + \varepsilon y^2 - a$ es continua, satisface $F(0) < 0$ y $F(a) > 0$, y es estrictamente creciente para $y \geq 0$. El teorema del valor intermedio da existencia, y el crecimiento estricto da unicidad. Este control usa cálculo de una variable; no se introduce una ecuación de evolución.

Qué se conserva en un balance. Definición 6.6 — Balance dominante. Para una relación normalizada $\sum_{j=1}^{n} T_j = 0$, un balance dominante propuesto consiste en conservar un conjunto de términos capaces de compensarse y resolver la relación reducida obtenida al omitir los demás. Se valida su jerarquía comparando, sobre el candidato obtenido y en el régimen declarado, los términos omitidos con una escala positiva del tamaño de los conservados. En un régimen límite, los cocientes omitidos deben tender a cero; para un uso cuantitativo se exige una cota explícita. Esta validación de tamaños todavía no constituye por sí sola una cota del error de la solución.

Una referencia posible es $B = \sum_{j \in J} |T_j|$, donde J enumera los términos conservados y $B > 0$. Esa suma de módulos no desaparece por la cancelación que la ecuación reducida necesita. Usar como denominador la suma con signos de los conservados sería inútil sobre una solución de la relación reducida: precisamente allí esa suma es cero.

En el primer candidato del ejemplo, se conservan y y $-a$, cuyos módulos valen a. El término omitido es εa^2; respecto a la escala a, su tamaño es η. En el segundo candidato se conservan εy^2 y $-a$, y el término omitido tiene tamaño relativo $1/\sqrt{\eta}$. El balance incluye signos, dominio y tamaños. Una lista de términos grandes sin posibilidad de cancelación no puede satisfacer una ecuación de suma nula.

Proposición 6.4 — Un único término dominante no puede anularse mediante términos subdominantes. Supongamos que, para todo parámetro suficientemente pequeño, $\sum_{j=1}^{n} T_j(\varepsilon) = 0$ y $T_k(\varepsilon) \neq 0$. Es imposible que $|T_j/T_k| \to 0$ para todos los $j \neq k$.

Demostración. Dividir la igualdad exacta por T_k da $1 + \sum_{j \neq k} T_j/T_k = 0$. Cada cociente de la suma tiende a cero por la hipótesis sobre su módulo. Como hay un número finito de términos, tomar el límite produciría $1 = 0$. □

La finitud interviene en el paso al límite de la suma. La proposición no dice que toda ecuación tenga exactamente dos términos principales ni que éstos deban ser iguales en módulo. Dice que un término no nulo no puede quedar solo frente a una colección finita de términos despreciables respecto a él.

Principio 6.5 — Proponer, resolver y comprobar. Después de proponer un balance se resuelve su relación reducida en el dominio permitido y se insertan sus candidatos en las razones que justifican las omisiones. Un balance rechazado por signos o por tamaños no se salva porque su fórmula resulte simple.

Ejercicios. Ejercicio 6.9. Para $y + \varepsilon y^2 = a$, $a, \varepsilon > 0$, construye los candidatos obtenidos omitiendo respectivamente el término cuadrático y el lineal. Calcula sobre cada candidato la razón del término omitido al término conservado que depende de y. Evalúa las razones cuando $\varepsilon = 10^{-3}$ y a vale 10, 10^3 y 10^6. No identifiques todavía esas razones con el error relativo de la solución.

Solución. El candidato lineal es $y_{\mathrm{L}} = a$, y la razón omitido/conservado es $\varepsilon a = \eta$. El candidato cuadrático es $y_{\mathrm{C}} = \sqrt{a/\varepsilon}$, y la razón es $y_{\mathrm{C}}/(\varepsilon y_{\mathrm{C}}^2) = 1/\sqrt{\eta}$. Para los tres datos se obtiene:

a	η	Razón en y_{L}	Razón en y_{C}
10	0.01	0.01	10
10^3	1	1	1

a	η	Razón en y_{L}	Razón en y_{C}
10^6	10^3	10^3	$1/\sqrt{10^3} \approx 0.0316$

El primer dato favorece el balance lineal y el tercero el cuadrático. El dato intermedio no justifica ninguna de las dos omisiones mediante una razón pequeña. Para convertir estos diagnósticos en garantías de error hará falta controlar cómo el defecto de la ecuación afecta a su solución.

Ejercicio 6.10. Se propone buscar una raíz positiva de $\varepsilon y^2 + y + 1 = 0$, con $\varepsilon > 0$, eliminando y y compensando el término cuadrático con la constante. Localiza el fallo antes de comparar tamaños y demuestra que la ecuación completa tampoco tiene raíces positivas.

Solución. La relación reducida sería $\varepsilon y^2 + 1 = 0$. Su primer sumando es no negativo y el segundo es positivo; no pueden compensarse en los reales. Para $y > 0$, los tres sumandos de la relación completa son positivos, por lo que su suma es positiva. Tampoco $y = 0$ es raíz. La eliminación no falló por escoger mal un umbral: el balance contradice los signos del modelo. Una comparación de módulos por sí sola habría ocultado esa imposibilidad.

Referencia: Hinch, *Perturbation Methods* (1991), cap. 1, §§1.1–1.2, pp. 1–7.

6. Error, residuo y calidad de una aproximación

Un candidato puede satisfacer casi una ecuación y aun así estar lejos de su solución. Para reconocer esa posibilidad hay que distinguir dos defectos: el de la cantidad aproximada y el de la relación en la que se la inserta.

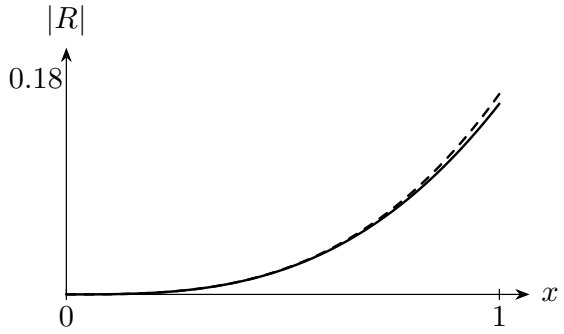


Figura 6.2. En $0 \le x \le 1$, $0 \le x - \sin x \le x^3/6$. La curva continua es el error y la discontinua su cota; aquí ambos se calculan con el mismo argumento adimensional. Véase §6.

Si la distancia exacta del modelo geométrico es d y se utiliza $\tilde{d}$, el defecto $|\tilde{d} - d|$ compara distancias. Si la relación que define d se escribe como $d^2 - L^2 - h^2 = 0$, sustituir $\tilde{d}$ produce $\tilde{d}^2 - L^2 - h^2$, una cantidad con dimensiones de longitud al cuadrado. Ambos defectos pueden relacionarse, pero no tienen el mismo tipo ni se comparan directamente mediante sus valores numéricos.

Medir el error de la observable. Definición 6.7 — Errores de aproximación. Para cantidades escalares comparables $q, \tilde{q}$, el error absoluto es $e_{\mathrm{abs}} = |\tilde{q} - q|$. Si $q \neq 0$, el error relativo al valor exacto es $e_{\mathrm{rel}} = |\tilde{q} - q|/|q|$. Para una escala positiva declarada S, el error referido a esa escala es $e_S = |\tilde{q} - q|/S$.

El error absoluto conserva el tipo de la observable; los otros dos son adimensionales. El error relativo requiere un denominador no nulo. Cerca de un cero puede crecer aunque el error absoluto sea

pequeño, y en el cero no está definido. En ese caso se puede adoptar una escala positiva pertinente, sin llamar a la nueva razón «error relativo al valor exacto».

Estos errores comparan dos predicciones o una predicción completa con su reducción. La incertidumbre experimental del capítulo 3 caracteriza lo que un procedimiento de medición permite conocer. Una cota matemática de reducción no es una incertidumbre estándar ni un intervalo probabilístico. Si el modelo omite un rasgo relevante del fenómeno, disminuir el error de la reducción no corrige por sí solo esa omisión.

Sustituir en la relación original. Definición 6.8 — Residuo. Para una relación $F(q;\lambda) = 0$ y un candidato $\tilde{q}$, su residuo es $r = F(\tilde{q};\lambda)$, conservando fijos los datos λ. Si $R_F > 0$ es una escala del mismo tipo que F, el residuo normalizado es $|r|/R_F$.

Esta definición no presupone que se conozca la solución exacta. Ésa es una ventaja práctica: puede comprobarse el residuo de un candidato antes de resolver el modelo completo. La dificultad está en interpretar qué dice esa comprobación sobre la observable. Multiplicar una ecuación por una constante pequeña multiplica su residuo y deja intactas sus raíces. Por ello el tamaño bruto del residuo depende también de cómo se escribió la relación.

En $F(y) = y + \varepsilon y^2 - a$, el candidato $y = a$ tiene residuo εa^2. Su valor referido a la entrada $a > 0$ es εa. Esa cifra coincide con una razón de tamaños de §5, pero la coincidencia no demuestra todavía que sea el error relativo de y. Falta estudiar la sensibilidad de la relación.

Cuándo un residuo controla el error. Proposición 6.5 — Control mediante una pendiente mínima. Sea F continua en un intervalo cerrado $I = [u, v]$, diferenciable en su interior, y supongamos $|F'(x)| \geq m > 0$ en ese interior. Si $q_*, \tilde{q} \in I$ y $F(q_*) = 0$, entonces

$$|\tilde{q} - q_*| \leq \frac{|F(\tilde{q})|}{m}.$$

Demostración. Si ambos puntos coinciden, la cota es inmediata. Si son distintos, el teorema del valor medio, aplicado al segmento que los une, proporciona un punto ξ interior a ese segmento tal que $F(\tilde{q}) - F(q_*) = F'(\xi)(\tilde{q} - q_*)$. Como $F(q_*) = 0$, tomar módulos da $|F(\tilde{q})| \geq m|\tilde{q} - q_*|$. Dividir por $m > 0$ concluye la prueba. □

La proposición supone que existe una raíz en el intervalo; el residuo no establece esa existencia. También necesita una pendiente mínima defendible en todo el segmento relevante. Si m es diminuto, un residuo pequeño puede permitir un error considerable. En la relación algebraica de §5, $F'(y) = 1 + 2\varepsilon y \geq 1$ para $y \geq 0$; una vez encerradas raíz y candidato en un intervalo no negativo, puede usarse $m = 1$.

Principio 6.6 — Acompañar el residuo con sensibilidad. Un residuo pequeño sólo certifica una solución próxima cuando se dispone de una estimación que conecte ambos defectos y se cumplen sus hipótesis. La normalización del residuo ayuda a comparar escalas, pero no sustituye ese argumento.

Si se reemplaza F por $\widehat{F} = \delta F$, con $\delta > 0$, el residuo pasa a δr y la pendiente mínima a δm. El cociente de la proposición 6.5 permanece $|r|/m$. Una ecuación puede hacerse parecer mejor satisfecha cambiando su factor global; la cota correcta no mejora por ese cambio de escritura.

Ejercicios. Ejercicio 6.11. Para una escala $S > 0$, una observable vale $q = 0.002S$ y su aproximación es $\tilde{q} = 0.003S$. Calcula los tres errores de la definición 6.7. Repite con $q = 0$ manteniendo la misma aproximación, y explica qué comparación deja de estar definida.

Solución. La diferencia es $0.001S$, de modo que $e_{\text{abs}} = 0.001S$, $e_S = 0.001$ y $e_{\text{rel}} = 0.001/0.002 = 1/2$. Un error pequeño sobre S representa aquí la mitad del valor objetivo. Si $q = 0$, los errores absoluto y referido a escala son $0.003S$ y 0.003; el relativo al valor exacto no está definido porque exigiría dividir por cero. No corresponde sustituir ese cociente por cero ni por una cifra finita elegida por convenio.

Ejercicio 6.12. Para $\delta > 0$, considera $F_\delta(y) = \delta y$, cuya raíz es 0. Utiliza el candidato $\tilde{y} = 1$. Demuestra que su residuo puede ser arbitrariamente pequeño aunque el error sea unitario. Comprueba qué predice proposición 6.5.

Solución. El residuo es $F_\delta(1) = \delta$, que tiende a cero cuando $\delta \to 0^+$. El error respecto a la raíz es $|1 - 0| = 1$, independiente de δ. La derivada vale δ, por lo que proposición 6.5 utiliza $m = \delta$ y da $e_{\text{abs}} \le \delta/\delta = 1$. No certifica una proximidad creciente. Si se normaliza la relación por su propio factor δ, queda $y = 0$ y el residuo normalizado del candidato es 1. Tanto la pendiente como la normalización revelan por qué el residuo bruto era engañoso.

Ejercicio 6.13. Sea $F(y) = y + y^2 - 2$ en $[0, 2]$. Verifica que hay una única raíz en ese intervalo y certifica el error del candidato 1.01 mediante su residuo. Compara con el error exacto e indica por qué una cota puede ser correcta sin ser óptima.

Solución. $F(1) = 0$ y $F'(y) = 1 + 2y > 0$ en el interior; la raíz es única porque F es estrictamente creciente. En todo el intervalo puede emplearse la pendiente mínima $m = 1$. El residuo del candidato es $1.01 + (1.01)^2 - 2 = 0.0301$, así que proposición 6.5 garantiza un error no mayor que 0.0301. El error exacto es $|1.01 - 1| = 0.01$, que cumple la cota. La estimación usó la pendiente mínima del intervalo completo, inferior a las pendientes próximas a la raíz. Conserva una garantía más amplia a costa de precisión; no afirma que el error efectivo sea 0.0301.

Referencias utilizadas: capítulo 3, §12 para cotas declaradas. La cota del residuo se demuestra mediante el teorema del valor medio.

7. Linealización alrededor de un estado de referencia

Una función puede resultar complicada en un intervalo amplio y tener una descripción simple cerca de un punto. Si una observable $q = f(x)$ depende de una sola variable, conocer el valor $f(x_0)$ y la pendiente $f'(x_0)$ permite predecir cómo cambia ante un incremento pequeño $h = x - x_0$. La cuestión es qué reemplazo expresa esa información y cuál es su alcance.

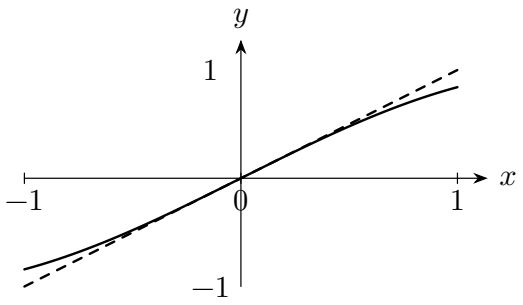


Figura 6.3. La curva $\sin x$ y su tangente x se comparan en $|x| \le 1$, con ángulo en radianes. La proximidad es local: no convierte ambas funciones en idénticas. Véase §7.

Para la distancia $f(h) = \sqrt{L^2 + h^2}$, con $L > 0$, el punto base $h = 0$ tiene valor L y pendiente cero. Su aproximación de primer orden será constante. En cambio, cerca de una altura base $h = L$,

la pendiente no es cero y la descripción local conserva una variación proporcional al incremento. La función es la misma; cambia el estado alrededor del que se pregunta.

Parte afín y parte lineal. Definición 6.9 — Linealización univariada. Sea f diferenciable en un punto interior x_0 de su dominio. Para h tal que $x_0 + h$ pertenezca al dominio, su aproximación afín de primer orden es

$$L_{x_0}(h) = f(x_0) + f'(x_0)h.$$

La parte lineal del cambio es $f'(x_0)h$; la función completa de h es afín y sólo es lineal cuando $f(x_0) = 0$.

El término independiente conserva el estado base y el coeficiente del incremento conserva la pendiente. Si x tiene dimensiones y f representa una magnitud física, $f'(x_0)$ tiene el tipo de f dividido por el tipo de x; su producto con h puede sumarse a $f(x_0)$. La derivada no es necesariamente un número sin unidades.

La diferenciabilidad implica

$$\frac{f(x_0 + h) - L_{x_0}(h)}{h} \longrightarrow 0 \qquad (h \to 0,\ h \neq 0).$$

En efecto, el cociente es $[f(x_0+h)-f(x_0)]/h-f'(x_0)$, que tiende a cero por la definición de derivada. Esta afirmación controla el defecto en comparación con el incremento de entrada. Todavía no da una cota cuadrática ni un radio numérico de validez.

Por qué esa aproximación es la de primer orden. Proposición 6.6 — Unicidad de la aproximación afín de primer orden. Si f es diferenciable en x_0 y una función afín $A + Bh$ satisface

$$\frac{f(x_0 + h) - (A + Bh)}{h} \longrightarrow 0,$$

entonces $A = f(x_0)$ y $B = f'(x_0)$. Recíprocamente, esos coeficientes satisfacen el límite.

Demostración. Por hipótesis, el defecto dividido por h tiende a cero, así que el defecto mismo también tiende a cero. La continuidad de f en x_0, consecuencia de su diferenciabilidad, da $f(x_0) - A = 0$. Con $A = f(x_0)$, el cociente de la hipótesis se convierte en el cociente incremental de f menos B. Su límite es $f'(x_0) - B$, que debe ser cero. La recíproca es la identidad con el cociente incremental escrita antes del enunciado. □

La propiedad selecciona los coeficientes por un criterio matemático, no por un ajuste arbitrario a dos valores cercanos. Una recta secante puede servir como otro modelo aproximado, pero coincide con esta aproximación de primer orden sólo si se justifican las relaciones pertinentes entre sus coeficientes y el punto base.

Principio 6.7 — Declarar la referencia antes de linealizar. Se identifica la variable independiente, el punto base, el incremento y la observable cuyo cambio interesa. La aproximación resultante se interpreta respecto a ese estado; no se traslada a otro punto o a todo el dominio sin control adicional.

Cuando la pendiente desaparece. Si $f'(x_0) = 0$, la linealización conserva el valor base y predice un cambio nulo. Puede aproximar bien el valor total mientras describe mal el primer cambio no nulo. Para $f(x) = 1 + x^2$ alrededor de cero, el valor aproximado es 1 y el error absoluto es x^2. El incremento exacto respecto al estado base es x^2, mientras que el incremento linealizado es cero: su error relativo es 1 para todo $x \neq 0$.

El ejemplo no contradice proposición 6.6. El defecto x^2 dividido por x tiende a cero, como corresponde a primer orden. Lo que falla es exigir que una aproximación de primer orden conserve un efecto cuyo primer término aparece a segundo orden. Ésta es la versión local de la advertencia sobre cancelaciones de §4.

Ejercicios. Ejercicio 6.14. Para $f(h) = \sqrt{L^2 + h^2}$, con $L > 0$, obtén la aproximación afín alrededor de $h = 0$ y alrededor de $h = L$. Usa una variable distinta para el incremento del segundo caso y comprueba las dimensiones.

Solución. La derivada es $f'(h) = h/\sqrt{L^2 + h^2}$. En cero se obtiene $f(0) = L$ y $f'(0) = 0$, por lo que $L_0(h) = L$. En el segundo caso conviene escribir $h = L + k$, para distinguir la altura total de su incremento. Entonces $f(L) = \sqrt{2}L$ y $f'(L) = 1/\sqrt{2}$, y la aproximación es $\sqrt{2}L + k/\sqrt{2}$. Los dos términos tienen dimensiones de longitud; la pendiente es adimensional porque se deriva una longitud respecto a otra longitud. Las aproximaciones pertenecen a estados base diferentes. Sus intervalos de validez requieren el control del resto de §8.

Ejercicio 6.15. Linealiza $f(x) = x^2$ alrededor de cero. Calcula el error absoluto, el cociente del defecto por el incremento de entrada y el error relativo del cambio de salida para $x \neq 0$. Un informe afirma que «la linealización es inútil porque su error relativo es siempre uno». Evalúa esa conclusión según la observable y el criterio.

Solución. La parte afín es cero. El defecto absoluto es x^2, que tiende a cero; dividido por el incremento de entrada x da $x \to 0$, de acuerdo con la proposición 6.6. El cambio de salida respecto a $f(0) = 0$ vale x^2, así que su error relativo es $x^2/x^2 = 1$. Si la pregunta exige resolver ese cambio con pequeña tolerancia relativa, la aproximación no sirve. Si exige un error absoluto no mayor que τ sobre una escala numérica fija, sí sirve en $|x| \leq \sqrt{\tau}$. La conclusión del informe es demasiado amplia: juzga todos los usos mediante un único criterio.

Referencia: Riley–Hobson–Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, 3.ª ed. (2006), §4.6, pp. 136–140.

8. Resto de Taylor y dominio local de la linealización

La derivada seleccionó una aproximación de primer orden, pero una aplicación necesita saber cuánto puede alejarse del punto base. Decir que el defecto dividido por el incremento tiende a cero no determina, por sí solo, qué intervalo garantiza una tolerancia concreta. Para obtener ese intervalo hace falta controlar cómo varía la pendiente.

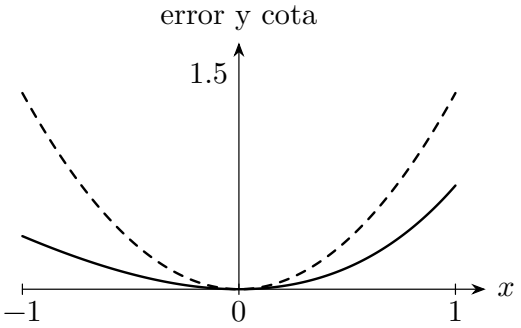


Figura 6.4. En $|x| \leq 1$, el resto de $e^x \approx 1 + x$ satisface $|e^x - 1 - x| \leq (e/2)x^2$. La cota discontinua usa el máximo de la segunda derivada en ese intervalo. Véase §8.

Si la segunda derivada es grande, la pendiente cambia rápidamente y el intervalo certificado puede ser pequeño. Si la segunda derivada está acotada, la pérdida acumulada al reemplazar las pendientes cercanas por la pendiente base puede estimarse integrando una cota. La interpretación geométrica es la separación entre la gráfica y su recta tangente.

Separar aproximación y resto. Definición 6.10 — Resto afín y radio controlado. Para la aproximación de la definición 6.9, definimos

$$R_{x_0}(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h.$$

Así, $f(x_0 + h) = L_{x_0}(h) + R_{x_0}(h)$ es una igualdad exacta. Un radio controlado para una tolerancia y una escala declaradas es un número $\rho > 0$ tal que la cota requerida del resto vale para todos los incrementos $|h| \le \rho$ y el intervalo correspondiente está contenido en el dominio de f.

Definir el resto no lo hace pequeño. La definición identifica el defecto que hay que estimar y mantiene separada la igualdad exacta de la sustitución aproximada $f(x_0 + h) \approx L_{x_0}(h)$.

Proposición 6.7 — Cota cuadrática del resto. Supongamos que f es dos veces continuamente diferenciable en un intervalo abierto que contiene $[x_0 - r, x_0 + r]$, con $r > 0$, y que $|f''(x)| \le M$, con $M \ge 0$, en ese segmento. Entonces, para $|h| \le r$,

$$|R_{x_0}(h)| \le \frac{M}{2} h^2.$$

Demostración. El teorema fundamental del cálculo da $R_{x_0}(h) = \int_0^h [f'(x_0 + t) - f'(x_0)]\, dt$. Aplicar el valor medio a f' entre x_0 y $x_0 + t$ proporciona $|f'(x_0 + t) - f'(x_0)| \le M|t|$. Si $h \ge 0$, integrar esa cota da $|R_{x_0}(h)| \le \int_0^h Mt\, dt = Mh^2/2$. Si $h < 0$, invertir los límites de integración y tomar módulos da $\int_h^0 M|t|\, dt = Mh^2/2$. Ambos segmentos están dentro del intervalo donde vale la cota de f''. □

Si se desea un error referido a una escala $S > 0$ no mayor que $\tau > 0$, proposición 6.7 permite imponer $Mh^2/2 \le \tau S$. Para $M > 0$ basta elegir

$$|h| \le \rho, \qquad \rho = \min\left\{ r, \sqrt{\frac{2\tau S}{M}} \right\}.$$

La escala tiene el tipo de f y M tiene el tipo de f dividido por el cuadrado del tipo de x; el radio conserva el tipo de x. Si $M = 0$, el resto es cero en todo el segmento y el radio r queda disponible sin dividir por M.

Controlar el cambio observado. Para juzgar el cambio $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$, el denominador relativo puede ser muy distinto del valor total $f(x_0 + h)$. El siguiente resultado proporciona un criterio cuando la pendiente base no se anula.

Proposición 6.8 — Error relativo del incremento. Bajo las hipótesis de la proposición 6.7, supongamos $a = f'(x_0) \ne 0$ y $0 < |h| \le r$. Si $\theta = M|h|/(2|a|) < 1$, entonces $\Delta f \ne 0$ y

$$\frac{|\Delta f - ah|}{|\Delta f|} \le \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

Demostración. La identidad $\Delta f = ah + R_{x_0}(h)$ y proposición 6.7 dan $|R_{x_0}(h)| \le \theta |a||h|$. La desigualdad triangular inversa produce $|\Delta f| \ge |a||h| - |R_{x_0}(h)| \ge (1 - \theta)|a||h| > 0$. Dividir la cota del resto por esta cota inferior concluye el argumento. □

La condición $a \neq 0$ permite comparar el resto con el cambio de primer orden. Si $a = 0$, esa comparación no existe; los ejemplos de §7 muestran que el error relativo del cambio puede permanecer unitario. Además, $\theta < 1$ garantiza que el cambio exacto no se anule en los incrementos considerados.

Principio 6.8 — Convertir el resto en condiciones de uso. La cota debe acompañarse de un dominio donde sus constantes estén justificadas y de una desigualdad que traduzca la tolerancia en un radio. Se distingue el error relativo del valor del error relativo del incremento.

Ejercicios. Ejercicio 6.16. Para $f(x) = \sqrt{1+x}$, linealiza alrededor de cero y controla el resto en $|x| \leq r < 1$. Fija después $r = 1/2$ y obtén un radio suficiente para error absoluto no mayor que $\tau > 0$. Calcula el radio certificado para $\tau = 0.001$.

Solución. La aproximación es $1 + x/2$. Como $f''(x) = -1/[4(1+x)^{3/2}]$, en $|x| \leq r$ se puede tomar $M = 1/[4(1-r)^{3/2}]$. Proposición 6.7 da

$$\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{x^2}{8(1-r)^{3/2}}.$$

Para $r = 1/2$, la constante es $\sqrt{2}/4$. Basta entonces $|x| \leq \min\{1/2, \sqrt{2\sqrt{2}\,\tau}\}$. Para $\tau = 0.001$, ese radio es aproximadamente 0.05318. La estimación es suficiente, no se ha demostrado que sea el radio máximo posible. Mantener el radio auxiliar $1/2$ asegura que la constante utilizada no dependa del incremento concreto.

Ejercicio 6.17. Para $f(x) = 1 + x + x^2$ alrededor de cero, calcula los errores relativos de la aproximación afín respecto al valor exacto y respecto al incremento exacto, en $0 < |x| \leq 1/2$. Obtén cotas simples y explica sus diferentes ritmos de disminución.

Solución. La aproximación es $1+x$ y el resto es x^2. El valor exacto es positivo porque $1+x+x^2 = (x+1/2)^2 + 3/4$. Por tanto, su error relativo es $x^2/(1+x+x^2) \leq 4x^2/3$. El incremento exacto es $x + x^2 = x(1+x)$; para el dominio indicado no se anula y su error relativo es $|x|/|1+x| \leq 2|x|$. El mismo resto queda dividido por una cantidad de tamaño cercano a uno en el primer caso y por una de tamaño proporcional a $|x|$ en el segundo. No son dos errores absolutos distintos: son dos criterios para un defecto común. Proposición 6.8, con $a = 1$ y $M = 2$, da también la cota $|x|/(1-|x|)$.

Ejercicio 6.18. Sea $f(x) = |x|^{3/2}$. Demuestra que es diferenciable en cero, identifica su aproximación afín y prueba que no existen $C > 0$ y $r > 0$ tales que su resto satisfaga $|R_0(x)| \leq Cx^2$ para todo $|x| \leq r$. Indica qué hipótesis de la proposición 6.7 no puede darse por disponible.

Solución. El cociente incremental en cero es $|x|^{3/2}/x$, cuyo módulo es $\sqrt{|x|}$ y tiende a cero. Así, $f'(0) = 0$ y la aproximación afín es cero. El resto es $|x|^{3/2}$. Si hubiera una cota cuadrática, dividir por $x^2 > 0$ para $x \neq 0$ daría $1/\sqrt{|x|} \leq C$ cerca de cero, imposible porque ese cociente crece sin cota. Fuera de cero, la segunda derivada es $3/(4\sqrt{|x|})$ y no está acotada al acercarse a cero; la segunda derivada en cero tampoco existe. La diferenciabilidad alcanza para proposición 6.6, pero no aporta las hipótesis de la proposición 6.7.

En la geometría de §1 puede aplicarse ejercicio 6.16 a $x = (h/L)^2$. Esa sustitución produce la corrección $L + h^2/(2L)$ a la distancia. Es una aproximación afín en la variable x y una corrección cuadrática en h; no debe confundirse con la linealización de la distancia respecto a h en cero, que es constante.

Referencia: Riley–Hobson–Bence, 3.ª ed. (2006), §4.6, pp. 136–140.

9. Parámetro pequeño y primera jerarquía de aproximaciones

La cota del resto permite decidir si una aproximación basta para una tolerancia. Cuando varias aproximaciones se ordenan por potencias de un parámetro, interesa conservar también la dependencia de sus defectos con ese parámetro. Un número aislado, como 0.001, no muestra qué ocurrirá al reducir a la mitad el incremento normalizado.

Para una familia de restos $R(\varepsilon, x)$, una estimación $|R(\varepsilon, x)| \le C\varepsilon^2$ contiene dos datos distintos: el exponente describe cómo disminuye la cota y la constante permite convertirla en un umbral. Si x recorre un dominio, hay que saber además si la misma constante sirve en todos sus puntos. Se introduce una abreviatura para esta afirmación, con las condiciones dentro de su definición.

Una notación para cotas uniformes. Definición 6.11 — Notación de orden uniforme elemental. Sea $R(\varepsilon, x)$ adimensional, definido para $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ y $x \in X_\varepsilon$, y sea $k \in \mathbb{R}$. Escribiremos

$$R(\varepsilon, x) = O(\varepsilon^k) \qquad (\varepsilon \to 0^+,\ x \in X_\varepsilon)$$

si existen $C \ge 0$ y $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ tales que

$$|R(\varepsilon, x)| \le C\varepsilon^k \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 \text{ y todo } x \in X_\varepsilon.$$

La constante C es independiente de ε y de x; puede depender de otros datos declarados fijos. Si el resto tiene dimensiones, se normaliza mediante una escala positiva explícita antes de aplicar esta notación.

El signo igual en $R = O(\varepsilon^k)$ es una convención de notación para una propiedad de cota; no identifica R con una función única llamada $O(\varepsilon^k)$. Tampoco proporciona el valor de C. Para una aplicación cuantitativa hay que recuperar una constante válida y el intervalo donde vale.

Por ejemplo, $R = \varepsilon^2 \sin x$ cumple la definición con $C = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En cambio, $R = \varepsilon^2 x$ admite $C = 2$ en $[0, 2]$, pero esa misma afirmación de orden no vale en $[0, 1/\varepsilon]$. La diferencia procede del dominio, no de una alteración formal de la expresión.

Proposición 6.9 — Operaciones con cotas de orden. Sobre dominios y datos fijos compatibles, si $R = O(\varepsilon^\alpha)$ y $S = O(\varepsilon^\beta)$, entonces $RS = O(\varepsilon^{\alpha+\beta})$. Si ambos tienen orden $O(\varepsilon^\alpha)$, entonces $R + S = O(\varepsilon^\alpha)$.

Demostración. Restrinjamos el parámetro al menor de los dos intervalos certificados. Las cotas $|R| \le C_R\varepsilon^\alpha$ y $|S| \le C_S\varepsilon^\beta$ dan $|RS| \le C_R C_S \varepsilon^{\alpha+\beta}$. Si los exponentes coinciden, la triangular da $|R + S| \le (C_R + C_S)\varepsilon^\alpha$. Las constantes conservan su independencia de las variables controladas. □

Dividir requiere una condición adicional sobre el denominador; proposición 6.9 no autoriza a invertir una cantidad que podría anularse. También se conserva el dominio común: combinar dos estimaciones no amplía automáticamente sus regiones de validez.

Orden cero y primeras correcciones. Definición 6.12 — Jerarquía finita en parámetro pequeño. Para una familia adimensional $f(\varepsilon, x)$, una aproximación hasta orden entero $N \ge 0$ es una expresión

$$P_N(\varepsilon, x) = \sum_{j=0}^{N} c_j(x)\varepsilon^j$$

acompañada de una cota del resto $f - P_N = O(\varepsilon^{N+1})$ en el dominio declarado. El término c_0 es el orden cero y $c_1\varepsilon$ la primera corrección. Cuando se afirma que las potencias forman una jerarquía uniforme de tamaños, se comprueba además que los coeficientes relevantes permanezcan acotados en ese dominio.

Esta definición es finita. No afirma la existencia de una serie infinita, su convergencia ni que añadir indefinidamente términos mejore cualquier aproximación. Si un coeficiente se anula, el primer cambio efectivo puede aparecer más tarde; en la distancia de §8 apareció una corrección cuadrática en la altura.

Proposición 6.10 — Jerarquía finita de una inversa. Para todo entero $N \geq 0$ y $\varepsilon \neq -1$,

$$\frac{1}{1+\varepsilon} = \sum_{j=0}^{N} (-\varepsilon)^j + \frac{(-\varepsilon)^{N+1}}{1+\varepsilon}.$$

En $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$, el resto tiene módulo no mayor que ε^{N+1}.

Demostración. Multiplicar la suma finita por $1+\varepsilon$ cancela sus términos interiores y deja $1-(-\varepsilon)^{N+1}$. Añadir el numerador del resto produce 1, y dividir por el denominador no nulo demuestra la identidad. En el intervalo indicado, $1+\varepsilon \geq 1$, por lo que el módulo del resto es $\varepsilon^{N+1}/(1+\varepsilon) \leq \varepsilon^{N+1}$. □

El orden cero es 1, la primera corrección es $-\varepsilon$ y la siguiente es ε^2. Cada truncación tiene una cota propia. En este ejemplo la identidad puede verificarse sin usar una serie infinita.

Principio 6.9 — Elegir el orden por su resto. Una truncación se justifica mediante el defecto que deja y la precisión requerida en su dominio. El nombre del orden no reemplaza la estimación de su constante ni la revisión de los coeficientes.

Ejercicios. Ejercicio 6.19. Demuestra que $R(\varepsilon, x) = \varepsilon^2 x$ es $O(\varepsilon^2)$ uniformemente en $[0, 2]$. Demuestra que esa afirmación falla en $[0, 1/\varepsilon]$, $0 < \varepsilon \leq 1$, y determina una cota de orden que sí vale en este último dominio.

Solución. En el primer dominio, $|R| \leq 2\varepsilon^2$; sirven $C = 2$ y cualquier umbral positivo dentro del intervalo permitido. Si en el segundo hubiera una constante para la cota cuadrática, evaluar en $x = 1/\varepsilon$ exigiría $\varepsilon \leq C\varepsilon^2$, es decir, $1/\varepsilon \leq C$ para todos los parámetros suficientemente pequeños. Ninguna constante finita cumple esa condición. Allí sí se tiene $|R| \leq \varepsilon$, por lo que el resto es $O(\varepsilon)$ uniformemente. El orden cambia cuando se exige una garantía sobre un dominio distinto.

Ejercicio 6.20. Para $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$, elige un orden suficiente de la suma de la proposición 6.10 para aproximar $1/(1+\varepsilon)$ con error absoluto no mayor que 0.001. Indica cuántos términos conservarás y qué parte de la respuesta es una garantía uniforme.

Solución. proposición 6.10 proporciona $|R_N| \leq (1/2)^{N+1}$. Para $N = 8$ esa cota es $1/512 > 0.001$; para $N = 9$ es $1/1024 < 0.001$. Por tanto, basta conservar los diez términos desde $j = 0$ hasta $j = 9$. La garantía vale simultáneamente para todo el intervalo, no sólo para el extremo. Se ha seleccionado un orden suficiente mediante una cota; no es necesario resolver un problema general de truncación óptima para justificarlo.

Referencia: Hinch, *Perturbation Methods* (1991), cap. 2, §§2.1–2.2, pp. 19–26.

10. Límite regular y señal elemental de singularidad

Poner un parámetro igual a cero puede simplificar una relación y conservar una respuesta relevante. También puede borrar una rama de soluciones o perder el control sobre una región del dominio. Ambas posibilidades pueden detectarse mediante álgebra y límites de una variable, sin desarrollar una teoría de perturbaciones singulares.

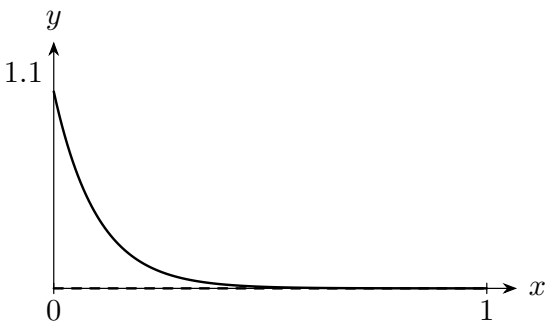


Figura 6.5. La familia $y_\varepsilon = e^{-x/\varepsilon}$ converge a cero para cada $x > 0$ y conserva $y_\varepsilon(0) = 1$. La gráfica usa $\varepsilon = 0{,}1$: la aproximación exterior $y = 0$ no es uniforme en $[0, 1]$. Véase §10.

El diagnóstico debe relacionarse con la pregunta. Conservar una rama positiva cerca de un valor finito no exige preservar todas las raíces reales de la ecuación. Una aproximación uniforme en un intervalo alejado de cero tampoco necesita ser uniforme en un intervalo que lo incluye. Declarar la rama y el dominio evita convertir un éxito local en una conclusión sobre todo el modelo.

Compatibilidad respecto a la información requerida. Definición 6.13 — Diagnóstico de compatibilidad del límite. Para una familia con parámetro $\varepsilon > 0$, una rama seleccionada y un dominio declarado, llamaremos compatible al reemplazo por $\varepsilon = 0$ respecto a una pregunta si conserva las respuestas requeridas y admite el control de aproximación exigido en ese dominio. Una pérdida de ramas relevantes, un cambio de dominio o el fallo de una garantía uniforme es una señal de incompatibilidad que obliga a revisar la reducción. Es un criterio de trabajo para los ejemplos elementales del capítulo, no una definición general de perturbación regular o singular.

La cláusula «respecto a una pregunta» es necesaria. Una ecuación reducida puede responder bien una pregunta concreta y perder otra información. El diagnóstico debe decir cuál de ellas interesa.

Una ecuación que pierde una raíz. Consideremos

$$\varepsilon y^2 + y - 1 = 0, \qquad \varepsilon > 0,$$

sin restringir inicialmente y a valores positivos. Sus raíces son

$$y_+(\varepsilon) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \qquad y_-(\varepsilon) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

La primera expresión tiene numerador y denominador tendiendo a cero. Racionalizarla da $y_+ = 2/(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})$, y entonces $y_+ \to 1$. La segunda satisface $\varepsilon y_- = -(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})/2 \to -1$, por lo que diverge hacia $-\infty$.

Al poner $\varepsilon = 0$, la ecuación se convierte en $y - 1 = 0$ y conserva la raíz finita 1. Si la pregunta seleccionaba la rama positiva, la reducción conserva su límite. Si pedía representar ambas ramas reales, la reducción pierde una de ellas. El coeficiente pequeño acompañaba un término que crece sobre esa segunda rama: εy^2 no puede omitirse allí sólo porque ε tienda a cero.

Una función cuyo límite no controla todo el intervalo. Para $\varepsilon > 0$ y $x \in [0, 1]$, sea $f_\varepsilon(x) = x/(x + \varepsilon)$. Su límite en cada punto fijo es

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Aunque ese límite existe punto por punto, el defecto respecto a g no disminuye uniformemente. Para $x > 0$ su módulo es $\varepsilon/(x+\varepsilon)$, que puede acercarse tanto como se quiera a 1 escogiendo x positivo suficientemente próximo a cero. En $x = 0$ el defecto es cero. El supremo de los defectos en $[0, 1]$ es 1, aunque no se alcance.

Si se restringe a $[\delta, 1]$ con $0 < \delta \leq 1$ fijo, se obtiene en cambio $|f_\varepsilon - g| \leq \varepsilon/(\delta+\varepsilon) \to 0$. El límite puntual era correcto; la extrapolación de su control a todo el intervalo era la inferencia inválida.

Principio 6.10 — Revisar estructura y dominio antes de sustituir por cero. Se comprueba qué ramas se siguen, qué variables pueden variar junto con el parámetro y qué regiones quedan cubiertas por la estimación. Si el reemplazo borra información requerida, se conserva la relación completa o se reformula una reducción con hipótesis nuevas explícitas.

No desarrollaremos métodos para reparar todos los límites incompatibles. La competencia que se busca aquí es diagnosticar cuándo el reemplazo necesita una revisión y evitar presentar la ecuación más corta como descripción universal.

Ejercicios. Ejercicio 6.21. Sigue ambas raíces reales de $\varepsilon y^2 + y - 1 = 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Demuestra que la raíz positiva se aproxima a 1 con error absoluto no mayor que ε. Explica en qué pregunta es útil la ecuación reducida y en cuál pierde información.

Solución. Las fórmulas y la racionalización anteriores dan $y_+ \to 1$ y $y_- \to -\infty$. Además, la raíz positiva satisface $0 < y_+ < 1$, por su expresión racionalizada. La ecuación exacta da $1 - y_+ = \varepsilon y_+^2 \leq \varepsilon$. Así, el límite de la rama positiva tiene una cota cuantitativa. La ecuación reducida $y = 1$ sirve para esa rama bajo el criterio absoluto indicado; no describe las dos raíces reales ni el crecimiento de la negativa. La distinción pertenece al contenido de la pregunta, no a la validez de la fórmula cuadrática.

Ejercicio 6.22. Para $f_\varepsilon(x) = x/(x+\varepsilon)$ en $[0, 1]$, determina el límite puntual y demuestra que el supremo del defecto respecto a ese límite es 1 para cada $\varepsilon > 0$. Obtén después un umbral suficiente para defecto no mayor que $0 < \tau < 1$ en $[\delta, 1]$, con $0 < \delta \leq 1$ fijo.

Solución. En cero, todos los valores son cero; en cada punto positivo, dividir numerador y denominador por x muestra el límite 1. Para $x > 0$, el defecto es $\varepsilon/(x+\varepsilon) < 1$, y al tomar $x \to 0^+$ se acerca a 1; por tanto su supremo es 1. No es un máximo, porque en cero el defecto vale cero. En el intervalo alejado de cero, la cota es $\varepsilon/(\delta+\varepsilon)$. Exigirla menor o igual que τ equivale a $\varepsilon \leq \tau\delta/(1-\tau)$. Esa condición certifica el intervalo completo. Si δ varía con ε, debe revisarse la razón y no tratarlo como dato fijo.

Referencia: Hinch, *Perturbation Methods* (1991), cap. 1, §1.2, pp. 4–7.

11. Coherencia a posteriori de los términos despreciados

Una reducción puede estar bien resuelta y mal aplicada. En §5, omitir el término cuadrático de $y + \varepsilon y^2 = a$ produjo $y = a$ sin error algebraico en la ecuación reducida. La cuestión pendiente era si esa respuesta hacía pequeña la contribución que se había eliminado. Al insertar el candidato, la condición se convirtió en $\eta = \varepsilon a$ pequeño.

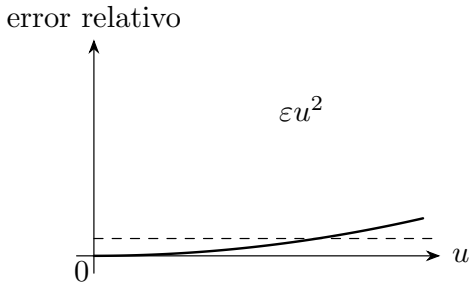


Figura 6.6. Un residuo modelo εu^2 debe compararse con una tolerancia declarada a lo largo de la solución. Aquí $\varepsilon = 0{,}03$ y la línea discontinua vale 0,2; el umbral se alcanza en $u = \sqrt{20/3}$. Véase §11.

La comprobación es a posteriori porque utiliza la respuesta obtenida. No debe confundirse con elegir después una hipótesis que encubra el fallo: la comparación que se comprobará se declara antes de resolver. La respuesta puede confirmar la hipótesis, delimitarla o rechazarla.

Una obligación que acompaña al candidato. Definición 6.14 — Autoconsistencia de una reducción. Una reducción es autoconsistente en un régimen si sus candidatos pertenecen al dominio del modelo y satisfacen, al sustituirlos, las condiciones de tamaño y las demás hipótesis utilizadas para construirla. Si se afirma además una precisión de la observable, se añade una estimación de error cuyas hipótesis también se verifican. Cumplir las condiciones de tamaño y demostrar una tolerancia son obligaciones relacionadas pero distintas.

Por ejemplo, insertar $y = a$ y encontrar $\varepsilon a \le 0.01$ verifica una razón de omisión. Para afirmar un error relativo no mayor que 0.01, hay que justificar que esa razón domina el error pertinente. En esta ecuación existe un argumento especialmente simple a partir de la relación exacta.

Una garantía sin conocer la fórmula de la raíz. Proposición 6.11 — Control del candidato lineal. Para $a > 0$ y $\varepsilon \ge 0$, la relación $y + \varepsilon y^2 = a$ tiene una única raíz positiva y_*, satisface $0 < y_* \le a$, y el candidato $y_{\mathrm{L}} = a$ cumple

$$\frac{a - y_*}{y_*} = \varepsilon y_* \le \varepsilon a.$$

Demostración. Si $\varepsilon = 0$, la raíz es a y la afirmación es inmediata. Si $\varepsilon > 0$, la existencia y unicidad siguen de la continuidad y el crecimiento estricto de $F(y) = y + \varepsilon y^2 - a$ en $[0, a]$, como en §5. La ecuación da $a - y_* = \varepsilon y_*^2 \ge 0$, lo que prueba $y_* \le a$. Dividir esa identidad por la raíz positiva produce el cociente del enunciado y después se usa $y_* \le a$. □

La relación exacta convierte la razón η calculada sobre el candidato en una garantía del error relativo respecto a la raíz verdadera. Para $\eta \le \tau$ queda certificado un error relativo no mayor que τ. No se ha sustituido la raíz desconocida por el candidato dentro de una igualdad; se ha obtenido primero una cota sobre la raíz y se la ha usado en una desigualdad.

El residuo normalizado del candidato también vale η, pero esa coincidencia está justificada aquí por la proposición 6.11. En otra relación, el mismo valor de residuo puede tener consecuencias distintas sobre la observable, como mostró ejercicio 6.12.

Principio 6.11 — Comprobar todas las hipótesis utilizadas. La validación revisa pertenencia al dominio, signos, denominadores y razones de omisión sobre el candidato. Las afirmaciones de precisión se respaldan con cotas que conecten el candidato con la solución del modelo completo. Una comprobación numérica favorable en un dato no demuestra validez en todo un régimen.

La información que deja un rechazo. Si el balance cuadrático da $y_{\mathrm{C}} = \sqrt{a/\varepsilon}$, su hipótesis de omisión exige que $1/\sqrt{\varepsilon a}$ sea pequeño. Cuando ese cociente resulta grande, el candidato sigue resolviendo la ecuación reducida, pero no satisface la justificación que llevó a ella. El rechazo identifica qué término sigue siendo relevante y ayuda a seleccionar otro modelo.

La autoconsistencia no evalúa toda la adecuación física del modelo original. Una respuesta puede ser autoconsistente en $y + \varepsilon y^2 = a$ y no representar la respuesta de un sistema real si la relación adoptada omite efectos importantes. Ese control pertenece a la comparación entre modelo y fenómeno.

Ejercicios. Ejercicio 6.23. Para $y + 0.01y^2 = 2$, certifica el candidato $y_{\mathrm{L}} = 2$ con tolerancia relativa $2\,\%$ respecto a la raíz exacta. Indica qué magnitudes y condiciones utilizas y si has demostrado que el error sea exactamente $2\,\%$.

Solución. El modelo cumple las hipótesis de la proposición 6.11 con $\varepsilon = 0.01$ y $a = 2$. La raíz es positiva y menor que 2. La razón de omisión sobre el candidato es $\eta = \varepsilon a = 0.02$. Proposición 6.11 garantiza $(2 - y_*)/y_* \le 0.02$, por lo que el candidato cumple la tolerancia del $2\,\%$. No se afirma igualdad: el error exacto es εy_*, estrictamente menor que 0.02 porque $\varepsilon > 0$ y $y_* < 2$. La garantía no requirió calcular la raíz mediante radicales.

Ejercicio 6.24. Para $y + 0.01y^2 = 1$, se propone el candidato cuadrático 10. Verifica su ecuación reducida, calcula la razón del término eliminado y decide si es autoconsistente. Usa una cota sobre la raíz exacta para demostrar que su error relativo supera 9.

Solución. El candidato satisface $0.01(10)^2 = 1$. En la relación completa, el término lineal omitido vale 10 y el cuadrático conservado vale 1, por lo que su razón es 10, incompatible con la pequeñez requerida. Proposición 6.11 da $0 < y_* < 1$. Como $10 > y_*$, el error relativo es $(10 - y_*)/y_* = 10/y_* - 1 > 9$. Resolver una ecuación reducida no valida haber despreciado el término que domina sobre su propia respuesta.

Referencias: Hinch, *Perturbation Methods* (1991), cap. 1, §§1.1–1.2, pp. 1–7, y capítulo 3, §12.

12. Regímenes múltiples, cruces y ruptura de aproximaciones

Los dos candidatos de §5 responden a zonas distintas de la entrada normalizada. Para $\eta = \varepsilon a$ pequeño, $y = a$ conserva el término lineal y tiene el control relativo de la proposición 6.11. Para η grande, el candidato $\sqrt{a/\varepsilon}$ conserva la contribución cuadrática. Entre esos regímenes puede haber una zona donde ninguno de los dos modelos cortos alcance la tolerancia pedida.

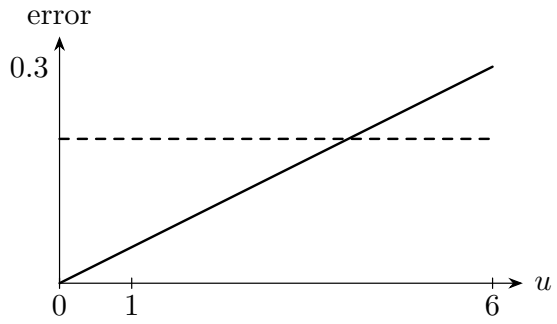


Figura 6.7. Si el error normalizado crece como εu, con $\varepsilon = 0{,}05$, alcanza la tolerancia 0,2 en $u = 4$. Un parámetro pequeño no garantiza precisión para tiempos arbitrarios. Véase §12.

El cruce no se fija por una cifra universal de ε. La razón que decide es η, y el criterio de precisión puede delimitar regiones más estrechas que la comparación cualitativa. Saber que dos términos son comparables no equivale a saber que una de las reducciones tenga un error de diez por ciento.

Criterio de cruce y dominio certificado. Definición 6.15 — Cruce de regímenes y dominio de validez. Un criterio de cruce identifica los datos para los que las contribuciones que compiten alcanzan tamaños comparables. El dominio certificado de una aproximación es el conjunto de datos donde una estimación demostrada garantiza la tolerancia elegida y se cumplen sus hipótesis. Salir de un dominio certificado indica que la garantía ya no está disponible; por sí solo no demuestra que la aproximación haya fallado efectivamente.

La última distinción importa cuando la cota es conservadora. Una aproximación puede seguir siendo útil fuera de la región suficiente obtenida por una prueba. Para ampliar esa región hace falta una estimación mejor o una comparación válida con la solución completa.

Control de los dos modelos reducidos. Proposición 6.12 — Cotas de los candidatos lineal y cuadrático. Sean $a, \varepsilon > 0$ y y_* la raíz positiva de $y + \varepsilon y^2 = a$. Pongamos $\eta = \varepsilon a$, $y_{\mathrm{L}} = a$, $y_{\mathrm{C}} = \sqrt{a/\varepsilon}$, $\delta = 1/\sqrt{\eta}$ y $z = y_*/y_{\mathrm{C}}$. Entonces $0 < z < 1$ y

$$\frac{|y_{\mathrm{L}} - y_*|}{y_*} \le \eta, \qquad \frac{|y_{\mathrm{C}} - y_*|}{y_*} = \frac{\delta}{1+z} \le \delta.$$

Si además $\delta < 1$, el error del candidato cuadrático admite también la cota suficiente $\delta/(1-\delta)$.

Demostración. La cota lineal es proposición 6.11. Dividir la ecuación exacta por a e insertar $y_* = y_{\mathrm{C}} z$ da $z^2 + \delta z = 1$. Puesto que $z > 0$ y $\delta > 0$, se tiene $z^2 < 1$, luego $z < 1$. Factorizar $1 - z^2 = \delta z$ da $(1-z)(1+z) = \delta z$, y por ello

$$\frac{y_{\mathrm{C}} - y_*}{y_*} = \frac{1-z}{z} = \frac{\delta}{1+z} \le \delta.$$

La misma identidad implica $1 - z = \delta z/(1+z) \le \delta$, de donde $z \ge 1 - \delta$. Si $\delta < 1$, dividir la cota $1 - z \le \delta$ por esta cota inferior positiva de z da $(1-z)/z \le \delta/(1-\delta)$. □

La primera cota cuadrática es más fuerte que la última. Se conserva la última porque muestra una estrategia general: obtener por separado una cota del defecto y una cota inferior del denominador. Es la misma arquitectura de la proposición 6.8. Sus dominios suficientes no son necesariamente óptimos.

Para una tolerancia relativa $\tau > 0$, proposición 6.12 certifica el candidato lineal si $\eta \le \tau$ y el cuadrático si $\eta \ge 1/\tau^2$. Si se utiliza la cota más conservadora, basta exigir $\eta \ge ((1+\tau)/\tau)^2$. En ambos casos el umbral procede de una desigualdad demostrada.

La zona intermedia. Cuando $\eta = 1$, la forma escalada $z = y_*/a$ satisface $z + z^2 = 1$, por lo que $z = (\sqrt{5}-1)/2$. Ambos candidatos coinciden con a, y su error relativo es $(1-z)/z = (\sqrt{5}-1)/2$, aproximadamente 0.618. Una tolerancia del diez por ciento no se cumple. Aquí el diagnóstico de términos comparables se acompaña de un fallo efectivo de ambas reducciones.

Para otros datos, una región excluida por una cota suficiente puede contener puntos donde el error sí sea aceptable. Por eso un mapa de regímenes debe separar las regiones certificadas de las rechazadas mediante un cálculo efectivo, y dejar sin dictamen los datos para los que aún no tiene control.

Principio 6.12 — No inventar solapamientos. Dos modelos reducidos pueden cubrir extremos distintos sin compartir un dominio certificado. Si dejan una región sin garantía, se conserva

el modelo completo o se demuestra una aproximación adicional. El mapa de lectura de regímenes no debe rellenarse mediante una interpolación cuya precisión no se haya controlado.

Ejercicios. Ejercicio 6.25. Para error relativo máximo $\tau > 0$, demuestra que las condiciones $\eta \leq \tau$ y $\eta \geq ((1+\tau)/\tau)^2$ certifican respectivamente los candidatos lineal y cuadrático. En el segundo caso usa la cota conservadora de la proposición 6.12. Compara con el criterio suficiente que proporciona su cota más fuerte.

Solución. La primera condición se inserta directamente en la cota lineal. Para el candidato cuadrático, exigir $\delta/(1-\delta) \leq \tau$ con $0 < \delta < 1$ equivale a $\delta \leq \tau/(1+\tau)$, que implica $\delta < 1$ y se traduce en $\eta \geq ((1+\tau)/\tau)^2$. La cota más fuerte, error no mayor que δ, sólo exige $\delta \leq \tau$, o $\eta \geq 1/\tau^2$. Así, dos pruebas correctas producen regiones suficientes diferentes. La mejora del umbral responde a información adicional de la identidad exacta, no a un cambio del modelo.

Ejercicio 6.26. Para $\tau = 0.1$, compara los dominios certificados por la receta conservadora del ejercicio 6.25. Determina si se solapan y qué puede concluirse de la región que queda fuera de ambos. Repite la comparación usando la cota más fuerte y da un dato donde ambos candidatos fallen efectivamente.

Solución. La receta conservadora da $\eta \leq 0.1$ para el candidato lineal y $\eta \geq 121$ para el cuadrático. No hay solapamiento; $0.1 < \eta < 121$ queda fuera de esas garantías. La cota más fuerte amplía el dominio cuadrático a $\eta \geq 100$, pero todavía deja un intervalo sin garantía entre 0.1 y 100. Ninguno de los intervalos excluidos constituye por sí solo una región completa de fallo. Para $\eta = 1$, el cálculo desarrollado antes del ejercicio da error relativo aproximadamente 0.618 para ambos candidatos, superior a 0.1: ese punto sí está rechazado por comparación efectiva. La ausencia de garantía y el error demostrado se registran como conclusiones distintas.

Referencias internas: capítulo 2, §9 y sus escalas normalizadas; controles propios proposiciones 6.11–6.12. No se introduce una teoría de empalme de aproximaciones.

13. Jerarquías de modelos y descripción efectiva

Una distancia puede describirse mediante $\sqrt{L^2+h^2}$, mediante $L+h^2/(2L)$ o mediante L. Las tres expresiones conservan información diferente sobre el mismo modelo geométrico. Para la distancia total y una tolerancia moderada puede bastar la última. Para estudiar el pequeño aumento causado por la altura, esa expresión elimina precisamente el efecto que interesa y conviene conservar la corrección cuadrática.

La palabra «completo» es relativa al modelo de partida. La fórmula de Pitágoras es exacta para los extremos en geometría euclídea; no describe por sí sola la forma de una cuerda curvada ni las deformaciones de un instrumento. Dentro de ese modelo podemos controlar las reducciones matemáticas. La relación entre el modelo y una situación real necesita además hipótesis y observación.

Comparar descripciones mediante una observable común. Definición 6.16 — Jerarquía de modelos relativa a una pregunta. Una jerarquía de modelos es una familia ordenada de descripciones que conservan distintos niveles de información sobre una observable común, con reglas explícitas para compararlas y dominios de validez declarados. El modelo de partida contiene la información considerada completa para esa construcción; un modelo reducido omite contribuciones bajo hipótesis; un modelo límite describe la información que se conserva al llevar un parámetro al valor límite elegido. El orden se juzga respecto a la pregunta y a la precisión requerida, no sólo por la longitud de las fórmulas.

Para comparar modelos con variables diferentes, primero se recupera la misma observable en las mismas unidades. El valor normalizado y y la cantidad física $q = Sy$ no son dos predicciones que puedan restarse sin conversión. También debe existir un dominio común donde las dos descripciones y sus estimaciones estén definidas.

El modelo límite no equivale a una aproximación válida en todo el dominio. §10 mostró una raíz que desaparece y una garantía uniforme que se pierde. Si el límite conserva sólo una rama, esa elección forma parte de su descripción.

Principio 6.13 — Conservar la información requerida. La selección de un modelo se hace por la observable, la escala y la precisión de la pregunta. Se registra qué contribución se elimina y qué preguntas dejan de poder responderse con esa eliminación.

En geometría, $d_0 = L$ conserva la escala principal de la distancia, mientras que $d_1 = L + h^2/(2L)$ conserva además su primer incremento no nulo alrededor de $h = 0$. No hace falta introducir otra dimensión espacial como variable de diferenciación: L se mantiene fijo y la expansión depende de una sola variable o de su parámetro normalizado.

Presupuesto de error entre descripciones. Proposición 6.13 — Error acumulado entre modelos sobre una observable común. Sean $q_{\mathrm{A}}, q_{\mathrm{B}}, q_{\mathrm{C}}$ predicciones escalares del mismo tipo en un dominio común y sea $S > 0$ una escala declarada. Para $\alpha, \beta \geq 0$, si $|q_{\mathrm{A}} - q_{\mathrm{B}}| \leq \alpha S$ y $|q_{\mathrm{B}} - q_{\mathrm{C}}| \leq \beta S$, entonces $|q_{\mathrm{A}} - q_{\mathrm{C}}| \leq (\alpha + \beta)S$. La conclusión sólo compara esos tres objetos; alcanza al fenómeno físico únicamente si una de las cotas relaciona justificadamente el fenómeno con el modelo.

Demostración. Aplicar proposición 6.1 a las tres predicciones produce la desigualdad. La última afirmación precisa sus hipótesis: si los tres objetos son predicciones de modelos, el fenómeno no aparece en las premisas y ninguna cota sobre su diferencia puede deducirse de ellas. □

Proposición 6.13 aplica un resultado conocido para hacer explícita una nueva obligación de modelización. Una reducción con error certificado de $0.01S$ puede aproximar bien al modelo de partida y aun así heredar una discrepancia mayor de ese modelo respecto a la realidad. Tampoco corresponde sumar automáticamente una incertidumbre estándar experimental a una cota determinista y dar al total una interpretación probabilística: capítulo 3 exige declarar cómo se caracteriza cada componente.

El presupuesto permite distribuir precisión cuando las contribuciones sí son cotas sobre una observable común. Si se admite una pérdida total de $0.05S$ y una parte consume $0.02S$, queda un margen de $0.03S$ para una reducción adicional. Se trata de una condición suficiente mediante la desigualdad triangular, no de una afirmación de que los defectos se sumen siempre con el mismo signo.

Ejercicio.

Ejercicio 6.27. Una cantidad objetivo q_{obj}, la predicción del modelo q_{M} y una reducción q_{R} comparten un dominio y una escala $S > 0$. Se han justificado las cotas $|q_{\mathrm{obj}} - q_{\mathrm{M}}| \leq 0.02S$ y $|q_{\mathrm{M}} - q_{\mathrm{R}}| \leq 0.03S$. Determina la garantía total. Indica qué puede afirmarse si la primera cota no se conoce y si $0.02S$ representa únicamente una incertidumbre estándar de medición.

Solución. Con las dos cotas deterministas, proposición 6.13 da $|q_{\mathrm{obj}} - q_{\mathrm{R}}| \leq 0.05S$. Los modelos y el objetivo comparten dominio, escala y observable; sin esa correspondencia no sería legítimo sumar los defectos. Si falta la primera cota, sólo permanece la garantía de reducción $|q_{\mathrm{M}} - q_{\mathrm{R}}| \leq 0.03S$: no se obtiene una cota total respecto al objetivo. Si $0.02S$ es una incertidumbre estándar, no se ha dado la hipótesis determinista que requiere proposición 6.13. Habría que especificar el modelo de

medición y la interpretación estadística apropiada antes de formular una afirmación probabilística; el número por sí solo no garantiza que toda discrepancia física sea menor que $0.02S$.

Referencias internas utilizadas: capítulo 3, §14 y capítulo 1, §11. El presupuesto y la jerarquía son construcciones propias sobre los controles del capítulo.

14. Protocolo de aproximación controlada

Una aproximación queda defendida cuando otra persona puede recuperar la pregunta, comprobar la reducción y reconocer sus límites sin adivinar las condiciones omitidas. Una fórmula breve puede ser el resultado de ese trabajo, pero no lo sustituye. Los ejemplos del capítulo permiten reunir las obligaciones en una ficha que sirve tanto para construir una aproximación como para auditar una ya propuesta.

La ficha y sus obligaciones. Definición 6.17 — Ficha de aproximación controlada. Una ficha de aproximación registra el modelo de partida y su estatuto, la observable buscada, los dominios y datos, las escalas y variables normalizadas, el parámetro o las razones de control, la reducción propuesta, la medida de error y su cota, las comprobaciones de autoconsistencia y el dominio certificado resultante. Si alguna obligación no está resuelta, la ficha lo señala y restringe la conclusión a lo que sí se ha demostrado.

El registro no exige repetir toda una derivación cada vez que se usa una fórmula. Exige que las hipótesis y la evidencia sean recuperables. Para una reducción ya demostrada puede bastar citar su resultado y comprobar que los datos actuales pertenecen al régimen permitido.

El trabajo sigue una secuencia que también permite localizar dónde se produjo un fallo:

1. **Identificar la pregunta.** Se distingue el valor total de un incremento, una raíz de todas las ramas y una observable física de una variable normalizada.
2. **Fijar el modelo y el dominio.** Se declaran sus hipótesis y restricciones; se comprueba que las expresiones estén definidas.
3. **Elegir escalas y parámetros.** Se usan las herramientas del capítulo 2 para expresar tamaños relativos y se registra qué queda fijo.
4. **Proponer la reducción.** Se comparan términos completos o se identifica el punto base y la variable de una expansión univariada.
5. **Obtener el candidato.** Se resuelve la relación reducida o se construye la expresión aproximada, conservando signos y dominios.
6. **Controlar el defecto.** Se estima el error de la observable; si se usa residuo, se justifica la conexión mediante sensibilidad.
7. **Validar el régimen.** Se insertan candidatos en las razones de omisión y se traduce la tolerancia en condiciones sobre los datos.

Cada paso hace una pregunta distinta. Comparar bien los términos no resuelve la ecuación; resolverla no demuestra la legitimidad de la omisión; una cota local no certifica un intervalo más amplio.

Principio 6.14 — Concluir con la evidencia disponible. El informe final declara la aproximación, el criterio y el dominio donde está certificada. Diferencia una garantía suficiente, un error efectivo calculado y una región todavía sin dictamen. Si la aproximación no supera su validación, se conserva el modelo completo o se prueba otra reducción.

La cinemática en una dimensión del capítulo 7 podrá utilizar esta ficha para elegir un intervalo temporal, un estado de referencia y una precisión de posición. El método queda disponible antes

de adoptar modelos particulares de movimiento: declarar una aproximación local de una curva no exige todavía masa, fuerzas ni leyes de Newton.

Problemas de síntesis. Ejercicio 6.28. En el modelo geométrico $d = \sqrt{L^2 + h^2}$, $L > 0$, se requiere aproximar la distancia para todo $|h| \le L/5$ con error absoluto no mayor que $0.001L$. Compara los candidatos $d_0 = L$ y $d_1 = L + h^2/(2L)$. Construye una ficha de aproximación para uno que cumpla la tolerancia, justificando el resto sin presuponer una serie infinita.

Solución. La observable es la distancia total y el criterio es el error dividido por L. Con $u = h/L$ y $x = u^2$, el dominio es $|u| \le 1/5$ y $0 \le x \le 1/25$. La cota de §1 para el candidato constante es $|d - d_0|/L \le u^2/2 \le 0.02$, que no certifica la tolerancia. Además, en $|u| = 1/5$ el error efectivo es $\sqrt{1.04} - 1$. Es mayor que 0.001 porque $1.04 > (1.001)^2$, de modo que ese candidato falla en el dominio pedido.

Para la corrección, racionalizar la diferencia da la identidad

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} = -\frac{x^2}{2(\sqrt{1+x}+1)^2}.$$

En $x \ge 0$ el denominador es al menos 8, así que $|d - d_1|/L \le u^4/8$. En el dominio pedido, la cota es $(1/5)^4/8 = 0.0002 < 0.001$. La ficha registra el modelo euclídeo, L fijo, observable distancia, escala L, parámetro u, dominio $|u| \le 1/5$, candidato d_1 y la cota uniforme $0.0002L$. El candidato constante elimina el incremento cuadrático; la corrección lo conserva. La conclusión certifica una reducción del modelo geométrico y no una longitud de cuerda deformada.

Ejercicio 6.29. Una relación de modelo es $q + q^2/Q = b$, con $Q, b > 0$ y $q \ge 0$. Para $b/Q = 10^{-3}$ y para $b/Q = 10^3$, construye en cada caso una aproximación sencilla y certifícala con error relativo no mayor que 5 % respecto a la raíz positiva. Presenta el parámetro que controla cada decisión y recupera las unidades de la respuesta.

Solución. Escalar con b da $z = q/b$ y $\eta = b/Q$, de modo que $z + \eta z^2 = 1$. Para $\eta = 10^{-3}$, se propone omitir el término cuadrático y utilizar $z_{\mathrm{L}} = 1$, es decir, $q_{\mathrm{L}} = b$. La razón de omisión sobre el candidato es $\eta = 0.001$. Proposición 6.11, aplicada con entrada normalizada $a = 1$ y coeficiente $\varepsilon = \eta$, garantiza error relativo no mayor que 0.001, inferior a 0.05.

Para $\eta = 10^3$, se conserva el balance cuadrático, con $z_{\mathrm{C}} = 1/\sqrt{\eta}$ y $q_{\mathrm{C}} = b/\sqrt{b/Q} = \sqrt{bQ}$. La razón del término lineal omitido al cuadrático conservado es $1/\sqrt{\eta} \approx 0.03162$. Proposición 6.12 convierte esa razón en una cota de error relativo no mayor que $1/\sqrt{1000} < 0.03163 < 0.05$. La cifra 0.03163 se redondea hacia arriba para conservar la cota. La raíz positiva existe y es única por el argumento de §5. Tanto b como $\sqrt{bQ}$ tienen el tipo de q. Las dos fichas corresponden a regímenes diferentes de la misma relación; la condición no se decide por el valor aislado de una magnitud con unidades.

Ejercicio 6.30. Audita el siguiente informe, cuyas cuatro afirmaciones son deliberadamente defectuosas:

- «Como $\varepsilon = 10^{-4}$, la corrección εx es menor que 0.01 en todo $0 \le x \le 1/\varepsilon$».
- «El candidato $y = 1$ para $F(y) = 10^{-9}y = 0$ tiene residuo 10^{-9}; por ello su error respecto a una raíz es menor que 10^{-6}».
- «Si el valor exacto es cero y la aproximación vale 10^{-6}, su error relativo al valor exacto es cero».
- «$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ queda certificada en todo $x > -1$ porque proviene de Taylor».

Localiza los fallos, repara cada conclusión y redacta una ficha verificable para una de las reparaciones.

Solución. La primera afirmación falla en $x = 1/\varepsilon = 10^4$, donde la corrección vale 1. Para garantizar $\varepsilon x \le 0.01$ con ese parámetro basta restringir $0 \le x \le 100$; para un dominio fijo $[0, X]$ la condición general es $\varepsilon X \le 0.01$. La reparación cambia el dominio y explicita la comparación.

La segunda confunde residuo con error. La única raíz es cero y el candidato tiene error 1. La pendiente mínima es $m = 10^{-9}$, por lo que proposición 6.5 da una cota de $10^{-9}/10^{-9} = 1$, no 10^{-6}. Una reparación que alcance la tolerancia solicitada sería exigir $|\tilde{y}| \le 10^{-6}$; entonces el error respecto a la raíz sí queda certificado. La cifra del residuo necesita interpretarse junto con la pendiente.

La tercera pide un cociente con denominador cero, de modo que el error relativo está indefinido. El error absoluto vale 10^{-6}. Con una escala positiva S declarada, puede informarse el error referido a escala $10^{-6}/S$, conservando el tipo de las cantidades; si son números adimensionales y $S = 1$, ese error escalado vale 10^{-6}.

La cuarta no declara un radio ni controla el resto. Ejercicio 6.16 certifica, por ejemplo, el error absoluto 0.001 para $|x| \le \rho$, donde $\rho = \sqrt{2\sqrt{2}(0.001)} \approx 0.05318$. Una ficha para esta reparación contiene el modelo funcional $f(x) = \sqrt{1+x}$ con $x > -1$, punto base cero, variable de entrada adimensional, escala de salida 1, candidato $1 + x/2$, intervalo auxiliar $|x| \le 1/2$, cota del resto $(\sqrt{2}/4)x^2$ y dominio final $|x| \le \rho$. La cota procede de la segunda derivada en el intervalo auxiliar y garantiza la tolerancia para todos los puntos del dominio final. No se extiende al dominio completo de la raíz cuadrada.

Una fórmula aproximada expresa una decisión sobre qué información conservar. El cálculo de este capítulo permite defender esa decisión con condiciones y cotas, y reconocer los datos para los que todavía no se dispone de una defensa.

Bibliografía citada

Canon interno citado.

- *Física para matemáticos*, Tomo I, capítulo 1, «Teorías físicas: fenómenos, modelos y leyes». capítulo 1. Localizador utilizado: §11, «Dominio de validez y teorías efectivas», citado en §13.
- *Física para matemáticos*, Tomo I, capítulo 2, «Magnitudes, unidades y análisis dimensional». capítulo 2. Localizadores utilizados: §§9–10, citados en §§2, 4 y 12.
- *Física para matemáticos*, Tomo I, capítulo 3, «Medición, incertidumbre, estimación y órdenes de magnitud». capítulo 3. Localizadores utilizados: §§10, 12 y 14, citados en §§1, 4, 6, 11 y 13.

Obras externas citadas.

- Hinch, E. J. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991. Localizadores utilizados: cap. 1, §§1.1–1.2, pp. 1–7, citado en §§3, 5, 10 y 11; cap. 2, §§2.1–2.2, pp. 19–26, citado en §9.
- Riley, K. F.; Hobson, M. P.; Bence, S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. 3.ª ed. Cambridge University Press, 2006. Localizador utilizado: §4.6, «Taylor series», pp. 136–140, citado en §§7–8.

Capítulo 7

Cinemática en una dimensión

Prerrequisitos y propósito

Se utilizan derivadas e integrales de una variable de M3 y la representación geométrica de M2 disponible en el capítulo 5. El capítulo 5 aporta posición, velocidad, aceleración y longitud; capítulo 6, las cotas para controlar aproximaciones. El capítulo estudia historias sobre una recta fija, reconstrucciones con datos iniciales, eventos e identificación a partir de posiciones. Las aceleraciones se prescriben como datos cinemáticos; su explicación dinámica se estudiará después.

1. Una recta orientada y una historia temporal

Un móvil se desplaza a lo largo de un riel recto. Para describirlo podemos registrar una sucesión de posiciones, pero una lista de números sólo adquiere significado después de fijar dónde está el origen, qué sentido se considera positivo y qué instante corresponde a cada registro. La cifra 2 no identifica por sí sola una posición; tampoco indica si el móvil está avanzando o regresando. El problema cinemático comienza con una representación que permita interpretar esos datos.

El capítulo 5 construyó la posición como un punto del espacio y la velocidad como un vector. Aquí especializamos esa construcción a una recta espacial fija. Ganamos una función real de tiempo, sin perder la diferencia entre el punto físico, el vector de desplazamiento y su componente.

La coordenada que representa una posición. Sean O un punto fijo y e un vector unitario fijo, con $\|e\| = 1$. La recta orientada correspondiente es $\ell = \{O + \xi e : \xi \in \mathbb{R}\}$. El signo de ξ identifica uno de sus dos sentidos; su módulo mide la distancia al origen en la unidad de longitud elegida. El símbolo $O + \xi e$ expresa la traslación de un punto por un vector, no una suma de dos puntos.

Definición 7.1 — Historia rectilínea en una coordenada fija. Una historia rectilínea sobre ℓ, durante un intervalo temporal no degenerado I, es una aplicación $P : I \to \ell$ representada por una función continua $x : I \to \mathbb{R}$ mediante

$$P(t) = O + x(t)e, \qquad t \in I.$$

El punto O, la orientación e y la interpretación física del parámetro t se mantienen fijos durante la historia. Cuando se requiera velocidad, se exigirá la diferenciabilidad correspondiente de x; cuando se requiera aceleración continua, se trabajará con $x \in C^2$ en el intervalo considerado.

La continuidad forma parte de la clase de historias que adoptamos: excluye saltos instantáneos de posición. No afirmamos que cualquier aplicación continua tenga velocidad o aceleración. Esas cantidades requieren hipótesis adicionales, y se pueden estudiar sólo en una parte del dominio.

La coordenada $x(t)$ es una magnitud firmada de longitud. Un valor negativo señala una posición al otro lado del origen, sin afirmar nada sobre el sentido del movimiento. Ese sentido depende de cómo cambia la coordenada con el tiempo. Si $t_1 < t_2$, el desplazamiento entre ambos instantes es el vector

$$\overrightarrow{P(t_1)P(t_2)} = (x(t_2) - x(t_1))e.$$

Su componente puede ser positiva, negativa o nula. Una componente nula sólo informa que los extremos coinciden; el móvil pudo desplazarse durante el intervalo.

Principio metodológico 7.1 — Fijar representación y reloj antes de calcular. Toda ley rectilínea debe acompañarse de su intervalo temporal, origen, orientación y significado del reloj. Una modificación de la coordenada debe interpretarse respecto de esos datos antes de atribuirla a un movimiento diferente.

Cambiar un origen fijo u orientar el eje en el sentido opuesto modifica la representación. Cambiar físicamente el reloj o mover el marco plantea otra cuestión, que no necesitamos para este capítulo. Los marcos móviles quedan reservados para el capítulo 8.

De la componente al vector. Usaremos $v(t)$ y $a(t)$ para las componentes escalares firmadas de velocidad y aceleración. Los vectores completos se escribirán $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$. Esta convención importa: el signo de v depende de la orientación, mientras que la rapidez es una magnitud no negativa.

Proposición 7.1 — Especialización escalar en una recta fija. Si x es diferenciable en un instante interior t, entonces

$$\mathbf{v}(t) = x'(t)e = v(t)e, \qquad v(t) = x'(t).$$

Si x es dos veces diferenciable en ese instante, entonces $\mathbf{a}(t) = x''(t)e = a(t)e$, con $a(t) = x''(t)$. La rapidez es $\|\mathbf{v}(t)\| = |v(t)|$.

Demostración. Para $h \neq 0$ tal que $t + h \in I$, el cociente vectorial que define la velocidad es

$$\frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}\, e.$$

El vector e es constante. El límite del coeficiente existe por diferenciabilidad de x, y da $x'(t)e$. Derivar una segunda vez, manteniendo e fijo, produce $x''(t)e$. Finalmente, la homogeneidad de la norma y $\|e\| = 1$ dan $\|x'(t)e\| = |x'(t)|$. □

La constancia de e autoriza los pasos. Si la dirección dependiera del tiempo, derivar únicamente el coeficiente perdería parte del cambio del vector; no estamos en esa situación.

Las dimensiones de las componentes son $[x] = L$, $[v] = L/T$ y $[a] = L/T^2$. Derivar no convierte una coordenada de longitud en otra longitud. Un resultado como $v = 2$ necesita una unidad de longitud dividida por una unidad de tiempo para ser una afirmación física completa.

Escalas para escribir leyes y ejercicios. Los polinomios son útiles para explorar movimientos, pero sus términos deben tener dimensiones compatibles. Para evitar expresiones como una suma de tiempo y tiempo al cuadrado sin coeficientes apropiados, elegimos escalas $T > 0$ y $L > 0$, y referencias fijas t_0, x_*. Escribimos $u = (t - t_0)/T$ y $x(t) = x_* + LX(u)$, donde u y X son adimensionales. Así se reutiliza la adimensionalización del capítulo 2, sin volver a desarrollar su teoría.

La regla de la cadena da $v(t) = (L/T)X'(u)$ y $a(t) = (L/T^2)X''(u)$. Denotaremos $V(u) = X'(u)$ y $A(u) = V'(u)$ a las componentes normalizadas. Las primas en X, V se refieren a u; las primas en x se refieren a t. Las escalas permiten recuperar las magnitudes físicas después del cálculo. La interfaz dimensional procede de capítulo 2, §§9–10.

Por ejemplo, la ley $X(u) = 1 + u^2$ representa $x(t) = x_* + L(1 + ((t - t_0)/T)^2)$. Su velocidad es $(2L/T)u$, no simplemente $2u$ con unidades de velocidad omitidas. Para $u < 0$ el móvil se desplaza en el sentido negativo; para $u > 0$, en el positivo. La posición puede permanecer al lado positivo del origen durante ambos tramos: posición positiva y velocidad positiva son afirmaciones distintas.

En los ejercicios, salvo indicación contraria, se toma $x_* = 0$, de modo que $P(t) = O + LX(u)e$. El instante t_0 es la referencia del reloj; un valor $u < 0$ pertenece a la historia si así lo permite su dominio.

Ejercicios. Ejercicio 7.1. Una historia tiene $X(u) = 2 + u$ para $0 \le u \le 2$. Manteniendo el mismo reloj, cambia al origen $O' = O + 3Le$ y a la orientación $e' = -e$. Encuentra la coordenada normalizada $Y(u)$ respecto de esos nuevos datos, sus componentes de velocidad y aceleración, y comprueba si se ha modificado la posición física.

Solución. La misma posición debe satisfacer $O + LX(u)e = O' + LY(u)e'$. Sustituyendo los nuevos datos, el segundo miembro es $O + 3Le - LY(u)e$. Comparar los coeficientes de e da $X(u) = 3 - Y(u)$, por lo que $Y(u) = 1 - u$.

La componente física nueva de velocidad es $(L/T)Y'(u) = -L/T$ y la de aceleración es $(L/T^2)Y''(u) = 0$. En la representación inicial la velocidad era L/T y la aceleración cero. Sin embargo, el vector nuevo de velocidad es $(-L/T)e' = (L/T)e$, igual al anterior. Además, $O' + LY(u)e' = O + L(2 + u)e$ para todo u del intervalo. Cambiaron la coordenada y su signo, mientras que posición y vector velocidad se conservaron.

Ejercicio 7.2. Para $X(u) = 1 - u^2$ en $[-1, 1]$, reconstruye la posición, los vectores velocidad y aceleración, y la rapidez. Calcula el desplazamiento entre los dos extremos temporales y explica qué permite concluir.

Solución. La posición es $P(t) = O + L(1 - u^2)e$, donde $t = t_0 + Tu$. Proposición 7.1 y la regla de la cadena dan $\mathbf{v}(t) = -(2L/T)u\,e$ y $\mathbf{a}(t) = -(2L/T^2)e$. La rapidez vale $(2L/T)|u|$, de modo que se anula en $u = 0$ y es positiva en los demás instantes.

En $u = -1$ y $u = 1$ la coordenada es cero, por lo que el desplazamiento entre extremos es el vector nulo. Durante la historia, en cambio, $X(0) = 1$: el móvil alcanza una posición distinta antes de regresar. La coincidencia de extremos no prueba reposo durante el intervalo. El sentido de ida y regreso se reconoce en el signo de $V(u) = -2u$.

La representación en una recta fija importa las distinciones geométricas de capítulo 5, §3 y su derivación de velocidad y aceleración en §§5–7. Una vez fijados los datos que dan significado a $x(t)$, podemos leer su gráfica temporal.

2. Leer la gráfica de posición

Una curva dibujada en un plano puede sugerir que el móvil sube, baja o gira. Si los ejes del dibujo son tiempo y posición, esas impresiones deben reinterpretarse: el móvil sigue en una recta espacial. La curva muestra cómo cambia su coordenada con el reloj, no la forma de un camino en un espacio de dos dimensiones.

Esta diferencia también explica por qué una gráfica descendente no describe necesariamente una posición negativa. Puede representar un móvil que todavía está a la derecha del origen, pero se acerca a él. Para leerla hay que distinguir la altura de la curva de su pendiente.

Dos conjuntos con información diferente. Definición 7.2 — Gráfica temporal y escalas de sus ejes. La gráfica temporal de una coordenada $x : I \to \mathbb{R}$ es el conjunto $G_x = \{(t, x(t)) : t \in I\}$ en el plano de tiempo y coordenada. Sus ejes representan magnitudes de tipos diferentes y deben llevar unidades o escalas declaradas. Con las referencias y escalas de §1, su representación normalizada es $G_X = \{(u, X(u)) : u \in J\}$, donde $J = \{(t - t_0)/T : t \in I\}$.

La trayectoria espacial es otro conjunto: $\Gamma = \{O + x(t)e : t \in I\} \subseteq \ell$. En G_x se conserva el tiempo asociado a cada posición. En Γ sólo aparecen las posiciones alcanzadas. Dos historias

pueden recorrer la misma parte de la recta con tiempos diferentes y tener gráficas temporales distintas.

Si $t_1 < t_2$, la pendiente de la secante que une los puntos de la gráfica es $(x(t_2) - x(t_1))/(t_2 - t_1)$. Es la componente de velocidad media ya definida en el capítulo 5. Su signo informa el sentido del desplazamiento neto, pero no garantiza que el móvil se haya desplazado en ese mismo sentido durante todo el intervalo.

Cuando x es diferenciable en un instante interior, las pendientes de las secantes con un extremo fijo convergen a $x'(t) = v(t)$. La pendiente tangente es por ello una lectura local de velocidad. La altura $x(t)$ y la pendiente $v(t)$ pueden tener signos diferentes; se refieren a posición y cambio de posición, respectivamente.

Principio metodológico 7.2 — Leer pendientes con unidades y escalas. Una pendiente debe calcularse como cociente de incrementos de las magnitudes representadas. El ángulo aparente de una recta en el papel no determina una velocidad hasta declarar la relación entre las escalas de los ejes.

Para ver el papel de esas escalas, sean $h = k_t(t - t_0)$ y $z = k_x(x - x_*)$ las distancias horizontal y vertical en el papel, con $k_t, k_x > 0$. Entonces $dz/dh = (k_x/k_t)v$. Los factores tienen unidades de longitud del papel por tiempo y por longitud física, respectivamente. Si se duplica k_x manteniendo k_t, se duplica la pendiente dibujada aunque la historia sea la misma.

En las coordenadas normalizadas, la regla es $v = (L/T)X'$. La derivada X' mide una pendiente adimensional; el factor L/T la convierte en componente de velocidad. Esta distinción evita asignar un significado físico universal a una inclinación de 45 grados.

Qué autoriza el signo de la derivada. Proposición 7.2 — Signo de la pendiente y monotonía. Sea x continua en $[\alpha, \beta]$, con $\alpha < \beta$, y diferenciable en su interior. Si $x'(t) > 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$, entonces x es estrictamente creciente. Si $x'(t) \geq 0$ en ese interior, entonces x es no decreciente. Las versiones con signo negativo dan decrecimiento estricto o no crecimiento. Además, si x tiene un extremo local en un instante interior t_c donde es diferenciable, entonces $x'(t_c) = 0$.

Demostración. Para dos instantes $s < t$ del intervalo, el teorema del valor medio proporciona $c \in (s, t)$ con $x(t) - x(s) = x'(c)(t - s)$. El factor $t - s$ es positivo, por lo que una derivada positiva produce una diferencia positiva, y una derivada no negativa produce una diferencia no negativa. Los otros signos se tratan mediante la misma igualdad.

Para la afirmación sobre extremos, supongamos primero un máximo local en t_c. Para incrementos positivos suficientemente pequeños, el cociente $(x(t_c + h) - x(t_c))/h$ es no positivo; para incrementos negativos, es no negativo. Si ambos cocientes convergen a una misma derivada, ésta debe ser simultáneamente no positiva y no negativa, luego es cero. En un mínimo se invierten las desigualdades y se obtiene la misma conclusión. □

El resultado separa un criterio suficiente de una condición necesaria. Una derivada positiva en todo un intervalo basta para crecimiento estricto. Que una función sea estrictamente creciente no obliga a que su derivada sea positiva en cada instante: $X(u) = u^3$ crece estrictamente, pero $X'(0) = 0$. Del mismo modo, la condición $v(t_c) = 0$ es necesaria para un extremo local interior diferenciable, pero no lo garantiza.

Tampoco se aplica esa condición sin revisar la posición temporal del punto. Un máximo en el extremo de un intervalo cerrado puede tener pendiente no nula. Las hipótesis «interior» y «diferenciable» forman parte de la afirmación, no son detalles que se puedan omitir al mirar un dibujo.

Una lectura con signos separados. Consideremos $X(u) = 2 - u + u^2$ en $[0, 1]$. La coordenada normalizada es positiva en todo el intervalo, porque $X(u) = (u - 1/2)^2 + 7/4$. La velocidad normalizada es $V(u) = -1 + 2u$, que es negativa antes de $u = 1/2$, nula allí y positiva después. El móvil primero se desplaza hacia coordenadas menores y luego hacia coordenadas mayores, sin cruzar el origen.

La gráfica permite organizar esa información:

Intervalo o instante	Signo de V	Lectura de X
$0 < u < 1/2$	negativo	decrece
$u = 1/2$	cero	mínimo local
$1/2 < u < 1$	positivo	crece

El mínimo se confirma por los signos de la derivada a ambos lados. No se ha deducido exclusivamente de una tangente horizontal. El siguiente ejercicio exige repetir esa lectura cuando hay dos puntos estacionarios.

Ejercicios. Ejercicio 7.3. Analiza $X(u) = u^3 - u$ en $[-1, 1]$. Determina puntos estacionarios, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales interiores y extremos globales del intervalo. Explica qué información corresponde a la gráfica temporal.

Solución. La derivada es $V(u) = 3u^2 - 1$, cuyos ceros son $u_- = -1/\sqrt{3}$ y $u_+ = 1/\sqrt{3}$. El signo de V es positivo para $|u| > 1/\sqrt{3}$ y negativo para $|u| < 1/\sqrt{3}$. Proposición 7.2 da crecimiento en $[-1, u_-]$, decrecimiento en $[u_-, u_+]$ y crecimiento en $[u_+, 1]$.

En u_- el signo pasa de positivo a negativo: allí hay un máximo local. En u_+ pasa de negativo a positivo: allí hay un mínimo local. Sus valores son $X(u_-) = 2/(3\sqrt{3})$ y $X(u_+) = -2/(3\sqrt{3})$. Los extremos temporales tienen $X(-1) = X(1) = 0$. Comparar estos cuatro valores muestra que el máximo y mínimo locales encontrados también son el máximo y mínimo globales.

Las posiciones físicas son $x = LX$ con la convención de §1, y los tiempos son $t = t_0 + Tu$. La curva que sube y baja en el plano (u, X) representa cambios de sentido sobre una sola recta espacial. No describe una trayectoria espacial cúbica en un plano.

Ejercicio 7.4. La misma ley $X(u) = 2u$ se dibuja con dos escalas verticales distintas y la misma escala horizontal. Explica qué cambia en el dibujo. Si $L = 3\,\mathrm{m}$ y $T = 2\,\mathrm{s}$, calcula la velocidad física y decide si cambia al redibujar la gráfica.

Solución. La pendiente normalizada es $X' = 2$, de modo que $v = (L/T)2 = 3\,\mathrm{m/s}$. Si la escala vertical del papel se duplica, la altura dibujada de cada punto respecto de la referencia y la pendiente dibujada se duplican. El ángulo que forma la recta con la horizontal cambia.

El cociente entre incrementos físicos sigue siendo $\Delta x/\Delta t = 3\,\mathrm{m/s}$. No cambian L, T ni la ley temporal; cambió la representación sobre el papel. Calcular una velocidad directamente desde un ángulo sin consultar los ejes confundiría ambas situaciones.

La lectura de pendientes recupera las cantidades medias e instantáneas discutidas por Shankar, *Fundamentals of Physics I*, edición ampliada de 2019, cap. 1 §1.3, pp. 4–6. Las gráficas y ejercicios de esta sección se construyen aquí a partir de esas distinciones. La gráfica de velocidad hará visible por separado la información que en la de posición aparece como pendiente.

3. Leer la gráfica de velocidad

Dos móviles pueden pasar por la misma posición con velocidades distintas. Una gráfica de posición permite reconocer esa diferencia a través de sus pendientes; la gráfica de velocidad la presenta directamente como una altura firmada. Sin embargo, esa altura ya no es una posición. Estar por debajo del eje horizontal significa tener componente negativa de velocidad, no estar necesariamente al lado negativo del origen espacial.

La gráfica $G_v = \{(t, v(t)) : t \in I\}$ tiene tiempo en su eje horizontal y velocidad en el vertical. En la representación normalizada usamos $(u, V(u))$, con $v = (L/T)V$. Como $L/T > 0$, v y V tienen el mismo signo. Podemos estudiar el signo con V y restaurar las unidades cuando se pida una magnitud física.

Altura, pendiente y sentido. Si v es positiva durante un intervalo, proposición 7.2 asegura que la coordenada crece. Si es negativa, la coordenada decrece. La altura de G_v informa el sentido de recorrido respecto de e y su módulo informa la rapidez. Dos valores $v = 3\,\mathrm{m/s}$ y $v = -3\,\mathrm{m/s}$ representan velocidades opuestas con la misma rapidez.

La pendiente de G_v informa otra cosa. Una secante entre $t_1 < t_2$ tiene pendiente $(v(t_2) - v(t_1))/(t_2 - t_1)$: es la componente de aceleración media durante ese intervalo. Si v es diferenciable en un instante interior, la pendiente tangente es $v'(t) = a(t)$. Una gráfica de velocidad horizontal describe componente constante de velocidad, no necesariamente reposo. El reposo corresponde a la altura cero.

Por ejemplo, para $V(u) = 2 - u$ en $[0, 3]$, la gráfica de velocidad es una recta descendente. Hasta $u = 2$, su altura es positiva y la coordenada crece, aunque la velocidad se haga cada vez menor. Después de $u = 2$, la altura es negativa y la coordenada decrece. La pendiente normalizada es -1 a ambos lados, de modo que la componente física de aceleración es $-L/T^2$ durante todo el intervalo. La pendiente constante no evita el cambio de sentido.

No hemos reconstruido una coordenada específica a partir de esa velocidad. Distintas posiciones iniciales pueden compartir la misma gráfica de velocidad; esa información faltante se estudiará sistemáticamente en §6.

Lo que ocurre en un cero. En un instante interior t_c con $v(t_c) = 0$, el móvil está en reposo instantáneo. Para saber si invierte su sentido necesitamos información a ambos lados. Un valor de una función en un punto no contiene los signos de sus valores vecinos.

Definición 7.3 — Cambio de sentido local. Sea x de clase C^1 en un entorno de un instante interior t_c. Diremos que presenta un cambio de sentido local aislado en t_c si $v(t_c) = 0$ y existe $\rho > 0$, con $(t_c - \rho, t_c + \rho) \subseteq I$, tal que se cumple una de estas dos alternativas: $v > 0$ en $(t_c - \rho, t_c)$ y $v < 0$ en $(t_c, t_c + \rho)$, o los signos son los opuestos.

La definición fija el caso elemental que usaremos. Pide signos estrictos en cada semientorno y un cero aislado entre ellos. No pretende clasificar historias con infinitos ceros acumulados ni sustituye una discusión de posiciones no diferenciables. Al pedir un instante interior evitamos inferir un «antes» que no pertenece al dominio declarado.

Por proposición 7.2, la primera alternativa describe coordenada creciente antes de t_c y decreciente después, por lo que t_c es un máximo local estricto. La segunda describe un mínimo local estricto. La continuidad de v también explica por qué los signos opuestos no pueden mantenerse hasta el instante central con una velocidad allí positiva o negativa.

Principio metodológico 7.3 — Auditar el signo a ambos lados de un cero. Para interpretar un cero de velocidad se debe distinguir reposo instantáneo, cambio de sentido y reposo

durante un intervalo. Una inversión local se certifica con los signos vecinos; la igualdad $v(t_c) = 0$ por sí sola no la certifica.

Hay tres situaciones elementales. Si $V(u) = u$, el signo cambia de negativo a positivo en cero. Si $V(u) = u^2$, el signo es positivo a ambos lados: la velocidad se anula, pero la coordenada sigue creciendo. Si V es idénticamente cero en un intervalo, la coordenada es constante allí, por el teorema del valor medio. En el último caso no existe un único instante aislado que caracterice el reposo.

Eventos que no deben confundirse. La ley $X(u) = 1 + u$ en $[-2, 0]$ cruza el origen en $u = -1$. Su velocidad normalizada es 1 durante todo el intervalo, de modo que ese cruce ocurre sin reposo ni inversión. Estar en el origen no obliga a tener velocidad cero.

La ley $X(u) = 2 - u^2$ en $[-1, 1]$ ofrece otro patrón. Su velocidad normalizada $-2u$ pasa de positiva a negativa en cero. Allí hay reposo e inversión, pero la coordenada vale 2, lejos del origen elegido. El evento de inversión puede ocurrir en una posición cualquiera.

Estas leyes separan las preguntas «estar en el origen», «tener velocidad cero» e «invertir el sentido». La gráfica de velocidad responde a las dos últimas sólo con las condiciones correspondientes. El ejercicio siguiente muestra que también reposo e inversión deben distinguirse entre sí.

Ejercicios. Ejercicio 7.5. Compara $X_1(u) = u^2$ y $X_2(u) = u^3$ en un entorno de $u = 0$. Calcula sus velocidades normalizadas, clasifica el reposo central y decide si la afirmación «velocidad cero implica inversión» es válida.

Solución. Para la primera historia, $V_1(u) = 2u$ es negativa a la izquierda y positiva a la derecha. En cero es nula. Definición 7.3 certifica una inversión local del sentido negativo al positivo; X_1 tiene allí un mínimo.

Para la segunda, $V_2(u) = 3u^2$ es positiva para todo $u \neq 0$ del entorno y se anula en cero. Hay reposo instantáneo, pero no inversión. También puede verificarse el crecimiento estricto de u^3 comparando directamente sus valores en dos argumentos ordenados.

La segunda historia es un contraejemplo a la afirmación propuesta. Ambas tienen velocidad cero en el mismo instante normalizado, mientras que sus signos vecinos determinan comportamientos diferentes. Multiplicar las velocidades normalizadas por $L/T > 0$ no altera esa clasificación.

Ejercicio 7.6. Una historia diferenciable tiene componente de velocidad normalizada $V(u) = 1 - u^2$ en $[-2, 2]$. Determina todos sus ceros, signos y cambios de sentido. Contrasta el resultado con una historia cuya velocidad es idénticamente cero en un intervalo.

Solución. La ecuación $1 - u^2 = 0$ tiene soluciones $u = -1$ y $u = 1$, ambas interiores al dominio. La función es negativa en $[-2, -1)$, positiva en $(-1, 1)$ y negativa en $(1, 2]$. En $u = -1$ pasa de negativo a positivo, por lo que hay un cambio de sentido asociado a un mínimo de coordenada. En $u = 1$ pasa de positivo a negativo, asociado a un máximo. En los dos instantes hay reposo instantáneo.

Si $V \equiv 0$ en un intervalo, también $v \equiv 0$ allí. Para dos instantes $s < t$, el valor medio aplicado a la coordenada da $x(t) - x(s) = v(c)(t - s) = 0$ para algún $c \in (s, t)$. La coordenada es constante en todo ese intervalo. No se presenta la situación de la definición 7.3, que exige velocidades no nulas en los semientornos de un instante aislado.

Conocer la gráfica de velocidad permite clasificar sentidos y reposos sin fijar todavía una posición inicial. La lectura de su pendiente nos lleva a la gráfica de aceleración, donde habrá que conservar esa información de signos para interpretar la rapidez.

4. Leer la gráfica de aceleración

Un móvil que se desplaza hacia coordenadas negativas puede tener aceleración negativa y aumentar su rapidez. La palabra «negativa» indica una orientación de la componente, mientras que «aumentar la rapidez» compara módulos. Confundir ambas operaciones conduce a interpretar una misma gráfica de dos maneras incompatibles.

La aceleración describe cómo varía la velocidad. Su gráfica tiene tiempo en el eje horizontal y una componente de tipo L/T^2 en el vertical. No expresa la causa de esa variación. Aquí la estudiamos como una cantidad cinemática, siguiendo la separación entre descripción y dinámica establecida en el capítulo 5.

La altura de la gráfica de aceleración. Si $a(t) > 0$ durante un intervalo, la componente $v(t)$ es estrictamente creciente bajo las hipótesis del valor medio. Puede pasar, por ejemplo, de $-4\,\mathrm{m/s}$ a $-2\,\mathrm{m/s}$: aumenta como número firmado, pero disminuye su módulo. También puede pasar de $2\,\mathrm{m/s}$ a $4\,\mathrm{m/s}$: ahora aumentan componente y rapidez.

Si $a(t) < 0$, la componente de velocidad decrece. Pasar de 4 a $2\,\mathrm{m/s}$ disminuye la rapidez; pasar de -2 a $-4\,\mathrm{m/s}$ la aumenta. La altura de la gráfica de aceleración, por sí sola, no distingue esos casos.

Con $u = (t - t_0)/T$ y las escalas de §1, la aceleración es $a(t) = (L/T^2)A(u)$. La relación $A = V'$ ayuda a leer la variación de V, pero las unidades físicas se recuperan mediante L/T^2. Una recta horizontal en la gráfica de a describe aceleración constante; no describe velocidad constante salvo que esa altura sea cero.

Para $A = 0$ en un intervalo, el valor medio implica que v es constante en él. Todavía puede haber desplazamiento si esa constante es no nula. El cálculo no dice por qué el móvil conserva su velocidad: una afirmación sobre fuerzas o inercia sería adicional y pertenece a capítulos posteriores.

Derivar la rapidez con sus hipótesis. La rapidez es $r(t) = |v(t)|$. El valor absoluto cambia de fórmula en cero. Antes de derivarlo debemos comprobar que la velocidad no se anula en el punto considerado.

Proposición 7.3 — Variación de la rapidez fuera de reposo. Sea v diferenciable en un instante interior t y supongamos $v(t) \neq 0$. Entonces la rapidez es diferenciable en ese instante y satisface

$$r'(t) = \operatorname{sgn}(v(t))\, a(t),$$

donde $\operatorname{sgn}(z) = 1$ si $z > 0$ y $\operatorname{sgn}(z) = -1$ si $z < 0$. En particular, el signo de $r'(t)$ es el signo del producto $v(t)a(t)$.

Demostración. La diferenciabilidad de v implica su continuidad en t. Si $v(t) > 0$, la continuidad asegura que v sigue siendo positiva en un entorno de t: basta restringirlo hasta que $|v(s) - v(t)| < v(t)/2$. En ese entorno $|v(s)| = v(s)$, y derivar en t da $r'(t) = v'(t) = a(t)$.

Si $v(t) < 0$, se escoge análogamente un entorno donde $v(s) < 0$. Allí $|v(s)| = -v(s)$ y $r'(t) = -a(t)$. Son las dos alternativas de la fórmula. Puesto que $v(t) = \operatorname{sgn}(v(t))|v(t)|$ con $|v(t)| > 0$, los números $r'(t) = \operatorname{sgn}(v(t))a(t)$ y $v(t)a(t)$ tienen el mismo signo. □

La continuidad mantiene el signo cerca del instante y autoriza elegir una rama del valor absoluto. No se ha derivado una función de signo a través de un cero; ése habría sido un paso ilegítimo.

En un intervalo donde v no se anula y el producto va es positivo en todos sus instantes interiores, la rapidez es estrictamente creciente por el valor medio. Si el producto es negativo, es estrictamente decreciente. Un signo de r' en un único instante expresa una tasa local; para concluir monotonía durante un intervalo se necesita una condición sobre todo ese intervalo.

Principio metodológico 7.4 — Relacionar aceleración con velocidad al interpretar la rapidez. Fuera de reposo, se deben comparar los signos de v y a. Componentes con el mismo signo aumentan localmente la rapidez; componentes de signos opuestos la disminuyen. En un cero de velocidad se revisa directamente $|v|$, porque proposición 7.3 no se aplica allí.

La comparación queda organizada en cuatro casos:

Signo de v	Signo de a	Signo de r'
positivo	positivo	positivo
positivo	negativo	negativo
negativo	positivo	negativo
negativo	negativo	positivo

Ninguna fila supone una fuerza. La tabla sólo traduce el cálculo del valor absoluto y conserva la distinción entre orientación y módulo.

El instante que exige otra lectura. Para $V(u) = u^2$, la rapidez normalizada es $R(u) = u^2$ también en cero, porque la componente nunca es negativa. Su derivada existe allí y vale cero, aunque la hipótesis $v \neq 0$ de la proposición 7.3 no se cumpla. La conclusión se obtiene de la fórmula explícita de R, no de una aplicación de la proposición 7.3 fuera de su alcance.

Una velocidad que cambie de signo puede producir otra regularidad para su módulo. El valor absoluto se debe entonces escribir por separado a ambos lados del cero y se deben comparar los cocientes incrementales. Ejercicio 7.8 realiza ese control para una componente suave con signo cambiante.

La aceleración y la tasa de cambio de rapidez son cantidades distintas: la primera deriva v, mientras que la segunda deriva $|v|$ donde ese cálculo existe. Que falte una hipótesis de la proposición 7.3 obliga a buscar otro argumento; no prueba por sí solo que la rapidez sea no diferenciable.

Ejercicios. Ejercicio 7.7. Para $V(u) = -2 - u$ en $[0, 1]$, determina la aceleración física, el sentido de movimiento y la variación de la rapidez. Audita la frase «una aceleración negativa siempre frena».

Solución. Derivar respecto de u da $A = -1$, de modo que $a = -L/T^2$. La componente física de velocidad es $v = -(L/T)(2+u)$, negativa durante todo el intervalo; la coordenada decrece respecto de la orientación elegida.

La rapidez es $r = (L/T)(2+u)$. Al derivar respecto del tiempo, usando $du/dt = 1/T$, se obtiene $r' = L/T^2 > 0$. La rapidez aumenta. Proposición 7.3 confirma el resultado: v y a son negativos, por lo que $va > 0$.

Esta historia contradice la frase propuesta. La aceleración negativa describe decrecimiento de la componente firmada; sólo se interpreta como frenado, en el sentido de disminución de rapidez, cuando la velocidad es positiva durante el intervalo considerado.

Ejercicio 7.8. Para $V(u) = u$ en $[-1, 1]$, calcula la rapidez normalizada y sus derivadas laterales en cero. Decide si proposición 7.3 permite calcular allí la derivada de la rapidez y compara con la aceleración.

Solución. La rapidez normalizada es $R(u) = |u|$. Como $R(0) = 0$, su cociente incremental en cero es $|h|/h$: vale -1 para $h < 0$ y 1 para $h > 0$. Los límites laterales son distintos, por lo que $R'(0)$ no existe.

En magnitudes físicas, $r(t) = (L/T)|(t-t_0)/T| = (L/T^2)|t-t_0|$. Las tasas laterales son $-L/T^2$ y L/T^2. La componente de velocidad, en cambio, es $v(t) = (L/T^2)(t-t_0)$ y tiene derivada $a = L/T^2$ también en t_0.

Proposición 7.3 no permite sustituir $t = t_0$ en su conclusión porque allí $v = 0$. La falta de derivada de la rapidez se demuestra con el cociente incremental; no se deduce simplemente de que falte una hipótesis. Las cantidades están bien definidas como funciones en todo el intervalo, aunque una de ellas carezca de derivada bilateral en un instante.

Las gráficas de x, v, a permiten así distinguir posición, sentido, rapidez y variación de velocidad. Esa lectura local deja una pregunta de intervalo: cuánto desplazamiento y cuánto recorrido acumula la historia. Para responderla, §5 utilizará las áreas de velocidad con signo y con valor absoluto.

5. Desplazamiento, distancia y áreas firmadas

Un móvil sale de una marca del riel, alcanza otra y regresa a la primera. El desplazamiento total es cero, pero el recorrido no lo es. Las gráficas de §3 permiten reconocer el cambio de sentido; para medir cuánto se acumula durante cada parte necesitamos integrar la velocidad. El signo que distingue ida y regreso debe conservarse para el desplazamiento y eliminarse para sumar recorrido.

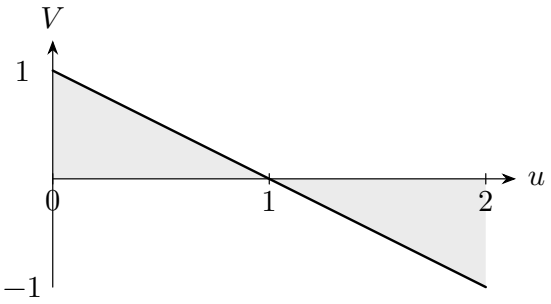


Figura 7.1. Con $V = 1 - u$ entre $u = 0$ y 2, las áreas positiva y negativa se cancelan: $\Delta X = 0$. La distancia normalizada suma sus módulos y vale uno. Véase §5.

En esta sección x es de clase C^1 sobre $[\alpha, \beta]$, con $\alpha < \beta$. En un intervalo cerrado, esta regularidad significa que la derivada interior se extiende continuamente hasta los extremos, donde se interpreta lateralmente. Es la convención del capítulo 5. Escribimos $v = x'$ y mantenemos fijos O, e en $P(t) = O + x(t)e$.

Dos cantidades sobre el mismo intervalo. La componente del desplazamiento es $\Delta x = x(\beta) - x(\alpha)$; el vector completo es $\Delta x\, e$. La distancia recorrida es la longitud geométrica de esta historia temporal, no sólo la distancia entre sus extremos. Denotaremos ese recorrido por d_{rec}. Su definición y su fórmula integral ya están disponibles en capítulo 5, §13, proposición 7.28.

Una suma de términos $v(t_i)\Delta t_i$ conserva el signo de cada contribución. Si en lugar de v usamos $|v|$, todas las contribuciones son no negativas. Bajo la hipótesis de continuidad, ambas sumas tienen límites integrales; la diferencia entre ellas persiste por mucho que se refine la partición.

Proposición 7.4 — Áreas de velocidad, desplazamiento y distancia. Bajo las hipótesis anteriores,

$$\Delta x = \int_\alpha^\beta v(t)\,dt, \qquad d_{\mathrm{rec}} = \int_\alpha^\beta |v(t)|\,dt,$$

y se cumple $d_{\text{rec}} \geq |\Delta x|$. Hay igualdad si y sólo si $v \geq 0$ en todo $[\alpha, \beta]$ o $v \leq 0$ en todo ese intervalo. Se permite que v se anule en puntos o subintervalos.

Demostración. El teorema fundamental del cálculo aplicado a x da $x(\beta) - x(\alpha) = \int_\alpha^\beta x'(t)\,dt$. Por proposición 7.1, la norma del vector velocidad es $|v|$. La fórmula de longitud del capítulo 5 da entonces $d_{\text{rec}} = \int_\alpha^\beta |v|$; no la estamos tomando como una definición nueva de longitud.

Las desigualdades $-|v(t)| \leq v(t) \leq |v(t)|$, integradas, producen $-d_{\text{rec}} \leq \Delta x \leq d_{\text{rec}}$, equivalentes a la cota anunciada.

Si $v \geq 0$, ambas integrales coinciden y $\Delta x \geq 0$. Si $v \leq 0$, la integral de $|v|$ es el opuesto de la de v, luego coincide con $|\Delta x|$. Para probar la necesidad, supongamos primero $\Delta x \geq 0$ y $d_{\text{rec}} = |\Delta x| = \Delta x$. Entonces

$$\int_\alpha^\beta \big(|v(t)| - v(t)\big)\,dt = 0.$$

El integrando es continuo y no negativo. Si fuera positivo en algún punto, la continuidad lo mantendría por encima de una constante positiva en un pequeño intervalo de longitud positiva, y su integral sería positiva. El mismo argumento funciona con un intervalo lateral si el punto es un extremo. Por tanto, $|v| - v$ es idénticamente cero: $v \geq 0$. Si $\Delta x < 0$, se aplica ese argumento a $|v| + v$ y se obtiene $v \leq 0$. □

La continuidad permite pasar de una integral nula a una afirmación en cada punto. La condición de igualdad se refiere a no tomar ambos signos; no exige velocidad estrictamente positiva o negativa. Un reposo intermedio no añade recorrido, pero tampoco produce cancelación.

Leer un área con unidades. El área firmada entre la gráfica de v y el eje temporal representa Δx: la parte bajo el eje aporta signo negativo. El área geométrica total representa d_{rec}. En ambos casos las unidades son (m/s)s = m. Una superficie medida en centímetros cuadrados del papel necesita las escalas de ambos ejes para convertirse en una longitud física.

Principio metodológico 7.5 — Conservar el signo para desplazamiento y el módulo para recorrido. Antes de integrar una gráfica de velocidad, debe precisarse si se busca una componente de desplazamiento o distancia recorrida. Cuando la velocidad cambia de signo, el cálculo del recorrido se divide en intervalos de signo conocido.

La división es una técnica de cálculo, no una hipótesis adicional del teorema. Proposición 7.4 también vale si los ceros son numerosos y no hay una partición finita cómoda; lo que puede fallar es un procedimiento particular para evaluar la integral.

En la notación normalizada de §1, si $u_\alpha = (\alpha - t_0)/T$ y $u_\beta = (\beta - t_0)/T$, el cambio de variable $t = t_0 + Tu$ da

$$\Delta x = L \int_{u_\alpha}^{u_\beta} V(u)\,du, \qquad d_{\text{rec}} = L \int_{u_\alpha}^{u_\beta} |V(u)|\,du.$$

El factor T de dt cancela el denominador temporal de $v = (L/T)V$. Una integral adimensional de V no debe presentarse directamente como metros.

Un regreso que no cancela todo. Para $V(u) = 1 - u$ en $[0, 3]$, la contribución positiva entre 0 y 1 es $1/2$; el módulo de la contribución negativa entre 1 y 3 es 2. Así, $\Delta x = -3L/2$ y $d_{\text{rec}} = 5L/2$. El móvil termina del lado negativo respecto de su posición inicial, pero recorrió también un tramo en el sentido positivo. El exceso de recorrido sobre $|\Delta x|$ registra esa ida que luego fue deshecha.

Ejercicios. Ejercicio 7.9. Una historia tiene $V(u) = 2-u$ en $[0,4]$. Calcula su desplazamiento y distancia recorrida. Explica el papel del cero de velocidad en el cálculo.

Solución. El único cero es $u = 2$. La velocidad es positiva antes y negativa después; dividir allí permite escribir correctamente su módulo. Una primitiva de $2-u$ es $2u-u^2/2$, y por tanto

$$\Delta x = L[2u - u^2/2]_0^4 = 0.$$

La contribución positiva vale $\int_0^2 (2-u)\,du = 2$. En el segundo tramo, $\int_2^4 (2-u)\,du = -2$. Para el recorrido se suma el módulo de ambas contribuciones:

$$d_{\mathrm{rec}} = L(2+2) = 4L.$$

El vector desplazamiento es nulo. Se recorrieron $2L$ en cada sentido, de modo que no hubo reposo durante toda la historia. El cero de velocidad señala la división entre los dos tramos, no una pérdida de la distancia acumulada.

Ejercicio 7.10. Reconstruye la condición de igualdad de la proposición 7.4 separando las contribuciones positivas y negativas. Aplícala a $V(u) = u^2$ en $[-1,1]$ y explica por qué un cero de velocidad no impide la igualdad.

Solución. Sean $v_+(t) = \max\{v(t), 0\}$ y $v_-(t) = \max\{-v(t), 0\}$. Son continuas, no negativas, y satisfacen $v = v_+ - v_-$ y $|v| = v_+ + v_-$. Definamos $J_+ = \int_\alpha^\beta v_+$ y $J_- = \int_\alpha^\beta v_-$. Entonces $\Delta x = J_+ - J_-$ y $d_{\mathrm{rec}} = J_+ + J_-$. Si $J_+ \geq J_-$, la diferencia $d_{\mathrm{rec}} - |\Delta x|$ es $2J_-$. Si $J_- > J_+$, es $2J_+$. En conjunto,

$$d_{\mathrm{rec}} - |\Delta x| = 2\,\min\{J_+, J_-\}.$$

La igualdad requiere $J_+ = 0$ o $J_- = 0$. Una función continua no negativa con integral cero es idénticamente cero, como se justificó en la proposición 7.4. La primera alternativa implica $v \leq 0$; la segunda, $v \geq 0$. Esto prueba ambas direcciones del criterio.

Para $V = u^2$, no hay contribución negativa y $\int_{-1}^1 u^2\,du = 2/3$. Por las escalas de §1, $\Delta x = d_{\mathrm{rec}} = 2L/3$. La velocidad se anula en cero, pero mantiene el signo no negativo: no aparece ningún recorrido de vuelta que deba cancelarse.

Las integrales de esta sección determinan diferencias de posición. Para determinar una posición concreta falta saber dónde comienza la historia.

6. Reconstruir posición desde velocidad

Dos móviles separados sobre un riel pueden tener la misma velocidad en cada instante. Si sus gráficas de velocidad coinciden, ambos acumulan el mismo desplazamiento entre dos tiempos, pero eso no obliga a que ocupen la misma posición. Integrar la velocidad selecciona diferencias; una posición conocida fija la referencia que falta.

La dificultad aparece incluso con una velocidad constante de $1\,\mathrm{m/s}$. Las leyes $x_1(t) = t\,\mathrm{m/s}$ y $x_2(t) = 5\,\mathrm{m} + t\,\mathrm{m/s}$, con t medido como magnitud temporal, tienen la misma derivada. El sumando de longitud desaparece al derivar y reaparece como información que la velocidad no proporciona.

El dato que selecciona una historia. Definición 7.4 — Datos iniciales de una reconstrucción cinemática. Fijado un instante t_0 del dominio, una posición inicial es una condición $x(t_0) = x_0$. Si la reconstrucción prescribe aceleración, se considera además una velocidad inicial $v(t_0) = v_0$. Los valores x_0, v_0 se refieren al mismo marco fijo, orientación y reloj que las funciones temporales.

«Inicial» designa aquí el instante de referencia de los datos. No obliga a que t_0 sea el primer instante del intervalo ni a que su valor numérico sea cero. Para reconstruir desde velocidad se

necesita x_0; desde aceleración necesitaremos también v_0. Cada afirmación requiere demostrar que esos datos bastan.

Sea $I = [\alpha, \beta]$, con $\alpha < \beta$, y $t_0 \in I$. Si v es continua, podemos acumular su integral desde t_0 hasta cualquier $t \in I$. Para $t < t_0$ usamos la integral orientada, $\int_{t_0}^{t} v = -\int_{t}^{t_0} v$. El signo de esa inversión de límites es independiente del signo que pueda tener la velocidad.

Proposición 7.5 — Reconstrucción única desde velocidad continua. Dados $v \in C(I)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, existe una única función $x \in C^1(I)$ tal que $x' = v$ y $x(t_0) = x_0$. Es

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds, \qquad t \in I.$$

Las derivadas en los extremos se interpretan con la convención lateral de §5.

Demostración. Definimos x por la fórmula. La continuidad de v permite aplicar el teorema fundamental: la función integral es de clase C^1 y su derivada es $v(t)$. Además, $\int_{t_0}^{t_0} v = 0$, luego $x(t_0) = x_0$. Esto prueba existencia y regularidad.

Para unicidad, sean x_1, x_2 dos funciones que cumplen las condiciones y escribamos $z = x_1 - x_2$. Entonces $z' = 0$ y $z(t_0) = 0$. Para cualquier $t \neq t_0$, el valor medio sobre el intervalo entre t y t_0 da $z(t) - z(t_0) = z'(c)(t - t_0) = 0$ para algún c entre ellos. Por tanto, $z(t) = 0$ para todo $t \in I$. □

La prueba tiene dos obligaciones distintas. Integrar construye una candidata y verificar su derivada demuestra que funciona; comparar dos candidatas demuestra que no existe otra. Una fórmula comprobada, por sí sola, no habría probado unicidad.

La hipótesis de continuidad garantiza una posición C^1. Una función meramente integrable admite una función integral, pero no necesariamente una derivada clásica igual al dato en cada punto. Esa ampliación exige otros enunciados y no se atribuye a proposición 7.5.

Una primitiva no es todavía una posición seleccionada. Si $F' = v$ en I, proposición 7.5 puede escribirse como $x(t) = F(t) + x_0 - F(t_0)$. El valor $F(t_0)$ no debe omitirse salvo que sea cero. La familia $F + C$ reúne todas las posiciones con esa velocidad; el dato inicial fija $C = x_0 - F(t_0)$.

Por ejemplo, consideremos $V(u) = u$ en $[-1, 2]$ y el dato $X(1) = 3$. Una primitiva es $u^2/2$. La historia seleccionada es $X(u) = 3 + \int_1^u q\, dq = (5 + u^2)/2$. Derivar confirma $X' = u$ y evaluar en 1 confirma $X = 3$. Elegir $X = 3 + u^2/2$ conservaría la velocidad, pero daría $X(1) = 7/2$: añadir el valor inicial a una primitiva arbitraria no es una regla válida.

En términos de gráficas, la velocidad fija las pendientes de la gráfica de posición. Cambiar la constante desplaza verticalmente esa gráfica y, en el riel, traslada todas las posiciones por la misma cantidad fija. Conserva velocidades y desplazamientos, no los puntos ocupados.

El procedimiento de reconstrucción por integrales se coteja con Kleppner y Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge 2010, cap. 1 §1.7, pp. 19–21. Aquí la existencia y unicidad se justifican con resultados de una variable y aceleración no interviene aún.

Ejercicios. Ejercicio 7.11. Para $V(u) = 1 + 2u$ en $[0, 2]$ y $X(0) = -1$, reconstruye la coordenada normalizada. Verifica velocidad y dato inicial, y recupera la posición física.

Solución. Usando q como variable de integración para distinguirla del límite u,

$$X(u) = -1 + \int_0^u (1 + 2q)\, dq = -1 + u + u^2.$$

La derivada es $X'(u) = 1 + 2u = V(u)$ y $X(0) = -1$. Las escalas de §1 dan $x(t) = L(-1 + u + u^2)$, $u = (t - t_0)/T$, en $[t_0, t_0 + 2T]$. Así $x(t_0) = -L$ y $x'(t) = (L/T)(1 + 2u)$, la velocidad física prescrita.

Proposición 7.5 asegura que no hay otra historia C^1 con esos datos. El término -1 fija la posición; los términos dependientes del tiempo acumulan su cambio.

Ejercicio 7.12. En un intervalo no degenerado que contiene 0, describe todas las historias con $V(u) = 3u^2 - 1$. Demuestra qué cambia al imponer $X(0) = 2$.

Solución. Una primitiva es $F(u) = u^3 - u$. Si $X' = V$, la diferencia $X - F$ tiene derivada cero. El valor medio sobre cualquier subintervalo entre dos puntos demuestra que esa diferencia es constante. Por tanto, todas las historias, y no sólo algunas candidatas, son $X(u) = u^3 - u + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Como $F(0) = 0$, la condición $X(0) = 2$ obliga a $C = 2$. La historia única es $X = u^3 - u + 2$. Cambiar C desplaza la posición física por una longitud $L\Delta C$; no cambia V, sus ceros ni el desplazamiento entre dos tiempos. Sin el dato de posición quedaba una familia entera de historias posibles.

La reconstrucción desde velocidad queda determinada por un solo valor de posición. Cuando el dato sea aceleración, la primera integral reconstruirá una velocidad y habrá que seleccionar también esa primera constante.

7. Reconstruir movimiento desde aceleración

Una gráfica de aceleración informa cuánto cambia la velocidad entre dos instantes. No indica por sí sola qué velocidad tenía el móvil al comienzo, ni dónde estaba. Un mismo cambio de velocidad puede superponerse a velocidades iniciales distintas; incluso después de seleccionar la velocidad, queda la libertad de trasladar la posición.

La reconstrucción sigue las dos relaciones ya establecidas: $v' = a$ y $x' = v$. Integramos primero el dato de aceleración para obtener velocidad y después la velocidad para obtener posición. Ambas operaciones son integrales de una variable. La segunda no autoriza a olvidar la constante que apareció en la primera.

Dos integraciones con datos en un mismo instante. Sea $I = [\alpha, \beta]$, con $\alpha < \beta$, y $t_0 \in I$. La regularidad que adoptamos para el dato es $a \in C(I)$. La velocidad construida será C^1 y la posición será C^2, con derivadas laterales en extremos según la convención de §5.

Proposición 7.6 — Reconstrucción única desde aceleración continua. Dados $a \in C(I)$ y dos valores $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$, existe una única historia $x \in C^2(I)$ tal que $x'' = a$, $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = v_0$. Su velocidad y posición son

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

y

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(q)\, dq = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{q} a(s)\, ds \right) dq.$$

Antes de demostrarla, se pueden leer las tres contribuciones de la última fórmula. x_0 fija una posición, $v_0(t - t_0)$ acumula el aporte de la velocidad inicial y la integral iterada acumula el cambio producido por el dato de aceleración. La variable q recorre los tiempos de la segunda integración; s recorre los de la primera. Las dos letras evitan confundir un límite variable con la variable que se integra.

Demostración. Aplicamos proposición 7.5 a la función continua a, interpretándola como derivada de v, y al dato $v(t_0) = v_0$. Obtenemos una única función $v \in C^1(I)$ con $v' = a$. Aplicamos proposición 7.5 de nuevo, ahora a esta velocidad y a $x(t_0) = x_0$. Se obtiene una única $x \in C^1(I)$

con $x' = v$. Como v es C^1, esa posición es C^2 y $x'' = a$. Sustituir la expresión de v en su integral y separar el término constante produce la fórmula iterada.

Para comprobar la unicidad dentro de la clase anunciada, sea $y \in C^2(I)$ otra candidata. Las funciones y' y v tienen la misma derivada a y el mismo valor v_0 en t_0; la unicidad de la primera aplicación de la proposición 7.5 implica $y' = v$. Las funciones y y x tienen entonces la misma derivada v y el mismo valor x_0 en t_0; la segunda aplicación implica $y = x$. □

No intercambiamos el orden de las integraciones ni usamos un teorema de integración multivariable. El intervalo hasta q pertenece al dominio original porque I es un intervalo. Si $t < t_0$, ambas integrales se interpretan con sus límites orientados.

Las unidades también se acumulan por etapas. La integral de aceleración tiene tipo $(L/T^2)T = L/T$ y puede sumarse a v_0. Integrar esa velocidad produce longitud. En las convenciones de §1, con referencia inicial $u = 0$, las mismas relaciones son

$$V(u) = V_0 + \int_0^u A(s)\,ds, \qquad X(u) = X_0 + \int_0^u V(q)\,dq,$$

donde $v_0 = (L/T)V_0$ y $x_0 = LX_0$ si $x_* = 0$.

Qué se pierde al omitir un dato. Si x es una historia con aceleración a, las funciones

$$y(t) = x(t) + c + b(t - t_0)$$

tienen la misma aceleración, para cualesquiera constantes c de longitud y b de velocidad. Su posición inicial cambia en c y su velocidad inicial en b. Recíprocamente, si $y'' = x''$, el valor medio aplicado primero a $y' - x'$ muestra que esa diferencia es una constante b; aplicado después a $y - x - b(t - t_0)$ muestra que la diferencia restante es una constante c. Ésa es toda la libertad disponible, no sólo una familia de ejemplos.

Fijar x_0 elimina c, pero deja b. Fijar únicamente v_0 elimina b, pero permite una traslación de posición. La aceleración y ambos datos, tomados en un mismo instante, eliminan las dos libertades.

Principio metodológico 7.6 — Cerrar la reconstrucción con los datos iniciales necesarios. Al integrar una aceleración prescrita, se deben seleccionar tanto la velocidad inicial como la posición inicial. Una familia de primitivas no es una historia física determinada. Cada dato se verifica en el instante donde fue impuesto.

Esta lectura de las constantes concuerda con Shankar, *Fundamentals of Physics I*, edición ampliada de 2019, cap. 1 §1.4, pp. 6–8, y con Kleppner–Kolenkow, copia Cambridge 2010, cap. 1 §1.7, pp. 19–21. Aquí el argumento vale para aceleración continua variable; no utiliza la hipótesis de aceleración constante de algunos pasajes de esas obras.

Un dato de aceleración variable. Consideremos $A(u) = 1 - u$ en $[0, 2]$, con $V(0) = 2$ y $X(0) = -1$. Integrar primero da $V(u) = 2 + u - u^2/2$. Integrar esa función da $X(u) = -1 + 2u + u^2/2 - u^3/6$. Las derivadas $X' = V$ y $V' = A$ verifican la reconstrucción, junto con los dos datos en cero.

La gráfica de aceleración cruza el eje en $u = 1$. Allí la velocidad pasa de crecer a decrecer, pero no se anula: $V(1) = 5/2$. Un cero de aceleración no es un reposo instantáneo. La reconstrucción deja visible por qué esa información no podía obtenerse de la altura de A sin conocer también la velocidad inicial.

Ejercicios. Ejercicio 7.13. Para $A(u) = 2u$ en $[0, 2]$, con $V(0) = -1$ y $X(0) = 0$, reconstruye velocidad y posición. Verifica los datos y determina si el móvil cambia de sentido dentro del intervalo.

Solución. La primera integración debe conservar la velocidad inicial:

$$V(u) = -1 + \int_0^u 2s\,ds = -1 + u^2.$$

La segunda debe conservar la posición inicial:

$$X(u) = \int_0^u (-1 + q^2)\,dq = -u + \frac{u^3}{3}.$$

Se comprueba $X' = V$, $V' = 2u = A$, $X(0) = 0$ y $V(0) = -1$. En magnitudes físicas, $x = L(-u + u^3/3)$, $v = (L/T)(-1 + u^2)$ y $a = (L/T^2)2u$.

El único cero de V en el dominio es $u = 1$. La componente es negativa en $[0, 1)$ y positiva en $(1, 2]$, por lo que definición 7.3 certifica una inversión local. La posición alcanza allí un mínimo, $X(1) = -2/3$. La aceleración es positiva en ese instante y durante el movimiento posterior; ese signo se interpreta junto al de la velocidad, como en §4.

Ejercicio 7.14. En un intervalo no degenerado que contiene 0, compara la información de $A \equiv 0$ sola, de $A \equiv 0$ más $X(0) = X_0$, y de esos datos más $V(0) = V_0$. Describe todas las historias compatibles y justifica la cantidad de información que falta.

Solución. Si $A = V' = 0$, el valor medio implica que V es una constante c_1. Integrar $X' = c_1$, o aplicar proposición 7.5, da $X(u) = c_0 + c_1 u$. Por tanto, la aceleración sola deja dos constantes independientes. Por ejemplo, $X = 0$, $X = 1$ y $X = u$ cumplen $A = 0$ y son historias diferentes.

La posición en cero es c_0, de modo que $X(0) = X_0$ fija $c_0 = X_0$ pero permite cualquier c_1. Todas esas historias pasan por la misma posición al inicio y pueden tener velocidades distintas. Finalmente, $V(0) = V_0$ fija $c_1 = V_0$. La única historia es $X = X_0 + V_0 u$, con velocidad física $(L/T)V_0$.

La prueba mediante valor medio muestra que no quedan soluciones adicionales fuera de la familia afín dentro de la regularidad considerada. Tampoco afirma por qué la aceleración es cero: ese dato fue prescrito.

Las dos constantes que seleccionan una historia tienen significados diferentes y comprobables. Cuando la velocidad no varía, esa reconstrucción adopta la forma afín que acabamos de obtener.

8. Movimiento uniforme

Un registro muestra que la coordenada de un móvil aumenta la misma cantidad en cada segundo. Otro muestra que disminuye la misma cantidad. Ambos pueden describirse mediante una velocidad constante; el signo distingue el sentido y el módulo fija cuánto recorrido se acumula por unidad de tiempo. Si la cantidad por segundo es cero, la misma familia incluye el reposo.

Hay que distinguir una hipótesis válida durante un intervalo de una coincidencia entre unas pocas observaciones. Dos posiciones siempre permiten calcular una velocidad media; no demuestran que esa velocidad se mantuviera entre ellas.

La condición y su ley temporal. Definición 7.5 — Movimiento uniforme, incluido el reposo. Una historia rectilínea $x \in C^1(I)$, sobre un intervalo temporal no degenerado y en la representación fija de §1, es uniforme si existe una constante v_0 tal que $v(t) = v_0$ en todo I. Si $v_0 = 0$, la historia es de reposo.

La definición fija una componente constante respecto de una orientación fija. No se define el movimiento uniforme mediante una velocidad media ni sólo mediante rapidez constante. El reposo es el caso cero de la misma condición, no una excepción a sus fórmulas.

Proposición 7.7 — Caracterización del movimiento uniforme. Sea $x \in C^1(I)$ y $t_0 \in I$, con $x_0 = x(t_0)$. La historia es uniforme con componente v_0 si y sólo si

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \qquad \text{para todo } t \in I.$$

Si además $x \in C^2(I)$, el movimiento es uniforme si y sólo si $a(t) = 0$ en todo el intervalo.

Demostración. En $t = t_0$, la igualdad de posición es el dato $x(t_0) = x_0$. Si $v = v_0$ y $t \neq t_0$, el intervalo cerrado entre ambos instantes es no degenerado y está contenido en I; proposición 7.5 da

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 \, ds = x_0 + v_0(t - t_0).$$

El resultado se conserva para $t < t_0$ por la orientación de la integral. Recíprocamente, derivar la ley afín da $x' = v_0$, que es la condición de la definición 7.5.

Bajo la regularidad C^2, una velocidad constante tiene derivada $a = 0$. Para la conversa, si $a = v' = 0$, el valor medio aplicado a v entre dos instantes cualesquiera da igualdad de sus valores. Así v es constante en I. □

Cada dirección tiene una tarea propia: la integral produce la ley a partir de la condición; la derivada recupera la condición a partir de la ley. Una aceleración nula no obliga a posición constante: permite cualquier velocidad constante. El reposo requiere además que el valor seleccionado de esa velocidad sea cero.

Representaciones de la misma historia. Para un movimiento uniforme, la gráfica temporal de posición es un segmento de recta o parte de una recta, según el dominio; la gráfica de velocidad es horizontal y la de aceleración, cuando se considera, está sobre el eje temporal. Esas gráficas se relacionan mediante derivadas, aunque sus alturas representen magnitudes diferentes.

Para $s < t$ en I, proposición 7.4 y proposición 7.7 dan

$$\Delta x = v_0(t - s), \qquad d_{\text{rec}} = |v_0|(t - s).$$

La distancia entre las posiciones extremas coincide con el recorrido porque no hay aportes de signos opuestos. Las cantidades son cero si $v_0 = 0$.

Por ejemplo, en $[0, 4\,\text{s}]$, la ley $x(t) = 3\,\text{m} - (2\,\text{m/s})t$ representa movimiento uniforme hacia coordenadas menores. Entre los extremos, el desplazamiento tiene componente $-8\,\text{m}$ y el recorrido es $8\,\text{m}$. En cambio, $x(t) = 3\,\text{m}$ sobre el mismo intervalo representa reposo y produce cero en ambas cantidades. La pendiente horizontal de esta última gráfica de posición se distingue de la gráfica horizontal de velocidad del primer caso.

Seleccionar una ley no verifica la hipótesis. Si se sabe de antemano que una historia es uniforme y se conocen $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ para $t_1 < t_2$, proposición 7.7 obliga a

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \qquad x(t) = x_1 + v_0(t - t_1).$$

Dentro de esa familia hay una historia única. Sin la hipótesis de uniformidad, el cociente sigue siendo una velocidad media, pero deja abierta la forma de la función entre las observaciones.

La condición cinemática tampoco determina una causa física. No hemos deducido una ley de inercia ni identificado fuerzas: describimos la consecuencia de prescribir una velocidad constante.

La reconstrucción integral utilizada se coteja con Kleppner–Kolenkow, copia Cambridge 2010, cap. 1 §1.7, pp. 19–21; el caso constante es una especialización de esa operación.

Ejercicio.

Ejercicio 7.15. Una historia suave sobre $[0,1]$ satisface $X(0)=0$ y $X(1)=1$. Decide si los datos prueban movimiento uniforme. Construye una historia uniforme y una familia de historias no uniformes compatibles con ellos.

Solución. La ley $X_{\mathrm{unif}}(u)=u$ cumple ambos datos y tiene $V=1$ constante. Para construir alternativas, necesitamos un término que se anule en los dos tiempos observados. El producto $u(1-u)$ cumple esa condición. Por tanto, para cada constante adimensional $c\neq 0$,

$$X_c(u)=u+c\,u(1-u)$$

conserva $X_c(0)=0$ y $X_c(1)=1$, pero su velocidad es $V_c(u)=1+c(1-2u)$. Esa función no es constante porque $V_c'=-2c\neq 0$. Todas las historias son polinomiales y suaves, de modo que la falta de uniformidad no depende de irregularidades ocultas.

La velocidad media normalizada entre los extremos es 1 en todos los casos; la física es L/T. Por ejemplo, para $c=1/2$, la componente normalizada pasa de $3/2$ a $1/2$ y permanece positiva: puede fallar la uniformidad incluso sin un regreso. Las dos observaciones no controlan las velocidades intermedias.

Si se añade la hipótesis de la definición 7.5, proposición 7.7 obliga a una ley $X=X_0+V_0u$. Los datos fijan $X_0=0$ y $V_0=1$, seleccionando $X=u$. La conclusión de unicidad es relativa a esa clase declarada; no convierte dos muestras en una demostración de la hipótesis física.

El movimiento uniforme queda caracterizado por una condición temporal, una ley afín y un criterio de aceleración nula bajo regularidad suficiente. La reconstrucción permite probar esas equivalencias y mantener separado lo que se supone durante el intervalo de lo que muestran sus extremos.

9. Aceleración constante

Un móvil puede aumentar su componente de velocidad en la misma cantidad durante cada segundo, o disminuirla a un ritmo constante. La condición se refiere al cambio de velocidad, no al cambio de posición. Si se conoce además una posición y una velocidad en un instante, las dos integraciones de §7 seleccionan una historia cuadrática.

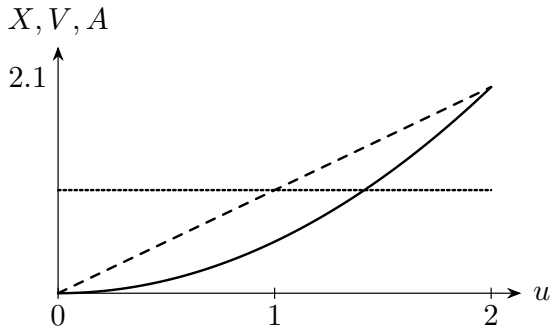


Figura 7.2. Para $X=u^2/2$ en $0\le u\le 2$, la línea continua representa X, la discontinua $V=u$ y la punteada $A=1$. Son magnitudes normalizadas distintas, ligadas por derivación. Véase §9.

Esa forma temporal es una consecuencia de la aceleración prescrita. No explica qué la produce ni garantiza que el dato constante continúe siendo válido fuera del intervalo considerado. Mantendremos separados el cálculo bajo la hipótesis y el dominio donde se adopta esa hipótesis.

De la condición a las leyes temporales. Definición 7.6 — Movimiento de aceleración constante. Una historia rectilínea $x \in C^2(I)$, en la representación fija de §1 y sobre un intervalo no degenerado I, tiene aceleración constante si existe una constante a_0 tal que $x''(t) = a_0$ para todo $t \in I$. Para seleccionar una historia se prescriben $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = v_0$ en un mismo $t_0 \in I$.

El caso $a_0 = 0$ está incluido y corresponde a la familia uniforme de §8. Si $a_0 \neq 0$, la velocidad varía, pero su signo depende también de v_0 y del tiempo. Aceleración constante no significa rapidez creciente durante toda la historia.

Proposición 7.8 — Leyes de aceleración constante e identidad sin tiempo. Bajo definición 7.6 y sus datos iniciales, la historia única satisface, para todo $t \in I$,

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \qquad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2.$$

También se cumple

$$v(t)^2 - v_0^2 = 2a_0(x(t) - x_0),$$

incluido el caso $a_0 = 0$. La diferencia de posición es desplazamiento firmado, no distancia recorrida.

Demostración. En $t = t_0$, las dos leyes temporales recuperan los datos iniciales. Para $t \neq t_0$, el intervalo cerrado entre ambos instantes es no degenerado y está contenido en I; proposición 7.6 da

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_0 \, ds = v_0 + a_0(t - t_0).$$

Integrar esa velocidad produce

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a_0(q - t_0)) \, dq = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2.$$

La unicidad es la ya probada en la proposición 7.6. Para la identidad, escribamos $h = t - t_0$. Al expandir el cuadrado se obtiene

$$(v_0 + a_0 h)^2 - v_0^2 = 2a_0 v_0 h + a_0^2 h^2 = 2a_0 \left(v_0 h + \frac{a_0}{2} h^2 \right).$$

El último paréntesis es $x(t) - x_0$. No se ha dividido por a_0 ni por la velocidad, de modo que el argumento conserva sus ceros. □

La identidad relaciona valores tomados en un mismo instante. Al elevar al cuadrado se pierde información de signo: un valor de v^2 no permite decidir por sí solo entre dos componentes opuestas. Las leyes temporales conservan esa información y permiten filtrar cuál ocurre en el dominio de la historia.

Las unidades de cada término de posición son longitud: $v_0(t - t_0)$ y $a_0(t - t_0)^2/2$ pueden sumarse a x_0. En la identidad, ambos miembros tienen tipo L^2/T^2. El análisis dimensional controla la coherencia, pero no demuestra la fórmula.

Inversión, recorrido y dominio. Para $a_0 \neq 0$, la única candidata a un cero de velocidad es $t_c = t_0 - v_0/a_0$. Si está en el interior de I, la función afín v tiene signos opuestos a ambos lados y definición 7.3 certifica una inversión. Si cae fuera del dominio, la historia declarada no contiene ese evento. Un cero en un extremo no proporciona por sí solo los dos semientornos que exige definición 7.3.

Por ejemplo, $X(u) = 4 - u + u^2/2$ en $[0, 3]$ tiene $V = -1 + u$ y $A = 1$. Antes de $u = 1$, la componente negativa aumenta hacia cero y la rapidez disminuye. Después, la componente y la rapidez aumentan. La aceleración positiva no cambia en el proceso; cambia su relación con el signo de la velocidad.

Para evaluar distancia se vuelve a proposición 7.4 y se integra $|v|$, separando en las inversiones que pertenezcan al dominio. Sustituir distancia por desplazamiento en la identidad cuadrática puede dar una respuesta incorrecta cuando hay regreso.

Principio metodológico 7.7 — Usar las fórmulas sólo en el dominio de la hipótesis. Las leyes de la proposición 7.8 se aplican en el intervalo donde se prescribe aceleración constante y con los datos iniciales que las seleccionan. La posibilidad algebraica de evaluar un polinomio fuera de ese intervalo no autoriza a prolongar la historia física.

El control de estas fórmulas se coteja con Shankar, *Fundamentals of Physics I*, edición ampliada de 2019, cap. 1 §1.4, pp. 6–10, y Kleppner–Kolenkow, copia Cambridge 2010, cap. 1 §1.7, p. 21. La demostración propia conserva aceleración cero y el carácter firmado del desplazamiento.

Ejercicios. Ejercicio 7.16. En $[0, 5]$ se prescribe $A = -1$, con $X(0) = 1$ y $V(0) = 2$. Calcula posición, velocidad, inversión, desplazamiento y distancia recorrida entre los extremos.

Solución. Integrar con ambos datos da $V(u) = 2 - u$ y $X(u) = 1 + 2u - u^2/2$. El cero $u = 2$ es interior; el signo pasa de positivo a negativo y hay inversión. Allí $X(2) = 3$. En el extremo final, $X(5) = -3/2$, de modo que $\Delta x = L(-3/2 - 1) = -5L/2$.

El recorrido anterior a la inversión es $L(X(2) - X(0)) = 2L$. Después se recorren $L(X(2) - X(5)) = 9L/2$. Por tanto, $d_{\text{rec}} = 13L/2$, mayor que $|\Delta x| = 5L/2$. Las componentes físicas son $v = (L/T)(2 - u)$ y $a = -L/T^2$; la posición es $x = LX$. El cálculo verifica también $X' = V$ y $V' = A$.

Ejercicio 7.17. Demuestra la identidad $V^2 - V_0^2 = 2A_0(X - X_0)$ desde las leyes temporales normalizadas. Trata $A_0 = 0$ y explica qué información no recupera la identidad por sí sola.

Solución. Sea $h = u - u_0$ la diferencia respecto del instante normalizado de los datos. Las leyes son $V = V_0 + A_0 h$ y $X - X_0 = V_0 h + A_0 h^2/2$. Entonces

$$V^2 - V_0^2 = 2V_0 A_0 h + A_0^2 h^2 = 2A_0(X - X_0).$$

Si $A_0 = 0$, ambos miembros valen cero; no aparece una división inválida. La identidad queda $V^2 = V_0^2$ y no contiene X. Para reconstruir posición seguimos necesitando la ley temporal y el dato inicial. Si $A_0 \neq 0$, tampoco el cuadrado distingue las dos orientaciones posibles de velocidad.

El atajo $h = (V - V_0)/A_0$ sólo es admisible cuando $A_0 \neq 0$. La expansión trabaja directamente con las leyes y evita perder el caso cero.

Ejercicio 7.18. Para $A(u) = u$ en $[0, 2]$, con $V(0) = X(0) = 0$, audita la propuesta $X_{\text{pret}}(u) = A(u)u^2/2$. Reconstruye la historia correcta y calcula el residuo de aceleración de la propuesta.

Solución. La aceleración varía, por lo que proposición 7.8 no permite sustituir una constante por $A(u)$. Proposición 7.6 da $V(u) = \int_0^u s\,ds = u^2/2$ y $X(u) = \int_0^u q^2/2\,dq = u^3/6$. Ambas derivadas y ambos datos iniciales quedan verificados.

La propuesta es $X_{\text{pret}} = u^3/2$, con segunda derivada $3u$. Su residuo respecto del dato prescrito es $R_A(u) = X''_{\text{pret}}(u) - A(u) = 2u$. Los datos iniciales de posición y velocidad sí son correctos, pero la aceleración falla en cada $u > 0$. En unidades físicas, el residuo es $(L/T^2)2u$. Verificar dos datos no sustituye verificar la ley durante el intervalo.

La forma cuadrática queda vinculada a una hipótesis temporal concreta. Cuando esa hipótesis cambia en un instante conocido, cada tramo debe reconstruirse con los valores que hereda de su unión.

10. Historias definidas por tramos

Una descripción puede prescribir aceleración constante durante una parte del recorrido y otra aceleración después. Integrar cada expresión por separado produce fórmulas, pero todavía falta comprobar si representan una sola historia: al llegar al instante de cambio, ambas deben asignar la misma posición. Si además se pretende una velocidad clásica en ese instante, las pendientes también deben coincidir.

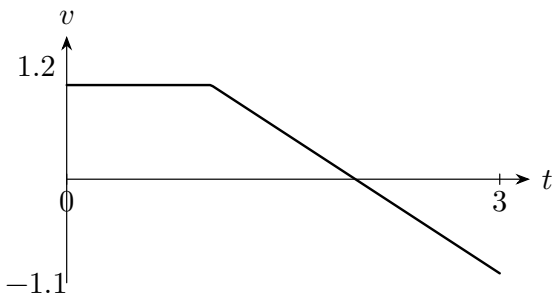


Figura 7.3. La ley $v = 1$ hasta $t = 1$ y $v = 2 - t$ después es continua. La aceleración cambia de 0 a -1 en el empalme y no tiene allí un valor clásico único. No hay salto de posición ni impulso requerido por un salto de velocidad. Véase §10.

Los valores finales de un tramo se convierten en datos del siguiente. Esa transferencia evita reiniciar artificialmente posición y reloj cada vez que cambia la fórmula.

Una función construida con varios intervalos. Definición 7.7 — Historia admisible por tramos. Sea una partición finita $\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = \beta$. Para cada j, sea $x_j \in C^1([\tau_{j-1}, \tau_j])$, con la convención lateral en extremos. Si los valores coinciden en cada unión,

$$x_j(\tau_j) = x_{j+1}(\tau_j) \qquad (1 \le j < n),$$

las funciones definen una única historia continua x sobre $[\alpha, \beta]$, que coincide con x_j en cada tramo. Diremos que es admisible por tramos en este sentido. Cuando se necesite aceleración dentro de un tramo, se exigirá allí la diferenciabilidad adicional correspondiente, por ejemplo $x_j \in C^2$.

La coincidencia de valores hace que la ley sea inequívoca en los nodos τ_j y excluye saltos de posición. La definición no exige todavía que la historia completa sea C^1: admite pendientes laterales distintas. «Admisible» nombra esta clase cinemática declarada, sin afirmar que toda unión tenga una explicación dinámica dentro del modelo.

Una fórmula del segundo tramo suele escribirse con tiempo local $w = t - \tau_j$. El mismo reloj físico sigue vigente; $w = 0$ identifica la unión. Cambiar la variable en una fórmula no pone a cero la posición ni la velocidad.

Qué exige una velocidad en la unión. Proposición 7.9 — Criterio de empalme C^1. Bajo definición 7.7, la historia completa es de clase C^1 en $[\alpha, \beta]$ si y sólo si, en cada nodo interior, coinciden las derivadas de los dos tramos:

$$x_j'(\tau_j) = x_{j+1}'(\tau_j) \qquad (1 \le j < n).$$

Demostración. Fijemos un nodo $c = \tau_j$ y usemos el valor común de posición $x(c)$. Para $h > 0$ suficientemente pequeño, el cociente $(x(c+h) - x(c))/h$ pertenece al tramo derecho. Por el valor medio es $x'_{j+1}(\xi_h)$, con $\xi_h \in (c, c+h)$. La continuidad de la derivada hasta el extremo derecho de la unión da límite $x'_{j+1}(c)$ cuando $h \to 0^+$. Para $h < 0$, el argumento sobre el tramo izquierdo da límite $x'_j(c)$ cuando $h \to 0^-$.

La derivada bilateral existe si y sólo si esos límites coinciden. Si coinciden en todos los nodos, la derivada global reúne las derivadas continuas de cada tramo y sus valores comunes; es continua también en las uniones. Así la historia es C^1. Recíprocamente, si la historia es C^1, su derivada en cada nodo coincide con ambas derivadas laterales, que por tanto son iguales. □

La hipótesis de continuidad de las derivadas hasta los extremos de cada tramo permite identificar los límites de los cocientes. No se deduce el criterio sólo de mirar pendientes de un dibujo ni de asignar a mano un valor de velocidad en el nodo.

Conservar posición y velocidad tampoco asegura aceleración. Si cada tramo es C^2, para decidir si existe $x''(c)$ se revisan los cocientes de la velocidad a ambos lados. Límites laterales distintos impiden una aceleración clásica en ese instante, aunque posición y velocidad sean continuas.

Principio metodológico 7.8 — Auditar cada unión antes de atribuir una derivada. En un nodo se comprueban primero valores de posición, después cocientes laterales de posición y, si corresponde, cocientes laterales de velocidad. Una fórmula por tramos no autoriza a usar sus derivadas interiores en el nodo sin ese control.

No se introduce una aceleración generalizada para reparar una esquina ni se interpreta un salto mediante impulsos. Si falta una derivada clásica, se declara su ausencia y se limita el uso de las fórmulas a los tramos donde esa derivada existe.

Transferir datos en lugar de reiniciar. Consideremos, en tiempo normalizado, $X(u) = 2+u$ para $0 \le u \le 1$. Al llegar a la unión, $X(1) = 3$ y $V(1) = 1$. Si el segundo tramo prescribe $A = 2$, escribir $w = u - 1$ y usar esos datos da $X = 3 + w + w^2$ y $V = 1 + 2w$. La nueva fórmula conserva posición y velocidad en $w = 0$. Elegir en cambio $X = w^2$ produciría un salto de posición; elegir $X = 3 + w^2$ conservaría posición, pero cambiaría la pendiente de 1 a 0.

La reconstrucción de la proposición 7.6 se aplica a cada tramo con sus propios datos. Si la aceleración tiene valores laterales distintos, cada extensión del dato hasta la unión pertenece a su tramo y no determina una aceleración global allí.

Para el recorrido, una historia C^1 ya está cubierta por la proposición 7.4. Si sólo es C^1 por tramos, se calcula la longitud de cada restricción y se suman sus contribuciones. Esta suma concuerda con la definición geométrica: añadir los nodos a una partición no acorta su longitud poligonal, y las particiones de cada tramo pueden reunirse en una partición del intervalo completo. No se aplica una fórmula que exija C^1 global sin verificar esa hipótesis.

Ejercicios. Ejercicio 7.19. En $[0, 2]$, sea $X(u) = u^2$ para $u \le 1$ y $X(u) = 1+2(u-1)+3(u-1)^2$ para $u \ge 1$. Audita continuidad, velocidad y aceleración en la unión.

Solución. Ambas expresiones dan $X(1) = 1$. Las derivadas de los tramos son $2u$ y $2 + 6(u-1)$; sus valores laterales en 1 son ambos 2. Proposición 7.9 implica que X es C^1 y que $V(1) = 2$.

Para la aceleración, las derivadas de velocidad en los dos tramos son 2 y 6. El cociente de $V(u) - V(1)$ entre $u - 1$ tiende a 2 por la izquierda y a 6 por la derecha. Por tanto, $V'(1)$ no existe. La posición y la velocidad tienen valores clásicos en el nodo, pero la aceleración no. En magnitudes físicas, $v = (L/T)V$ sigue siendo continua y las aceleraciones laterales son $2L/T^2$ y $6L/T^2$.

Ejercicio 7.20. En $[0,2]$, sea $X(u)=u$ para $u\le 1$ y $X(u)=1+2(u-1)$ para $u\ge 1$. Determina si hay velocidad y rapidez instantáneas clásicas en $u=1$.

Solución. Los valores de posición coinciden en 1, así que la función es continua. Para $h<0$, $(X(1+h)-X(1))/h=1$; para $h>0$, ese cociente vale 2. Los límites son diferentes y no existe $X'(1)$.

Dentro de los tramos, las componentes normalizadas son 1 y 2, y las rapideces físicas son L/T y $2L/T$. En el nodo no hay vector velocidad clásico del cual tomar la norma; tampoco hay rapidez instantánea clásica según la definición usada en el capítulo. Asignar una de las dos cifras al nodo no crea la derivada que falta. La historia pertenece a definición 7.7, pero no es C^1 global.

Ejercicio 7.21. En tiempo normalizado, prescribe $A=1$ para $0\le u<1$ y $A=-1$ para $1<u\le 3$, sin asignar aceleración clásica en $u=1$. Con $X(0)=V(0)=0$, construye un empalme C^1 y calcula la distancia total. Audita la aceleración en la unión.

Solución. En el primer tramo, integrar da $V(u)=u$ y $X(u)=u^2/2$. Sus valores finales son $V(1)=1$ y $X(1)=1/2$. Esos valores seleccionan el segundo tramo. Con $w=u-1$, la aceleración -1 da

$$V(u)=1-w,\qquad X(u)=\frac{1}{2}+w-\frac{w^2}{2},\qquad 1\le u\le 3.$$

En $w=0$ coinciden posición y pendiente, luego proposición 7.9 certifica el empalme C^1. Las derivadas laterales de velocidad son 1 y -1, por lo que no existe aceleración clásica en el nodo. Las fórmulas de aceleración cumplen el dato en los intervalos donde fue prescrito.

La velocidad es positiva hasta $u=2$, se anula allí y es negativa después. Se tienen $X(0)=0$, $X(2)=1$ y $X(3)=1/2$. El recorrido es por tanto $L(1-0)+L(1-1/2)=3L/2$. El desplazamiento es sólo $L/2$, porque parte del recorrido se deshace en el último tramo.

La exclusión de $u=1$ en el dato de aceleración es necesaria: asignarle el valor 1 o -1 no alteraría una integral, pero ninguno sería la segunda derivada de esta posición en el nodo. El problema distingue una asignación aislada de un dato integral de la existencia de una derivada clásica.

Una historia por tramos queda determinada por sus leyes, sus dominios y sus uniones. Con esos datos ya se pueden buscar instantes donde alcanza una marca o coincide con otra historia, sin extender una fórmula fuera del tramo que la define.

11. Eventos, encuentros y admisibilidad

Conocer una ley temporal permite preguntar cuándo el móvil alcanza una marca del riel. La incógnita pasa a ser el tiempo: se resuelve una ecuación de posición. Pero las raíces algebraicas sólo son candidatas. Cada una debe pertenecer al dominio de la historia y al tramo cuya fórmula se utilizó.

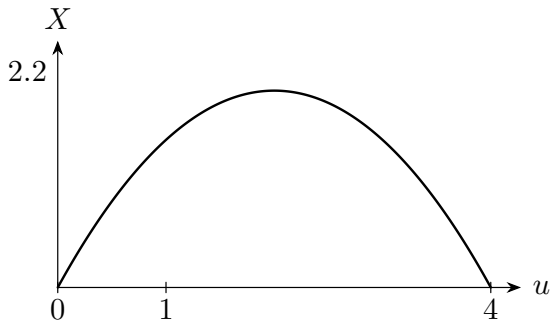


Figura 7.4. La ley $X = 2u - u^2/2$ alcanza un máximo en $u = 2$, donde $V = 0$ y $A = -1$. La continuación después del evento invierte el sentido; imponer detención permanente sería otro modelo. Véase §11.

Un encuentro requiere además comparar dos posiciones en un mismo instante, marco y reloj. Que dos móviles recorran alguna vez la misma marca no significa que se encuentren: pueden llegar en tiempos diferentes.

Instantes de un evento de posición. Definición 7.8 — Conjunto de tiempos de un evento de posición. Para una historia $x : I \to \mathbb{R}$ y una coordenada fija ξ, definimos

$$\mathcal{T}_\xi(x) = \{t \in I : x(t) = \xi\}.$$

El conjunto reúne todos los instantes de la historia en que se ocupa el punto $O + \xi e$.

La definición incluye el dominio dentro de la condición. El resultado puede ser vacío, contener un tiempo, varios tiempos o un intervalo entero. Una historia en reposo sobre la marca durante un intervalo hace que cada instante de ese intervalo sea un evento; no existe entonces una única «hora de llegada» sin una condición adicional.

Por ejemplo, $X(u) = (u-1)^2$ en $[0, 2]$ alcanza $X = 0$ sólo en $u = 1$, mientras que alcanza $X = 1$ en $u = 0$ y $u = 2$. El cero de $(u-1)^2$ es una raíz doble, pero corresponde a un solo instante. La multiplicidad algebraica no cuenta eventos distintos. Aquí $V = 2(u-1)$ cambia de signo en el evento central; la historia toca la marca y regresa. Resolver $X = 0$ no describe por sí solo ese comportamiento: se usó también el signo de la velocidad.

Si la ley está definida por tramos, se resuelve $x_j(t) = \xi$ en cada dominio $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Las raíces que no pertenecen a ese dominio se descartan. Los nodos que aparezcan en dos tramos se reúnen como un mismo instante, porque el resultado es un conjunto y definición 7.7 asegura un único valor de posición allí.

Encuentros en una descripción común. Definición 7.9 — Encuentro en un marco y reloj comunes. Sean dos historias rectilíneas $x_A : I_A \to \mathbb{R}$ y $x_B : I_B \to \mathbb{R}$, expresadas respecto del mismo origen, orientación, unidad de longitud y reloj. Su conjunto de encuentros es

$$\mathcal{C}(x_A, x_B) = \{t \in I_A \cap I_B : x_A(t) = x_B(t)\}.$$

La intersección de dominios fija los tiempos en que ambas historias están disponibles. Puede ser un intervalo, un solo punto o el conjunto vacío. Si es vacía, no hay un encuentro definido por esas dos historias. Una raíz de una ecuación prolongada no añade un instante a esa intersección.

La igualdad de coordenadas representa igualdad de puntos porque el marco es común. Comparar cifras medidas desde orígenes distintos, sin traducirlas a una representación común, no demostraría encuentro. Tampoco estamos cambiando a un observador móvil: se mantienen los datos fijos de §1.

Para dos leyes afines, la ecuación de encuentro se reduce a una igualdad lineal. Si las velocidades son distintas, hay como máximo una candidata; si son iguales y las posiciones iniciales difieren, no hay ninguna; si las leyes coinciden, todo el dominio común pertenece al conjunto. Las tres alternativas deben considerarse antes de dividir por una diferencia de velocidades que puede ser cero.

La raíz y el dominio tienen funciones distintas. Supongamos que una ley cuadrática se adopta sólo hasta un tiempo final conocido. El polinomio puede tener otra raíz más allá de ese tiempo; esa raíz pertenece a su prolongación algebraica, no al conjunto de eventos de la historia declarada. Del mismo modo, un tiempo negativo es admisible si está dentro del intervalo elegido: el origen del reloj no impone una prohibición física a todo tiempo anterior.

Esta distinción se coteja con Shankar, edición ampliada de 2019, cap. 1 §1.5, pp. 10–12. Se usa el control del intervalo y de raíces adicionales; la situación y los cálculos de los ejercicios siguientes son propios y no reproducen su problema de caída.

Una igualdad de posición en un nodo tampoco garantiza velocidades iguales. El evento puede estar definido por continuidad, aunque la derivada falte allí. Para informar cómo ocurre el evento, la regularidad y los signos se auditan por separado.

Ejercicios. Ejercicio 7.22. En $[0, 2]$, sean $X_A(u) = u$ y $X_B(u) = 2 - u$. Halla sus encuentros. Compara con el caso $X_B = X_A$ y con una tercera historia $X_C(u) = u + 1$ sobre el mismo dominio.

Solución. Resolver $u = 2 - u$ da $u = 1$, que pertenece a $[0, 2]$. El conjunto de encuentros normalizado es $\{1\}$, y la posición común es $X = 1$. En magnitudes físicas, el encuentro ocurre en $t = t_0 + T$ y en $P = O + Le$.

Si $X_B = X_A$, la igualdad se cumple para cada $u \in [0, 2]$. El conjunto es todo el intervalo; hablar de un único encuentro omitiría la coincidencia continua. Para $X_C = u + 1$, la ecuación $u = u + 1$ equivale a $0 = 1$ y no tiene solución. Ambos móviles tienen la misma velocidad normalizada, pero sus posiciones difieren siempre en 1. La separación física es L, y el conjunto de encuentros es vacío. No se divide por la diferencia nula de velocidades.

Ejercicio 7.23. La historia $X(u) = 2 + u - u^2$ está declarada en $[0, 2]$. Encuentra todos los tiempos en que $X = 0$ y juzga las raíces de la ecuación. Explica qué cambiaría si el dominio declarado fuese $[-1, 2]$.

Solución. La ecuación es $u^2 - u - 2 = 0$, que factoriza como $(u - 2)(u + 1) = 0$. Las raíces del polinomio son 2 y -1. Al intersectarlas con $[0, 2]$, queda sólo $u = 2$. El conjunto físico de eventos es $\{t_0 + 2T\}$.

Se descarta $u = -1$ porque no pertenece al dominio dado, no porque todo tiempo negativo sea inadmisible. Si la misma ley se declarase y fuese válida en $[-1, 2]$, ambos extremos serían eventos: el conjunto sería $\{t_0 - T, t_0 + 2T\}$. Eso sería otra declaración de dominio, que no se obtiene automáticamente al resolver la ecuación de la historia original.

Como $V(u) = 1 - 2u$, los signos de velocidad en las dos raíces prolongadas serían diferentes. Esa información puede interpretar los eventos cuando pertenecen al dominio, pero no convierte una raíz excluida en un evento real de la historia inicial.

La búsqueda de eventos entrega conjuntos de tiempos acompañados de dominio y, cuando se pide, de posición y regularidad. Las ecuaciones aportan candidatas; la historia declarada determina cuáles son admisibles.

12. Problemas inversos e información faltante

Hasta aquí hemos partido de una ley de velocidad o aceleración y de los datos iniciales que seleccionan una historia. Otra situación comienza con posiciones registradas en algunos instantes. Se desea recuperar la ley que las produjo. La pregunta cambia: ya no integramos una función temporal conocida, sino que examinamos qué información permiten determinar unas condiciones finitas.

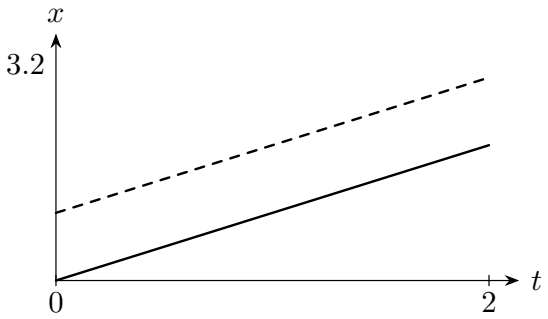


Figura 7.5. Las historias $x = t$ y $x = 1 + t$ comparten velocidad y aceleración. Para seleccionar una de ellas hace falta un dato de posición. Todas las variables del ejemplo están normalizadas. Véase §12.

Tres posiciones pueden fijar los coeficientes de un polinomio cuadrático. Sin embargo, entre las marcas temporales hay una infinidad de historias suaves que pasan por los mismos puntos. Para distinguir ambas afirmaciones hace falta declarar primero la clase de historias admisibles.

Identificar dentro de una familia. Trabajamos con las escalas de §1: $u = (t - t_0)/T$ y $x = x_* + LX(u)$, con $L, T > 0$. Los datos son pares (u_j, y_j), donde y_j es una posición normalizada. No sumamos potencias de tiempo físico a una longitud: los coeficientes y la variable de los polinomios siguientes son adimensionales.

Definición 7.10 — Identificación dentro de una clase cinemática. Sea una familia declarada de historias $X_\theta : J \to \mathbb{R}$, parametrizada por $\theta \in \Theta$, y sean los datos finitos $X_\theta(u_j) = y_j$, con $u_j \in J$. El conjunto de parámetros compatibles es

$$\Theta_{\text{datos}} = \{\theta \in \Theta : X_\theta(u_j) = y_j \text{ para todo } j\}.$$

Hay existencia si ese conjunto no es vacío; los parámetros quedan identificados de manera única si contiene un solo elemento.

La unicidad se refiere a la parametrización elegida. Si dos parámetros distintos describen la misma historia, la historia podría quedar determinada sin que lo estuvieran los parámetros. En la familia $X(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2$ sobre un intervalo no degenerado, los coeficientes sí representan la historia de manera única: un polinomio nulo en todo ese intervalo tiene todos sus coeficientes nulos.

Una incompatibilidad puede aparecer antes de intentar un ajuste. Dos posiciones distintas atribuidas al mismo instante no pueden ser valores de una función. Si los datos son compatibles, todavía queda por examinar si las restricciones bastan dentro de la familia elegida.

Tres tiempos distintos y una ley cuadrática. Proposición 7.10 — Identificación cuadrática a partir de tres tiempos distintos. Sean u_1, u_2, u_3 tres números reales distintos de un intervalo no degenerado J, y y_1, y_2, y_3 tres valores reales. Existe un único polinomio de grado a lo sumo dos que satisface $X(u_i) = y_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Para construir el polinomio, buscamos tres piezas: la pieza asociada a u_i debe valer uno allí y cero en los otros dos tiempos. Si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, la expresión

$$\ell_i(u) = \frac{(u - u_j)(u - u_k)}{(u_i - u_j)(u_i - u_k)}$$

tiene esas propiedades. El denominador no es cero porque los tiempos son distintos. Cada ℓ_i es cuadrática y satisface $\ell_i(u_i) = 1$, mientras que $\ell_i(u_j) = \ell_i(u_k) = 0$. Por tanto,

$$X(u) = y_1\ell_1(u) + y_2\ell_2(u) + y_3\ell_3(u)$$

tiene grado a lo sumo dos y toma los tres valores pedidos. Esto prueba existencia sin resolver un sistema mediante matrices.

Para probar unicidad, sean X e Y dos candidatos. Su diferencia $Q = X - Y$ tiene grado a lo sumo dos y se anula en los tres tiempos. Si fuese un polinomio no nulo, el teorema del factor obligaría a que $(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ lo dividiera: se extrae sucesivamente cada factor, y los otros ceros siguen siendo ceros del cociente porque los tiempos son distintos. Un polinomio no nulo de grado a lo sumo dos no puede tener un divisor de grado tres. Así, Q es el polinomio nulo y $X = Y$. □

La familia incluye polinomios afines y constantes; «grado a lo sumo dos» no exige un término cuadrático no nulo. Por proposición 7.8, una ley cuadrática corresponde a una aceleración constante en su dominio, con $A = 2c_2$ y $a = 2c_2L/T^2$. El resultado permite identificar esa aceleración **bajo la hipótesis de la familia**. Las tres posiciones no demuestran que tal hipótesis describa el movimiento entre las observaciones.

Qué no determina una lista finita de posiciones. Proposición 7.11 — Subdeterminación por posiciones finitas. Sea J un intervalo no degenerado y sea $X_0 \in C^2(J)$ una historia compatible con posiciones prescritas en un conjunto finito de tiempos distintos $u_1, \dots, u_n \in J$, con $n \geq 1$. Para cada $C \in \mathbb{R}$, la historia

$$X_C(u) = X_0(u) + C\prod_{j=1}^{n}(u - u_j)$$

pertenece a $C^2(J)$ y conserva todas esas posiciones. Dos valores distintos de C producen historias distintas.

Demostración. El producto es un polinomio; sumarlo a una función C^2 conserva esa regularidad. En cada tiempo u_i uno de sus factores se anula, de modo que $X_C(u_i) = X_0(u_i)$.

Si $C \neq C'$, la diferencia de las historias es $(C - C')\prod_j(u - u_j)$. Un intervalo no degenerado contiene algún punto diferente de los finitísimos tiempos de la lista. En ese punto todos los factores son no nulos y la diferencia no es cero. Las historias son, por tanto, distintas, aunque sus muestras coincidan. □

Si un tiempo aparece repetido con el mismo valor, basta conservarlo una vez. Si aparece con valores diferentes, no existe una historia compatible desde la cual iniciar la construcción. La restricción a un intervalo no degenerado asegura que hay tiempos sin muestrear; sobre un dominio reducido a un único instante esa conclusión no tendría sentido.

El contraejemplo deja libres sólo condiciones de posición. Si se conocen además velocidades, aceleraciones o restricciones de régimen, hay que auditarlas por separado: la familia construida no pretende conservar datos que no se impusieron. Tampoco garantiza que todas sus historias sean físicamente apropiadas para una situación concreta. Su función es demostrar que las posiciones finitas, por sí solas, no seleccionan una historia general.

Principio metodológico 7.9 — Declarar la familia antes de inferir unicidad desde datos. Un informe de identificación expresa la clase elegida, las condiciones disponibles y la conclusión de existencia o unicidad dentro de esa clase. Distingue la identificación de parámetros de la justificación de la hipótesis cinemática.

Ejercicios. Ejercicio 7.24. En $0 \le u \le 2$, se adopta la familia $X(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2$. Los datos son $X(0) = 1$, $X(1) = 2$ y $X(2) = 1$. Identifica los coeficientes, calcula $V(0)$ y A, y recupera las unidades físicas de velocidad y aceleración. Indica qué papel cumple la hipótesis cuadrática.

Solución. La condición en cero entrega $c_0 = 1$. Las otras dos condiciones se convierten en

$$c_1 + c_2 = 1, \qquad 2c_1 + 4c_2 = 0.$$

Restar el doble de la primera a la segunda da $2c_2 = -2$. Así, $c_2 = -1$ y $c_1 = 2$, y la historia identificada es $X(u) = 1 + 2u - u^2$. Sustituir $u = 0, 1, 2$ recupera los valores $1, 2, 1$, respectivamente.

La derivación entrega $V = 2 - 2u$ y $A = -2$. Por tanto, $V(0) = 2$, la velocidad inicial física es $v(t_0) = 2L/T$ y la aceleración es $a = -2L/T^2$ en todo el dominio adoptado. La constancia se concluye de la ley cuadrática supuesta e identificada; no queda probada empíricamente a partir de las tres posiciones.

Ejercicio 7.25. Con los mismos datos y dominio del ejercicio 7.24, construye una familia de historias suaves que conserve las tres muestras y que, salvo un miembro, no tenga aceleración constante. Verifica que los miembros son distintos.

Solución. El producto que se anula en los tiempos de la muestra es $u(u-1)(u-2)$. Definimos

$$X_\lambda(u) = 1 + 2u - u^2 + \lambda u(u-1)(u-2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Todos los miembros son polinomios y conservan las muestras. En $u = 1/2$, el producto vale $3/8$, por lo que

$$X_\lambda(1/2) = \frac{7}{4} + \frac{3\lambda}{8}.$$

Ese valor distingue cualquier par de parámetros diferentes.

Al expandir el producto como $u^3 - 3u^2 + 2u$ y derivar dos veces, obtenemos $A_\lambda(u) = -2 + \lambda(6u - 6)$. Para $\lambda \neq 0$ cambia con u; para $\lambda = 0$ recupera ejercicio 7.24. La aceleración física es $(L/T^2)A_\lambda$. Las posiciones muestreadas admiten tanto la historia de aceleración constante como estas historias de aceleración variable.

Ejercicio 7.26. Audita primero los datos $(0,0), (0,1), (1,2)$. Audita después $(0,0), (0,0), (1,2)$ dentro de la familia cuadrática sobre $[0,1]$. Decide en cada caso si hay existencia y unicidad.

Solución. La primera lista exige a la vez $X(0) = 0$ y $X(0) = 1$. No existe una función que cumpla ambas condiciones; el fallo precede a la elección de familia.

En la segunda lista, repetir $X(0) = 0$ no añade una restricción independiente. En la familia cuadrática quedan $c_0 = 0$ y $c_1 + c_2 = 2$, de donde

$$X(u) = (2 - c_2)u + c_2 u^2, \qquad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Hay existencia y una familia infinita de parámetros compatibles. Para distinguir sus historias, basta evaluar en $u = 1/2$: se obtiene $1 - c_2/4$. Proposición 7.10 requería tres tiempos distintos; esta lista contiene sólo dos.

La información faltante puede proceder de una hipótesis de modelo todavía no justificada o de condiciones insuficientes dentro de la familia. Al pasar a una ley aproximada aparece otra obligación: controlar cómo se acumula la discrepancia a lo largo del tiempo.

13. Aproximación cinemática y horizonte de validez

Una ley simplificada puede describir bien la posición durante un intervalo breve y perder precisión al prolongarla. Una diferencia pequeña de velocidad, mantenida durante mucho tiempo, acumula desplazamiento; una diferencia de aceleración altera primero la velocidad y después la posición. La pregunta útil es cuánto tiempo garantiza la información disponible que el error permanezca bajo la tolerancia elegida.

El capítulo 6 §6 separó error y residuo, y §§7–8 construyeron la linealización univariada con control del resto. Aplicaremos ese criterio a la variable temporal. Comparamos dos historias expresadas en el mismo marco fijo y reloj: una historia de referencia x y una candidata $\tilde{x}$. La referencia puede ser un modelo más completo; la comparación no convierte por sí sola a ninguno de los dos en descripción exacta del fenómeno.

Presupuesto y horizonte. Definición 7.11 — Presupuesto determinista y horizonte certificado. Sean dos historias definidas desde t_0 hasta $t_0 + H_0$, con $H_0 > 0$, y una tolerancia absoluta de posición $\varepsilon_x \geq 0$. Un presupuesto de error es una función $B : [0, H_0] \to [0, \infty)$, con unidades de longitud, para la que se ha demostrado

$$|x(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h)| \leq B(h) \quad \text{para todo } 0 \leq h \leq H_0.$$

Un horizonte certificado mediante ese presupuesto es un número $H \in [0, H_0]$ tal que $B(h) \leq \varepsilon_x$ para todo $h \in [0, H]$, manteniéndose allí las hipótesis usadas para obtener la cota.

Si la tolerancia se refiere a una escala de longitud $L > 0$, se escribe $\varepsilon_x = \tau L$, con $\tau \geq 0$ adimensional. El presupuesto normalizado es B/L. Esa elección permite comparar errores aun cuando la posición de referencia sea cero, donde un error relativo a su valor sería indefinido.

La certificación es uniforme sobre el intervalo: no basta comprobar un instante arbitrario. Para los presupuestos crecientes que construiremos, controlar el extremo final sí será suficiente. La definición admite $H = 0$ si sólo queda certificada la condición inicial; ello no concede información sobre un intervalo de duración positiva.

Estas son cotas deterministas entre historias. No constituyen incertidumbres experimentales ni presuponen distribuciones estadísticas. Si un presupuesto supera la tolerancia, se pierde esa garantía; el error efectivo puede seguir siendo menor.

Integrar una diferencia de velocidad. Proposición 7.12 — Cota integrada de error de velocidad. Sean $x, \tilde{x} \in C^1([t_0, t_0 + H_0])$, con $H_0 > 0$, y $0 \leq H \leq H_0$. Supongamos que

$$|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| \leq \delta_x, \qquad |v(t) - \tilde{v}(t)| \leq \delta_v \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + H),$$

donde $\delta_x, \delta_v \geq 0$, $v = x'$ y $\tilde{v} = \tilde{x}'$. Entonces, para todo $0 \leq h \leq H$,

$$|x(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h)| \leq \delta_x + \delta_v h.$$

Demostración. La reconstrucción de la proposición 7.5, aplicada a ambas historias, da la igualdad

$$x(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h) = x(t_0) - \tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} [v(s) - \tilde{v}(s)]\, ds.$$

Tomar módulos, usar la desigualdad triangular y acotar el integrando por δ_v entrega

$$|x(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h)| \leq \delta_x + \int_{t_0}^{t_0+h} \delta_v\, ds = \delta_x + \delta_v h.$$

Si $H = 0$, sólo se evalúa $h = 0$ y la conclusión es la cota inicial. □

La cota permite errores con signos variables. No depende de que se acumulen efectivamente en un mismo sentido; contempla el caso desfavorable en que no hay cancelación. Las unidades lo reflejan: $\delta_v h$ tiene unidades de longitud y puede sumarse a δ_x.

Si $\delta_v > 0$ y $\varepsilon_x \geq \delta_x$, basta elegir

$$H \leq \min\left\{H_0, \frac{\varepsilon_x - \delta_x}{\delta_v}\right\},$$

siempre que la cota de velocidad esté justificada en ese intervalo. Si $\delta_v = 0$, el presupuesto es constante y no se divide por ella. Si $\varepsilon_x < \delta_x$, este presupuesto no certifica ni siquiera el instante inicial, aunque la cota inicial disponible podría ser más grande que el error efectivo.

Integrar dos veces una diferencia de aceleración. Proposición 7.13 — Cota integrada de error de aceleración. Sean $x, \tilde{x} \in C^2([t_0, t_0+H_0])$, con $H_0 > 0$, y $0 \leq H \leq H_0$. Supongamos cotas no negativas

$$|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| \leq \delta_x, \qquad |v(t_0) - \tilde{v}(t_0)| \leq \delta_v,$$

y $|a(t) - \tilde{a}(t)| \leq \delta_a$ para todo $t \in [t_0, t_0 + H]$. Para $0 \leq h \leq H$ se cumplen

$$|v(t_0 + h) - \tilde{v}(t_0 + h)| \leq \delta_v + \delta_a h$$

y

$$|x(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h)| \leq \delta_x + \delta_v h + \frac{\delta_a}{2} h^2.$$

Demostración. La primera integración de la proposición 7.6 entrega

$$v(t_0 + r) - \tilde{v}(t_0 + r) = v(t_0) - \tilde{v}(t_0) + \int_0^r [a(t_0 + s) - \tilde{a}(t_0 + s)]\, ds.$$

Para cada $r \in [0, H]$, el mismo argumento triangular de la proposición 7.12 da $|v(t_0+r)-\tilde{v}(t_0+r)| \leq \delta_v + \delta_a r$. Esta cota depende del tiempo transcurrido: conservaremos esa dependencia al integrar la diferencia de posiciones. Así,

$$|x(t_0 + h) - \tilde{x}(t_0 + h)| \leq \delta_x + \int_0^h (\delta_v + \delta_a r)\, dr = \delta_x + \delta_v h + \frac{\delta_a}{2} h^2.$$

Se han utilizado sucesivamente dos integrales de una variable. Para $H = 0$, las conclusiones son las cotas iniciales. □

Reemplazar prematuramente la cota de velocidad por su máximo $\delta_v + \delta_a H$ daría el presupuesto más grande $\delta_x + \delta_v h + \delta_a H h$. La integración de su dependencia en r explica el factor $1/2$ de la proposición 7.13.

Los tres términos del presupuesto tienen unidades de longitud. Para coeficientes no negativos, el presupuesto crece o permanece constante en $h \geq 0$, pues su derivada es $\delta_v + \delta_a h \geq 0$. Por ello basta resolver la desigualdad en $h = H$ y mantener $H \leq H_0$. No se prolonga una cota de aceleración más allá del dominio donde fue demostrada.

La recta tangente como historia aproximada. Tomemos la candidata $\tilde{x}(t_0 + h) = x(t_0) + v(t_0)h$. Tiene los mismos datos iniciales y aceleración cero. Si $x \in C^2$ y $|a(t)| \leq M$ en el intervalo de control, proposición 7.13 da

$$|x(t_0 + h) - x(t_0) - v(t_0)h| \leq \frac{M}{2} h^2.$$

Es la aplicación temporal de la cota del resto del capítulo 6 §8, obtenida aquí por dos integraciones. La posición base y la velocidad base quedan conservadas; se controla lo que se pierde al mantener fija la velocidad.

Para $M > 0$ y tolerancia τL, el intervalo suficiente tiene duración no mayor que $\sqrt{2\tau L/M}$, además de la restricción de dominio. Para $M = 0$, la historia de referencia es afín en ese intervalo y la candidata coincide con ella. Una velocidad inicial nula tampoco invalida la cota absoluta: sólo advierte que la recta tangente no conserva un cambio de posición cuyo primer término sea cuadrático.

Controlar posición no certifica automáticamente los tiempos de todos sus eventos. Una perturbación pequeña puede eliminar una raíz tangencial: $X(u) = u^2$ alcanza cero en $[-1, 1]$, mientras que $\widetilde{X}(u) = u^2 + \eta$, con $\eta > 0$, no lo alcanza, aunque su error uniforme de posición sea η. Una conclusión sobre eventos requiere condiciones adicionales; los presupuestos presentes responden a una tolerancia de posición.

Referencia interna: capítulo 6, §6, error frente a residuo; §§7–8, aproximación afín y cota cuadrática del resto.

Ejercicios. Ejercicio 7.27. Dos historias C^1 están disponibles en $0 \le u \le H_0$, con $H_0 > 0$. En ese intervalo se sabe que $|X(0) - \widetilde{X}(0)| \le 0.02$ y $|V(u) - \widetilde{V}(u)| \le 0.03$. Certifica un horizonte con tolerancia normalizada de posición 0.10. Explica qué concluyes si se desea prolongarlo más allá.

Solución. Aplicamos proposición 7.12 a las variables normalizadas. El presupuesto es $B_X(u) = 0.02 + 0.03u$, una función creciente. Para que no exceda 0.10 hasta H basta exigir

$$0.02 + 0.03H \le 0.10,$$

que equivale a $H \le 0.08/0.03 = 8/3$. El horizonte mayor certificado por este presupuesto y el dominio disponible es $\min\{H_0, 8/3\}$.

En magnitudes físicas, la tolerancia es $0.10L$, las cotas inicial y de velocidad son $0.02L$ y $0.03L/T$, y la duración certificada es $T\min\{H_0, 8/3\}$. El presupuesto dimensional produce la misma conclusión.

Si $H_0 > 8/3$, superar $8/3$ pierde la garantía de este presupuesto, sin demostrar que las historias concretas se separen más de la tolerancia. Si se supera H_0, tampoco están disponibles las hipótesis de la cota. En cualquiera de los dos casos hace falta información adicional para certificar la prolongación.

Ejercicio 7.28. Dos historias C^2 tienen la misma posición y velocidad iniciales en $u = 0$, y satisfacen $|A(u) - \widetilde{A}(u)| \le 0.04$ en $[0, 3]$. Certifica una tolerancia de posición 0.02. Construye un par que sature el presupuesto y otro que muestre por qué la pérdida de garantía no demuestra un fallo efectivo. Relaciona el resultado con el resto de una linealización.

Solución. En proposición 7.13 los errores iniciales son cero. El presupuesto normalizado es $B_X(u) = 0.04u^2/2 = 0.02u^2$. La desigualdad $0.02H^2 \le 0.02$, con $H \ge 0$, equivale a $H \le 1$. El dominio de control llega hasta 3, así que $H = 1$ es el horizonte mayor certificado por este presupuesto. La duración física es T y la tolerancia es $0.02L$.

Para mostrar saturación, tomamos $\widetilde{X}(u) = 0$ y $X(u) = 0.02u^2$ sobre $[0, 3]$. Ambas historias tienen posición y velocidad iniciales nulas, y $A - \widetilde{A} = 0.04$. Su error es exactamente $0.02u^2$, de modo que sí supera la tolerancia para $u > 1$.

En cambio, las historias $X = \widetilde{X} = 0$ satisfacen las mismas cotas disponibles y tienen error cero hasta $u = 3$. La cota no obliga a que se realice el peor caso. Si la candidata fuese la recta tangente de una historia con $|A| \le 0.04$, el presupuesto obtenido sería el mismo control cuadrático de su

resto. La validez local procede de la cota de segunda derivada y del dominio, no de la apariencia recta de un dibujo.

14. Reconstruir y auditar una historia completa

Una reconstrucción reúne decisiones que pueden comprobarse por separado. El origen y el reloj permiten interpretar una coordenada; la regularidad autoriza las derivadas; los datos iniciales seleccionan una historia dentro de la clase prescrita. Después vienen las preguntas sobre eventos y recorrido. Si se usa una aproximación, su dominio puede ser menor que el de la historia de referencia.

Para cerrar el trabajo hace falta conservar la relación entre esas decisiones. Una fórmula de posición sin dominio no permite filtrar una raíz; una velocidad sin escala no proporciona una magnitud física; una cota sin hipótesis no certifica un intervalo.

Una ficha que permita recuperar el razonamiento. Definición 7.12 — Ficha de reconstrucción cinemática controlada. Una ficha reúne el marco espacial fijo y el reloj, el dominio temporal y las escalas, los datos disponibles, la clase o ley cinemática adoptada y su estatuto, la historia reconstruida con su regularidad, los eventos y observables solicitados, y el control de cualquier aproximación utilizada. Este último declara la candidata, la tolerancia, las cotas justificadas y el régimen temporal certificado.

La ficha especializa la de aproximación controlada del capítulo 6 §14. Si la aceleración se prescribe como una función del tiempo, se identifica como dato del modelo. No se atribuye esa prescripción a una explicación dinámica todavía no estudiada. Si falta información para una conclusión solicitada, se registra la conclusión que sigue abierta.

No es necesario recalcular una derivación ya probada. Proposición 7.6 puede justificar una reconstrucción al comprobar sus hipótesis y los datos iniciales; proposición 7.13 puede justificar un presupuesto al declarar las cotas. La ficha debe permitir distinguir qué se tomó como dato, qué se supuso y qué se obtuvo por cálculo.

Principio metodológico 7.10 — Entregar una historia con hipótesis y control. La conclusión cinemática acompaña la ley temporal con su dominio, datos y condiciones de uso. Una aproximación se entrega con la observable controlada y la evidencia que certifica su intervalo.

Referencia interna: capítulo 6, §14, ficha de aproximación controlada. Las siguientes síntesis y sus soluciones son propias.

Ejercicios de síntesis. Ejercicio 7.29. En una recta fija, con $x_* = 0$, se prescribe $A(u) = -2u$ sobre $[0, 3]$, junto con $X(0) = 1$ y $V(0) = 3$. Construye una ficha que reconstruya la historia y determine las inversiones, el regreso a $X = 1$, el desplazamiento y la distancia total. Audita después la candidata $\widetilde{X}(u) = 1 + 3u$ con tolerancia de posición 0.01: obtén el horizonte a partir del resto exacto y compáralo con el que se obtiene usando únicamente una cota uniforme de aceleración en el intervalo elegido.

Solución. La ficha fija $P(t) = O + LX(u)e$, $u = (t - t_0)/T$, con $L, T > 0$, O y e constantes. El dominio físico es $[t_0, t_0 + 3T]$. La aceleración prescrita es $a(t) = -(2L/T^2)u$; se toma como hipótesis cinemática, sin derivarla de fuerzas. Los datos iniciales son $x(t_0) = L$ y $v(t_0) = 3L/T$.

La reconstrucción de la proposición 7.6 exige integrar primero aceleración y después velocidad:

$$V(u) = 3 + \int_0^u (-2s)\, ds = 3 - u^2,$$

$$X(u) = 1 + \int_0^u (3 - s^2)\, ds = 1 + 3u - \frac{u^3}{3}.$$

Estas funciones son polinomios, de modo que la historia es C^2 en todo el dominio, con derivadas laterales en sus extremos. Derivar X y V verifica la aceleración y los datos iniciales. Proposición 7.6 asegura unicidad bajo esa prescripción.

El signo de V organiza el movimiento. La ecuación $3-u^2 = 0$ da $u = \pm\sqrt{3}$, y sólo $\sqrt{3}$ pertenece a $[0, 3]$. En $[0, \sqrt{3})$ la velocidad es positiva; en $(\sqrt{3}, 3]$ es negativa. Por definición 7.3 hay una inversión interior en $u = \sqrt{3}$, que corresponde a $t = t_0 + \sqrt{3}\,T$. La posición alcanza allí su máximo:

$$X(\sqrt{3}) = 1 + 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

El móvil avanza hacia el sentido de e y luego regresa. La aceleración es negativa para $u > 0$: antes de la inversión disminuye la rapidez y después la aumenta, de acuerdo con el signo de va.

Para localizar los eventos en $X = 1$, conservamos la ecuación y el dominio:

$$1 + 3u - \frac{u^3}{3} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad u(9 - u^2) = 0.$$

Las candidatas son $0, 3, -3$. Su intersección con $[0, 3]$ es $\{0, 3\}$: el instante inicial es una ocupación de la marca, y el regreso posterior ocurre en $u = 3$. Los eventos físicos son t_0 y $t_0 + 3T$.

Ambos extremos tienen $X = 1$, por lo que el desplazamiento total es cero. La distancia exige separar los sentidos:

$$\frac{d}{L} = \int_0^{\sqrt{3}} (3 - u^2)\, du + \int_{\sqrt{3}}^3 (u^2 - 3)\, du = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Así, $d = 4\sqrt{3}\,L$, aunque el desplazamiento sea nulo. La posición máxima permite comprobar el mismo resultado: el tramo de ida y el de vuelta recorren cada uno $2\sqrt{3}\,L$.

La candidata $\widetilde{X} = 1 + 3u$ conserva posición y velocidad iniciales, pero adopta aceleración cero. El resto de posición es una igualdad exacta:

$$X(u) - \widetilde{X}(u) = -\frac{u^3}{3}.$$

En $u \geq 0$, su módulo crece con u. La tolerancia 0.01 se cumple para todos los tiempos hasta H si y sólo si

$$0 \leq H \leq 3, \qquad \frac{H^3}{3} \leq 0.01.$$

El horizonte máximo efectivo de esta candidata para el criterio declarado es

$$H_{\text{exacto}} = (0.03)^{1/3} \approx 0.31072.$$

Se usa el valor exacto para la certificación; la cifra decimal sólo lo representa. La duración física es $T(0.03)^{1/3}$ y la tolerancia absoluta es $0.01L$. Para cualquier u mayor que ese horizonte dentro de $[0, 3]$, el error efectivo sí supera la tolerancia.

También puede recuperarse el resto integrando la cota variable. Como $|A(s) - \widetilde{A}(s)| = 2s$ para $s \geq 0$, el error de velocidad queda acotado por $\int_0^r 2s\, ds = r^2$. Integrarlo hasta u da $\int_0^u r^2\, dr = u^3/3$. En esta historia ambas cotas se alcanzan.

Si se conserva sólo la cota uniforme $|A - \widetilde{A}| \leq 2H$ sobre $[0, H]$, proposición 7.13 da en cada $u \leq H$ el presupuesto

$$|X(u) - \widetilde{X}(u)| \leq \frac{2H}{2}u^2 = Hu^2.$$

Su máximo es H^3. Por esta vía basta exigir $H^3 \leq 0.01$, lo que certifica

$$H_{\text{uniforme}} = (0.01)^{1/3} \approx 0.21544.$$

Elegir este H es autoconsistente: en todo el intervalo elegido se cumple $2u \leq 2H$. La garantía es más conservadora porque sustituye una aceleración de error que crece desde cero por su máximo en todo el intervalo. El horizonte exacto no puede atribuirse a ese presupuesto uniforme.

La ficha concluye que la historia completa está reconstruida en $[0, 3]$ bajo la aceleración prescrita. La candidata afín controla posición sólo en el intervalo certificado elegido. No reproduce la inversión ni el regreso: su velocidad normalizada es siempre 3 y alcanza $X = 1$ únicamente en $u = 0$. La certificación local de posición no permite utilizarla para esos eventos lejanos.

Ejercicio 7.30. Audita las cuatro frases de este informe:

- «La tangente forma un ángulo de 45° en el dibujo; por eso la velocidad es 1».
- «Si la velocidad es cero en un instante, el móvil invierte allí su sentido».
- «Una aceleración negativa siempre frena al móvil».
- «Tres posiciones en tiempos distintos demuestran que la aceleración es constante».

Repara cada afirmación con una condición o un contraejemplo ya disponible. Construye después una ficha completa para una reparación, incluyendo una aproximación con tolerancia de posición declarada.

Solución. La primera frase omite las unidades y las escalas. Si un dibujo usa coordenadas de papel $p = (t - t_0)/\alpha$ y $q = (x - x_*)/\beta$, con $\alpha > 0$ una escala temporal y $\beta > 0$ una escala de longitud, entonces su pendiente es $dq/dp = (\alpha/\beta)v$. Un ángulo de 45° en ejes perpendiculares con la misma unidad de papel significa pendiente gráfica uno; la velocidad física vale β/α, con unidades de longitud por tiempo. Cambiar la razón de escalas cambia el ángulo dibujado aunque la historia física sea la misma. La reparación exige convertir la pendiente mediante las escalas, como en el ejercicio 7.4.

La segunda frase confunde una condición necesaria de la inversión suave con una conclusión suficiente. Cerca de cero, $X = u^2$ tiene $V = 2u$ y cambia de sentido; $X = u^3$ tiene $V = 3u^2$ y mantiene el sentido a ambos lados. Ambos tienen $V(0) = 0$. La reparación consiste en verificar los signos en semientornos del instante, conforme a definición 7.3 y ejercicio 7.5.

La tercera frase falla cuando velocidad y aceleración son negativas. En ejercicio 7.7, $V = -2 - u$ sobre $[0, 1]$ y $A = -1$, mientras que la rapidez normalizada $|V| = 2 + u$ crece. Fuera de los ceros de velocidad, proposición 7.3 determina su variación mediante el signo de va. «Frenar», entendido como disminuir rapidez, requiere ese análisis; en $v = 0$ no se aplica la fórmula derivativa sin examinar el punto.

La cuarta frase omite la clase de modelos. Proposición 7.10 identifica una ley de grado a lo sumo dos bajo esa hipótesis. Proposición 7.11 y ejercicio 7.25 producen historias distintas con las mismas posiciones finitas. La conclusión reparada es unicidad de los coeficientes dentro de la familia cuadrática, no demostración de la aceleración constante del fenómeno.

Construimos una ficha para la tercera reparación. Se fija $P(t) = O + LX(u)e$, $u = (t - t_0)/T$, sobre $[0, 1]$, con $L, T > 0$. El modelo prescribe $A = -1$, $X(0) = 1$ y $V(0) = -2$. Proposición 7.6

entrega

$$V(u) = -2 - u, \qquad X(u) = 1 - 2u - \frac{u^2}{2}.$$

La historia es C^2 en el dominio; su aceleración física es $-L/T^2$ y su velocidad es $(L/T)(-2-u)$. Como $V < 0$ en todo el intervalo, no hay reposo ni inversión. La rapidez física es $(L/T)(2+u)$ y crece a pesar de la aceleración negativa.

Como evento de posición, la ocupación de $X = 0$ exige $u^2 + 4u - 2 = 0$. Las candidatas son $-2 \pm \sqrt{6}$ y sólo $-2+\sqrt{6} \in [0,1]$ es admisible. El evento ocurre en $t = t_0 + (-2+\sqrt{6})T$. Los extremos tienen $X(0) = 1$ y $X(1) = -3/2$, de modo que el desplazamiento es $-5L/2$ y, al conservarse el sentido, la distancia es $5L/2$.

Para aproximar posición se adopta $\widetilde{X} = 1 - 2u$, con tolerancia absoluta $L/8$. Su error normalizado es $u^2/2$, que coincide con el presupuesto de la proposición 7.13 para datos iniciales iguales y diferencia de aceleración de módulo uno. Exigir $u^2/2 \le 1/8$ en $u \ge 0$ certifica $0 \le u \le 1/2$. La duración certificada es $T/2$; la historia de referencia conserva su dominio $[0,1]$. El evento en $u = -2+\sqrt{6}$ pertenece al intervalo de posición certificado, pero no se ha certificado un error en su tiempo mediante esa sola cota.

La ficha permite comprobar cada conclusión desde el modelo declarado: derivar verifica las componentes, sus signos determinan el sentido y la rapidez, la ecuación de posición entrega un evento filtrado por dominio y el resto limita la aproximación. La hipótesis de aceleración constante está expuesta desde el inicio; no se deduce de un dibujo ni de una lista de muestras.

Bibliografía citada

Canon interno citado.

- *Física para matemáticos*, Tomo I, capítulo 2, «Magnitudes, unidades y análisis dimensional». capítulo 2. Localizadores usados: §§9–10, interfaz de escalas y adimensionalización citada en §1.
- *Física para matemáticos*, Tomo I, capítulo 5, «Tiempo, movimiento y curvas». capítulo 5. Localizadores usados: §3, representación de posición y coordenadas, y §§5–7, velocidad, regularidad/reposo y aceleración, citados en §1 y aplicados en §§2–4; §13 proposición 7.28, fórmula de longitud citada y aplicada en §5.
- *Física para matemáticos*, Tomo I, capítulo 6, «Modelos, aproximaciones, escalas y linealización». capítulo 6. Localizadores usados: §6, diferencia entre error y residuo, y §§7–8, linealización univariada y cota del resto, citados en §13; §14, ficha de aproximación controlada, citada y especializada en §14.

Obra externa citada.

- Shankar, R. *Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics*. Expanded Edition. Yale University Press, 2019. Cap. 1, §1.3, pp. 4–6, cantidades medias e instantáneas, citado en §2; cap. 1 §1.4, pp. 6–8, significado de las dos constantes de integración y datos iniciales, citado en §7; pp. 6–10, leyes de aceleración constante, citadas en §9; cap. 1 §1.5, pp. 10–12, dominio y raíces adicionales, citado en §11.
- Kleppner, Daniel, y Robert J. Kolenkow. *An Introduction to Mechanics*. Copia publicada por Cambridge University Press, 2010; publicación previa McGraw-Hill, 1973. Cap. 1 §1.7, pp. 19–21, reconstrucción por integrales y datos iniciales; citado en §§6–8 y p. 21 en §9.

Capítulo 8

Cinemática en varias dimensiones

Prerrequisitos y propósito

Se utilizan la geometría afín euclídea del capítulo 4, las derivadas y la longitud de curvas del capítulo 5, el control de aproximaciones del capítulo 6 y las reconstrucciones y eventos del capítulo 7. La matemática requerida es M2–M3: vectores, producto escalar, trigonometría, derivadas e integrales de una variable. Las aceleraciones se prescriben como datos del modelo; su explicación mediante fuerzas pertenece al capítulo 9.

El capítulo estudia historias vectoriales, reconstrucción con datos iniciales, rapidez y dirección, proyectiles, coordenadas polares, movimiento circular, marcos móviles, composición y control de aproximaciones. La traslación y las cotas vectoriales se formulan en dos y tres dimensiones; el giro de ejes se desarrolla en el plano. Se conserva un reloj físico común y se explicitan dominios y restricciones de eventos.

1. Historia vectorial y componentes en un marco fijo

Una cámara registra el recorrido de un objeto sobre una mesa. Cada imagen proporciona dos coordenadas, pero ninguna de las dos series por separado describe el movimiento completo. Si la coordenada horizontal crece mientras la vertical disminuye, el objeto se desplaza en una dirección oblicua; si ambas regresan a sus valores iniciales, vuelve al punto de partida. Las coordenadas deben leerse juntas y en el mismo instante.

El capítulo 7 convirtió un movimiento sobre una recta fija en una función escalar. Aquí recuperamos la estructura del capítulo 5 y la usamos para resolver problemas con varias componentes. La diferencia no consiste en reemplazar cada número por una lista sin cambiar el razonamiento: una velocidad puede variar por su dirección aunque su norma permanezca constante.

Representar una historia. Sea $\mathcal{E}$ un espacio afín euclídeo de dimensión $d = 2$ o 3, con espacio vectorial de desplazamientos V. Fijamos un origen O y una base ortonormal $B = (e_1, \dots, e_d)$. El reloj es común a todas las componentes; su lectura t pertenece a un intervalo no degenerado I. El marco $F = (O, B)$ permanece fijo durante esta primera parte.

Definición 8.1 — Representación cartesiana de una historia. Una historia continua $P : I \to \mathcal{E}$ se representa en F por funciones continuas $x_i : I \to \mathbb{R}$ mediante

$$P(t) = O + \mathbf{r}(t), \qquad \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i(t) e_i.$$

El vector $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)}$ es la posición relativa a O. Cuando las componentes son diferenciables, la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$; cuando son dos veces diferenciables, la aceleración es $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$.

La definición conserva el tipado del capítulo 4: $P(t)$ es un punto, $\mathbf{r}(t)$ es un vector y $x_i(t)$ es una componente escalar de longitud. El desplazamiento entre dos instantes es $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$,

independiente de haber elegido otro origen fijo. La norma de ese desplazamiento no determina la distancia recorrida durante el intervalo.

Proposición 8.1 — Derivación en una base fija. Si todas las componentes x_i son diferenciables en un instante interior t, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i'(t) e_i.$$

Si son dos veces diferenciables allí, entonces $\mathbf{a}(t) = \sum_i x_i''(t) e_i$. En particular, la rapidez es $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{\sum_i (x_i'(t))^2}$.

Demostración. El cociente incremental de $\mathbf{r}$ es la suma finita $\sum_i ((x_i(t+h)-x_i(t))/h) e_i$. Cada coeficiente converge a $x_i'(t)$ y cada e_i es constante. La continuidad de las operaciones vectoriales permite pasar al límite en la suma. Una segunda derivación aplica el mismo argumento a las componentes x_i'. La fórmula de la norma resulta de la ortonormalidad, pues $e_i \cdot e_j$ es cero para $i \neq j$ y uno para $i = j$. □

La hipótesis de base fija merece conservarse en la memoria. Si e_i dependiera del tiempo, la regla del producto añadiría $x_i e_i'$; §§7–8 harán visible ese término en una situación concreta.

Dos gráficas temporales y una trayectoria. En un plano, las gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ viven en planos tiempo–coordenada. La trayectoria, en cambio, es la imagen del mapa $t \mapsto (x(t), y(t))$ en el plano espacial. La pendiente dy/dx de esa imagen, cuando se puede definir mediante $x'(t) \neq 0$, es $y'(t)/x'(t)$: no es ninguna de las dos componentes de velocidad. Es un cociente adimensional que informa una dirección local.

Principio metodológico 8.1 — Conservar la sincronización. Toda pareja o terna de componentes debe referirse al mismo reloj y al mismo instante. Eliminar el parámetro puede recuperar una relación espacial, pero no conserva automáticamente la rapidez, el sentido, las repeticiones ni el dominio temporal.

Para escribir ejemplos con dimensiones compatibles, elegimos $L > 0$ y $T > 0$, y ponemos $u = (t-t_0)/T$. Una ley $\mathbf{r}(t) = L\mathbf{R}(u)$, con $\mathbf{R}$ adimensional, produce $\mathbf{v} = (L/T)\mathbf{R}'$ y $\mathbf{a} = (L/T^2)\mathbf{R}''$. Las primas de $\mathbf{R}$ se refieren a u. En los ejercicios usaremos esta convención salvo indicación contraria.

Ejercicios. Ejercicio 8.1. En una base ortonormal fija (e_1, e_2), sea $\mathbf{R}(u) = ue_1 + (1-u^2)e_2$ para $-1 \le u \le 1$. Calcula velocidad, aceleración, rapidez y desplazamiento entre extremos. Encuentra la ecuación espacial de la trayectoria e indica su parte efectivamente recorrida.

Solución. proposición 8.1 da $\mathbf{v} = (L/T)(e_1 - 2ue_2)$, $\mathbf{a} = -(2L/T^2)e_2$ y rapidez $(L/T)\sqrt{1+4u^2}$. Los extremos son $-e_1$ y e_1 en coordenadas normalizadas; el desplazamiento físico es $2Le_1$. Si $X = u$ y $Y = 1-u^2$, la imagen satisface $Y = 1 - X^2$ con $-1 \le X \le 1$. La ecuación sin la restricción de X incluiría puntos que esta historia no visita. La rapidez nunca se anula, aunque la componente vertical sí lo hace en $u = 0$.

Ejercicio 8.2. Dos historias en $0 \le u \le 1$ tienen $\mathbf{R}_A(u) = ue_1 + u^2 e_2$ y $\mathbf{R}_B(u) = u^2 e_1 + u^4 e_2$. ¿Comparten trayectoria, velocidad y reposo instantáneo?

Solución. Ambas imágenes son el arco $Y = X^2$, $0 \le X \le 1$. En A, $X = u$; en B, $X = u^2$, que recorre el mismo intervalo. Sus velocidades normalizadas son $e_1 + 2ue_2$ y $2ue_1 + 4u^3 e_2$, diferentes en general. En $u = 0$, A tiene velocidad e_1 y B velocidad nula, entendiendo en el extremo la derivada unilateral o la extensión suave de la ley. Compartir imagen no equivale a compartir historia temporal. En cada instante hay que comparar las componentes simultáneas, no sólo su relación espacial.

La estructura se apoya en capítulo 4 y capítulo 5, §§3–8. Shankar, cap. 2, §§2.2–2.5, sirve de contraste para la diferencia entre trayectoria espacial y gráficas temporales.[1]

2. Reconstrucción desde velocidad y aceleración

Supongamos que un instrumento proporciona las dos componentes de velocidad en función del tiempo. Podemos integrar cada registro, pero la integración deja dos constantes: una por coordenada. Juntas forman un vector inicial. Una velocidad prescribe desplazamientos entre instantes y deja abierta la posición de la historia en el espacio.

La reconstrucción no exige una teoría nueva de integración vectorial. En dimensión finita definimos la integral componente a componente en una base fija. Su resultado es independiente de la base: un cambio constante de coordenadas es una transformación lineal que conmuta con las sumas y con la integral de funciones continuas.

Definición 8.2 — Integral vectorial de una función continua. Para $\mathbf{f}:[a,b]\to V$ continua y $\mathbf{f}=\sum_i f_i e_i$, ponemos

$$\int_a^b \mathbf{f}(s)\,ds=\sum_i \left(\int_a^b f_i(s)\,ds\right)e_i.$$

Usamos integrales orientadas: $\int_b^a \mathbf{f}=-\int_a^b \mathbf{f}$ y $\int_a^a \mathbf{f}=0$.

Proposición 8.2 — Reconstrucción vectorial con datos iniciales. Sean I un intervalo, $t_0\in I$, $P_0\in\mathcal{E}$ y $\mathbf{v}_0\in V$. Si $\mathbf{a}:I\to V$ es continua, existe una única historia de clase C^2, con derivadas unilaterales en los extremos incluidos, que cumple $P(t_0)=P_0$, $\mathbf{v}(t_0)=\mathbf{v}_0$ y aceleración $\mathbf{a}$. Está dada por

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{a}(s)\,ds,$$

$$P(t)=P_0+(t-t_0)\mathbf{v}_0+\int_{t_0}^{t}(t-s)\mathbf{a}(s)\,ds.$$

Si se prescribe sólo una velocidad continua, el dato P_0 determina de modo único la historia $P(t)=P_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{v}(s)\,ds$.

Demostración. Para cada $t\in I$, el segmento cerrado entre t_0 y t está contenido en I; por continuidad, las integrales están definidas allí, aunque I sea abierto o no acotado. El teorema fundamental del cálculo aplicado a cada componente demuestra que la primera fórmula tiene derivada $\mathbf{a}$ y valor $\mathbf{v}_0$ en t_0.

Para la segunda fórmula escribimos su integral como $t\int_{t_0}^{t}\mathbf{a}(s)\,ds-\int_{t_0}^{t}s\mathbf{a}(s)\,ds$. Al derivar, los términos $t\mathbf{a}(t)$ se cancelan y queda $\int_{t_0}^{t}\mathbf{a}(s)\,ds$. Por tanto, la derivada de la posición relativa es la velocidad anunciada; una derivada más da la aceleración. En $t=t_0$ se cumplen ambos datos iniciales.

Para la unicidad, la diferencia de dos velocidades con igual aceleración tiene derivada nula en todas sus componentes y valor cero en t_0; es el vector nulo en todo el intervalo. La diferencia de las posiciones relativas tiene entonces derivada cero y valor cero, y también se anula. El caso de velocidad prescrita repite este último paso. □

[1] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I*, Expanded Edition, Yale University Press, 2019, cap. 2, §§2.2–2.5, pp. 16–29. Control de representaciones vectoriales y derivadas en base fija; no se reproducen sus ejemplos.

La prueba muestra dos tareas diferentes: construir una historia que cumple las condiciones y descartar otras. Omitir el segundo paso dejaría sin demostrar la unicidad. También muestra por qué la continuidad de la aceleración basta: la segunda derivada se obtiene sin derivar **a**.

El caso constante y el plano que contiene la historia. Si $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$, la integral del núcleo $t - s$ da

$$P(t) = P_0 + \tau \mathbf{v}_0 + \tfrac{1}{2}\tau^2 \mathbf{a}_0, \qquad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \tau \mathbf{a}_0, \qquad \tau = t - t_0.$$

La historia permanece en el subespacio afín $P_0 + \operatorname{span}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{a}_0\}$. En tres dimensiones, por tanto, una aceleración vectorial constante no produce una curva espacial arbitraria: la imagen está en un plano, una recta o un punto según el rango de los datos. Si los dos vectores son linealmente independientes, la imagen es una parábola en ese plano; si son dependientes, el movimiento es rectilíneo. La componente perpendicular a ambos nunca aparece en la fórmula.

Principio metodológico 8.2 — Contar datos vectoriales. Aceleración conocida, posición inicial y velocidad inicial forman un problema de reconstrucción completo. Una coordenada inicial o una rapidez inicial sin dirección dejan información faltante; la cantidad de datos escalares debe interpretarse mediante los vectores que pretende determinar.

Ejercicios. Ejercicio 8.3. En tiempo normalizado, $\mathbf{R}''(u) = 2e_1 + 6ue_2$, con $\mathbf{R}(0) = e_2$ y $\mathbf{R}'(0) = e_1 - e_2$. Reconstruye la historia y verifica los tres datos.

Solución. Integrar desde cero da $\mathbf{R}'(u) = (1 + 2u)e_1 + (-1 + 3u^2)e_2$. Integrar otra vez y añadir la posición inicial produce $\mathbf{R}(u) = (u + u^2)e_1 + (1 - u + u^3)e_2$. En cero los valores son e_2 y $e_1 - e_2$, y derivar dos veces recupera $2e_1 + 6ue_2$. Las magnitudes físicas son $L\mathbf{R}$, $(L/T)\mathbf{R}'$ y $(L/T^2)\mathbf{R}''$; las funciones del enunciado son adimensionales.

Ejercicio 8.4. Se conocen $\mathbf{a} \equiv 0$, $P(0) = P_0$ y la rapidez inicial $c > 0$, pero no su dirección. Describe todas las historias compatibles en un plano y decide qué cambia si $c = 0$.

Solución. Para cada vector unitario n, proposición 8.2 produce $P(t) = P_0 + ctn$. Todos esos movimientos cumplen la misma rapidez inicial y aceleración nula. Recíprocamente, cualquier historia compatible tiene velocidad constante $\mathbf{v}_0$ de norma c, por lo que puede escribirse cn con n unitario. La familia está parametrizada por las direcciones del círculo unitario. Si $c = 0$, el único vector de norma cero es el nulo y la historia queda determinada: $P(t) = P_0$. La insuficiencia de una rapidez como dato desaparece en este caso particular.

La reconstrucción extiende capítulo 7, §§6–9. Kleppner–Kolenkow §1.7 controla la integración temporal; la existencia y unicidad se prueban aquí por componentes.[2]

3. Rapidez, dirección y geometría del movimiento

En una curva cerrada, un objeto puede avanzar a rapidez constante y regresar al inicio. Su velocidad no permanece constante: apunta en direcciones distintas durante el recorrido. La idea escalar del capítulo 7, según la cual el cambio se reconoce en una componente firmada, necesita ahora separar la norma y la dirección del vector.

Definición 8.3 — Rapidez y dirección instantánea. En un instante con velocidad $\mathbf{v}(t)$, la rapidez es $q(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$. Si $q(t) > 0$, la dirección unitaria del movimiento es $\mathbf{n}(t) = \mathbf{v}(t)/q(t)$. En un instante de reposo, $\mathbf{n}$ no queda definida por esta fórmula.

[2] D. Kleppner y R. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 1, §1.7, pp. 19–21. Se usa la edición concreta disponible, sin atribuirle otra numeración de edición.

La restricción $q > 0$ evita atribuir una dirección al vector nulo. Puede existir una dirección límite al acercarse a un instante de reposo, pero requiere estudiar esa historia particular; no la incluye la definición.

Proposición 8.3 — Cambio de rapidez y cambio de dirección. Si $\mathbf{r} \in C^2(I, V)$ y $q > 0$ en un intervalo abierto $J \subset I$, entonces

$$q' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{q}, \qquad \mathbf{a} = q'\mathbf{n} + q\mathbf{n}', \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0.$$

La rapidez es constante en J si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ en todo J.

Demostración. Como $q^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, la regla del producto da $2qq' = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$; la división está permitida por $q > 0$. Derivar $\mathbf{v} = q\mathbf{n}$ produce la descomposición de $\mathbf{a}$. Por último, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ implica $2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$. Si q es constante, la primera identidad da producto escalar nulo. Si el producto escalar se anula en todo J, entonces $q' = 0$ allí y el teorema del valor medio asegura que q es constante en ese intervalo. □

La equivalencia exige un intervalo, no un instante aislado. Que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ se anule en t_* sólo informa $q'(t_*) = 0$ cuando $q(t_*) > 0$. Tampoco q constante exige $\mathbf{a} = 0$: permite un cambio de dirección. La componente $q'\mathbf{n}$ es paralela a la velocidad; la componente $q\mathbf{n}'$ es perpendicular a ella.

Si deseamos medir cuánto gira la dirección por longitud recorrida, capítulo 5 permite usar $ds/dt = q$. Definimos aquí, sólo en un tramo regular, $\kappa = \|\mathbf{n}'\|/q$. Entonces la magnitud de la parte perpendicular de la aceleración es $q^2\kappa$. No necesitamos un marco de Frenet ni derivadas de varias variables: la fórmula surge de dividir el cambio temporal de una dirección por la rapidez. No se extiende mediante esta definición a $q = 0$.

Principio metodológico 8.3 — Separar las preguntas sobre norma y vector. Rapidez constante significa $\|\mathbf{v}\|$ constante; velocidad constante significa $\mathbf{v}$ constante. Sólo la segunda condición obliga a aceleración nula. La primera debe analizarse mediante el producto escalar o la evolución de la dirección.

Longitud y desplazamiento. Para $\mathbf{r} \in C^1([a, b], V)$, la distancia recorrida es $\ell = \int_a^b q(t)\,dt$, por la fórmula de longitud del capítulo 5. Como $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \int_a^b \mathbf{v}(t)\,dt$, se tiene $\|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)\| \le \ell$. Podemos ver esta desigualdad sin suponer una dirección fija: si el desplazamiento D no es nulo, su vector unitario $m = D/\|D\|$ cumple $\|D\| = \int m \cdot \mathbf{v} \le \int \|\mathbf{v}\|$. Si $D = 0$, la desigualdad es inmediata.

En el caso $D \neq 0$, la igualdad exige que la función continua no negativa $q - m \cdot \mathbf{v}$ tenga integral cero, y por ello sea cero en cada instante. La igualdad en Cauchy–Schwarz obliga entonces a $\mathbf{v}(t) = \lambda(t)m$ con $\lambda(t) \ge 0$. Así la igualdad entre longitud y módulo del desplazamiento caracteriza un avance por la dirección fija de los extremos sin retrocesos, permitiendo instantes de reposo. Si $D = 0$, igualdad significa longitud cero y, por continuidad, reposo durante todo el intervalo.

Ejercicios. Ejercicio 8.5. Sea $\mathbf{R}(u) = \cos u\, e_1 + \sin u\, e_2$ en $0 \le u \le 2\pi$. Calcula rapidez, aceleración, longitud y desplazamiento, e interpreta proposición 8.3.

Solución. La velocidad es $(L/T)(-\sin u\, e_1 + \cos u\, e_2)$, de norma L/T. La aceleración es $-(L/T^2)(\cos u\, e_1 + \sin u\, e_2)$, no nula y perpendicular a la velocidad. La longitud es $(L/T)(2\pi T) = 2\pi L$; el desplazamiento es cero. Proposición 8.3 permite aceleración no nula con rapidez constante porque toda la variación ocurre en la dirección. El círculo proporciona el contraejemplo a la afirmación de que rapidez constante implicaría movimiento rectilíneo uniforme.

Ejercicio 8.6. En $-1 \le u \le 1$, sea $\mathbf{R}(u) = ue_1 + u^2e_2$. Comprueba que la rapidez tiene derivada cero en $u = 0$, y decide si es constante en algún intervalo abierto alrededor de ese instante.

Solución. La rapidez física es $q = (L/T)\sqrt{1+4u^2}$. Su derivada respecto del tiempo es $(4L/T^2)u/\sqrt{1+4u^2}$, que se anula en cero. Para cualquier $u \neq 0$ la rapidez es mayor que L/T, así que no es constante en ningún intervalo abierto alrededor de cero. El producto $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = (4L^2/T^3)u$ confirma la anulación sólo en ese instante. Una propiedad diferencial puntual no se convierte por sí sola en una propiedad de toda la historia.

La distinción está anticipada por Shankar §2.6 y Kleppner–Kolenkow §1.8. Aquí se expresa mediante proposición 8.3, que también permite tratar movimientos no circulares.[3]

4. Tiro parabólico como modelo cinemático

Una pelota sale de una plataforma y avanza mientras cambia su altura. La pregunta puede ser dónde tocará un suelo horizontal, cuánto tiempo estará en vuelo o qué velocidad debe tener para pasar por un punto. Antes de integrar debemos especificar qué descripción adoptamos: la fórmula parabólica no se obtiene de la palabra «pelota».

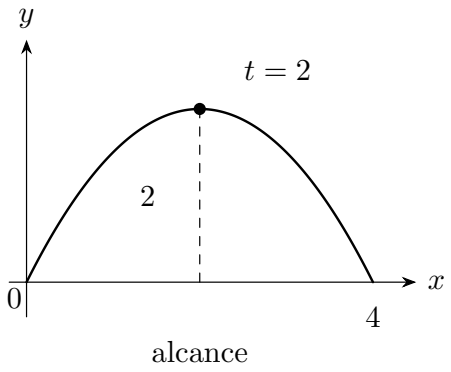


Figura 8.1. En el tiro ideal $r(t) = (t, 2t - t^2/2)$, la altura máxima es 2 en $t = 2$. El retorno al nivel inicial ocurre en $t = 4$, con alcance 4. El segmento discontinuo mide altura y las coordenadas están normalizadas. Véase §4.

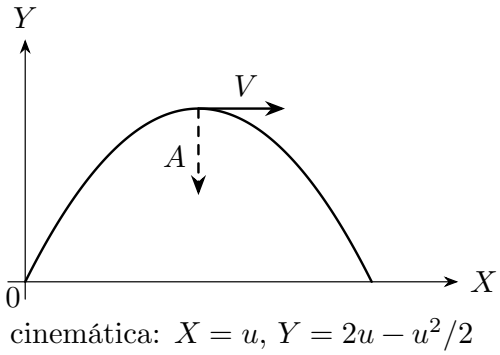


Figura 8.2. Sin resistencia, $X = u$ y $Y = 2u - u^2/2$ entre lanzamiento y retorno al nivel inicial. En el ápice $u = 2$, la velocidad es horizontal y la aceleración sigue apuntando hacia abajo. Las flechas son cinemáticas. Véase §4.

[3]Shankar, obra citada, cap. 2, §2.6, pp. 29–32; Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 1, §1.8, pp. 24–27. Control del cambio de dirección y de la derivación vectorial.

Definición 8.4 — Modelo local de proyectil. En un marco cartesiano fijo del plano vertical, con e_x horizontal y e_y hacia arriba, el modelo prescribe

$$\mathbf{a}(t) = -ge_y, \qquad g > 0,$$

con condiciones iniciales $P(t_0) = O + x_0 e_x + y_0 e_y$ y $\mathbf{v}(t_0) = v_{0x} e_x + v_{0y} e_y$. Se aplica durante el intervalo de vuelo que se declare.

La aceleración es una hipótesis del modelo `[MOD]`; las condiciones iniciales son datos `[IC]`. Al usarlo para un proyectil próximo a la superficie terrestre se omiten, entre otros efectos, la resistencia del medio, la variación espacial de la aceleración y la curvatura del suelo. Un objeto pequeño para la pregunta se representa por un punto, sin describir su giro ni deformación. Esas idealizaciones permiten una predicción cinemática; no afirman que la aceleración de cualquier objeto lanzado sea exactamente la misma.

Un régimen razonable exige que la extensión espacial de la historia permita tratar como constante la aceleración, que la desviación por el medio sea pequeña para la tolerancia deseada y que el marco fijo sea adecuado durante el tiempo de vuelo. Estas condiciones no tienen un umbral numérico universal: el proyecto concreto debe aportar escalas y tolerancia. Una discrepancia horizontal sistemática o una curvatura incompatible con la parábola puede exigir revisar esas premisas. El capítulo 6 enseña a convertir diferencias de aceleración en cotas de posición; §13 retomará ese control vectorial.

Proposición 8.4 — Historia del proyectil y eliminación del tiempo. Para $\tau = t - t_0$, la historia de la definición 8.4 es

$$x(t) = x_0 + v_{0x}\tau, \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2,$$

con $\mathbf{v}(t) = v_{0x} e_x + (v_{0y} - g\tau)e_y$. Si $v_{0x} \neq 0$, su imagen satisface

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2,$$

restringida a los valores de x correspondientes al intervalo temporal. Si $v_{0x} = 0$, la imagen está en la recta $x = x_0$.

Demostración. proposición 8.2 aplicado a la aceleración constante da las dos componentes y la velocidad. Cuando $v_{0x} \neq 0$, la primera igualdad tiene inversa $\tau = (x - x_0)/v_{0x}$. Sustituir en la segunda produce la ecuación espacial. La sustitución es reversible en los valores admitidos por el dominio. Si $v_{0x} = 0$, la primera componente es constante y no se puede realizar esa división; la segunda describe directamente el movimiento vertical. □

La ecuación parabólica es una consecuencia matemática exacta `[MATH]` de la definición 8.4. Su exactitud dentro del modelo no elimina los efectos físicos omitidos. También importa el caso degenerado: un lanzamiento vertical pertenece al modelo y no exige forzar una fórmula con denominador cero.

Qué significa separar las componentes. La ecuación horizontal tiene aceleración cero y la vertical tiene aceleración $-g$. Esa separación es matemática porque el modelo prescribe componentes desacopladas. Ambas comparten el tiempo; cuando ocurre un evento vertical, la posición horizontal debe evaluarse en ese mismo instante. La frase «el movimiento horizontal no influye en el vertical» está limitada a estas premisas. Una aceleración que dependiera de la velocidad completa o de la posición podría destruir esa separación.

Principio metodológico 8.4 — Declarar la aceleración antes de integrar. En cinemática, una aceleración prescrita es un dato o una hipótesis. Integrar demuestra qué historia resulta de esa premisa; la explicación dinámica y la comprobación empírica son obligaciones diferentes.

Ejercicios. Ejercicio 8.7. Toma $g = 2L/T^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2L$, $v_{0x} = 3L/T$ y $v_{0y} = L/T$. Encuentra las componentes normalizadas y la relación espacial. Mantén inicialmente el dominio $u \geq 0$ sin imponer todavía el suelo.

Solución. proposición 8.4 da $X(u) = 3u$ y $Y(u) = 2 + u - u^2$. La velocidad es $(L/T)(3e_x + (1 - 2u)e_y)$ y la aceleración $-(2L/T^2)e_y$. Como $u = X/3$, la relación espacial es $Y = 2 + X/3 - X^2/9$ con $X \geq 0$. La condición $u \geq 0$ ya excluye la rama temporal anterior al lanzamiento; el evento de contacto reducirá aún más el intervalo. La ecuación sin dominio no describe por sí sola el vuelo físico.

Ejercicio 8.8. Bajo definición 8.4, dos objetos parten simultáneamente de la misma altura y con la misma componente vertical inicial, pero diferentes componentes horizontales. Explica qué eventos de altura comparten. ¿Basta ese resultado para afirmar que chocarán entre sí?

Solución. Ambos tienen exactamente la misma función $y(\tau)$, de modo que los conjuntos de tiempos en que alcanzan cualquier altura prescrita coinciden dentro del dominio común. Sus funciones horizontales son $x_{A0} + v_{Ax}\tau$ y $x_{B0} + v_{Bx}\tau$, y un encuentro exige además su igualdad en uno de esos instantes. Si parten también de la misma abscisa pero con $v_{Ax} \neq v_{Bx}$, la igualdad horizontal sólo ocurre en $\tau = 0$. Coincidencia de alturas no es coincidencia de puntos; el encuentro es una condición vectorial simultánea.

Shankar, cap. 2, §2.7, pp. 32–35, controla la separación de componentes y el lanzamiento a igual altura. La exposición usa datos propios y mantiene explícitos los casos degenerados.[4]

5. Eventos, altura y alcance

La prolongación algebraica de una parábola sigue existiendo después de tocar el suelo. El modelo de vuelo termina allí: la colisión modifica la historia y requiere otro tratamiento. Por eso encontrar una raíz no basta; debemos decidir qué raíz corresponde al evento y qué intervalo queda físicamente admitido.

Tomamos $t_0 = 0$, suelo $y = 0$, altura inicial $h \geq 0$ y componentes iniciales $p = v_{0x}$, $w = v_{0y}$. La ley vertical es $y(\tau) = h + w\tau - g\tau^2/2$. Para un lanzamiento desde el suelo que produzca un intervalo de vuelo positivo exigimos $w > 0$; para $h > 0$, cualquier $w \in \mathbb{R}$ deja una primera raíz futura.

Definición 8.5 — Intervalo de vuelo hasta el suelo. Bajo las condiciones anteriores, el tiempo de llegada es la primera raíz estrictamente positiva τ_f de $y(\tau) = 0$. El intervalo de vuelo es $[0, \tau_f]$ y cumple $y(\tau) > 0$ para $0 < \tau < \tau_f$. El desplazamiento horizontal al llegar es $\Delta x_f = p\tau_f$; si se fija $p > 0$, lo llamaremos alcance R.

La condición de raíz positiva evita contar el instante de salida como llegada en un lanzamiento desde el suelo. Si $h = 0$ y $w \leq 0$, esta convención no proporciona un vuelo positivo sobre el suelo; el modelo necesitaría otro dominio o una descripción de contacto. Si $p < 0$, Δx_f es negativo respecto de la orientación elegida, y su módulo puede emplearse como distancia horizontal entre extremos. No cambiamos de significado sin avisarlo.

[4]Shankar, obra citada, cap. 2, §2.7, pp. 32–35. Control del modelo parabólico y del alcance a igual altura; las hipótesis y restricciones se explicitan en el desarrollo propio.

Proposición 8.5 — Tiempo de llegada y altura máxima. Si $h > 0$, o si $h = 0$ y $w > 0$, entonces

$$\tau_f = \frac{w + \sqrt{w^2 + 2gh}}{g}.$$

La altura máxima en $[0, \tau_f]$ es $h + w^2/(2g)$ si $w > 0$, alcanzada en $\tau = w/g$; si $w \le 0$ y $h > 0$, es h, alcanzada en la salida. Cuando $h = 0$ y $w > 0$, $\tau_f = 2w/g$.

Demostración. Resolver la ecuación cuadrática da las raíces $(w \pm \sqrt{w^2 + 2gh})/g$. Para $h > 0$, la raíz con signo menos es negativa y la otra positiva, pues la raíz cuadrada es mayor que $|w|$. Para $h = 0$, $w > 0$, las raíces son cero y $2w/g$. El coeficiente cuadrático es negativo, de modo que y es positivo entre las raíces; en ambos casos lo es durante el interior del vuelo definido.

La derivada vertical es $y' = w - g\tau$. Si $w > 0$, se anula en w/g, que está dentro del vuelo porque $\tau_f > w/g$, y cambia de positiva a negativa. Sustituir ese instante en y da $h + w^2/(2g)$. Si $w \le 0$, la función disminuye para todo $\tau > 0$, por lo que el máximo del intervalo cerrado es el valor inicial. □

El vértice de la parábola prolongada podría estar en tiempo negativo cuando $w < 0$. Incluirlo como «altura máxima del vuelo» sería optimizar sobre el dominio equivocado. El evento y el dominio forman parte de la pregunta.

Alcance a igual altura. Proposición 8.6 — Alcance con rapidez inicial fija a igual altura. Para $h = 0$, rapidez inicial $c > 0$ y ángulo $0 < \alpha < \pi/2$, con $p = c\cos\alpha$ y $w = c\sin\alpha$, el alcance es

$$R(\alpha) = \frac{c^2}{g}\sin(2\alpha).$$

Su máximo es c^2/g, alcanzado únicamente en $\alpha = \pi/4$ dentro de ese intervalo.

Demostración. proposición 8.5 da $\tau_f = 2c\sin\alpha/g$. Multiplicar por $p = c\cos\alpha$ y usar $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$ produce la fórmula. Para $2\alpha \in (0, \pi)$, el seno no supera uno y es uno sólo en $2\alpha = \pi/2$. La condición equivalente es $\alpha = \pi/4$. □

El ángulo de cuarenta y cinco grados depende de comparar alcances con la misma rapidez, salida y llegada a igual altura, y aceleración de la definición 8.4. Si cambia la altura final, la duración deja de ser $2w/g$; si cambia la rapidez con el ángulo, la función que se optimiza cambia. No hay un ángulo universal desligado de esas condiciones.

Principio metodológico 8.5 — Resolver eventos dentro de la historia admitida. Una ecuación de evento determina candidatos. Se conserva cada candidato sólo después de comprobar tiempo, posición y régimen. Las extremizaciones también deben hacerse en ese dominio, incluidos sus extremos.

Ejercicios. Ejercicio 8.9. Para ejercicio 8.7, termina el vuelo en el suelo. Encuentra tiempo de llegada, posición, altura máxima y velocidad de llegada. Comprueba qué raíz se descarta.

Solución. $2 + u - u^2 = 0$ tiene raíces $u = -1$ y $u = 2$. La primera pertenece al pasado de la ley prolongada y no al vuelo desde $u = 0$; la segunda da $\tau_f = 2T$ y $P_f = O + 6Le_x$. La altura máxima ocurre en $u = 1/2$ y vale $9L/4$. La velocidad final es $(L/T)(3e_x - 3e_y)$, de rapidez $3\sqrt{2}L/T$. En el interior $0 < u < 2$, $Y = (2 - u)(u + 1) > 0$, lo que confirma la admisibilidad. El vuelo termina en $u = 2$, aunque la expresión polinómica permita seguir calculando.

Ejercicio 8.10. Se lanza desde $h > 0$ con rapidez fija $c > 0$. Demuestra que $\alpha = \pi/4$ no maximiza el alcance entre ángulos ascendentes $0 < \alpha < \pi/2$. No necesitas encontrar el máximo.

Solución. proposición 8.5 da $R(\alpha) = (c/g)\cos\alpha\,[c\sin\alpha + S(\alpha)]$, donde $S(\alpha) = \sqrt{c^2\sin^2\alpha + 2gh}$. La función es diferenciable en el intervalo y $S' = c^2\sin\alpha\cos\alpha/S$. Para $b = c/\sqrt{2}$ y $S_* = \sqrt{b^2 + 2gh}$,

la derivada en $\pi/4$ es

$$R'(\pi/4) = \frac{c}{g\sqrt{2}}\left(-S_* + \frac{b^2}{S_*}\right) = -\frac{2ch}{\sqrt{2}S_*} < 0.$$

En un entorno de ese ángulo la función disminuye, así que un ángulo ligeramente menor da mayor alcance. El caso $h = 0$ anula esta derivada y recupera proposición 8.6. La fórmula familiar fallaba aquí porque la altura de salida modifica el tiempo de vuelo.

6. Diseñar un lanzamiento y reconocer información faltante

Hasta ahora fijamos la velocidad inicial y calculamos lo que ocurriría. El problema inverso pide qué velocidad permitiría un evento deseado. La inversión tiene que conservar los datos que se conocen: alcanzar un punto no determina por sí solo la duración ni la rapidez del lanzamiento.

Tomamos la salida en $(0, 0)$ y el objetivo en (d, H), con $d > 0$. Si el tiempo de llegada $\tau > 0$ se prescribe, proposición 8.4 determina inmediatamente

$$p = \frac{d}{\tau}, \qquad w = \frac{H}{\tau} + \frac{g\tau}{2}.$$

Esta pareja es única para ese tiempo. Si no se prescribe τ, las parejas forman una familia de un parámetro. La fórmula responde al evento de paso por el objetivo; si hay suelo, obstáculos u otro final de vuelo, hay que verificar adicionalmente el segmento temporal anterior. Un objetivo alcanzado por una prolongación posterior a una colisión no constituye un lanzamiento admisible.

Proposición 8.7 — Rapidez mínima para pasar por un objetivo. Bajo definición 8.4, sin restricciones adicionales durante el recorrido y con $\tau > 0$ libre, la menor rapidez inicial capaz de pasar por (d, H) satisface

$$c^2_{\text{mín}} = g\left(H + \sqrt{d^2 + H^2}\right).$$

Se alcanza en un único tiempo, determinado por $\tau^2 = 2\sqrt{d^2 + H^2}/g$, y la pareja (p, w) anterior determina una única velocidad para ese tiempo.

Demostración. El cuadrado de la rapidez requerida es

$$c^2(\tau) = p^2 + w^2 = \frac{d^2 + H^2}{\tau^2} + gH + \frac{g^2\tau^2}{4}.$$

Sea $A = d^2 + H^2 > 0$ y $z = \tau^2 > 0$. Los términos que dependen de z cumplen

$$\frac{A}{z} + \frac{g^2 z}{4} - g\sqrt{A} = \left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{z}} - \frac{g\sqrt{z}}{2}\right)^2 \geq 0.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $z = 2\sqrt{A}/g$. Por tanto, el mínimo de c^2 es $gH + g\sqrt{A}$, positivo porque $d > 0$ implica $\sqrt{A} > |H|$. La rapidez tiene el mismo minimizador, pues la raíz cuadrada es estrictamente creciente en números positivos. La unicidad del tiempo positivo y de las componentes ya calculadas concluye la prueba. □

La prueba transforma una búsqueda de velocidades en una búsqueda de tiempos. No necesita diferenciar una expresión trigonométrica ni suponer de antemano que el mejor lanzamiento tenga cierto ángulo. Tampoco convierte todos los objetivos en físicamente accesibles: la cláusula sin restricciones adicionales es parte sustantiva del enunciado.

Rapidez fijada y dos posibilidades. Si la rapidez disponible es c, la igualdad anterior produce una ecuación para $z = \tau^2$:

$$\frac{g^2}{4}z^2 + (gH - c^2)z + (d^2 + H^2) = 0.$$

Para $c = c_{\text{mín}}$ hay una raíz positiva doble y un lanzamiento. Para $c > c_{\text{mín}}$ hay dos raíces positivas distintas: el discriminante es positivo porque $c^2 - gH > g\sqrt{d^2 + H^2}$; la suma y el producto de las raíces son positivos. Sus raíces cuadradas proporcionan dos tiempos y dos velocidades iniciales. Para $c < c_{\text{mín}}$ no hay tiempo admisible, por la proposición 8.7. Esta clasificación incluye objetivos altos y bajos, sin dividir por una componente vertical que pudiera anularse.

Principio metodológico 8.6 — Declarar el dato libre en una inversión. Un punto objetivo, un tiempo objetivo y una rapidez inicial son restricciones diferentes. Antes de resolver, se debe identificar cuál se fija, cuál se busca y cuáles quedan libres. La multiplicidad de soluciones puede ser una propiedad del problema y no un error algebraico.

Ejercicios. Ejercicio 8.11. Un objetivo está en $(d, 0)$ con $d > 0$. Encuentra la rapidez mínima y la velocidad inicial que la alcanza. Relaciona el resultado con la proposición 8.6.

Solución. proposición 8.7 da $c_{\text{mín}} = \sqrt{gd}$ y $\tau_* = \sqrt{2d/g}$. Las componentes son $p = d/\tau_* = \sqrt{gd/2}$ y $w = g\tau_*/2 = \sqrt{gd/2}$. La velocidad apunta a $\pi/4$ y tiene norma $\sqrt{gd}$. Proposición 8.6 afirma que a rapidez c el mayor alcance a igual altura es c^2/g; exigir que ese alcance sea d produce el mismo umbral. Las dos formulaciones invierten qué magnitud se fija y cuál se optimiza.

Ejercicio 8.12. Usa unidades normalizadas con $g = 2L/T^2$ y objetivo $(L, 0)$. Para rapidez $c = 2L/T$, encuentra ambos tiempos de llegada y sus velocidades iniciales. Verifica el paso por el objetivo y el dominio sobre el suelo.

Solución. Si $u = \tau/T$, las componentes iniciales normalizadas son $P = 1/u$ y $W = u$. La condición de rapidez es $u^{-2} + u^2 = 4$. Con $z = u^2$ obtenemos $z^2 - 4z + 1 = 0$, por lo que $z_\pm = 2 \pm \sqrt{3} > 0$ y $u_\pm = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$. Las velocidades son $(L/T)(u_\pm^{-1}e_x + u_\pm e_y)$; ambas tienen norma $2L/T$.

Para cada elección, $X(s) = s/u_\pm$ y $Y(s) = u_\pm s - s^2$ en tiempo normalizado s. En $s = u_\pm$ se cumple $(X, Y) = (1, 0)$ y en $0 < s < u_\pm$ se tiene $Y = s(u_\pm - s) > 0$. Ambas historias alcanzan el objetivo en su primera llegada positiva al suelo. El lanzamiento de mayor tiempo tiene mayor componente vertical y menor componente horizontal. La ecuación inversa conserva esas dos posibilidades.

7. Coordenadas polares y direcciones variables

Un movimiento próximo a un centro fijo puede resultar más sencillo si registramos distancia al centro y ángulo. Para una circunferencia centrada en ese punto, la distancia no cambia y el ángulo contiene toda la evolución. Sin embargo, que una coordenada sea constante no significa que el vector de posición lo sea: su dirección puede variar.

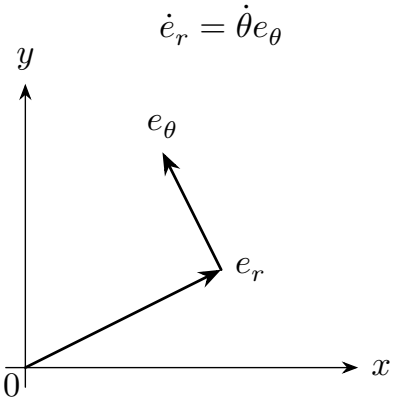


Figura 8.3. La base ortonormal polar gira con el ángulo: $\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta$ y $\dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r$. Las flechas muestran sus direcciones; su longitud es esquemática. Véase §7.

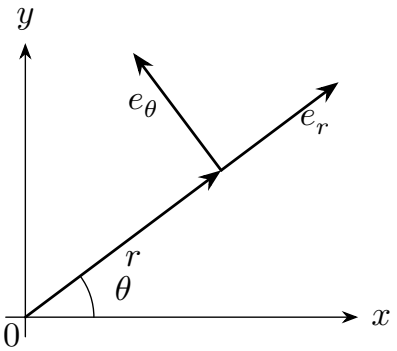


Figura 8.4. En el punto de ángulo θ, e_r es radial y e_θ apunta hacia el incremento de θ. Las dos direcciones giran con el punto; sus derivadas aportan términos a la aceleración. Véase §7.

Fijamos un plano orientado con origen O y base ortonormal (e_x, e_y). Para un punto distinto de O, la distancia $\rho > 0$ es única, mientras que el ángulo representa una dirección y se determina módulo 2π.

Definición 8.6 — Representación polar de una historia que evita el origen. Una representación polar diferenciable de P en un intervalo J consta de funciones diferenciables $\rho : J \to (0, \infty)$ y $\theta : J \to \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) e_r(t), \qquad e_r(t) = \cos\theta(t) e_x + \sin\theta(t) e_y.$$

La dirección angular positiva se representa por

$$e_\theta(t) = -\sin\theta(t) e_x + \cos\theta(t) e_y.$$

La función θ es una elección continua del ángulo a lo largo del tramo, no una coordenada principal obligada a permanecer entre dos valores fijos. La regularidad de estas funciones se exige explícitamente cuando se derivan.

El cambio de coordenadas es $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. La distancia se recupera por $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; el ángulo requiere conservar el cuadrante. La receta $\theta = \arctan(y/x)$ falla si $x = 0$ y confunde direcciones opuestas cuando sólo se usa el cociente. Se puede elegir una rama del ángulo en un

entorno espacial que evite un corte; al seguir una historia que cruza ese corte hay que continuar el ángulo de manera coherente. No utilizaremos sin prueba un teorema global de levantamiento: nuestros cálculos se hacen en tramos con una representación polar regular declarada, o en leyes polares dadas desde el comienzo.

Una base ligada a la posición. En cada instante, (e_r, e_θ) es una base ortonormal del mismo plano. Directamente, $e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = 1$ y $e_r \cdot e_\theta = 0$, por las identidades trigonométricas. Las componentes de un vector $\mathbf{b}$ en esa base son $b_r = \mathbf{b} \cdot e_r$ y $b_\theta = \mathbf{b} \cdot e_\theta$. Para comparar componentes tomadas en instantes diferentes, debemos recordar que sus direcciones pueden ser diferentes.

Proposición 8.8 — Derivadas de las direcciones polares. En una representación definición 8.6, si θ es diferenciable, entonces

$$e_r' = \theta' e_\theta, \qquad e_\theta' = -\theta' e_r.$$

Dos elecciones continuas del ángulo para la misma dirección, en el mismo intervalo conectado, difieren en una constante múltiplo entero de 2π; por tanto, si son diferenciables tienen la misma derivada.

Demostración. Derivar las componentes de e_r en la base fija da $\theta'(-\sin\theta e_x + \cos\theta e_y) = \theta' e_\theta$. Derivar las de e_θ da $-\theta'(\cos\theta e_x + \sin\theta e_y) = -\theta' e_r$.

Si θ_1 y θ_2 representan la misma dirección, sus senos y cosenos coinciden. Por la periodicidad de la parametrización del círculo, $(\theta_1 - \theta_2)/(2\pi)$ toma valores enteros. Es una función continua en un intervalo: si tomara dos enteros distintos, el teorema del valor intermedio la obligaría a tomar un valor no entero entre ellos. Es, por ello, constante. Su derivada es cero cuando ambas elecciones son diferenciables. □

La primera identidad expresa que el cambio de un vector unitario es perpendicular al propio vector. Proposición 8.3 ya había mostrado esa estructura de forma general. La segunda identidad fija el signo de la rotación: cuando θ crece, e_θ gira hacia $-e_r$.

Principio metodológico 8.7 — Derivar coeficientes y direcciones. Una base ortonormal puede cambiar con el tiempo. Su ortonormalidad permite calcular normas y proyecciones en cada instante, pero no autoriza tratar sus vectores como constantes al derivar.

El origen y el corte angular. En $\rho = 0$ cualquier ángulo produce el mismo punto. La dirección radial deja de estar determinada por la posición; no es una singularidad necesaria del movimiento físico. Por ejemplo, la ley cartesiana $\mathbf{r}(t) = cte_x$, con $c > 0$, atraviesa el origen suavemente. Su distancia es $c|t|$, no diferenciable en cero, y la dirección radial cambia de $-e_x$ a e_x. La descripción cartesiana sigue siendo regular mientras la descripción polar ligada a la posición pierde regularidad.

Un salto de 2π en una lectura principal del ángulo tampoco prueba un salto del punto. En una circunferencia, $\theta(t)$ puede crecer continuamente a través de π, aunque un instrumento que devuelve ángulos en $(-\pi, \pi]$ cambie de rama. Se debe distinguir el registro angular, su continuación temporal y la posición que representan.

Ejercicios. Ejercicio 8.13. En tiempo normalizado, $\rho = L$ y $\theta(u) = 3\pi/4 + u$ para $0 \le u \le \pi/2$. Describe el registro principal en $(-\pi, \pi]$ y decide si la posición o la dirección e_r tienen un salto.

Solución. Hasta $u = \pi/4$ el ángulo principal es $3\pi/4 + u$; en el cruce toma π y después puede escribirse $3\pi/4 + u - 2\pi$. El registro principal salta de valores próximos a π a valores próximos a $-\pi$. Sin embargo, seno y coseno son continuos y periódicos: $\mathbf{r} = L(\cos\theta e_x + \sin\theta e_y)$ y e_r no tienen salto.

Para derivar se conserva la función continua $3\pi/4+u$, cuya derivada temporal es $1/T$. Derivar una lectura con salto como si fuera la dirección física confundiría el corte con el movimiento.

Ejercicio 8.14. Explica por qué los puntos con coordenadas $(x,y)=(-L,L)$ y $(L,-L)$ tienen el mismo cociente y/x pero distintas direcciones polares. Encuentra ρ y una elección de θ para cada uno.

Solución. Ambos cocientes son -1 y ambas distancias son $\sqrt{2}L$. Para el primero podemos elegir $\theta=3\pi/4$ y para el segundo $\theta=-\pi/4$. Sus direcciones son opuestas y difieren en π, no en un múltiplo entero de 2π. Usar sólo $\arctan(-1)=-\pi/4$ representaría correctamente el segundo punto y colocaría el primero en el cuadrante equivocado. Las igualdades $\cos\theta=x/\rho$ y $\sin\theta=y/\rho$ controlan simultáneamente el cuadrante.

Kleppner–Kolenkow §1.9, pp. 27–33, controla el cambio a direcciones polares. Aquí se añade explícitamente la separación entre el ángulo continuado, el corte de una rama y el origen.[5]

8. Velocidad y aceleración en coordenadas polares

En una historia polar, ρ' informa cuánto cambia la distancia al origen. No mide toda la rapidez: un objeto puede mantener esa distancia y moverse alrededor del origen. El término que falta debe proceder de la dirección e_r, que ahora cambia con el ángulo.

Proposición 8.9 — Fórmulas cinemáticas polares. Si $\rho>0$ y $\rho,\theta\in C^2(J)$ en una representación definición 8.6, entonces

$$\mathbf{v}=\rho' e_r+\rho\theta' e_\theta,$$
$$\mathbf{a}=(\rho''-\rho(\theta')^2)e_r+(\rho\theta''+2\rho'\theta')e_\theta.$$

La rapidez es $q=\sqrt{(\rho')^2+\rho^2(\theta')^2}$.

Demostración. Derivar $\mathbf{r}=\rho e_r$ con la regla del producto y proposición 8.8 da $\mathbf{v}=\rho' e_r+\rho\theta' e_\theta$. Para la aceleración derivamos ambos sumandos:

$$\mathbf{a}=\rho'' e_r+\rho'\theta' e_\theta+(\rho'\theta'+\rho\theta'')e_\theta-\rho(\theta')^2 e_r.$$

Agrupar las direcciones e_r y e_θ produce la fórmula. Los dos términos $\rho'\theta'$ tienen procedencias distintas: uno deriva la dirección de la velocidad radial y el otro deriva el coeficiente de la velocidad angular. La norma de $\mathbf{v}$ se obtiene por ortonormalidad. □

La componente radial de la aceleración es $a_r=\rho''-\rho(\theta')^2$, y la angular es $a_\theta=\rho\theta''+2\rho'\theta'$. No son, en general, las segundas derivadas de las coordenadas. Además, θ' tiene dimensión T^{-1} y θ'' dimensión T^{-2}, al medir el ángulo en radianes como cantidad adimensional. Multiplicar por ρ proporciona las dimensiones de velocidad y aceleración. Una supuesta componente lineal θ' sin factor de longitud tendría dimensiones incorrectas.

Interpretar los términos sin introducir fuerzas. Si θ es constante, la dirección radial también lo es y el movimiento se reduce a una recta: $\mathbf{v}=\rho' e_r$, $\mathbf{a}=\rho'' e_r$. Si $\rho=b>0$ es constante, la velocidad es $b\theta' e_\theta$ y la aceleración $-b(\theta')^2 e_r+b\theta'' e_\theta$. El primer término apunta hacia el centro y mide el cambio de dirección; el segundo responde al cambio de velocidad angular. Estos son resultados cinemáticos, sin identificar una fuerza que los produzca.

La dirección e_θ es perpendicular a la radial. Sólo en un movimiento de radio constante la velocidad queda enteramente en esa dirección y es tangente a la circunferencia. Para una espiral, la tangente a la trayectoria contiene en general las dos direcciones. Llamar «tangencial» a la componente angular puede ocultar esta diferencia si no se indica a qué curva se refiere.

[5] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 1, §1.9, pp. 27–33. Control de base polar y derivadas de sus vectores unitarios.

Principio metodológico 8.8 — Distinguir componente y derivada de coordenada. Las componentes polares de velocidad son $(\rho', \rho\theta')$ y las de aceleración son $(\rho'' - \rho(\theta')^2, \rho\theta'' + 2\rho'\theta')$. El cálculo debe reconstruir el vector completo antes de interpretar un coeficiente como aceleración física.

Una recta vista desde coordenadas polares. La ley cartesiana $\mathbf{r}(t) = cte_x + be_y$, con $b, c > 0$, tiene velocidad constante ce_x y aceleración cero. En tiempo $t \in \mathbb{R}$, su distancia es $\rho = \sqrt{c^2t^2 + b^2}$. Una elección continua de ángulo en $(0, \pi)$ cumple $\theta' = -bc/(c^2t^2 + b^2)$. Así, $\rho'' = b^2c^2/\rho^3 > 0$, aunque el vector aceleración sea nulo.

Proposición 8.9 resuelve la aparente contradicción: $\rho(\theta')^2 = b^2c^2/\rho^3$, exactamente igual a ρ'', y la componente radial se cancela. Asimismo, $\rho' = c^2t/\rho$ y $\theta'' = 2bc^3t/\rho^4$ dan $\rho\theta'' + 2\rho'\theta' = 0$. La curvatura de las coordenadas puede producir derivadas no nulas incluso cuando la historia tiene aceleración nula. No hemos cambiado el movimiento; hemos cambiado su representación.

Ejercicios. Ejercicio 8.15. Se da $\rho(t) = L(1 + u^2)$ y $\theta(t) = 2u$, con $u = (t - t_0)/T \in [-1, 1]$. Encuentra velocidad, aceleración y rapidez. Evalúa los vectores en $u = 0$ y verifica mediante coordenadas cartesianas la aceleración en ese instante.

Solución. Las derivadas son $\rho' = 2Lu/T$, $\rho'' = 2L/T^2$, $\theta' = 2/T$ y $\theta'' = 0$. Proposición 8.9 da

$$\mathbf{v} = \frac{L}{T}\,[2ue_r + 2(1 + u^2)e_\theta],$$

$$\mathbf{a} = \frac{L}{T^2}\,[(-2 - 4u^2)e_r + 8ue_\theta], \qquad q = \frac{2L}{T}\sqrt{u^2 + (1 + u^2)^2}.$$

En cero, $e_r = e_x$, $e_\theta = e_y$, por lo que $\mathbf{v} = 2Le_y/T$ y $\mathbf{a} = -2Le_x/T^2$. El radio tiene allí un mínimo, pues $\rho'' > 0$, pero la aceleración radial es negativa: la rotación aporta un término mayor.

Para comprobarlo en cartesianas, $X = (1 + u^2)\cos(2u)$ y $Y = (1 + u^2)\sin(2u)$. La segunda derivada de X en cero es $2 - 4 = -2$, y la de Y es cero por su imparidad y regularidad. Multiplicar por L/T^2 recupera la aceleración encontrada. Esta comparación verifica una cancelación estructural que la sola segunda derivada del radio no permite ver.

Ejercicio 8.16. Un razonamiento afirma: «Si $\rho(t) = b$ y $\theta(t) = \omega t$, ambas coordenadas tienen segunda derivada cero, luego $\mathbf{a} = 0$». Para $b > 0$ y $\omega \neq 0$, localiza la falla y redacta una corrección completa.

Solución. La afirmación trata las direcciones polares como si fueran vectores fijos. En realidad, $\mathbf{r} = be_r(t)$ y proposición 8.8 da $e_r' = \omega e_\theta$, $e_\theta' = -\omega e_r$. Por ello, $\mathbf{v} = b\omega e_\theta$ y $\mathbf{a} = -b\omega^2 e_r$, no nula. Las segundas derivadas escalares ρ'' y θ'' son cero, pero proposición 8.9 incluye $-\rho(\theta')^2$. La rapidez es $b|\omega|$ constante y la aceleración cambia la dirección de la velocidad, de acuerdo con la proposición 8.3. La corrección debe conservar ambos pasos de la regla del producto; añadir sólo la conclusión correcta no explica el error.

Proposición 8.9 reorganiza el cálculo de una historia: primero derivamos en el espacio vectorial fijo, después expresamos el resultado en direcciones polares instantáneas. Esta disciplina será la entrada a los marcos móviles. Una base que depende de la posición del objeto y un marco físico cuyos ejes giran no son todavía la misma construcción, aunque en ambos casos haya que derivar direcciones variables.

La fórmula y sus términos se contrastaron con Kleppner–Kolenkow §1.9, pp. 33–38; los ejemplos y las demostraciones de este macrotramo son propios.[6]

[6] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 1, §1.9, pp. 33–38. Control de componentes polares de velocidad y aceleración. No se introduce su tratamiento dinámico de fuerzas en marcos giratorios.

9. Movimiento circular uniforme y no uniforme

Un objeto recorre una pista circular. Conocer el radio y el tiempo de una vuelta no indica, por sí solo, cómo se distribuye su rapidez durante esa vuelta. Puede avanzar lentamente en un sector y más rápido en otro; también puede detenerse o cambiar de sentido. La circunferencia describe la imagen espacial, mientras que la función angular conserva la historia temporal.

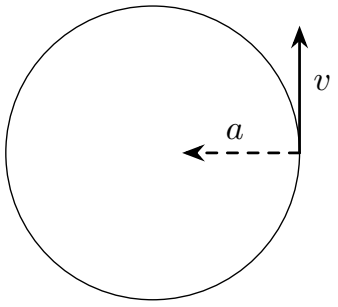


Figura 8.5. En el movimiento circular uniforme, la velocidad es tangente y la aceleración es centrípeta. Las flechas representan v y a, no un diagrama de fuerzas. Véase §9.

Definición 8.7 — Historia circular respecto de un centro fijo. Una historia circular de radio $b > 0$ y centro C se escribe

$$P(t) = C + b(\cos\theta(t)e_x + \sin\theta(t)e_y),$$

con θ de la regularidad exigida en el intervalo considerado. Su velocidad angular escalar firmada es $\omega(t) = \theta'(t)$. Llamaremos uniforme a la historia con $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0)$ y $\omega_0 \neq 0$ constante.

El centro es fijo y b tiene dimensión de longitud. La velocidad angular tiene dimensión T^{-1} y su signo depende de la orientación del plano. En una ley uniforme completa, la imagen es toda la circunferencia; en un intervalo corto puede ser sólo un arco. La historia constante, con $\omega_0 = 0$, describe reposo y no tiene un período fundamental positivo de revolución.

Proposición 8.10 — Cinemática de una historia circular. Si $\theta \in C^2$, entonces

$$\mathbf{v} = b\omega e_\theta, \qquad \mathbf{a} = -b\omega^2 e_r + b\omega' e_\theta, \qquad q = b|\omega|.$$

En cada instante con $\omega \neq 0$, la componente de aceleración paralela a la dirección del movimiento es $q' = b\,\mathrm{sgn}(\omega)\omega'$, y la magnitud de la componente perpendicular es q^2/b. Para una ley uniforme definida en todo $\mathbb{R}$, el período fundamental de la posición es $\mathcal{T} = 2\pi/|\omega_0|$.

Demostración. Tomamos el origen polar en C y aplicamos proposición 8.9 con $\rho = b$ constante. Desaparecen ρ' y ρ'', y quedan las fórmulas de velocidad y aceleración. La norma de $\mathbf{v}$ es $b|\omega|$. Cuando $\omega \neq 0$, la dirección del movimiento es $\mathrm{sgn}(\omega)e_\theta$, por lo que proyectar $\mathbf{a}$ en ella da $b\,\mathrm{sgn}(\omega)\omega'$. La parte radial es perpendicular a la velocidad y tiene norma $b\omega^2 = q^2/b$.

En la ley uniforme, $P(t + s) = P(t)$ para todo t si y sólo si $\omega_0 s$ es múltiplo entero de 2π. Entre los valores positivos de s, el menor es $2\pi/|\omega_0|$. Es el período fundamental, no sólo un tiempo de retorno encontrado en un instante. □

La rapidez puede ser constante aunque el vector aceleración gire durante el recorrido. En una ley uniforme, su norma $b\omega_0^2$ es constante y su dirección apunta siempre hacia el centro. La denominación *centrípeta* describe esa dirección; no identifica aún una interacción física que mantenga el movimiento.

Si ω se anula en un instante, las fórmulas vectoriales siguen siendo válidas. La expresión q' puede requerir cuidado: $|\omega|$ no tiene por qué ser diferenciable en un cero donde ω cambia de signo. Proposición 8.3 exigía rapidez positiva precisamente para evitar ese problema. Una aceleración angular no nula en el instante de reposo puede poner al objeto en movimiento inmediatamente después.

Principio metodológico 8.9 — Distinguir una vuelta de un período. Un retorno al punto inicial ocurre cuando cambia el ángulo en un múltiplo de 2π. Un período de toda la historia exige que el mismo desplazamiento temporal reproduzca la posición en cada instante del dominio pertinente. Un retorno aislado no prueba periodicidad.

Ejercicios. Ejercicio 8.17. Sea $b = 3L$ y $\theta(u) = u^2$ para $u \geq 0$. Calcula velocidad, aceleración y rapidez. Compara el tiempo de la primera vuelta con la duración de la segunda. ¿Hay reposo inicial con aceleración no nula?

Solución. La velocidad angular es $2u/T$ y su derivada temporal es $2/T^2$. Proposición 8.10 da

$$\mathbf{v} = \frac{6L}{T} u e_\theta, \qquad \mathbf{a} = \frac{L}{T^2}(-12u^2 e_r + 6e_\theta), \qquad q = \frac{6L}{T}u.$$

La primera vuelta termina en $u_1 = \sqrt{2\pi}$ y la segunda en $u_2 = \sqrt{4\pi}$. Sus duraciones son $T\sqrt{2\pi}$ y $T(\sqrt{4\pi} - \sqrt{2\pi})$, diferentes. Tampoco existe un desplazamiento temporal positivo s que reproduzca toda la historia: la diferencia angular normalizada $(u+s)^2 - u^2 = 2us + s^2$ varía continuamente con u y no puede tomar sólo múltiplos enteros de 2π. En cero la velocidad es nula, pero la aceleración es $6Le_\theta/T^2$, usando la extensión suave o la derivada unilateral. Reposo instantáneo no implica ausencia de cambio de velocidad.

Ejercicio 8.18. Una historia tiene centro fijo C, radio $2L$ y ángulo $\theta(u) = \pi/2 - 3u$. Encuentra sentido, rapidez, aceleración y período. Explica por qué cambiar el signo de la velocidad angular no cambia la dirección radial de la aceleración.

Solución. La velocidad angular es $-3/T$: el movimiento sigue el sentido angular negativo. La velocidad es $-6Le_\theta/T$, la rapidez $6L/T$ y la aceleración $-18Le_r/T^2$. El período es $2\pi T/3$. La parte radial contiene el cuadrado de la velocidad angular; al invertir el sentido, sigue apuntando hacia C. Las posiciones en un mismo tiempo pueden cambiar por esa inversión, pero en cada una la aceleración uniforme es radial hacia dentro.

El tratamiento usa la interfaz polar ya demostrada. Shankar §2.6 y Kleppner–Kolenkow §1.9 sirven de contraste para el caso uniforme y la separación entre cambio de dirección y cambio de rapidez.[7]

10. Marcos con origen en traslación

Una persona observa un objeto desde una plataforma que se desplaza. Aunque sus ejes permanezcan paralelos a los del suelo, la coordenada que registra es una posición respecto de un origen móvil.

[7] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I*, Expanded Edition, Yale University Press, 2019, cap. 2, §2.6, pp. 29–32; D. Kleppner y R. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, §1.9. Control de la cinemática circular; se reconstruyen los resultados con la proposición 8.9.

Derivar esa coordenada mide el cambio relativo a la plataforma, y no necesariamente la velocidad descrita desde el origen fijo.

Mantendremos un único reloj y las mismas unidades de longitud. Es una elección del modelo cinemático clásico que permite comparar simultáneamente posiciones en los dos marcos. No estamos deduciendo una transformación de relojes a partir de la geometría espacial.

Definición 8.8 — Marco en traslación y posición relativa. En un espacio de dimensión 2 o 3, sean O y B un origen y una base ortonormal fijos. Un marco en traslación tiene origen $O'(t) = O + \mathbf{c}(t)$ y conserva la base B. Si $P(t) = O + \mathbf{r}(t)$, su posición relativa al origen móvil es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{c}(t).$$

Llamaremos velocidad y aceleración relativas a las derivadas $\mathbf{y}'$ y $\mathbf{y}''$ cuando existan. Su significado depende del origen móvil declarado.

La identidad $P = O' + \mathbf{y}$ compara un punto con dos representaciones de origen. El vector $\mathbf{y}$ existe en el espacio de desplazamientos, pero su derivada pierde la invariancia frente a un cambio temporal del origen: el vector $\mathbf{c}$ ya no es constante.

Proposición 8.11 — Composición bajo traslación. Si $\mathbf{c}$ y $\mathbf{y}$ son de clase C^2, entonces

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}' + \mathbf{y}', \qquad \mathbf{a} = \mathbf{c}'' + \mathbf{y}''.$$

Si $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{U}(t - t_0)$ con $\mathbf{U}$ constante, la velocidad relativa es $\mathbf{v} - \mathbf{U}$ y la aceleración relativa coincide con $\mathbf{a}$. Las dos aceleraciones coinciden en todo un intervalo si y sólo si $\mathbf{c}'' = 0$ allí.

Demostración. definición 8.8 da $\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{y}$. Derivar una vez y luego otra produce las dos identidades. Para una traslación uniforme, $\mathbf{c}' = \mathbf{U}$ y $\mathbf{c}'' = 0$, lo que da las fórmulas particulares. En general, $\mathbf{a} - \mathbf{y}'' = \mathbf{c}''$; por tanto, la igualdad de aceleraciones en cada instante equivale a $\mathbf{c}'' = 0$ en cada instante del intervalo. □

El resultado es cinemático. La igualdad de aceleraciones bajo traslación uniforme no demuestra aquí que ambos marcos sean inerciales ni cómo se transforman las leyes dinámicas. La transformación espacial $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{c}_0 - \mathbf{U}(t - t_0)$, acompañada por el reloj común, es la parte de la transformación galileana que necesitamos. Su uso como descripción física se mantiene dentro del régimen clásico elegido.

Reposo y rapidez en dos descripciones. Si $\mathbf{y}$ es constante, el objeto permanece fijo respecto de la plataforma y su velocidad en el marco fijo es $\mathbf{c}'$. Si $\mathbf{r}$ es constante, su velocidad relativa es $-\mathbf{c}'$. La palabra «reposo» necesita un marco. Lo mismo ocurre con la rapidez: $\|\mathbf{v} - \mathbf{U}\|$ no suele ser $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{U}\|$, pues la norma depende de la dirección de ambos vectores.

La aceleración puede coincidir y las velocidades diferir. Por ejemplo, un objeto con aceleración prescrita $-ge_y$ mantiene esa misma aceleración en una plataforma que se traslada uniformemente, pero sus componentes iniciales de velocidad cambian por la sustracción de $\mathbf{U}$. La parábola descrita desde la plataforma puede tener otra componente horizontal o degenerar en una recta vertical. La trayectoria espacial relativa al origen móvil es una representación distinta de la imagen del movimiento en el marco fijo.

Principio metodológico 8.10 — Nombrar el marco de una derivada. Toda velocidad o aceleración relativa debe indicar respecto de qué origen y ejes se obtiene. Para ejes paralelos fijos, las derivadas se relacionan por la proposición 8.11. Una igualdad de aceleraciones no autoriza una igualdad de velocidades ni de trayectorias.

Ejercicios. Ejercicio 8.19. En variables normalizadas, el origen móvil tiene $\mathbf{C}(u) = u^2 e_x - u e_y$ y el objeto tiene posición relativa $\mathbf{Y}(u) = (1+u)e_x + 2e_y$. Reconstruye posición, velocidad y aceleración en el marco fijo, y compara las aceleraciones.

Solución. La posición relativa al origen fijo es $\mathbf{R} = \mathbf{C} + \mathbf{Y} = (1 + u + u^2)e_x + (2-u)e_y$. La velocidad física es $(L/T)((1+2u)e_x - e_y)$ y la aceleración es $2Le_x/T^2$. En el marco móvil, $\mathbf{y}' = Le_x/T$ y $\mathbf{y}'' = 0$. La diferencia de aceleraciones es $\mathbf{c}'' = 2Le_x/T^2$, exactamente la aceleración del origen móvil. La historia es uniforme respecto de esa plataforma, pero no respecto del marco fijo.

Ejercicio 8.20. Un proyectil tiene $\mathbf{r}(\tau) = p\tau e_x + (h + w\tau - g\tau^2/2)e_y$, con $p > 0$, $h > 0$ y $g > 0$. El origen de una plataforma sigue $\mathbf{c}(\tau) = p\tau e_x$. Describe el vuelo desde la plataforma y determina si cambia el tiempo de contacto con el suelo.

Solución. definición 8.8 da $\mathbf{y} = (h + w\tau - g\tau^2/2)e_y$. El proyectil permanece sobre la vertical del origen móvil: su componente horizontal relativa es cero. Su aceleración relativa es $-ge_y$, pues la plataforma tiene aceleración nula. El suelo $y = 0$ mantiene la misma altura en esta traslación horizontal; el tiempo de contacto sigue siendo $(w + \sqrt{w^2 + 2gh})/g$. En ese instante el punto de llegada, expresado en el marco fijo, tiene abscisa $p\tau_f$; desde la plataforma tiene abscisa relativa cero. El evento físico no ha cambiado, aunque sí su representación.

Kleppner–Kolenkow §8.2 permite contrastar la resta de velocidades y aceleraciones y la hipótesis de reloj común. Se utiliza únicamente su relación cinemática de posiciones y derivadas.[8]

11. Marcos planos con ejes en rotación

Una cámara puede desplazarse y girar al mismo tiempo. Ahora un objeto que conserva sus coordenadas en la imagen no mantiene necesariamente un vector constante respecto del suelo: los ejes de la cámara cambian de dirección. La composición de velocidades necesita reconocer ese giro además del movimiento del origen.

Trabajamos en un plano orientado con base fija (e_x, e_y). Introducimos el operador J, que gira noventa grados en el sentido positivo: $Je_x = e_y$ y $Je_y = -e_x$. Así, $J^2 = -\mathrm{Id}$, $\|Jz\| = \|z\|$ y $z \cdot Jz = 0$. Sólo usamos un operador lineal del plano, sin introducir un eje angular tridimensional.

Definición 8.9 — Marco plano en traslación y rotación. Sean $\mathbf{c}(t)$ de clase C^2 y $\varphi(t)$ de clase C^2. Definimos $Q(t)$ como la rotación de ángulo $\varphi(t)$, con

$$Qe_x = \cos\varphi\, e_x + \sin\varphi\, e_y, \qquad Qe_y = -\sin\varphi\, e_x + \cos\varphi\, e_y.$$

El marco tiene origen $O + \mathbf{c}$ y base (Qe_x, Qe_y). Las coordenadas móviles ξ_1, ξ_2 se reúnen en el vector auxiliar $\mathbf{y} = \xi_1 e_x + \xi_2 e_y$ y representan la posición mediante

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}.$$

Denotamos $\omega = \varphi'$. El vector relativo de velocidad expresado en direcciones móviles es $Q\mathbf{y}'$; no se identifica con $(Q\mathbf{y})'$.

El vector auxiliar $\mathbf{y}$ conserva los números registrados en el marco móvil, colocados en una copia con direcciones fijas para poder diferenciarlos. Aplicar Q devuelve su interpretación espacial instantánea. Esta separación permite escribir una fórmula breve sin confundir las componentes con el vector físico que representan.

[8] Kleppner–Kolenkow, obra citada, §8.2, pp. 340–343. Se extraen la relación de posiciones, sus derivadas y la hipótesis de tiempo común. Los argumentos sobre fuerzas e inercialidad de la fuente no se incorporan en este capítulo.

Proposición 8.12 — Derivadas en un marco plano móvil. Bajo definición 8.9, si $\mathbf{y} \in C^2$, entonces

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}' + Q(\mathbf{y}' + \omega J\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}'' + Q(\mathbf{y}'' + 2\omega J\mathbf{y}' + \omega' J\mathbf{y} - \omega^2\mathbf{y}).$$

Demostración. Derivar las dos columnas de Q muestra que $Q' = \omega QJ$. Además, $QJ = JQ$, como se comprueba aplicando ambos operadores a e_x y e_y. Derivar $\mathbf{r} = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}$ da $\mathbf{v} = \mathbf{c}' + Q(\mathbf{y}' + \omega J\mathbf{y})$.

Para la segunda derivada, ponemos $z = \mathbf{y}' + \omega J\mathbf{y}$. La regla del producto da $(Qz)' = Q(\omega Jz + z')$. Como $z' = \mathbf{y}'' + \omega' J\mathbf{y} + \omega J\mathbf{y}'$, sustituir y usar $J^2 = -\mathrm{Id}$ produce

$$\omega Jz + z' = \mathbf{y}'' + 2\omega J\mathbf{y}' + \omega' J\mathbf{y} - \omega^2\mathbf{y}.$$

Añadir $\mathbf{c}''$ completa la fórmula. □

La aceleración tiene cinco contribuciones: movimiento del origen, segunda derivada de las coordenadas, término mixto entre giro y movimiento relativo, cambio de velocidad angular y giro de un punto con coordenadas fijas. Cada término se obtiene de la relación de posiciones. No se añaden por analogía con una fuerza ni se deducen de una imagen.

El término $2\omega QJ\mathbf{y}'$ suele denominarse aceleración de Coriolis en esta descomposición. El término $-\omega^2 Q\mathbf{y}$ apunta hacia el origen móvil cuando se interpreta aisladamente. La fórmula relaciona descripciones de aceleración; identificar términos de una ecuación dinámica requerirá declarar un marco y leyes físicas. No convertimos aquí estos sumandos en interacciones.

Qué cambia respecto de las coordenadas polares. En §8, la dirección radial se eligió desde la posición del objeto y el ángulo era el de esa posición. En definición 8.9, el ángulo φ pertenece al marco y se prescribe independientemente de dónde esté el objeto. Las coordenadas ξ_1, ξ_2 pueden cambiar ambas, y el objeto puede cruzar el origen del marco sin singularidad de esta representación cartesiana móvil.

Proposición 8.9 se recupera como una elección particular: si $\mathbf{c} = 0$, $\varphi = \theta$ y $\mathbf{y} = \rho e_x$, proposición 8.12 da $\mathbf{v} = \rho' e_r + \rho\theta' e_\theta$ y la aceleración polar. Esa comprobación explica por qué aparece el mismo factor dos, sin confundir dos construcciones que cumplen funciones diferentes.

Principio metodológico 8.11 — Reconstruir antes de derivar. Para un marco giratorio, la relación básica es $\mathbf{r} = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}$. La velocidad y aceleración se obtienen derivándola con todos sus factores. La suma $\mathbf{c}' + Q\mathbf{y}'$ sólo es suficiente si desaparece el término de giro por una condición comprobada.

Ejercicios. Ejercicio 8.21. El origen móvil coincide con el fijo, $\varphi(u) = u$ y $\mathbf{Y}(u) = 2e_x + e_y$ es constante. Encuentra velocidad, aceleración y rapidez en el marco fijo. ¿Qué observa la cámara en sus coordenadas?

Solución. Aquí $\omega = 1/T$ y $\mathbf{y}' = \mathbf{y}'' = 0$. Proposición 8.12 da $\mathbf{v} = (L/T)Q(-e_x + 2e_y)$ y $\mathbf{a} = -(L/T^2)Q(2e_x + e_y)$. La rapidez es $\sqrt{5}L/T$. La cámara registra coordenadas constantes $(2L, L)$ y reposo relativo. El punto describe en el marco fijo una circunferencia de radio $\sqrt{5}L$. El giro del marco basta para producir movimiento respecto de las direcciones fijas, aun cuando las derivadas de sus coordenadas sean cero.

Ejercicio 8.22. Sea $\mathbf{c} = 0$, $\varphi(u) = u^2/2$ y $\mathbf{Y}(u) = (1 + u)e_x$, con $0 \le u \le 1$. Calcula las contribuciones de aceleración de la proposición 8.12 y verifica el resultado derivando la posición cartesiana.

Solución. En unidades normalizadas, $\varphi_u' = u$, $\varphi_u'' = 1$, $\mathbf{Y}' = e_x$ y $\mathbf{Y}'' = 0$. Las contribuciones dentro de Q son cero, $2ue_y$, $(1+u)e_y$ y $-u^2(1+u)e_x$. Por tanto,

$$\mathbf{a} = \frac{L}{T^2} Q(-u^2(1+u)e_x + (1+3u)e_y).$$

Para verificarlo, escribimos $X = (1+u)\cos(u^2/2)$ y $Y = (1+u)\sin(u^2/2)$. La primera derivada es $Q(e_x + u(1+u)e_y)$; derivar esa expresión con $Q_u' = uQJ$ recupera exactamente las dos componentes anteriores. En $u = 0$ la velocidad angular es cero, pero su derivada no, y la aceleración vale Le_y/T^2. Omitir el término angular de cambio de giro perdería ese resultado.

Ejercicio 8.23. Una historia está fija en el marco cartesiano: $\mathbf{r} = Le_x$. El origen móvil es cero y sus ejes giran con $\varphi(u) = u$. Encuentra las coordenadas móviles y comprueba con la proposición 8.12 que velocidad y aceleración en el marco fijo son nulas.

Solución. La inversión de la definición 8.9 es $\mathbf{y} = Q^{-1}\mathbf{r}$, de modo que $\mathbf{Y} = \cos u\, e_x - \sin u\, e_y$. Derivar respecto de u da $\mathbf{Y}' = -J\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Y}'' = -\mathbf{Y}$. La fórmula normalizada de velocidad tiene $\mathbf{Y}' + J\mathbf{Y} = 0$. La de aceleración tiene

$$\mathbf{Y}'' + 2J\mathbf{Y}' - \mathbf{Y} = -\mathbf{Y} + 2\mathbf{Y} - \mathbf{Y} = 0.$$

La cámara registra una rotación en sentido contrario, aunque el objeto no se mueve en el marco fijo. Sus coordenadas tienen derivadas no nulas que se cancelan con los términos debidos al giro. El cálculo evita atribuir al objeto una aceleración sólo por la curvatura de ese registro relativo.

Kleppner–Kolenkow §8.5, pp. 356–359, controla las derivadas de direcciones giratorias y el término mixto para giro uniforme. Proposición 8.12 incorpora además traslación y velocidad angular variable mediante una derivación planar propia.[9]

12. Composición de movimientos y encuentros

Una persona camina sobre una plataforma que, a su vez, se mueve respecto del suelo. La descripción combina dos relaciones de posición. Si una de ellas utiliza ejes giratorios, sus números deben transformarse antes de sumarlos: una componente horizontal de la plataforma no es automáticamente una componente horizontal del suelo.

Proposición 8.13 — Composición de dos marcos planos. Supongamos que $\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 + Q_1\mathbf{y}$ y $\mathbf{y} = \mathbf{c}_2 + Q_2\mathbf{z}$, con funciones de clase C^2 y rotaciones planas Q_1, Q_2. Entonces

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + Q\mathbf{z}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + Q_1\mathbf{c}_2, \qquad Q = Q_1Q_2.$$

Si Q_i tiene ángulo continuado φ_i, podemos usar $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ para Q. La velocidad angular total es $\omega_1 + \omega_2$, pero la velocidad del origen compuesto es

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c}_1' + Q_1(\mathbf{c}_2' + \omega_1 J\mathbf{c}_2).$$

Demostración. Sustituir la segunda relación en la primera produce $\mathbf{c}_1 + Q_1\mathbf{c}_2 + Q_1Q_2\mathbf{z}$, lo que prueba la fórmula de posición. Las identidades de suma del seno y del coseno dan $Q_1Q_2 = Q_{\varphi_1+\varphi_2}$. Derivar el ángulo produce la suma de velocidades angulares. Derivar $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + Q_1\mathbf{c}_2$ y usar $Q_1' = \omega_1 Q_1 J$ da la última identidad. □

La suma angular usa que ambas rotaciones actúan en el mismo plano orientado. No se presenta como regla para rotaciones espaciales generales. En tres dimensiones, las traslaciones con ejes

[9] Kleppner–Kolenkow, obra citada, §8.5, pp. 356–359, pasajes sobre derivadas temporales y aceleración relativa a ejes giratorios. Se usan como control cinemático del caso uniforme; la deducción planar con giro variable es propia.

paralelos se componen por suma de sus vectores; el caso giratorio espacial requiere una construcción que no necesitamos aquí.

Para dos traslaciones sin giro, proposición 8.13 reduce a $\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{z}$. Derivar permite sumar las tres velocidades vectoriales. Las rapidez no se suman salvo condiciones particulares de dirección. Por ejemplo, una componente transversal respecto de una plataforma puede ser necesaria para cancelar el avance de la plataforma en otra dirección.

Encuentros como igualdades simultáneas. Sean P_A, P_B dos historias en un dominio temporal común I. El conjunto de tiempos de encuentro es $E = \{t \in I : P_A(t) = P_B(t)\}$. Dos curvas espaciales pueden cruzarse en un punto y no tener un encuentro, si cada objeto pasa por allí en tiempos distintos.

Proposición 8.14 — Invariancia del encuentro bajo un marco común. Si ambas historias se representan en el mismo marco móvil $\mathbf{r}_A = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}_A$ y $\mathbf{r}_B = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}_B$, con Q invertible en cada instante, entonces

$$\{t \in I : P_A(t) = P_B(t)\} = \{t \in I : \mathbf{y}_A(t) = \mathbf{y}_B(t)\}.$$

Si Q es ortogonal, también $\|\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_B(t)\| = \|\mathbf{y}_A(t) - \mathbf{y}_B(t)\|$ para cada instante.

Demostración. Restar las posiciones elimina el origen común y da $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = Q(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_B)$. Por invertibilidad de Q, el primer vector es cero si y sólo si lo es el segundo. Esa equivalencia puntual, para cada $t \in I$, prueba ambas inclusiones entre los conjuntos de tiempos. La igualdad de normas se sigue de la ortogonalidad. □

El encuentro es el mismo evento físico en ambas descripciones. La conclusión necesita el mismo marco y reloj para los dos objetos. Restar coordenadas de cámaras diferentes sin transformar sus orígenes y ejes no permite usar proposición 8.14. Tampoco la distancia instantánea entre objetos debe confundirse con la longitud de una trayectoria relativa: derivar una rotación temporal introduce términos nuevos.

Principio metodológico 8.12 — Componer posiciones antes de componer eventos. Se expresan las historias en un marco común, se conserva el reloj y después se resuelve la igualdad de posiciones. La coincidencia de una coordenada, la intersección de imágenes o la igualdad de rapidez no reemplazan esa condición.

Ejercicios. Ejercicio 8.24. En tiempo normalizado, $\mathbf{c}_1 = 0$, $Q_1 = Q_u$, $\mathbf{C}_2 = e_x$ y $Q_2 = Q_{-u}$. Un objeto tiene coordenadas constantes $\mathbf{Z} = 2e_y$ en el segundo marco. Encuentra su historia en el marco fijo. ¿La cancelación de ángulos implica reposo de todo el marco compuesto?

Solución. proposición 8.13 da $Q = Q_u Q_{-u} = \mathrm{Id}$, pero $\mathbf{C} = Q_u e_x$. La posición normalizada es $\mathbf{R} = Q_u e_x + 2e_y$. Su velocidad es $(L/T)Q_u e_y$ y su aceleración $-(L/T^2)Q_u e_x$. La orientación total permanece fija mientras el origen recorre una circunferencia. Cancelar los giros de ejes no cancela la traslación que el primer giro induce en un origen situado fuera del centro.

Ejercicio 8.25. En $0 \le u \le 3$, dos historias tienen $\mathbf{R}_A = (u, 1)$ y $\mathbf{R}_B = (2, u)$ en coordenadas normalizadas fijas. Sus imágenes se cruzan. Determina si hay encuentro y verifica el resultado en el marco $\mathbf{C} = (u, 0)$, $Q = Q_u$.

Solución. La imagen de A contiene el punto $(2, 1)$ en $u = 2$; la de B lo contiene en $u = 1$. Para un encuentro simultáneo se exige $(u, 1) = (2, u)$, que requeriría $u = 2$ y $u = 1$ a la vez. No existe tal tiempo. En el marco móvil, la diferencia de coordenadas es $Q_{-u}(\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B) = Q_{-u}(u-2, 1-u)$. Por invertibilidad, sólo podría anularse si ambas componentes originales se anularan simultáneamente; ya comprobamos que eso no ocurre. El cambio de marco conserva la ausencia de encuentro.

13. Aproximaciones vectoriales y horizonte de validez

Una ley cinemática puede omitir una pequeña contribución a la aceleración y aun así acumular un defecto de posición apreciable durante un vuelo largo. La evaluación de la reducción necesita la observable y el intervalo: un error pequeño en aceleración no es directamente un error pequeño en posición.

Definición 8.10 — Errores vectoriales comparables. Para dos historias expresadas en el mismo marco fijo y reloj, definimos el error de posición $e_r(t) = \|\mathbf{r}(t)-\tilde{\mathbf{r}}(t)\|$ y el de velocidad $e_v(t) = \|\mathbf{v}(t) - \tilde{\mathbf{v}}(t)\|$. Un error referido a una escala $S > 0$ del mismo tipo es el cociente correspondiente dividido por S.

El error de posición tiene dimensión L y el de velocidad L/T. El error relativo a la norma de una predicción no se define cuando esa norma es cero. Una escala física positiva evita esa división, siempre que se explique qué comparación mide. No se interpreta una cota determinista como una probabilidad o incertidumbre estadística de la observación.

Proposición 8.15 — Acumulación de un defecto de aceleración. Sean dos historias C^2 en $[t_0, t_0 + H]$, con $H > 0$. Supongamos

$$e_r(t_0) \le \delta_r, \qquad e_v(t_0) \le \delta_v, \qquad \|\mathbf{a}(t) - \tilde{\mathbf{a}}(t)\| \le A,$$

para todo el intervalo, donde $\delta_r, \delta_v, A \ge 0$. Para $0 \le \tau \le H$, entonces

$$e_v(t_0 + \tau) \le \delta_v + A\tau,$$

$$e_r(t_0 + \tau) \le \delta_r + \delta_v\tau + \tfrac{1}{2}A\tau^2.$$

Demostración. Primero justificamos que, para una función vectorial continua f en $[a, b]$, $\|\int_a^b f\| \le \int_a^b \|f\|$. Si la integral es nula, la desigualdad es inmediata. Si es un vector no nulo D, tomamos $m = D/\|D\|$ y usamos Cauchy–Schwarz para obtener $\|D\| = \int m \cdot f \le \int \|f\|$.

Restar las reconstrucciones de velocidad de la proposición 8.2 da una diferencia inicial más la integral del defecto de aceleración. La desigualdad triangular y la cota integral anterior producen $e_v \le \delta_v + A\tau$. Restar las reconstrucciones de posición da, exactamente,

$$\Delta\mathbf{r}(t_0 + \tau) = \Delta\mathbf{r}(t_0) + \tau\Delta\mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} (t_0 + \tau - s)\Delta\mathbf{a}(s)\, ds.$$

El núcleo de la integral es no negativo en el segmento. Tomar normas y aplicar la cota A da $\delta_r + \delta_v\tau + A\int_{t_0}^{t_0+\tau}(t_0 + \tau - s)ds$, que es la expresión anunciada. □

La cota funciona en dos y tres dimensiones y no supone que el defecto conserve una dirección. Puede ser conservadora: cambios de dirección del defecto pueden cancelarse parcialmente al integrar, pero la norma no descuenta una cancelación que aún no se conoce. Con datos iniciales exactos, el defecto máximo de posición garantizado crece como $A\tau^2/2$.

Definición 8.11 — Horizonte certificado de una reducción. Para una tolerancia de posición εS con $S > 0$ y $\varepsilon > 0$, un horizonte certificado es un $H > 0$ dentro del dominio común de los modelos tal que la cota probada garantiza $e_r(t_0 + \tau) \le \varepsilon S$ para todo $0 \le \tau \le H$. Es una garantía suficiente, no necesariamente el último tiempo en que el error real cumple la tolerancia.

Con proposición 8.15 basta imponer $\delta_r + \delta_v H + AH^2/2 \le \varepsilon S$. Esa condición controla todos los tiempos anteriores porque sus coeficientes son no negativos. Si $A = 0$ y los datos iniciales coinciden, no hay defecto de estas historias; eso no demuestra que el modelo sea adecuado para un fenómeno durante un tiempo ilimitado. La comparación se refiere a los dos modelos y al dominio declarados.

Errores de representación del marco. Un instrumento puede conocer imperfectamente su origen y orientación. Entonces hay que separar el defecto de las coordenadas del defecto de la transformación que las coloca en el espacio.

Proposición 8.16 — Cota de posición con un marco aproximado. En un mismo instante, sean $\mathbf{r} = \mathbf{c} + Q_{\varphi}\mathbf{y}$ y $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{c}} + Q_{\widetilde{\varphi}}\tilde{\mathbf{y}}$ dos representaciones planas. Entonces

$$\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\| \le \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\| + \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| + 2\left|\sin\frac{\varphi - \widetilde{\varphi}}{2}\right| \|\tilde{\mathbf{y}}\|.$$

El último término es a lo sumo $|\varphi - \widetilde{\varphi}|\,\|\tilde{\mathbf{y}}\|$. Si el marco es exactamente el mismo, el error de posición es precisamente $\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|$.

Demostración. Restar ambas expresiones y añadir y sustraer $Q_{\varphi}\tilde{\mathbf{y}}$ da una suma de tres vectores: defecto del origen, $Q_{\varphi}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}})$ y $(Q_{\varphi} - Q_{\widetilde{\varphi}})\tilde{\mathbf{y}}$. La norma del segundo coincide con la del defecto de coordenadas.

Para cualquier vector z, la ortogonalidad y el producto escalar entre dos giros del mismo vector dan

$$\|(Q_{\varphi} - Q_{\widetilde{\varphi}})z\|^2 = 2\|z\|^2(1 - \cos(\varphi - \widetilde{\varphi})) = 4\|z\|^2 \sin^2\frac{\varphi - \widetilde{\varphi}}{2}.$$

Tomar raíces y aplicar la desigualdad triangular prueba la cota. La desigualdad $|\sin x| \le |x|$ da la versión lineal. Si origen y rotación coinciden, sólo permanece el segundo vector y su norma es exactamente $\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|$. □

Un mismo defecto angular puede producir un defecto de longitud mayor para objetos más alejados del origen. Además, una diferencia de ángulo de 2π no produce defecto de orientación: la cota trigonométrica lo reconoce exactamente, mientras que la lineal es más conservadora. Para una comparación local de ángulos conviene elegir continuaciones o representantes que hagan significativo el defecto declarado.

Principio metodológico 8.13 — Controlar una observable durante un intervalo. Una reducción registra qué término omite, cómo lo acota, qué datos iniciales conserva, qué observable controla y durante cuánto tiempo. Si también aproxima el marco, debe incluir ese defecto en la comparación espacial. La señal de salida del régimen no se sustituye por una afirmación de exactitud global.

Ejercicios. Ejercicio 8.26. Dos modelos parten con los mismos datos iniciales y su defecto de aceleración cumple $\|\Delta\mathbf{a}\| \le 0{,}02L/T^2$. Se exige error de posición a lo sumo $0{,}01L$ durante todo el intervalo. Encuentra un horizonte garantizado por la proposición 8.15 y un defecto constante que alcance la cota.

Solución. proposición 8.15 da $e_r \le 0{,}01L(\tau/T)^2$. La tolerancia se garantiza para $0 \le \tau \le T$, siempre que la cota de aceleración valga en ese intervalo. Un defecto constante $\Delta\mathbf{a} = 0{,}02Le_x/T^2$ produce $\Delta\mathbf{r} = 0{,}01L(\tau/T)^2 e_x$ y alcanza la cota en cada instante. Sin conocer la dirección o estructura del defecto, no podemos certificar un horizonte mayor con esa misma información. Un caso con cancelaciones podría cumplir la tolerancia más tiempo.

Ejercicio 8.27. El marco se conoce con defecto de origen a lo sumo $0{,}001L$, defecto angular a lo sumo 0,002 radianes y defecto de coordenadas a lo sumo $0{,}003L$. Para $\|\tilde{\mathbf{y}}\| \le 4L$, encuentra una garantía de error espacial. ¿Qué parte de la cota cambia si se observa un objeto al doble de distancia?

Solución. La versión lineal de la proposición 8.16 da $e_r \le 0{,}001L + 0{,}003L + 0{,}002(4L) = 0{,}012L$. La tolerancia espacial debe ser al menos esa cota para quedar certificada por la información

disponible. Al duplicar el límite de distancia a $8L$, sólo el término angular se duplica, y la cota pasa a $0{,}020L$. El cálculo muestra que calibrar el giro puede resultar decisivo para observaciones lejanas, incluso con el mismo defecto angular pequeño.

Ejercicio 8.28. En un marco plano móvil se aproxima la velocidad fija por $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{c}' + Q\mathbf{y}'$, omitiendo el giro. Supón $|\omega| \le \Omega$ y $\|\mathbf{y}\| \le B$ en todo un intervalo. Acota el defecto de velocidad y el de una posición aproximada reconstruida integrando esa velocidad desde la posición inicial exacta. Indica qué no permite afirmar esta información sobre el defecto de aceleración.

Solución. proposición 8.12 da $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} = \omega Q J \mathbf{y}$, cuya norma es $|\omega|\|\mathbf{y}\| \le \Omega B$. Si $\tilde{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{r}(t_0)$ y se define $\tilde{\mathbf{r}}' = \tilde{\mathbf{v}}$, integrar el defecto produce $e_r(t_0 + \tau) \le \Omega B \tau$. Para tolerancia εS y $\Omega B > 0$, basta $H \le \varepsilon S/(\Omega B)$ dentro del dominio de las cotas.

El cálculo controla una posición reconstruida por integración; no declara que sea idéntica a una expresión obtenida simplemente congelando los ejes. Tampoco una cota de la función defecto controla su derivada: para acotar el defecto de aceleración se necesitan límites sobre ω', $\mathbf{y}'$ y los demás factores al derivar. Una función pequeña puede cambiar rápidamente. La reducción queda justificada sólo para las observables que efectivamente se acotaron.

Las nociones de error, resto y dominio certificado proceden de capítulo 6, §§6, 8 y 14. Proposición 8.15 y proposición 8.16 construyen aquí las extensiones vectoriales y de marco necesarias.

14. Reconstrucción y auditoría de una historia completa

La descripción de un movimiento debe permitir pasar de los datos al evento sin cambiar inadvertidamente de marco, reloj o modelo. El capítulo ofrece tres representaciones con funciones diferentes: coordenadas cartesianas fijas, coordenadas polares ligadas a un centro y coordenadas cartesianas de un marco móvil. La elección depende de la pregunta; ninguna representación releva de conservar sus condiciones.

Cómo organizar una reconstrucción. Primero se identifica qué se conoce. Una posición temporal completa permite derivar; una velocidad necesita una posición inicial para reconstruir; una aceleración necesita posición y velocidad iniciales. Una rapidez inicial sin dirección suele dejar una familia. Un punto objetivo puede seleccionar varias historias, dependiendo de si se fija también rapidez o tiempo.

Después se elige un marco en el que las hipótesis sean claras. Una aceleración constante en direcciones fijas no tiene por qué tener componentes constantes en ejes giratorios. Para transformar la historia se reconstruye primero la relación de posiciones. Proposición 8.11 y proposición 8.12 son consecuencias de esa relación, y sus términos se auditan comprobando qué factores dependen del tiempo.

Los eventos se resuelven en el dominio de la historia. Una raíz de una prolongación posterior al contacto con el suelo puede carecer de significado en el vuelo. Un cruce de imágenes no prueba un encuentro. Si se usa un marco común, proposición 8.14 permite comparar directamente las coordenadas móviles en un mismo instante; si se usan dos marcos distintos, primero hay que componer o transformar las posiciones.

Finalmente se interpreta la precisión. Una fórmula exacta del modelo puede omitir efectos físicos, y una reducción de esa fórmula puede añadir otro defecto. Proposición 8.15 controla la acumulación temporal de una discrepancia de aceleración; proposición 8.16 controla la transformación espacial de registros imperfectos. La tolerancia y el intervalo deben responder a la observable solicitada, sin mezclarse con una incertidumbre estadística que no se ha modelado.

Principio metodológico 8.14 — Cerrar el recorrido desde los datos hasta la observación. Una historia reconstruida se devuelve a su pregunta: se verifican datos iniciales, aceleración o velocidad prescrita, representación, dimensiones, eventos admitidos y tolerancia. La interpretación final declara qué ha quedado determinado, qué sigue libre y qué premisas habría que revisar si el contraste falla.

Ejercicios de integración. Ejercicio 8.29. En $0 \le u \le 2$, una cámara tiene origen normalizado $\mathbf{C}(u) = ue_x + u^2 e_y$ y ejes giratorios de ángulo $\varphi(u) = u$. Un objeto se registra con coordenadas móviles $\mathbf{Y}(u) = (2-u)e_x + e_y$. Otro punto permanece fijo respecto de la cámara, con coordenadas $\mathbf{Z} = e_x + e_y$.

Reconstruye la posición, velocidad y aceleración del primer objeto en el marco fijo. Comprueba sus datos en $u = 0$ y encuentra el encuentro con el punto fijo de la cámara, indicando la posición y ambas velocidades en ese evento. Explica si coincidir en posición obliga a compartir velocidad.

Solución. La relación fundamental es $\mathbf{R} = \mathbf{C} + Q_u \mathbf{Y}$, por lo que

$$\mathbf{R} = ue_x + u^2 e_y + Q_u((2-u)e_x + e_y).$$

La fórmula de la proposición 8.12, expresada en derivadas respecto de u, da

$$\mathbf{v} = \frac{L}{T}\left[e_x + 2ue_y + Q_u(-2e_x + (2-u)e_y)\right],$$

$$\mathbf{a} = \frac{L}{T^2}\left[2e_y + Q_u((u-2)e_x - 3e_y)\right].$$

Dentro de Q, la velocidad procede de $\mathbf{Y}' + J\mathbf{Y} = -e_x + ((2-u)e_y - e_x)$; la aceleración procede de $2J\mathbf{Y}' - \mathbf{Y} = -2e_y - (2-u)e_x - e_y$. Esta derivación conserva el término mixto y el radial.

En $u = 0$, $\mathbf{R} = 2e_x + e_y$, $\mathbf{v} = (L/T)(-e_x + 2e_y)$ y $\mathbf{a} = (L/T^2)(-2e_x - e_y)$. La rapidez inicial es $\sqrt{5}L/T$, aunque la rapidez relativa de las coordenadas es L/T. El movimiento del marco contribuye a la diferencia.

Por proposición 8.14, el encuentro equivale a $\mathbf{Y}(u) = \mathbf{Z}$. La segunda componente ya coincide; la primera exige $2 - u = 1$, de modo que el único tiempo admitido es $u = 1$, o $t = t_0 + T$. La posición común es

$$P_* = O + L\left[(1 + \cos 1 - \sin 1)e_x + (1 + \sin 1 + \cos 1)e_y\right].$$

La velocidad del primer objeto allí es $(L/T)(e_x + 2e_y + Q_1(-2e_x + e_y))$. La del punto ligado a la cámara es $(L/T)(e_x + 2e_y + Q_1(-e_x + e_y))$, porque su derivada de coordenadas es cero. La diferencia es $-(L/T)Q_1 e_x$, no nula. El objeto pasa por ese punto de la cámara sin quedar unido a él. Un encuentro sólo iguala posiciones en el instante; no impone igualdad de las derivadas.

Ejercicio 8.30. Un proyectil ideal parte de $(0, 2L)$ con componentes iniciales $(3L/T, L/T)$ y $g = 2L/T^2$. Se desea predecir el contacto con el suelo. La historia con el defecto tiene los mismos datos iniciales y aceleración $-ge_y + \boldsymbol{\eta}(t)$, continua, con $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \le 0{,}02L/T^2$ para $0 \le t \le 3T$. Su posición se reconstruye de ese dato y se prolonga matemáticamente en el intervalo para localizar la primera llegada al suelo; la descripción física de vuelo termina en ese evento. Un análisis usa el instante ideal $2T$ como si fuera también el instante real de llegada y afirma que el error de alcance es a lo sumo $0{,}04L$.

Encuentra la predicción ideal, comprueba qué garantiza realmente proposición 8.15 en $2T$ y explica la falla del análisis. Después certifica una ventana para el primer contacto real y una cota para el error de su abscisa, usando únicamente la información suministrada. Escribe una conclusión que distinga posición en un tiempo fijado de posición en un evento.

Solución. La historia ideal tiene $X_0(u) = 3u$ y $Y_0(u) = 2 + u - u^2$. Su primer contacto positivo es $u = 2$ y la abscisa es $6L$. Proposición 8.15, con $A = 0{,}02L/T^2$ y datos iniciales coincidentes, da

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0(t)\| \le 0{,}01Lu^2, \qquad \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0(t)\| \le 0{,}02(L/T)u.$$

En $u = 2$, el defecto de posición no supera $0{,}04L$. Ésa es una comparación a tiempo fijo. La altura real puede ser positiva o negativa en ese instante; no se ha probado que el evento real ocurra allí. La diferencia de alcance incluye también el movimiento horizontal durante el defecto de tiempo de llegada.

Para controlar ese evento, usamos $|Y - Y_0| \le 0{,}01u^2$. La altura real satisface

$$2 + u - 1{,}01u^2 \le Y(u) \le 2 + u - 0{,}99u^2.$$

Las raíces positivas de los dos extremos son

$$u_- = \frac{1 + \sqrt{9{,}08}}{2{,}02}, \qquad u_+ = \frac{1 + \sqrt{8{,}92}}{1{,}98}.$$

Para $0 \le u < u_-$, el extremo inferior es positivo, así que no hay contacto. En u_+, el extremo superior es cero, por lo que $Y(u_+) \le 0$. La continuidad y la altura inicial positiva garantizan una raíz en $[u_-, u_+]$, y el conjunto de raíces de ese segmento compacto tiene un menor elemento. Es el primer contacto: cualquier raíz anterior quedaba excluida por la cota inferior. La ventana está dentro de $[0, 3]$.

Podemos usar un intervalo algo más amplio con números sencillos, sin depender de redondear raíces: en $u = 1{,}98$ el extremo inferior vale $0{,}020396 > 0$ y es positivo en todo $[0, 1{,}98]$, por concavidad y positividad en ambos extremos; en $u = 2{,}02$ el extremo superior vale $-0{,}019596 < 0$. Por tanto, $1{,}98 < u_f < 2{,}02$. Cerca de esa ventana, la velocidad vertical real es negativa, pues su componente normalizada no supera $1 - 2u + 0{,}02u = 1 - 1{,}98u < 0$. El contacto es único dentro de la ventana.

En el evento real, $|X(u_f) - 3u_f| \le 0{,}01u_f^2$ y $|u_f - 2| < 0{,}02$. La desigualdad triangular proporciona

$$|x_f - 6L| \le L(0{,}01u_f^2 + 3|u_f - 2|) < L(0{,}01(2{,}02)^2 + 0{,}06) = 0{,}100804L.$$

Si se exige error de alcance no mayor que $0{,}1L$, esa cota sencilla todavía no lo certifica. Podemos afinarla con la misma información: el extremo inferior en $u = 1{,}986$ vale $0{,}00236204 > 0$ y el extremo superior en $u = 2{,}014$ vale $-0{,}00163404 < 0$. Por el mismo argumento, $1{,}986 < u_f < 2{,}014$. Entonces

$$|x_f - 6L| < L(0{,}01(2{,}014)^2 + 3(0{,}014)) = 0{,}08256196L < 0{,}1L.$$

La tolerancia queda certificada, junto con la ventana temporal más estrecha. La cota $0{,}04L$ continúa siendo válida para comparar las dos posiciones en el tiempo ideal; la cota de alcance se obtuvo controlando además el evento real. Mejorar una garantía suficiente no requiere suponer que el error verdadero alcance ninguno de esos límites.

Lo que queda preparado para la dinámica. La cinemática ha establecido cómo describir una historia, reconstruirla de datos prescritos, transformarla entre marcos y controlar determinadas reducciones. Los términos de aceleración que aparecen en una base móvil ya tienen una explicación geométrica. La pregunta siguiente será qué interacciones y principios físicos determinan la aceleración, y en qué marcos se formulan esas leyes. Esa nueva tarea necesita las distinciones construidas aquí, pero no estaba contenida en derivar dos veces una posición.

Capítulo 9

Leyes de Newton y estructura de la dinámica

Prerrequisitos y propósito

Se utilizan las historias y derivadas del capítulo 5, las aproximaciones del capítulo 6 y la reconstrucción cinemática y los cambios de marco del capítulo 7–08. La matemática requerida es M2–M3 y M6 elemental: vectores, normas, derivadas, integrales y la formulación de ecuaciones diferenciales. El capítulo introduce el estado, demuestra existencia y unicidad local bajo condiciones explícitas y distingue esas propiedades de la adecuación física del modelo.

La cinemática nos permitió reconstruir una historia desde su aceleración. La dinámica introduce una exigencia nueva: explicar qué interacciones permiten calcular esa aceleración antes de conocer la historia. Estudiaremos partículas de masa constante, en un espacio euclídeo y con un tiempo clásico compartido. Las leyes de Newton se tratarán como postulados físicos; sus consecuencias, una vez fijado un modelo, se demostrarán como afirmaciones matemáticas.

Las leyes particulares de gravedad uniforme, contacto, tensión, fricción, resistencia y resortes, y los diagramas de cuerpo libre, pertenecen al capítulo 10. Los modelos de fuerza empleados aquí tienen la función de enseñar estructura, hipótesis y resolución, sin anticipar ese catálogo. No se introduce el formalismo de energía ni los balances de momento.

1. De una historia observada a una pregunta dinámica

Un carro recorre una pista casi horizontal. Durante unos segundos su velocidad parece constante; después aumenta y finalmente disminuye. El capítulo 7 permite describir los tres tramos y estimar sus aceleraciones. Pero una gráfica de posición, por completa que sea, no explica por qué cambió la velocidad. Para responder necesitamos información sobre el carro, sobre su entorno y sobre las interacciones que actuaron durante cada tramo.

Conviene comenzar por esta diferencia porque la ecuación que dominará el capítulo es tan breve que puede ocultarla. Si una historia ya es conocida, calcular su segunda derivada es una operación cinemática. Si queremos predecir una historia desconocida, escribir su segunda derivada en términos de interacciones es una propuesta física. El mismo símbolo de aceleración interviene en ambos trabajos, pero la dirección del razonamiento cambia.

Fijamos un espacio afín euclídeo $\mathcal{E}$, de dimensión $d = 1, 2$ o 3, cuyo espacio de desplazamientos es V. Una partícula representa un cuerpo mediante un punto $P(t)$; se omiten por ahora su extensión, orientación y deformación. En un marco con origen O y base ortonormal fija escribimos $P(t) = O + \mathbf{r}(t)$. Las derivadas temporales $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ y $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$ conservan el significado del capítulo 5–08.

Definición 9.1 — Sistema mecánico y entorno. El sistema mecánico es el conjunto de partículas que se ha decidido describir. El entorno comprende los agentes y cuerpos excluidos de ese conjunto cuya influencia se conserva en el modelo. La frontera entre ambos forma parte de la elección de modelización.

Elegir una partícula como sistema no afirma que el cuerpo carezca de partes. Afirma que, para la pregunta planteada y dentro de una escala determinada, una posición basta para representar el movimiento que interesa. Si necesitamos describir cómo gira una rueda, su posición no basta; si queremos localizar el centro de una rueda en un trayecto, la representación puntual puede ser útil. La suficiencia de las variables depende de la pregunta.

Usaremos tres marcas de procedencia. $[DEF]$ introduce una definición; $[POST]$ identifica una ley física asumida en el régimen newtoniano; $[MOD]$ identifica una idealización o una ley particular de interacción elegida para un problema. Una proposición demostrada será una consecuencia matemática bajo las hipótesis indicadas. Las marcas impiden presentar una elección de modelo como teorema acerca de todos los cuerpos.

Proposición 9.1 — Una historia no identifica sus interacciones por sí sola. Dada una historia C^2 y una masa constante $m > 0$, el vector $\mathbf{G}(t) = m\mathbf{r}''(t)$ queda determinado por la historia y por m. Sin información adicional, ese vector no determina una descomposición única en dos contribuciones vectoriales continuas.

Demostración. Para cualquier función continua $\mathbf{H} : I \to V$, definimos $\mathbf{G}_1 = \mathbf{H}$ y $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G} - \mathbf{H}$. Entonces $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$. Escoger dos funciones $\mathbf{H}$ diferentes produce dos descomposiciones diferentes con la misma suma. Como $\mathbf{r}$ es C^2, todas las contribuciones construidas son continuas. □

El argumento no acredita que cada contribución construida corresponda a una interacción realizable. Precisamente muestra lo que falta: una restricción física que identifique agentes, mecanismos y dependencias. Más adelante la segunda ley relacionará $\mathbf{G}$ con una resultante; todavía no podemos inferir de la curva qué parte provino de cada agente.

Principio metodológico 9.1 — Declarar la información disponible. Antes de formular una ecuación dinámica, distingue la historia observada, los parámetros del cuerpo, las interacciones propuestas y los datos iniciales. Si una fuerza se reconstruye desde una historia medida, no la presentes como una predicción independiente de esa misma historia.

Ejercicios. Ejercicio 9.1. En una recta fija se observa $x(t) = L(t/T)^2$ para $0 \le t \le T$, donde $L, T > 0$. Calcula mx''. Produce dos descomposiciones distintas en contribuciones constantes y explica qué se ha aprendido acerca de los agentes físicos.

Solución. La segunda derivada es $2L/T^2$, de modo que $G = 2mL/T^2$. Una descomposición es $G_1 = G$, $G_2 = 0$; otra es $G_1 = 3G$, $G_2 = -2G$. Las sumas son iguales y las dimensiones de cada término son masa por longitud por tiempo a la potencia -2. No hemos identificado agentes: sólo calculamos la combinación que una futura ecuación dinámica debe reproducir. Distinguir las descomposiciones exige observaciones o leyes de interacción adicionales.

Ejercicio 9.2. Se conoce la imagen espacial de una trayectoria circular de radio $b > 0$, pero no su parametrización. ¿Puede calcularse $m\mathbf{r}''$ a partir de esa información? Compara dos movimientos uniformes que recorren la misma circunferencia.

Solución. Tomemos $\mathbf{r}_1 = b(\cos \omega t, \sin \omega t)$ y $\mathbf{r}_2 = b(\cos 2\omega t, \sin 2\omega t)$, con $\omega \neq 0$. Ambas imágenes son la misma circunferencia, pero $\mathbf{r}_1'' = -\omega^2 \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2'' = -4\omega^2 \mathbf{r}_2$. Cuando ambas partículas están en el mismo punto, las aceleraciones tienen dirección igual y magnitudes distintas en razón cuatro. La curva espacial no fija la derivación temporal. Además de la masa necesitamos la historia parametrizada; incluso con ella, proposición 9.1 advierte que no conoceríamos por ese solo cálculo cada interacción.

2. Inercia y elección del marco

Una partícula sin interacciones apreciables no necesita una intervención permanente para conservar su velocidad. Esta afirmación puede resultar poco intuitiva porque muchos objetos cotidianos se frenan. Un carro sobre una pista pierde velocidad al interactuar con la pista y con el aire; reducir esas influencias prolonga el movimiento aproximadamente uniforme. La extrapolación a un cuerpo aislado pertenece al modelo físico, no a una identidad del cálculo diferencial.

También importa desde dónde observamos. En un marco cuyo origen acelera hacia la derecha, un cuerpo que conserva su velocidad respecto de un marco fijo adquiere una aceleración hacia la izquierda en las coordenadas móviles. El capítulo 8 ya calculó ese cambio. La primera ley selecciona ahora los marcos en los que el movimiento libre tiene la forma que la dinámica considera básica.[1]

Definición 9.2 — Marco inercial. Dentro del régimen y la precisión del modelo, un marco es inercial si toda partícula libre conserva en él una velocidad vectorial constante. Una partícula libre es aquella cuyas interacciones relevantes se han eliminado o pueden despreciarse en ese régimen. La condición se refiere a una clase de partículas de prueba, no únicamente a un cuerpo elegido.

Primera ley [*POST*]**.** Existen marcos inerciales en los que la descripción newtoniana de los movimientos resulta válida. En ellos una partícula libre satisface $\mathbf{a} = 0$ y, por tanto, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0$.

La definición establece qué significa «inercial»; el postulado afirma que esa clase de marcos describe adecuadamente una parte del mundo físico. Las dos afirmaciones cumplen funciones diferentes. Tampoco existe un procedimiento experimental que observe directamente un aislamiento perfecto durante un tiempo infinito. Se comparan partículas y escalas, se reducen interacciones conocidas y se examina la consistencia de la aproximación.

Proposición 9.2 — Traslaciones uniformes de un marco inercial. Sea un marco inercial y otro con ejes paralelos fijos, reloj común y origen $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + (t - t_0)\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es constante. Si $\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y}'' = \mathbf{r}''$. En particular, el segundo marco también es inercial para la misma clase de partículas libres.

Demostración. Derivando dos veces la relación de posiciones, obtenemos $\mathbf{r}'' = \mathbf{c}'' + \mathbf{y}''$. La función afín $\mathbf{c}$ tiene segunda derivada nula. Así, una historia con $\mathbf{r}'' = 0$ tiene también $\mathbf{y}'' = 0$; su velocidad en el segundo marco es constante. El argumento se aplica a todas las partículas libres consideradas, no sólo a una de ellas. □

La primera ley no selecciona un reposo absoluto: $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ pueden ser diferentes y ambas constantes. Una rotación fija de los ejes conserva igualmente la condición de aceleración nula, pues multiplica sus componentes por una matriz ortogonal constante. Una rotación dependiente del tiempo requiere otro cálculo y no queda incluida en la proposición 9.2.

Principio metodológico 9.2 — No adaptar el marco a una sola trayectoria. Hacer que un objeto permanezca en el origen no demuestra que el marco sea inercial. Hay que comprobar el comportamiento de una clase de movimientos libres y declarar las escalas en las que se desprecia la aceleración del marco.

Una mesa de laboratorio puede constituir un marco aproximadamente inercial en un experimento breve. Esa utilidad no convierte a la Tierra en un marco exactamente inercial para toda pregunta.

---

[1] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics*, Expanded Edition, Yale University Press, 2019, cap. 3, §3.1, pp. 36–38; D. Kleppner y R. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 2, §2.2, pp. 55–56. Control de la distinción entre definición de marco inercial y afirmación física de su existencia. Redacción y ejercicios propios.

La precisión de la descripción debe compararse con el tamaño de los términos omitidos; recuperamos así el criterio del capítulo 6 sin introducir todavía la dinámica completa de marcos giratorios.

Ejercicios. Ejercicio 9.3. Una partícula libre tiene $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{v}_0$, con $\tau = t - t_0$. Otro origen sigue $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \tau\mathbf{u} + \frac{1}{2}\tau^2\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}$ constante. Calcula la velocidad y la aceleración relativas. ¿Cuándo es compatible este marco con la definición 9.2?

Solución. La resta de posiciones da $\mathbf{y} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{c}_0 + \tau(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}) - \frac{1}{2}\tau^2\mathbf{A}$. Por derivación, $\mathbf{y}' = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u} - \tau\mathbf{A}$ y $\mathbf{y}'' = -\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A} = 0$, proposición 9.2 garantiza la compatibilidad para toda partícula libre. Si $\mathbf{A} \neq 0$, incluso esta partícula libre acelera en las coordenadas móviles, de modo que el marco no cumple definición 9.2. La aceleración calculada procede del marco y no demuestra que haya aparecido una interacción sobre la partícula.

Ejercicio 9.4. Se propone el siguiente argumento: «Elijo como origen un cuerpo y sus coordenadas son siempre cero; entonces su aceleración es cero y el marco es inercial». Localiza la falla y construye un contraejemplo.

Solución. El argumento comprueba una sola historia, mientras que definición 9.2 exige la propiedad para una clase de partículas libres. Además, el cuerpo usado como origen podría estar sometido a interacciones. En una recta, elijamos un origen $c(t) = At^2/2$ con $A \neq 0$ respecto de un marco inercial. El cuerpo que define ese origen tiene coordenada relativa cero. Otra partícula libre con $x(t) = 0$ tiene coordenada $y(t) = -At^2/2$ y aceleración $-A$. La propiedad universal fracasa. Para reparar el argumento hay que establecer el movimiento uniforme del origen y la constancia de la orientación, o verificar la condición con partículas libres independientes.

3. Masa inercial y comparación de respuestas

Dos carros reciben una intervención reproducible y sus aceleraciones iniciales son diferentes. Un modo de organizar esa diferencia consiste en asignar a cada carro una masa inercial: para una misma fuerza resultante, el cuerpo con mayor masa tiene menor aceleración. El adjetivo «inercial» recuerda que hablamos de respuesta a un cambio de velocidad, no de cuánto pesa el cuerpo en un lugar determinado.[2]

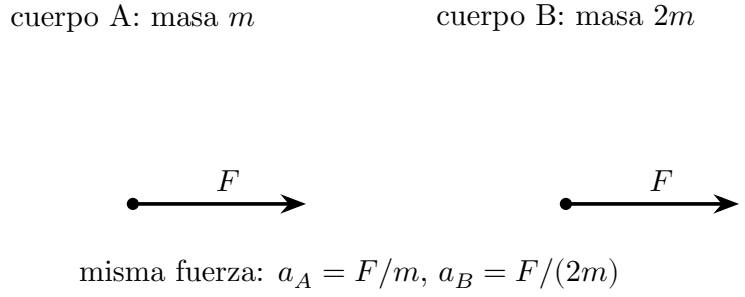


Figura 9.1. Una misma fuerza sobre dos cuerpos separados de masas m y $2m$ produce aceleraciones en razón dos a uno. Cada dibujo contiene la única fuerza externa supuesta. Véase §3.

La comparación exige declarar qué significa repetir la intervención. Podemos usar un dispositivo cuya configuración inicial y respuesta hayan sido contrastadas con un cuerpo de referencia. La

[2]Shankar, cap. 3, §3.2, pp. 38–41; Kleppner–Kolenkow, cap. 2, §2.2, pp. 56–58. Comparación de aceleraciones bajo intervención reproducible, masa inercial y consistencia de calibraciones. No se adopta la descripción histórica de patrones de masa como definición SI vigente.

reproducibilidad no se demuestra con una ecuación de Newton; es una hipótesis experimental sujeta a comprobación. Importan, por ejemplo, cambios del dispositivo, interacciones residuales y diferencias de configuración.

Definición 9.3 — Masa inercial en el modelo puntual. La masa inercial m es un parámetro escalar positivo del cuerpo que relaciona su aceleración con la fuerza resultante en la segunda ley. En este capítulo se supone constante durante el movimiento. Una calibración comparativa usa, bajo una intervención resultante igual y no nula, la razón inversa de las magnitudes de aceleración.

Si el cuerpo de referencia tiene masa m_* y aceleración de magnitud a_*, mientras otro responde con magnitud a, la calibración propone $m = m_* a_*/a$. Esta expresión necesita $a > 0$ y que ambas aceleraciones correspondan realmente a la misma fuerza. No proporciona una medida útil cuando la resultante es nula. La consistencia entre dispositivos distintos es contenido físico adicional: una definición formal no garantiza que todas las comparaciones den el mismo resultado.

Proposición 9.3 — Consistencia algebraica de las razones. Si tres cuerpos con masas positivas m_A, m_B, m_C responden a una misma resultante no nula mediante $m_A\mathbf{a}_A = m_B\mathbf{a}_B = m_C\mathbf{a}_C$, sus aceleraciones son paralelas con igual sentido y

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{\|\mathbf{a}_A\|}{\|\mathbf{a}_B\|}, \qquad \frac{m_C}{m_A} = \frac{m_C}{m_B}\frac{m_B}{m_A}.$$

Demostración. Denotemos la resultante común por $\mathbf{F} \neq 0$. Cada aceleración es $\mathbf{F}/m_i$. Como $m_i > 0$, el sentido coincide y su norma es $\|\mathbf{F}\|/m_i$. Dividir dos expresiones de norma da la primera igualdad. La segunda es la cancelación algebraica de $m_B > 0$ en el producto de razones. □

La transitividad es necesaria para que una escala de masas pueda usarse coherentemente. Si las razones medidas violan esta propiedad más allá de la incertidumbre, hay que examinar el dispositivo, el aislamiento, la constancia de los parámetros o la pertinencia del modelo. No procede corregir la discrepancia sólo cambiando el nombre de una variable.

Principio metodológico 9.3 — Separar calibración y contraste. Una comparación puede fijar la escala de masa y fuerza; los ensayos posteriores deben comprobar la consistencia de esa escala entre cuerpos, dispositivos y configuraciones. No uses la misma igualdad simultáneamente como definición de todos sus términos y como contraste independiente.

La unidad SI de masa es el kilogramo, simbolizado kg. Esta unidad no debe confundirse con una fuerza. El peso será una interacción gravitatoria, tratada con su ley particular en el capítulo 10; masa inercial y respuesta gravitatoria requieren una conexión física, no una identificación obtenida por análisis dimensional. Tampoco se admite aquí sustituir m por una función arbitraria del tiempo: una partícula que intercambia materia exige especificar el flujo y cambiar la descripción del sistema.

Ejercicios. Ejercicio 9.5. En un ensayo con una misma resultante, un cuerpo de referencia de $2\,\mathrm{kg}$ acelera a $3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y otro a $1.2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Calcula la masa propuesta para el segundo. En otro dispositivo el primero acelera a $4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. ¿Qué aceleración debe producirse en el segundo para mantener la calibración?

Solución. La razón de masas es $3/1.2 = 2.5$, así que el segundo tendría $5\,\mathrm{kg}$. El nuevo dispositivo debe aplicar a ambos una misma resultante, aunque ésta puede diferir de la del primer ensayo. La razón inversa de aceleraciones debe seguir siendo 2.5, por lo que la aceleración del segundo será $4/2.5 = 1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Si no ocurre así, el dato no prueba automáticamente una variación de masa: primero debe comprobarse la hipótesis de intervención igual y la incertidumbre de cada medición.

Ejercicio 9.6. Un estudiante afirma que un cuerpo cuya aceleración es cero tiene masa infinita, porque $m = F/a$. Explica por qué la inferencia es inválida y ofrece dos situaciones con masa positiva finita y aceleración nula.

Solución. La fórmula comparativa se obtuvo bajo una resultante no nula y una aceleración de magnitud positiva. No se puede dividir por cero. Una partícula libre de masa finita puede moverse con velocidad constante; también un cuerpo de masa finita puede tener varias interacciones cuya suma sea nula. En ambos casos la futura segunda ley tendrá $0 = m\,0$, que no identifica la masa. Si una resultante conocida no nula coexistiera con aceleración exactamente nula en un marco inercial, habría una incompatibilidad del modelo; asignar masa infinita no es una reparación dentro de la definición 9.3.

4. Fuerza, agente y resultante

Decir que un cuerpo está sometido a una fuerza exige más información que dar un número. Hay que identificar el cuerpo receptor, el agente que actúa sobre él, la dirección del vector y las condiciones bajo las que la interacción tiene el valor propuesto. Una fuerza de magnitud $5\,\mathrm{N}$ puede aumentar una componente de velocidad, reducirla o cambiar sólo la dirección instantánea del movimiento, según su orientación y el estado del cuerpo.

Definición 9.4 — Fuerza sobre un receptor. En el modelo newtoniano, una fuerza $\mathbf{F}_{A\leftarrow B}$ es una contribución vectorial a la ecuación de movimiento del receptor A, atribuida a su interacción con el agente B. La flecha apunta hacia el receptor. Una fuerza resultante sobre A es la suma de todas las contribuciones incluidas que actúan sobre ese mismo receptor.

Los vectores de fuerza viven en el espacio de direcciones V y tienen dimensión MLT^{-2}. En unidades SI, $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$. Las componentes de una fuerza se escriben en una base común antes de sumarlas. No se suman directamente las listas de componentes obtenidas con ejes distintos sin efectuar antes el cambio de base correspondiente.

Superposición de contribuciones $[MOD]$**.** Para las interacciones que se incluyen en nuestros modelos, la resultante sobre una partícula es

$$\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = \sum_{\alpha=1}^{k} \mathbf{F}_{\alpha}.$$

La aditividad es una hipótesis física acerca de cómo se combinan las contribuciones. Definir la palabra «resultante» mediante una suma no demuestra por sí solo que la respuesta del cuerpo a intervenciones simultáneas esté descrita por esa suma.[3]

Una resultante puede anularse aunque cada contribución sea distinta de cero. En una recta, $F_1 = 5\,\mathrm{N}$ y $F_2 = -5\,\mathrm{N}$ suman cero; ninguna de las dos fuerzas desaparece. Esto tiene importancia experimental: retirar una contribución altera el movimiento, aunque antes el cuerpo conservara una velocidad constante. Por eso conviene distinguir un cuerpo libre de un cuerpo sometido a interacciones equilibradas.

Proposición 9.4 — La cancelación debe efectuarse en un receptor común. Si $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k$ actúan sobre un receptor y Q es una matriz ortogonal constante que cambia sus componentes, entonces la nueva resultante es $Q\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \sum_\alpha Q\mathbf{F}_\alpha$. Su anulación es independiente de esa elección de base. En cambio, dos fuerzas opuestas sobre receptores distintos no constituyen por sí mismas una resultante nula sobre ninguno de ellos.

[3] Kleppner–Kolenkow, cap. 2, §2.2, pp. 58–59. Fuerza, interacción y superposición vectorial; se distingue la definición de suma de su adecuación física.

Demostración. La primera igualdad es la linealidad de Q. Como Q es invertible, $Q\mathbf{F}_{\text{res}} = 0$ equivale a $\mathbf{F}_{\text{res}} = 0$. Para la última afirmación, la resultante sobre A sólo suma términos cuyo receptor es A, según la definición 9.4. Un término con receptor $B \neq A$ no pertenece a esa suma; la oposición entre los vectores no cambia sus receptores. □

La última parte es una regla de tipado físico. Al escribir una ecuación para un cuerpo, no basta con que dos vectores tengan dimensiones compatibles: también deben pertenecer a la misma lista de contribuciones sobre ese cuerpo. En §7 volveremos sobre esta precisión al formular la tercera ley.

Principio metodológico 9.4 — Conservar el receptor en la notación. Identifica primero sobre quién actúa cada fuerza y sólo después decide qué contribuciones sumar. Dos flechas de sentidos opuestos pueden describir un equilibrio o una pareja de interacción entre cuerpos diferentes; su geometría aislada no distingue ambas situaciones.

Para predecir una historia necesitaremos además una regla que evalúe la fuerza. Una ley de interacción puede depender de posición, velocidad, tiempo y parámetros de otros cuerpos. La identificación del agente no fija todavía esa regla. Tampoco la velocidad es una fuerza: un cuerpo que se mueve hacia la derecha puede estar sometido a una resultante hacia la izquierda y continuar moviéndose hacia la derecha durante cierto tiempo.

Ejercicios. Ejercicio 9.7. Sobre A actúan $\mathbf{F}_{A\leftarrow B} = (3, 4)\,\text{N}$ y $\mathbf{F}_{A\leftarrow C} = (-3, 1)\,\text{N}$ en una base ortonormal. Se conoce también $\mathbf{F}_{B\leftarrow A} = (-3, -4)\,\text{N}$. Calcula la resultante de las contribuciones indicadas sobre A y su magnitud. ¿Qué suma incorrecta podría sugerir la tercera contribución?

Solución. definición 9.4 exige sumar sólo las dos contribuciones cuyo receptor es A. La resultante es $(0, 5)\,\text{N}$, de magnitud $5\,\text{N}$. La tercera fuerza actúa sobre B; sumarla a las anteriores produciría $(-3, 1)\,\text{N}$, pero esa suma no sería la resultante sobre A. La igualdad $\mathbf{F}_{B\leftarrow A} = -\mathbf{F}_{A\leftarrow B}$ anticipa una pareja de interacción y no un equilibrio de A.

Ejercicio 9.8. Dos fuerzas de igual magnitud $F > 0$ actúan sobre el mismo cuerpo y forman un ángulo $\theta \in [0, \pi]$. Encuentra la magnitud de su suma. Determina cuándo la suma vale cero, cuándo tiene magnitud F y cuándo tiene magnitud $2F$.

Solución. El producto escalar da $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|^2 = 2F^2(1 + \cos\theta) = 4F^2\cos^2(\theta/2)$. En el intervalo indicado el coseno de medio ángulo es no negativo, por lo que la magnitud es $2F\cos(\theta/2)$. Se anula en $\theta = \pi$, vale F en $\theta = 2\pi/3$ y alcanza $2F$ en $\theta = 0$. La suma de las magnitudes coincide con la magnitud de la suma únicamente en el último caso. La dirección de las fuerzas contiene información indispensable.

5. Segunda ley y contenido de una ley de interacción

Ya disponemos de una clase de marcos, una escala de masas y una representación vectorial de las interacciones. La segunda ley reúne esas piezas. En su forma de masa constante se escribe como una relación entre la resultante sobre una partícula y su aceleración respecto de un marco inercial.

Segunda ley [*POST*]**.** Para una partícula de masa constante $m > 0$, en un marco inercial y dentro del dominio del modelo,

$$m\mathbf{r}''(t) = \mathbf{F}_{\text{res}}(t).$$

El lado derecho puede ser una función prescrita del tiempo o puede depender del estado del sistema. En ese segundo caso aún no conocemos sus valores a lo largo del movimiento: sólo conocemos una regla para calcularlos cuando la posición y la velocidad sean dadas.

Supongamos, como modelo matemático de ejemplo, que en una recta $F(t, x, v) = F_0\cos(\Omega t)$. La ecuación queda $mx'' = F_0\cos(\Omega t)$ y podemos integrar dos veces. Si en cambio elegimos $F(t, x, v) = -\lambda v$, con $\lambda > 0$, la ecuación es $mx'' = -\lambda x'$. Aquí la propia velocidad desconocida interviene en la

fuerza; no corresponde sustituir una aceleración arbitraria y usar únicamente la reconstrucción del capítulo 8.

Definición 9.5 — Ley de fuerza del modelo. Una ley de fuerza es una función especificada antes de resolver el movimiento, por ejemplo $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}; \eta)$, donde η reúne parámetros fijados. Su dominio declara las configuraciones y estados donde se admite la regla. Al evaluar esa función sobre una historia se obtiene la resultante prevista para esa historia.

La ley de fuerza y la segunda ley tienen alcances distintos. La primera dice cómo una interacción particular depende de variables; la segunda establece cómo la resultante entra en la aceleración. Las dos son necesarias para cerrar un problema predictivo. Esta separación constituye uno de los controles conceptuales centrales de Shankar y Kleppner–Kolenkow.[4]

Proposición 9.5 — Respuesta instantánea a una resultante. Bajo la segunda ley con $m > 0$, la aceleración es nula si y sólo si la resultante es nula. Si la resultante es distinta de cero, ambos vectores son paralelos, con el mismo sentido, y $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{F}_{\text{res}}\|/m$. Esta afirmación no impone que la velocidad sea paralela a la resultante.

Demostración. Dividir la segunda ley por el escalar positivo m da $\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{res}}/m$. Las tres primeras conclusiones siguen de multiplicar un vector por un escalar positivo. Para comprobar que la última restricción no es una consecuencia, fijemos $\mathbf{F}_{\text{res}} = Fe_2$, con $F > 0$, y una historia $\mathbf{r}(t) = Ute_1 + (F/2m)t^2 e_2$, donde $U \neq 0$. Satisface la segunda ley y en $t = 0$ su velocidad es Ue_1, perpendicular a la fuerza. □

El cambio de rapidez requiere una lectura más cuidadosa que el cambio de velocidad. En un instante con $\mathbf{v} \neq 0$, capítulo 8 dio

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\| = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}_{\text{res}}}{m\|\mathbf{v}\|}.$$

Una fuerza perpendicular a la velocidad cambia su dirección instantánea sin cambiar la rapidez en ese instante. Una fuerza opuesta a la velocidad reduce la rapidez mientras la velocidad siga teniendo ese sentido. La fórmula no se usa dividiendo por la rapidez cuando ésta es cero; allí hay que estudiar la historia directamente.

Principio metodológico 9.5 — Cerrar el lado de las interacciones. Antes de integrar $m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}$, especifica cómo se obtiene $\mathbf{F}$ sin conocer de antemano la solución. Escribir $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$ como reconstrucción es legítimo, pero no reemplaza una ley predictiva independiente.

La primera ley aporta la selección del marco y la existencia física de movimientos libres adecuados. Después de fijar ese marco y admitir la segunda ley, la consecuencia $\mathbf{F}_{\text{res}} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = 0$ es inmediata. Esa consecuencia algebraica no elimina el papel físico de la primera ley. Del mismo modo, las componentes de una igualdad vectorial no hacen desaparecer su dependencia respecto del marco.

Ejercicios. Ejercicio 9.9. Una partícula tiene masa $2\,\text{kg}$, velocidad instantánea $(3, 4)\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ y resultante $(8, -6)\,\text{N}$. Calcula su aceleración y la derivada instantánea de su rapidez. ¿Es uniforme su velocidad?

Solución. La segunda ley da $\mathbf{a} = (4, -3)\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$. La rapidez vale $5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ y $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) = 0$, de modo que su derivada es cero. La velocidad no es constante en ese instante, porque su derivada vectorial es $\mathbf{a} \neq 0$. La información es instantánea: no demuestra que la rapidez vaya a conservarse durante un intervalo. Para esa conclusión se necesitaría una ley que mantuviera la perpendicularidad a lo largo de toda la historia.

[4] Shankar, cap. 3, §3.3, pp. 41–45; Kleppner–Kolenkow, cap. 2, §2.2, pp. 58–59. Diferencia entre segunda ley y ley particular de fuerza. Los ejemplos aquí usados no reproducen los problemas de esos libros.

Ejercicio 9.10. Un informe propone medir una historia $\mathbf{r}$ de un cuerpo de masa conocida, definir $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$ y luego anunciar que la igualdad $m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}$ verifica la segunda ley. Repara el diseño de contraste sin descartar la reconstrucción cinemática.

Solución. La igualdad anunciada sigue de la definición de $\mathbf{F}$, así que el ensayo no confronta dos predicciones independientes. Puede conservarse la reconstrucción como estimación de la resultante dinámica, pero hay que compararla con una ley de fuerza calibrada en otros ensayos o con la respuesta de un dispositivo cuyo comportamiento esté especificado. El informe debe declarar marco, masa, agentes, parámetros e incertidumbre, calcular la fuerza prevista por ese modelo y confrontarla con $m\mathbf{r}''$ en datos que no hayan servido únicamente para ajustar esa misma curva. Una discrepancia permite entonces examinar el modelo o sus hipótesis; una identidad construida no lo permite.

6. Componentes y reconstrucción con fuerza prescrita

Para pasar de la ley vectorial al cálculo conviene conservar una distinción del capítulo 8: las componentes cartesianas en una base fija se derivan sin términos adicionales, mientras que una base móvil exige derivar también sus vectores. Trabajaremos primero en una base ortonormal fija de un marco inercial. Si $\mathbf{r} = \sum_i x_i e_i$ y $\mathbf{F} = \sum_i F_i e_i$, la segunda ley equivale a $m x_i'' = F_i$ para cada i.

La equivalencia coordenada no significa siempre independencia dinámica. Si $F_1 = -\kappa x_2$ y $F_2 = \kappa x_1$, las ecuaciones son dos, pero están acopladas. Resolver una componente requiere información sobre la otra. En cambio, cuando cada $F_i(t)$ está prescrita sólo como función del tiempo, todas las componentes pueden reconstruirse por integración y se reúnen después en una historia vectorial.

Definición 9.6 — Fuerza prescrita. Una resultante es prescrita si sus valores $\mathbf{f}(t)$ se dan como función del tiempo independiente de la posición y velocidad desconocidas. Esta propiedad se refiere al modelo escogido, no a una clasificación universal de la interacción.

Proposición 9.6 — Solución para resultante continua prescrita. Sean $m > 0$ constante, $\mathbf{f} : I \to V$ continua y $t_0 \in I$. Dados $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \in V$, existe una única historia C^2 en I que satisface $m\mathbf{r}'' = \mathbf{f}$, $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{v}_0$. Es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} (t - s)\mathbf{f}(s)\, ds.$$

Estrategia. capítulo 8 reconstruyó una historia desde una aceleración continua. La segunda ley permite ahora identificar esa aceleración con $\mathbf{f}/m$. Es útil repetir la verificación porque deja visible qué aporta la fuerza y qué aportan los datos iniciales.

Demostración. Las integrales se entienden componente a componente y con orientación usual si $t < t_0$. La derivada del término integral es $\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s)\, ds$: el término de borde contiene $t - t = 0$. Una segunda derivación, por continuidad y el teorema fundamental del cálculo, da $\mathbf{f}(t)$. Por tanto $\mathbf{r}' = \mathbf{v}_0 + m^{-1}\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s)\, ds$ y $\mathbf{r}'' = \mathbf{f}/m$. En $t = t_0$ las integrales se anulan y se recuperan ambos datos. Si hubiera dos soluciones, su diferencia tendría segunda derivada cero y posición y primera derivada nulas en t_0. Integrando dos veces, la diferencia sería cero en todo el intervalo. □

Cuando $\mathbf{f}$ es constante obtenemos la historia cuadrática $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{v}_0 + \tau^2\mathbf{f}/(2m)$. La resultante fija la curvatura temporal de la posición; los datos iniciales fijan el término constante y el lineal. Dos cuerpos sometidos a la misma resultante y con masas distintas no tienen la misma aceleración, y aun con igual masa sus historias pueden diferir por sus datos iniciales.

Principio metodológico 9.6 — Distinguir equivalencia coordenada de desacoplamiento. Escribe todas las dependencias de cada F_i. Separar una ecuación vectorial en componentes

siempre es posible en una base fija; resolver cada componente aisladamente sólo es posible cuando sus dependencias lo permiten.

Ejercicios. Ejercicio 9.11. En un plano, $\mathbf{f}(t) = F_0(e_1 + (t/T)e_2)$, con $F_0, T > 0$, y se imponen $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = Ve_2$. Encuentra posición y velocidad y verifica la ecuación de Newton.

Solución. La integración de $\mathbf{f}/m$ produce $\mathbf{v} = (F_0/m)te_1 + (V + F_0t^2/(2mT))e_2$. Una segunda integración da $\mathbf{r} = F_0t^2e_1/(2m) + (Vt + F_0t^3/(6mT))e_2$. Derivando dos veces, $m\mathbf{r}'' = F_0e_1 + (F_0t/T)e_2$; en cero se recuperan los dos datos. El factor t^3/T tiene dimensión de tiempo al cuadrado, de modo que cada término de posición tiene dimensión de longitud. La fuerza fue prescrita; por ello no hizo falta resolver un acoplamiento entre coordenadas.

Ejercicio 9.12. Una partícula recibe una fuerza constante Fe_1, con $F > 0$, durante $0 \le t \le T$. Parte de $\mathbf{r}(0) = 0$ y $\mathbf{v}(0) = Ue_2$, con $U > 0$. Calcula su posición al final y la ecuación espacial del arco recorrido. Explica por qué no basta anunciar «se mueve en la dirección de la fuerza».

Solución. proposición 9.6 da $x = Ft^2/(2m)$, $y = Ut$. El punto final tiene coordenadas $(FT^2/(2m), UT)$. Como $U > 0$, eliminamos $t = y/U$ y obtenemos $x = Fy^2/(2mU^2)$, con $0 \le y \le UT$. La trayectoria es un arco de parábola y la velocidad es $(Ft/m, U)$; no es paralela a la fuerza. La aceleración sí lo es, tal como afirma proposición 9.5. El movimiento conserva una componente de velocidad que procede del dato inicial y que la fuerza horizontal no modifica.

7. Tercera ley y parejas de interacción

Si dos cuerpos interactúan, la descripción de uno solo deja fuera una parte de la escena. Una fuerza que atribuimos a B sobre A tiene, en el modelo newtoniano de interacción por pares que adoptaremos, una pareja que actúa sobre B. Las magnitudes son iguales y los sentidos opuestos, pero los receptores son distintos. Esta última precisión explica por qué la tercera ley no obliga a que cada cuerpo tenga aceleración nula.[5]

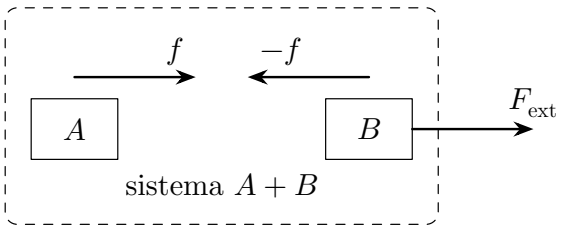


Figura 9.2. Las fuerzas internas f y $-f$ se cancelan al sumar los balances de A y B. La fuerza externa queda en $\dot{P} = F_{ext}$. La frontera discontinua declara qué cuerpos se han incluido; cada balance individual conserva su fuerza interna. Véase §7.

[5]Shankar, cap. 3, §3.4, pp. 45–47; Kleppner–Kolenkow, cap. 2, §2.2, pp. 59–60. Parejas de fuerzas sobre cuerpos distintos. La redacción delimita el modelo de interacción instantánea por pares y no atribuye a la tercera ley débil la condición de fuerza central.

dos cuerpos; dos diagramas

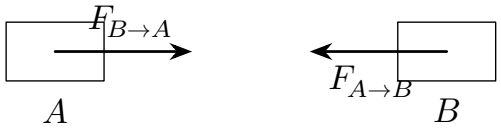


Figura 9.3. Las fuerzas de la pareja actúan sobre cuerpos distintos y son opuestas. No se cancelan en el balance de cada cuerpo por separado; sí en el del sistema $A + B$. Véase §7.

Tercera ley $[POST]$**.** Para una interacción por pares entre partículas A y B, admitida en este modelo y evaluada en un mismo instante del tiempo clásico,

$$\mathbf{F}_{A\leftarrow B}(t) = -\mathbf{F}_{B\leftarrow A}(t).$$

La igualdad expresa una relación física entre dos contribuciones. No se deduce de la definición de fuerza resultante ni de la segunda ley aplicada a un cuerpo. «Acción» y «reacción» son nombres tradicionales para la pareja; no indican que una fuerza se produzca después de la otra.

Definición 9.7 — Fuerzas internas y externas. Respecto de un sistema elegido, una fuerza es interna si receptor y agente pertenecen al sistema. Es externa si su receptor pertenece al sistema y su agente al entorno. La clasificación cambia cuando cambia la frontera del sistema.

Una fuerza de B sobre A es externa para el sistema formado sólo por A e interna para el sistema formado por A y B. Su vector no cambia por ese cambio de clasificación. Lo que cambia es la ecuación o conjunto de ecuaciones que pretendemos reunir. La contabilidad de agentes precede a la simplificación algebraica.

Proposición 9.7 — Cancelación de una pareja al reunir dos ecuaciones. Sean A, B partículas de masas constantes positivas, con fuerzas externas resultantes $\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B$. Supongamos que su única interacción interna forma una pareja de tercera ley. Entonces

$$m_A\mathbf{a}_A = \mathbf{E}_A + \mathbf{F}_{A\leftarrow B}, \qquad m_B\mathbf{a}_B = \mathbf{E}_B + \mathbf{F}_{B\leftarrow A}$$

implican

$$m_A\mathbf{a}_A + m_B\mathbf{a}_B = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B.$$

Si las fuerzas externas son nulas y la interacción interna no es nula, las dos aceleraciones son no nulas, opuestas y sus magnitudes están en razón $\|\mathbf{a}_A\|/\|\mathbf{a}_B\| = m_B/m_A$.

Demostración. Sumamos las dos igualdades vectoriales en una base común. La tercera ley anula la suma de los términos internos y deja la igualdad anunciada. Si $\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_B = 0$, ponemos $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{A\leftarrow B} \neq 0$. Entonces $\mathbf{a}_A = \mathbf{F}/m_A$ y $\mathbf{a}_B = -\mathbf{F}/m_B$. La positividad de ambas masas determina los sentidos y permite dividir sus normas. □

La cancelación ocurre al reunir ecuaciones de cuerpos diferentes; no dentro de la ecuación de cada cuerpo. Tampoco autoriza sustituir ambas aceleraciones por una aceleración común. Dos partículas que se repelen pueden alejarse con aceleraciones de magnitudes distintas. Introducir una misma aceleración requiere una relación cinemática adicional y su justificación, asunto que estudiaremos con vínculos y contacto.

Hay otra distinción necesaria. La forma que hemos postulado exige fuerzas opuestas, pero no exige por sí sola que su dirección sea la línea que une las posiciones. Una fuerza central añade precisamente esa condición de dirección. No derivaremos consecuencias asociadas a fuerzas centrales

sin declararla. Las leyes de conservación y el centro de masa se desarrollarán en el capítulo 14–15, con sus propias hipótesis.

Principio metodológico 9.7 — Aplicar la pareja sin duplicar la fuerza. En la ecuación de A incluye $\mathbf{F}_{A\leftarrow B}$; en la de B, su pareja. No añadas ambas a cada receptor ni supongas aceleraciones iguales sólo porque las magnitudes de fuerza son iguales.

El alcance del postulado también debe conservarse. Usaremos modelos de interacción por pares que satisfacen la relación escrita. No extenderemos sin examen esa forma instantánea a toda descripción de materia y campos. Una teoría que incluya grados de libertad del campo puede requerir ampliar el sistema para expresar los balances relevantes. Esta reserva delimita el modelo que estamos construyendo, sin restarle utilidad en los problemas presentes.

Ejercicios. Ejercicio 9.13. Dos partículas de masas $m_A = 2\,\mathrm{kg}$ y $m_B = 5\,\mathrm{kg}$ no tienen fuerzas externas. En cierto instante $\mathbf{F}_{A\leftarrow B} = 10e_1\,\mathrm{N}$. Calcula ambas aceleraciones y comprueba proposición 9.7. ¿Está cada partícula en equilibrio?

Solución. La tercera ley da $\mathbf{F}_{B\leftarrow A} = -10e_1\,\mathrm{N}$. Por la segunda ley, $\mathbf{a}_A = 5e_1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y $\mathbf{a}_B = -2e_1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. La suma ponderada por masas es $2\cdot 5e_1 + 5\cdot(-2)e_1 = 0$, con unidades de fuerza. Ninguna partícula tiene aceleración nula. La ausencia de fuerzas externas sobre el par no elimina la interacción interna ni implica que cada posición evolucione linealmente. La razón de magnitudes es $5/2 = m_B/m_A$, como exige proposición 9.7.

Ejercicio 9.14. Tres cuerpos A, B, C interactúan por pares y satisfacen la tercera ley. Escribe las contribuciones de B, C en la ecuación de A. Clasifica $\mathbf{F}_{A\leftarrow C}$ para los sistemas $\{A\}$, $\{A, B\}$ y $\{A, B, C\}$. Comprueba qué términos se cancelan al sumar las ecuaciones del sistema $\{A, B\}$.

Solución. En la ecuación de A aparecen $\mathbf{F}_{A\leftarrow B} + \mathbf{F}_{A\leftarrow C}$; no aparecen sus parejas, pues éstas tienen otros receptores. La contribución de C sobre A es externa para $\{A\}$ y para $\{A, B\}$ e interna para $\{A, B, C\}$. Al sumar las ecuaciones de A y B, $\mathbf{F}_{A\leftarrow B} + \mathbf{F}_{B\leftarrow A} = 0$. Permanecen $\mathbf{F}_{A\leftarrow C} + \mathbf{F}_{B\leftarrow C}$ como contribuciones externas sobre ese sistema. No tienen por qué cancelarse entre sí: sus parejas actúan sobre C, que quedó fuera de la suma. La frontera elegida determina la contabilidad.

8. Estado, ecuación de movimiento y datos iniciales

Cuando una fuerza depende de la posición o de la velocidad, la ecuación de Newton deja de ser una instrucción para integrar una función temporal conocida. Se convierte en una relación que la historia desconocida debe satisfacer. El cálculo de una trayectoria pasa entonces por un problema de ecuaciones diferenciales: necesitamos saber qué variables evolucionan, cuál es la regla de evolución y qué datos fijan el movimiento que interesa.

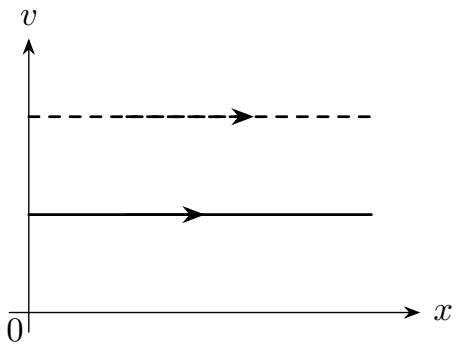


Figura 9.4. En el movimiento libre, cada recta horizontal del plano (x, v) conserva una velocidad. Conocer sólo x deja muchos estados posibles; especificar (x_0, v_0) selecciona una trayectoria del sistema de primer orden. Véase §8.

El estado instantáneo de una partícula no se reduce a su posición. Dos cuerpos pueden pasar por el mismo punto con velocidades distintas y seguir historias diferentes bajo una misma ley de fuerza. En la formulación de segundo orden aparecen dos datos vectoriales; podemos reunirlos en una sola variable de estado para escribir una ecuación de primer orden.

Definición 9.8 — Estado mecánico puntual. Para una partícula de masa constante, con una ley de fuerza que depende sólo de $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}$ y parámetros fijados, el estado es la pareja $z = (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in V \times V$. Las dos entradas tienen dimensiones físicas distintas. Las coordenadas de $V \times V$ sirven para organizar la evolución, sin identificar una longitud con una velocidad.

Definición 9.9 — Problema de valores iniciales newtoniano. Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times V \times V$ un dominio donde está definida una ley continua $\mathbf{F}$. Dados $m > 0$ y un dato $(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathcal{D}$, el problema consiste en encontrar una historia C^2 en un intervalo que contiene t_0, permanece en el dominio y satisface

$$m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \qquad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{v}_0.$$

La definición plantea el problema; todavía no asegura que exista una solución o que sea única.

Proposición 9.8 — Reducción exacta a primer orden. Bajo las hipótesis de la definición 9.9, una solución $\mathbf{r}$ del problema de segundo orden determina una solución C^1 $z = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ del sistema

$$\mathbf{r}' = \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \qquad z(t_0) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0).$$

Recíprocamente, toda solución C^1 de este sistema determina una solución C^2 de la definición 9.9 mediante su primera componente.

Demostración. Si $\mathbf{r}$ resuelve definición 9.9, definimos $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$. Como $\mathbf{r}$ es C^2, la pareja es C^1 y cumple ambas ecuaciones y ambos datos. En sentido inverso, la primera ecuación identifica $\mathbf{r}'$ con $\mathbf{v}$. Puesto que $\mathbf{v}$ es C^1, la primera componente es C^2 y su segunda derivada es $\mathbf{v}'$. Sustituyendo la segunda ecuación obtenemos $m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. El dato inicial de la pareja recupera posición y velocidad. Las dos construcciones se invierten mutuamente. □

En notación compacta, el campo de evolución es $f(t, z) = (\mathbf{v}, \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})/m)$ y el sistema es $z' = f(t, z)$. Cada componente de f tiene la dimensión de la componente correspondiente de z dividida por tiempo. Esta precisión será útil al medir diferencias entre estados: una norma que mezcle posiciones y velocidades necesita escalas o una convención adimensional, que introduciremos cuando haga falta.

Proposición 9.9 — Forma integral del problema de estado. Para un campo continuo f y una historia continua z que permanece en su dominio, resolver el problema $z' = f(t, z)$ con $z(t_0) = z_0$ equivale a satisfacer

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds$$

en todo el intervalo de la historia.

Demostración. Si z es una solución C^1, el teorema fundamental del cálculo da $z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} z'(s)\, ds$ y la ecuación permite sustituir el integrando por $f(s, z(s))$. Recíprocamente, la continuidad de z y de f hace continuo el integrando. La fórmula integral es entonces C^1, tiene derivada $f(t, z(t))$ y en t_0 toma el valor z_0. □

Esta forma integral no es una solución explícita: la función desconocida aparece dentro de la integral. Sí muestra la estructura del problema y prepara las estimaciones de unicidad. En §6 el integrando no dependía de la historia, lo que permitía calcularlo directamente; aquí esa dependencia es precisamente la dificultad nueva.

Principio metodológico 9.8 — Formular antes de prometer determinismo. Declara variables de estado, dominio, parámetros y datos iniciales antes de hablar de una evolución determinada. La segunda ley proporciona la forma de la ecuación; la existencia y unicidad de sus soluciones requieren hipótesis matemáticas sobre la ley de fuerza.

Una ley puede ser continua y no tener suficiente regularidad para garantizar unicidad; puede ser suave en su dominio y conducir a que una solución alcance su frontera en un tiempo finito. Tampoco la unicidad significa que una predicción permanezca precisa ante incertidumbres arbitrariamente pequeñas durante tiempos arbitrariamente grandes. Desarrollaremos estas diferencias en el siguiente macrotramo, con pruebas y ejemplos, sin atribuirlas automáticamente a $F = ma$.

La suficiencia del estado también pertenece al modelo. Si una fuerza depende de otra partícula móvil desconocida, habrá que añadir su posición y velocidad al sistema. Si depende de una variable interna con evolución propia, habrá que incluirla o justificar su eliminación. Mantenerla oculta dentro de un parámetro fijo no convierte un problema incompleto en un problema determinado.

Ejercicios. Ejercicio 9.15. Una partícula en una recta cumple el modelo $F(t, x, v) = -\lambda v$, con $\lambda > 0$ constante. Escribe el sistema de estado y encuentra una historia que satisfaga $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Verifica directamente ambas ecuaciones.

Solución. El sistema es $x' = v$, $v' = -(\lambda/m)v$. Definamos $\gamma = \lambda/m > 0$, con dimensión T^{-1}. La función $v(t) = v_0 e^{-\gamma t}$ tiene derivada $-\gamma v(t)$ y valor inicial v_0. Su integral da $x(t) = x_0 + (v_0/\gamma)(1 - e^{-\gamma t})$. Derivando esta expresión obtenemos $x' = v_0 e^{-\gamma t} = v$, y al derivar nuevamente se cumple $mx'' = -\lambda x'$. También se recupera $x(0) = x_0$. Hemos construido y verificado una solución; para este ejemplo puede probarse su unicidad multiplicando la ecuación de velocidad por $e^{\gamma t}$: la derivada de $e^{\gamma t} v(t)$ es cero, de modo que cualquier solución tiene la velocidad encontrada y luego la misma posición inicial fija su integral. La fuerza depende del estado; su historia temporal se conoce después de resolver.

Ejercicio 9.16. En un marco inercial, dos partículas de la misma masa obedecen la ley prescrita $\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(t)$ y pasan por la misma posición en t_0. Sus velocidades iniciales son $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$. Encuentra la diferencia de posiciones en otro instante. ¿Qué dato falta si un enunciado pide una trayectoria única y sólo proporciona la posición inicial?

Solución. proposición 9.6 da la misma contribución integral de fuerza para ambas historias. Al restar, se obtiene $\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_B(t) = (t - t_0)(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)$. Si las velocidades difieren, las posiciones

difieren para todo $t \neq t_0$. La posición inicial no determina la velocidad inicial, y ese es el dato que falta en el problema descrito. Esto no constituye una falla de unicidad de un problema de valores iniciales completo: son problemas con datos distintos. Separar datos ausentes de una posible falta de unicidad con datos iguales será decisivo al discutir el determinismo clásico.

Las ocho secciones fijan ahora el lenguaje necesario para continuar: sistema y entorno, marco inercial, masa constante, receptor de cada fuerza, ley de interacción, resultante, estado y datos iniciales. La siguiente etapa estudiará qué condiciones convierten esa formulación en una evolución local única y hasta dónde puede prolongarse la solución.

9. Regularidad de la fuerza y unicidad local

La palabra «determinismo» resume una expectativa: una vez fijados el modelo y el estado inicial, la evolución no debería admitir elecciones adicionales. En §8 aprendimos a formular esa expectativa como un problema de valores iniciales. Nos falta justificarla. La segunda ley no impone por sí sola cuán regular es la función de fuerza, y distintas funciones continuas pueden conducir a comportamientos matemáticos diferentes.

Antes de comparar dos estados hay que resolver una pequeña dificultad dimensional. La posición tiene dimensión de longitud y la velocidad de longitud dividida por tiempo; sumar directamente sus normas no define una magnitud físicamente homogénea. Elegiremos escalas positivas y compararemos variables adimensionales. El cambio no altera la pregunta de unicidad, pero evita esconder unidades dentro de una norma.

Definición 9.10 — Estado normalizado y norma de comparación. Elegidas escalas $L, T > 0$ y un instante de referencia t_*, ponemos

$$u = \frac{t - t_*}{T}, \qquad X = \frac{\mathbf{r}}{L}, \qquad W = \frac{T\mathbf{v}}{L}, \qquad w = (X, W).$$

En $\mathbb{R}^{2d}$ usamos la norma $\|w\|_* = \max\{\|X\|, \|W\|\}$, donde las normas de cada entrada son euclídeas. El sistema físico se transforma en

$$\frac{dw}{du} = g(u, w), \qquad g(u, X, W) = \left(W, \frac{T^2}{mL}\mathbf{F}(t_* + Tu, LX, (L/T)W) \right).$$

Las primas de las variables normalizadas se referirán a u. La primera componente de g es W porque $d(\mathbf{r}/L)/du = T\mathbf{v}/L$; la segunda resulta de derivar $T\mathbf{v}/L$ con respecto a u. Todos los componentes de esta nueva ecuación son adimensionales. Al deshacer el cambio recuperamos exactamente el problema físico.

Definición 9.11 — Control de Lipschitz local en el estado. Un campo continuo g en un abierto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d}$ es localmente Lipschitz en el estado, uniformemente en el tiempo local, si alrededor de cada $(u_0, w_0) \in U$ existe un cilindro $[u_0 - a, u_0 + a] \times \overline{B}_r(w_0) \subset U$ y una constante $K \geq 0$ tales que

$$\|g(u, w) - g(u, \widetilde{w})\|_* \leq K \|w - \widetilde{w}\|_*$$

para todo u y todo par de estados del cilindro. Aquí $a, r > 0$ y la bola se toma en la norma de la definición 9.10.

La desigualdad controla cuánto cambia el campo cuando se modifica el estado. No exige que g sea diferenciable. Una dependencia continuamente diferenciable en el estado, con derivada continua conjuntamente en tiempo y estado, proporciona ese control en cilindros pequeños: la derivada queda acotada en un cilindro compacto y el segmento entre estados permanece en su bola convexa. No

basta con saber que cada corte temporal es Lipschitz si las constantes carecen de control común cerca del instante inicial.

Proposición 9.10 — Estimación de separación y unicidad. Sean $w, \widetilde{w}$ dos soluciones en un mismo intervalo que contiene u_0, con sus gráficos en un cilindro donde vale definición 9.11 con constante K. Entonces

$$\|w(u) - \widetilde{w}(u)\|_* \le \|w(u_0) - \widetilde{w}(u_0)\|_* e^{K|u-u_0|}.$$

En particular, si sus datos iniciales coinciden, las historias coinciden mientras se mantengan estas hipótesis.

Estrategia. proposición 9.9 permite comparar integrales en lugar de derivar una norma, que puede no ser diferenciable. Después dominaremos la distancia por una función auxiliar cuya derivada sí podemos calcular.

Demostración. Para $u \ge u_0$, sea $d(u) = \|w(u) - \widetilde{w}(u)\|_*$ y $A = d(u_0)$. Restando las fórmulas integrales y usando definición 9.11,

$$d(u) \le A + K \int_{u_0}^{u} d(s)\, ds =: h(u).$$

La función h es C^1, no negativa y satisface $h' = Kd \le Kh$. Por la regla del producto, la derivada de $e^{-K(u-u_0)}h(u)$ es no positiva. Como $h(u_0) = A$, resulta $d(u) \le h(u) \le Ae^{K(u-u_0)}$. El argumento incluye $K = 0$. Para $u \le u_0$ introducimos $q = u_0 - u$ y las historias con tiempo invertido; su campo es $-g(u_0 - q, \cdot)$, que conserva la constante K. Aplicando el mismo argumento obtenemos el valor absoluto del tiempo. Si $A = 0$, la cota obliga a $d = 0$. □

La prueba es una forma elemental de la desigualdad de Gronwall. Su interés físico no se limita a demostrar unicidad: compara historias con datos ligeramente distintos durante un intervalo en el que el modelo y la cota siguen siendo válidos. El factor exponencial es una cota superior, no una afirmación de que toda separación crezca exponencialmente ni una prueba de caos.[6]

Principio metodológico 9.9 — Precisar el alcance de la unicidad. Comprueba el control local de la fuerza, el dominio y la coincidencia de todos los datos antes de afirmar una historia única. Una desigualdad de separación necesita que ambas soluciones permanezcan en la región donde se obtuvo su constante.

Ejercicios. Ejercicio 9.17. En una dimensión, considera el modelo adimensional $X'' = \sqrt{\max\{X, 0\}}$, con $X(0) = X'(0) = 0$. Para cada $a \ge 0$, verifica que

$$X_a(u) = \begin{cases} 0, & u \le a, \\ (u-a)^4/144, & u \ge a \end{cases}$$

es una solución C^2. Explica por qué no contradice proposición 9.10 y escribe una fuerza física dimensionalmente compatible.

Solución. A la derecha de a, $X_a' = (u-a)^3/36$ y $X_a'' = (u-a)^2/12$. A la izquierda ambas derivadas son cero. Sus valores laterales coinciden en a, así que la historia es C^2 allí. Como $X_a \ge 0$, su raíz cuadrada a la derecha es $(u-a)^2/12$, igual a X_a''; a la izquierda ambos lados se anulan. Todos los datos en cero coinciden, pero las historias comienzan a apartarse de cero en tiempos

[6] M. Spivak, *Physics for Mathematicians: Mechanics I*, Publish or Perish, 2010, cap. 4, problema 12, pp. 164–165. Control de la desigualdad de Gronwall y comparación entre ecuaciones. Proposición 9.10 y proposición 9.17 desarrollan aquí el argumento con dominio común, normalización y datos iniciales distintos; no se reproduce literalmente el problema. La prueba constructiva de existencia local proposición 9.11 se incluye completa y no se atribuye a ese pasaje.

diferentes. El campo de estado es $g(X,W)=(W,\sqrt{\max\{X,0\}})$. No es Lipschitz cerca de cero: el cociente $\sqrt{h}/h=1/\sqrt{h}$ no permanece acotado cuando $h\downarrow 0$. Una fuerza compatible es $F(x)=mLT^{-2}\sqrt{\max\{x/L,0\}}$. La multiplicidad pertenece a este modelo continuo no Lipschitz; el ejercicio no establece que un dispositivo físico real pueda permanecer y arrancar de ese modo.

Ejercicio 9.18. Para $g(X,W)=(W,-\alpha X-\beta W)$, con $\alpha,\beta\geq 0$ adimensionales, encuentra una constante de Lipschitz en la norma de la definición 9.10. Usa proposición 9.10 para acotar la separación de dos estados cuya diferencia inicial tiene norma ε.

Solución. La primera componente de la diferencia tiene magnitud $|\Delta W|\leq\|\Delta w\|_*$. La segunda tiene magnitud a lo sumo $\alpha|\Delta X|+\beta|\Delta W|\leq(\alpha+\beta)\|\Delta w\|_*$. Por tanto sirve $K=\max\{1,\alpha+\beta\}$. Proposición 9.10 da $\|\Delta w(u)\|_*\leq\varepsilon e^{K|u-u_0|}$ en todo intervalo común de existencia. La constante es global para este campo, aunque la proposición por sí sola no construye soluciones ni demuestra existencia global. Si $\varepsilon=0$, ya sabemos que dos soluciones existentes coinciden; aún falta la construcción que abordaremos ahora.

10. Existencia local, prolongación y frontera del dominio

Una prueba de unicidad responde qué ocurriría si dos soluciones existieran. No construye una. Para completar el determinismo local necesitaremos producir al menos una historia que satisfaga la ecuación y el dato inicial. La forma integral de §8 sugiere un procedimiento: comenzar con una historia sencilla, evaluar en ella el campo y usar esa integral para mejorar la historia. La regularidad nos permitirá controlar las diferencias entre mejoras sucesivas.

Proposición 9.11 — Existencia y unicidad local. Sea g continuo en un abierto U y localmente Lipschitz en el estado según la definición 9.11. Para cada $(u_0,w_0)\in U$ existe $h>0$ y una solución C^1 en $[u_0-h,u_0+h]$ con $w(u_0)=w_0$. Dos soluciones con ese dato coinciden en un entorno de u_0 y, por continuación de la comparación local, en todo intervalo común de sus dominios.

Estrategia. Escogeremos un cilindro seguro, acortaremos el tiempo para que integrar no saque las historias de él y probaremos la convergencia de las iteraciones mediante una serie geométrica. Así no necesitamos invocar sin explicación un teorema general de punto fijo.

Demostración. Tomemos el cilindro de la definición 9.11, con radios a,r y constante K. La continuidad en ese compacto da una cota M para $\|g\|_*$. Elegimos $0<h\leq a$ de modo que $hM\leq r$ y $q=hK<1$; si M o K son cero, la restricción correspondiente es automática. Para una historia continua ϕ con valores en $\overline{B}_r(w_0)$, definimos

$$(\mathcal{A}\phi)(u)=w_0+\int_{u_0}^{u}g(s,\phi(s))\,ds.$$

La cota $hM\leq r$ muestra que $\mathcal{A}\phi$ sigue en la bola. Con la norma uniforme $\|\phi\|_\infty=\sup_{|u-u_0|\leq h}\|\phi(u)\|_*$, el control de Lipschitz da

$$\|\mathcal{A}\phi-\mathcal{A}\psi\|_\infty\leq q\|\phi-\psi\|_\infty.$$

Partimos de $\phi_0(u)=w_0$ y ponemos $\phi_{n+1}=\mathcal{A}\phi_n$. Por inducción, $\|\phi_{n+1}-\phi_n\|_\infty\leq q^n\|\phi_1-\phi_0\|_\infty$. Al sumar diferencias desde n hasta un índice posterior, la serie geométrica acota toda cola por $q^n\|\phi_1-\phi_0\|_\infty/(1-q)$. Las historias forman una sucesión uniformemente de Cauchy. La completitud de $\mathbb{R}^{2d}$ proporciona límites puntuales, y la cota uniforme de las colas asegura convergencia uniforme a una historia continua ϕ; la bola cerrada contiene sus valores.

La desigualdad de contracción implica $\mathcal{A}\phi_n\to\mathcal{A}\phi$ uniformemente. Como $\mathcal{A}\phi_n=\phi_{n+1}\to\phi$, tenemos $\phi=\mathcal{A}\phi$. Proposición 9.9 convierte esta igualdad integral en la solución C^1 buscada. Dos

puntos fijos en la bola coinciden porque su distancia uniforme D satisface $D \le qD$ con $q < 1$. Cualquier otra solución con el dato inicial permanece en ese cilindro durante un tiempo pequeño por continuidad y coincide allí por la proposición 9.10.

Finalmente, para comparar dos soluciones en un intervalo común, el conjunto de tiempos donde sus estados coinciden es cerrado por continuidad y abierto, relativamente al intervalo, por la unicidad local recién probada. Contiene u_0; la conexión de un intervalo obliga a que sea todo el intervalo. □

La construcción asegura un tiempo pequeño, no el mayor tiempo posible. Las restricciones sobre h bastan para la prueba y pueden ser muy conservadoras. Si el campo crece cerca de una frontera o la solución se desplaza fuera del cilindro, se elige otro cilindro y se repite el argumento. La unicidad permite pegar las historias obtenidas sin escoger entre continuaciones incompatibles.

Definición 9.12 — Solución maximal. Una solución con dato inicial fijo es maximal si no puede extenderse a un intervalo abierto mayor que contiene su dominio, conservando la ecuación, el dato y la pertenencia a U. Se entiende que las soluciones de la proposición 9.11 se restringen primero a intervalos abiertos. La unión de todas las prolongaciones compatibles produce una solución maximal, pues proposición 9.11 hace coincidir las historias en sus solapamientos.

Proposición 9.12 — Criterio de prolongación en un extremo finito. Bajo proposición 9.11, sea una solución definida hasta un extremo derecho finito b. Si su gráfico en un tramo final permanece en un compacto $C \subset U$, entonces se prolonga más allá de b. En consecuencia, una solución maximal con extremo finito no puede permanecer en ningún compacto interior de su dominio de ecuación.

Demostración. El campo continuo está acotado en C por algún M. Para tiempos u, v del tramo final, la fórmula integral da $\|w(u)-w(v)\|_* \le M|u-v|$. Por ello $w(u)$ tiene un límite w_b al acercarse a b; se usa la completitud del espacio de estados. Como C es cerrado, $(b, w_b) \in C \subset U$. Proposición 9.11 construye una solución nueva alrededor de ese punto. La historia anterior, extendida hasta b mediante su límite, sigue satisfaciendo la fórmula integral: el integrando converge a $g(b, w_b)$ y es continuo hasta el extremo. Las dos historias coinciden a la izquierda de b por la unicidad local y pueden pegarse. El resultado prolonga la solución. El argumento contradice la maximalidad si ésta se suponía. □

Principio metodológico 9.10 — Separar tiempo matemático y validez física. Una solución puede alcanzar una singularidad o la frontera de la ecuación; también puede seguir existiendo matemáticamente cuando el modelo físico ha dejado de ser adecuado. Declara cuál de esas causas limita la predicción. «Única» no significa «global» ni «válida para cualquier tiempo».

Ejercicios. Ejercicio 9.19. Considera $X' = W$, $W' = W^2$, con $X(0) = 0$, $W(0) = 1$. Encuentra su solución y su intervalo maximal que contiene cero. ¿Cómo se reconcilia el resultado con que el campo sea suave en todo $\mathbb{R}^2$?

Solución. La función $W(u) = 1/(1-u)$ satisface $W' = W^2$ y el dato inicial. Integrando $X' = W$, resulta $X(u) = -\log(1-u)$ para $u < 1$. Proposición 9.11 garantiza que ésta es la única solución con esos datos. Está definida en $(-\infty, 1)$, y cuando $u \uparrow 1$ tanto W como X crecen sin cota. No admite prolongación con estado finito a través de uno, de modo que ese intervalo es maximal. El campo suave garantiza Lipschitz local, pero no una cota global de crecimiento. Proposición 9.12 no fuerza una prolongación porque el gráfico abandona todo compacto. El modelo físico asociado sería $F(v) = (m/T)(L/T)(Tv/L)^2$; su validez a velocidades ilimitadas no se afirma.

Ejercicio 9.20. El modelo $X'' = 0$ se declara sólo en el dominio $X < 1$, con $X(0) = 0$, $X'(0) = 1$. Encuentra su historia y su intervalo maximal dentro del dominio. Compara la obstrucción con la del ejercicio 9.19.

Solución. La historia es $X(u) = u$, $W(u) = 1$, por integración o por la proposición 9.6. Permanece en el dominio exactamente para $u < 1$, así que el intervalo maximal que contiene cero es $(-\infty, 1)$. El estado tiene un límite finito $(1, 1)$, pero ese límite está fuera del dominio declarado. No hay un compacto interior que contenga el gráfico del tramo final, por lo que proposición 9.12 no impone una prolongación. A diferencia del ejercicio 9.19, no aparece divergencia del estado: aparece una frontera del modelo. Podríamos escribir la misma fórmula más allá de uno si ampliáramos el dominio de la ecuación, pero eso sería un problema distinto que requiere justificar la ampliación.

11. Cambios galileanos y covariancia del modelo

La primera ley admite una familia de marcos inerciales relacionados por traslaciones uniformes y cambios fijos de orientación. La segunda ley debe leerse con esa libertad en mente. Dos observadores pueden atribuir velocidades diferentes a una misma partícula, sin discrepar acerca de su aceleración vectorial después de traducir componentes. Pero una función de fuerza que depende de la velocidad también necesita transformarse: la igualdad de aceleraciones no autoriza a conservar sin examen la misma expresión del lado derecho.

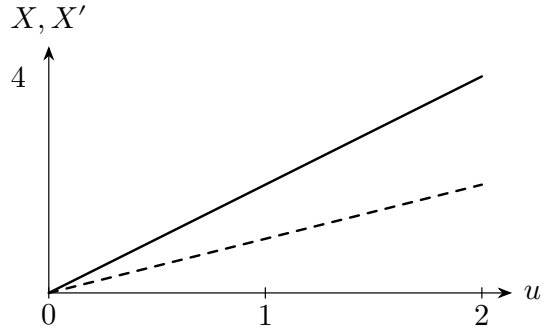


Figura 9.5. Para un movimiento uniforme $X = 2u$, el marco que avanza con velocidad normalizada uno mide $X' = u$. Las pendientes cambian; la aceleración es cero en ambos marcos. Véase §11.

Sea un cambio de coordenadas con reloj común,

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_0 + (t - t_0)\mathbf{u} + Q\mathbf{y},$$

donde Q es ortogonal constante y $\mathbf{u}$ constante. El vector $\mathbf{y}$ contiene las coordenadas de posición en el nuevo marco. Si denotamos $\mathbf{w} = \mathbf{y}'$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{u} + Q\mathbf{w}$ y $\mathbf{a} = Q\mathbf{y}''$. Aquí $\mathbf{w}$ es una velocidad física, distinta del estado normalizado w sin negrita de §§9–10.

Proposición 9.13 — Transformación de una ecuación newtoniana. Una historia satisface $m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si y sólo si su representación $\mathbf{y}$ satisface $m\mathbf{y}'' = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$, donde

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}, \mathbf{w}) = Q^{\mathsf{T}}\mathbf{F}(t, \mathbf{c}_0 + (t - t_0)\mathbf{u} + Q\mathbf{y}, \mathbf{u} + Q\mathbf{w}).$$

Sus datos iniciales se transforman en $\mathbf{y}_0 = Q^{\mathsf{T}}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{c}_0)$ y $\mathbf{w}_0 = Q^{\mathsf{T}}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u})$.

Demostración. Derivar dos veces el cambio afín da $\mathbf{r}'' = Q\mathbf{y}''$. Sustituimos posiciones y velocidades en la fuerza y multiplicamos la ecuación por Q^{T}. La igualdad $Q^{\mathsf{T}}Q = \mathrm{Id}$ produce la ecuación anunciada. Cada paso es reversible porque Q es invertible y el cambio temporal es el mismo reloj.

Evaluar posición y velocidad en t_0 proporciona los datos escritos. El dominio nuevo es la preimagen del dominio original bajo el cambio de tiempo y estado. □

La masa se conserva como escalar del modelo y la fuerza cambia sus componentes con Q^{T}. Esto es covariancia: ambas representaciones describen la misma ecuación física con sus argumentos correctamente transformados. Una exigencia diferente es que una familia de leyes conserve la misma forma funcional al efectuar el cambio. Esa propiedad requiere examinar la interacción, incluidas las variables de su entorno.[7]

Proposición 9.14 — Misma forma para interacciones relativas equivariantes. Supongamos que las fuerzas internas de un sistema son $\mathbf{F}_{i\leftarrow j} = \Phi_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$, y que para todo cambio ortogonal considerado la función satisface

$$\Phi_{ij}(Q\rho, Q\nu) = Q\Phi_{ij}(\rho, \nu).$$

Entonces, bajo el cambio común de la proposición 9.13, las componentes de cada fuerza tienen la misma regla $\Phi_{ij}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j, \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j)$ en el nuevo marco.

Demostración. Restar dos posiciones elimina $\mathbf{c}_0 + (t - t_0)\mathbf{u}$ y deja $Q(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)$. Restar dos velocidades elimina $\mathbf{u}$ y deja $Q(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j)$. La hipótesis de equivariancia convierte la fuerza original en $Q\Phi_{ij}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j, \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j)$. Multiplicar por Q^{T}, como prescribe proposición 9.13, elimina Q y prueba la afirmación. □

La hipótesis acerca de Φ_{ij} no se deduce de que la fuerza sea un vector. Una ley que incluya una dirección externa fija debe transformar también esa dirección. Además, la equivariancia no establece por sí sola la tercera ley: para la pareja habría que comprobar una relación entre Φ_{ij} y Φ_{ji}. Los postulados y simetrías son obligaciones distintas.

Principio metodológico 9.11 — Transformar el entorno con la partícula. Al cambiar de marco, transforma las velocidades, posiciones y direcciones de los agentes que aparecen en la ley. No conviertas una dependencia respecto de un medio en una dependencia respecto de un reposo absoluto por omitir el parámetro del medio.

Ejercicios. Ejercicio 9.21. En un plano, Q gira 90° en sentido positivo, $\mathbf{c}_0 = 0$, $\mathbf{u} = Ue_1$ y la fuerza original es Fe_1 constante. Si $\mathbf{r}_0 = ae_1$ y $\mathbf{v}_0 = Ve_2$, encuentra la fuerza y los datos en el nuevo marco.

Solución. En las coordenadas originales $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, por lo que $Q^{\mathsf{T}}e_1 = -e_2$ y $Q^{\mathsf{T}}e_2 = e_1$. Proposición 9.13 da $\widetilde{\mathbf{F}} = -Fe_2$, $\mathbf{y}_0 = -ae_2$ y $\mathbf{w}_0 = Ve_1 + Ue_2$. La aceleración nueva es $-(F/m)e_2$. La traslación uniforme modifica la velocidad inicial; la rotación fija modifica las componentes de fuerza y aceleración. Ninguna de ambas produce términos adicionales de aceleración.

Ejercicio 9.22. Se declara el modelo $\mathbf{F} = -\lambda(\mathbf{v} - \mathbf{V}_m)$, con $\lambda > 0$ y velocidad constante del medio $\mathbf{V}_m$. Transfórmalo mediante proposición 9.13. Explica el error de conservar $\mathbf{F} = -\lambda\mathbf{v}$ en dos marcos con velocidad relativa no nula cuando sólo en el primero el medio está en reposo.

Solución. La velocidad del medio en el segundo marco es $\widetilde{\mathbf{V}}_m = Q^{\mathsf{T}}(\mathbf{V}_m - \mathbf{u})$. Sustituyendo $\mathbf{v} = \mathbf{u} + Q\mathbf{w}$ y multiplicando por Q^{T}, resulta $\widetilde{\mathbf{F}} = -\lambda(\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{V}}_m)$. La regla conserva su forma en términos de velocidad relativa al medio. Si $\mathbf{V}_m = 0$ en el primer marco, en el segundo vale $-Q^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$, que no es cero si $\mathbf{u} \neq 0$. Omitirla cambia el modelo y las fuerzas predichas; no es otra representación del mismo experimento.

---

[7] Spivak, cap. 1, «The first law» y comienzo de «The second law», pp. 10–13; D. Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2008, cap. 3, §3.1, pp. 51–53. Control del papel del marco inercial y de la masa constante. Las fórmulas de transformación de las proposiciones 9.13–9.14 se derivan en el texto a partir de la cinemática del capítulo 8; no se atribuyen a una página no consultada.

Ejercicio 9.23. Una pareja admite el modelo $\Phi(\rho,\nu)=\kappa\rho+\mu\nu$, con $\rho=\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B$, $\nu=\mathbf{v}_A-\mathbf{v}_B$, κ,μ escalares constantes y pareja opuesta. Comprueba la equivariancia y la tercera ley débil. ¿La fuerza es necesariamente central?

Solución. La linealidad da $\Phi(Q\rho,Q\nu)=\kappa Q\rho+\mu Q\nu=Q\Phi(\rho,\nu)$, de modo que proposición 9.14 se aplica. Intercambiar cuerpos cambia (ρ,ν) por $(-\rho,-\nu)$ y la función por su negativo; la pareja cumple la tercera ley. Si $\mu\neq 0$ y ν no es paralela a ρ, la fuerza no es paralela a la separación y no es central. Para unidades compatibles, $[\kappa]=MT^{-2}$ y $[\mu]=MT^{-1}$. El ejemplo prueba compatibilidades algebraicas del modelo propuesto, no su realización para cualquier interacción material.

12. Equilibrio, reposo y movimiento uniforme

Un cuerpo que se detiene por un instante puede empezar a moverse de inmediato. Un cuerpo que tiene aceleración cero en cierto instante puede tener aceleración no nula un momento después. Y un cuerpo cuya resultante se anula durante un intervalo puede estar moviéndose uniformemente. Las tres afirmaciones son compatibles con Newton; la confusión aparece cuando una condición puntual se interpreta como una historia completa.

Definición 9.13 — Equilibrio de una partícula en un marco. En el modelo de masa constante y marco inercial, una historia de equilibrio es una posición constante $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_e$ que satisface la ecuación de movimiento en todo el intervalo considerado. Por tanto su velocidad y aceleración son nulas allí. La definición se refiere a ese marco y a ese modelo; no incluye aquí la estabilidad frente a perturbaciones.

Proposición 9.15 — Criterio de equilibrio. Para una ley $\mathbf{F}(t,\mathbf{r},\mathbf{v})$, la historia constante $\mathbf{r}_e$ es solución en un intervalo I si y sólo si $\mathbf{F}(t,\mathbf{r}_e,0)=0$ para todo $t\in I$ y sus estados pertenecen al dominio. Si la ley es autónoma, el criterio se reduce a $\mathbf{F}(\mathbf{r}_e,0)=0$. Bajo las hipótesis de la proposición 9.11, el dato inicial $(\mathbf{r}_e,0)$ tiene esa historia como su única solución mientras pueda continuarse en el intervalo.

Demostración. La historia constante tiene segunda derivada cero. Sustituirla en Newton muestra que la condición es necesaria y suficiente, conservando la exigencia de dominio. Si no hay dependencia temporal, la misma igualdad se comprueba una sola vez en el estado fijo. La última afirmación resulta de la unicidad de la proposición 9.11, aplicada después de la normalización invertible de la definición 9.10. □

La igualdad de la fuerza con cero en un único estado y un único tiempo no basta para el caso no autónomo. El entorno puede cambiar más tarde. Incluso en el caso autónomo, fijar la posición sin fijar velocidad cero tampoco selecciona una historia de equilibrio. Ejercicio 9.16 ya mostró que posiciones iniciales iguales pueden dar historias distintas.

Proposición 9.16 — Criterio de movimiento uniforme. La historia $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+(t-t_0)\mathbf{v}_0$ satisface la segunda ley si y sólo si pertenece al dominio y

$$\mathbf{F}(t,\mathbf{r}_0+(t-t_0)\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_0)=0$$

para todo instante del intervalo. En un cambio galileano, una historia de equilibrio puede transformarse en un movimiento uniforme con velocidad no nula.

Demostración. La segunda derivada de la historia afín es cero; sustituirla en la ecuación prueba ambas direcciones. Para la última afirmación, la transformación de la proposición 9.13 aplicada a $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_e$ da $\mathbf{y}(t)=Q^{\mathsf{T}}(\mathbf{r}_e-\mathbf{c}_0)-(t-t_0)Q^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$. Su velocidad es constante y no nula cuando $\mathbf{u}\neq 0$. Proposición 9.13 garantiza que esa historia satisface el modelo transformado. □

Principio metodológico 9.12 — Conservar el cuantificador temporal. Distingue «en este instante» de «en todo el intervalo». Para demostrar equilibrio verifica la resultante sobre el

estado constante durante el intervalo; para movimiento uniforme verifícala a lo largo de la historia afín. No confundas ninguno de esos criterios con estabilidad.

En un sistema de varias partículas, que se anule la suma de fuerzas externas no establece por sí solo equilibrio de cada partícula. Proposición 9.7 y ejercicio 9.13 ya exhibieron aceleraciones internas opuestas. También habrá que controlar las condiciones particulares de cada receptor. Las restricciones y fuerzas de contacto se introducirán en los capítulos siguientes antes de aplicarlas como si fueran datos evidentes.

Ejercicios. Ejercicio 9.24. Sobre una partícula actúan dos contribuciones constantes $\mathbf{F}_1 = Fe_1$ y $\mathbf{F}_2 = -Fe_1$. Su velocidad inicial es Ue_2, con $U \neq 0$. ¿Tiene aceleración nula? ¿Es una historia de equilibrio en este marco? ¿Hay un marco galileano en que lo sea?

Solución. La resultante se anula en todo instante y proposición 9.6 da $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)Ue_2$. Su aceleración es nula, pero su posición no es constante: no es equilibrio según la definición 9.13. Elegimos un origen que se traslada con velocidad Ue_2 y ejes paralelos; en ese marco la velocidad de la partícula es cero y su posición constante. Al transformar ambas contribuciones y sus agentes, la resultante sigue siendo cero y la historia sí es de equilibrio. El cuerpo no es libre por tener resultante nula: siguen existiendo dos interacciones incluidas.

Ejercicio 9.25. En una recta, $F(t, x, v) = F_0 t/T$, con $F_0, T > 0$, y $x(0) = v(0) = 0$. Verifica que posición, velocidad, aceleración y fuerza son cero en el instante inicial. ¿La historia es de equilibrio?

Solución. proposición 9.6 da $v(t) = F_0 t^2/(2mT)$ y $x(t) = F_0 t^3/(6mT)$. Su aceleración es $F_0 t/(mT)$ y su fuerza $F_0 t/T$, de modo que todas las cantidades indicadas se anulan en cero. Para cualquier tiempo positivo, la posición y velocidad son positivas, así que no hay equilibrio. Proposición 9.15 habría exigido $F(t, 0, 0) = 0$ en todo el intervalo; esa condición fracasa. El ejercicio muestra que acumular ceros instantáneos no reemplaza el cuantificador temporal del criterio.

13. Reconstrucción dinámica y contraste de modelos

Una ecuación bien planteada puede producir una solución única y, aun así, describir mal el experimento. La existencia y unicidad pertenecen a la estructura matemática del modelo; su adecuación física exige confrontar las interacciones propuestas con información independiente. Ahora reuniremos esa distinción con los problemas inversos de §1 y con el control de aproximaciones del capítulo 6.

Hay dos comparaciones diferentes. Podemos mantener la misma ley y cambiar el dato inicial, como en la proposición 9.10. También podemos cambiar la ley misma: sustituir una fuerza por una aproximación, modificar un parámetro o incluir una contribución omitida. Para distinguir sus efectos conservaremos por separado una diferencia inicial y una cota sobre la diferencia entre campos de evolución normalizados.

Proposición 9.17 — Comparación entre dos modelos de evolución. Sean $w, \widetilde{w}$ soluciones de $w' = g(u, w)$ y $\widetilde{w}' = \tilde{g}(u, \widetilde{w})$ en un intervalo común que contiene u_0. Supongamos que ambas permanecen en una región donde g tiene constante de Lipschitz $K \geq 0$ y donde $\|g(u, z) - \tilde{g}(u, z)\|_* \leq \delta$ para todos los estados relevantes. Si $A = \|w(u_0) - \widetilde{w}(u_0)\|_*$ y $\tau = |u - u_0|$, entonces

$$\|w(u) - \widetilde{w}(u)\|_* \leq \begin{cases} Ae^{K\tau} + \dfrac{\delta}{K}(e^{K\tau} - 1), & K > 0, \\ A + \delta\tau, & K = 0. \end{cases}$$

Demostración. Para tiempos posteriores a u_0, la fórmula integral y la suma y resta de $g(s, \widetilde{w}(s))$ dan

$$d(u) \le A + \delta(u - u_0) + K \int_{u_0}^{u} d(s)\, ds =: h(u),$$

donde d es la norma de la diferencia. La función auxiliar satisface $h' = \delta + Kd \le \delta + Kh$. Así,

$$\frac{d}{du}\big(e^{-K(u-u_0)} h(u)\big) \le \delta e^{-K(u-u_0)}.$$

Integrando entre u_0 y u y multiplicando por el exponencial, obtenemos la primera cota si $K > 0$ y la segunda si $K = 0$. En ambos casos $d \le h$. Para tiempos anteriores, invertimos el tiempo como en la proposición 9.10; cambian los signos de los campos pero no las cotas de Lipschitz ni de diferencia. □

La cota separa el error en el dato del error en la ecuación. Si la diferencia de fuerzas físicas está acotada por ΔF y se conservan masa y escalas, la diferencia de campos normalizados debida a esa fuerza queda acotada por $\delta = T^2 \Delta F/(mL)$. Una diferencia de masa exige recalcular también la aceleración; no puede introducirse como si fuera sólo una fuerza adicional sin justificarlo. La estructura de la proposición 9.17 se apoya en el mismo mecanismo de Gronwall presentado por Spivak para comparar ecuaciones.[8]

Volvamos ahora a una historia medida. Si posee la regularidad suficiente y la masa es conocida, podemos reconstruir $m\mathbf{r}''$ y compararlo con una fuerza propuesta. La discrepancia es una magnitud útil, pero su interpretación requiere conservar la procedencia de cada término.

Definición 9.14 — Residuo dinámico de una historia. Para una historia C^2 dentro del dominio de una ley de fuerza, definimos

$$\mathbf{R}(t) = m\mathbf{r}''(t) - \mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)).$$

Tiene dimensiones de fuerza. Se anula idénticamente si y sólo si la historia satisface la ecuación de Newton del modelo en ese intervalo.

Un residuo no nulo puede deberse a una interacción omitida, una calibración incorrecta, un marco inadecuado o un error de estimación de derivadas. Identificar una causa requiere más información. Un residuo nulo sobre una historia tampoco identifica la función de fuerza fuera de los estados visitados. La curva en el espacio de estados suele proporcionar menos información que una función definida en una región entera.

Proposición 9.18 — Una historia exacta no identifica una ley de fuerza completa. Supongamos que una historia $\mathbf{r}_*(t)$ resuelve una ley continua $\mathbf{F}$ en un dominio abierto sobre un intervalo abierto I. Para cualquier escalar constante κ de dimensión MT^{-2}, la ley

$$\mathbf{F}_\kappa(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) + \kappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*(t))$$

produce residuo cero sobre esa misma historia. Para κ diferentes, las leyes son distintas en estados del dominio situados fuera de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_*(t)$.

Demostración. La contribución añadida es continua y, al evaluar $\mathbf{r} = \mathbf{r}_*(t)$, se anula. Por tanto la igualdad dinámica de la historia original sigue siendo válida para cada κ. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$, la diferencia de las leyes es $(\kappa_1 - \kappa_2)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*(t))$. Un dominio abierto alrededor de un estado de la historia contiene estados con posiciones diferentes a tiempo y velocidad fijados, donde esa diferencia es no nula. □

[8] M. Spivak, *Physics for Mathematicians: Mechanics I*, Publish or Perish, 2010, cap. 4, problema 12, pp. 164–165. Control de la desigualdad de Gronwall y comparación entre ecuaciones. Proposición 9.10 y proposición 9.17 desarrollan aquí el argumento con dominio común, normalización y datos iniciales distintos; no se reproduce literalmente el problema. La prueba constructiva de existencia local proposición 9.11 se incluye completa y no se atribuye a ese pasaje.

El resultado es una obstrucción de identificación, no una propuesta de nuevos mecanismos físicos. Las restricciones experimentales pueden excluir muchas funciones de esta familia. Su utilidad consiste en mostrar por qué una trayectoria perfectamente ajustada no demuestra una ley universal. Para identificar parámetros o dependencias hacen falta variaciones de datos, posiciones, velocidades o configuraciones del entorno.[9]

Principio metodológico 9.13 — Contrastar más allá del ajuste. Separa los datos usados para calibrar la ley de los que ponen a prueba sus predicciones. Informa el residuo y la incertidumbre de su estimación; no conviertas un ajuste sobre una sola historia en evidencia de identificación global ni una cota de estados en una cota automática de tiempos de encuentro.

Ejercicios. Ejercicio 9.26. Se observa $x_*(t) = L\cos(t/T)$ para una masa $m > 0$. Calcula la fuerza reconstruida y encuentra dos leyes diferentes que produzcan residuo cero sobre esa historia. Explica qué nuevo ensayo podría distinguirlas.

Solución. Como $x_*'' = -(L/T^2)\cos(t/T)$, la fuerza reconstruida es $-(m/T^2)x_*(t)$. Una ley es $F_1(t,x,v) = -(m/T^2)x$. Otra, para $\kappa \neq 0$, es $F_2 = F_1 + \kappa(x - L\cos(t/T))$. Ambas coinciden sobre la historia, pero difieren si se cambia la posición inicial manteniendo el mismo instante y velocidad. En ese nuevo ensayo su diferencia inicial de fuerza sería $\kappa(x_0 - L)$ si empieza en cero. El diseño exigiría además comprobar la reproducibilidad del entorno y las hipótesis de cada ley; el cálculo sólo señala una configuración capaz de distinguir sus predicciones.

Ejercicio 9.27. Una historia libre rectilínea $x_*(t) = x_0 + v_0 t$ se aproxima por $x_\varepsilon(t) = x_*(t) + \varepsilon L\sin(Nt/T)$, donde $\varepsilon > 0$ es adimensional y N es un entero positivo. Acota el error de posición y calcula el residuo frente a la ley $F = 0$. ¿Un error pequeño de posición garantiza un residuo pequeño?

Solución. El error de posición tiene magnitud a lo sumo εL. Dos derivaciones dan $R_\varepsilon(t) = -m\varepsilon LN^2T^{-2}\sin(Nt/T)$, cuya amplitud es $m\varepsilon LN^2/T^2$. Para $\varepsilon = 10^{-3}$ y $N = 100$, la posición difiere a lo sumo en una milésima de L, pero la amplitud del residuo es $10mL/T^2$. La segunda derivada amplifica las variaciones rápidas. Una reconstrucción desde datos discretos debe especificar cómo estima derivadas y cómo controla su incertidumbre; una cota uniforme de posiciones no proporciona por sí sola esa información.

Ejercicio 9.28. En variables normalizadas se tienen $K = 2$, $A = 0.01$ y $\delta = 0.02$, y ambas historias permanecen en la región de control durante $0 \le u - u_0 \le 0.5$. Aplica proposición 9.17 al final. Traduce la cota a errores de posición y velocidad con las escalas L, T de la definición 9.10.

Solución. En $\tau = 0.5$ obtenemos $d \le 0.01e + (0.02/2)(e-1) = 0.02e - 0.01$, aproximadamente 0.0444. Como la norma es el máximo de las dos entradas normalizadas, $\|\Delta\mathbf{r}\| \le L(0.02e - 0.01)$ y $\|\Delta\mathbf{v}\| \le (L/T)(0.02e - 0.01)$. La misma cifra adimensional produce dos cotas con unidades diferentes. La condición de permanencia en la región es parte de la hipótesis; si no se demuestra o comprueba, no podemos extrapolar la estimación a otro tramo.

14. Síntesis de un problema newtoniano completo

Podemos ahora recorrer un problema desde sus hipótesis hasta su predicción sin confundir los niveles. Elegimos una partícula, un marco inercial y una masa constante. Especificamos una ley de fuerza y los parámetros de su entorno. Comprobamos que los datos pertenecen al dominio, formulamos la ecuación y justificamos la existencia y unicidad donde corresponda. Después calculamos

[9] Morin, cap. 3, §3.3, pp. 60–62. Control de la formulación $mx'' = F(t,x,v)$ y de la necesidad de ambos datos iniciales. La obstrucción de identificación de la proposición 9.18 y el ejercicio de diferenciación de errores ejercicio 9.27 se demuestran aquí; no se presentan como resultados citados de Morin.

una historia y la verificamos por sustitución; finalmente preguntamos por la validez del modelo y por el contraste con observaciones.

Para dar a esa secuencia un referente concreto, consideremos la clase de modelos

$$\mathbf{F}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = \mathbf{A}(t) - \lambda(\mathbf{v}-\mathbf{V}_m),$$

con $\lambda > 0$, una velocidad de entorno constante $\mathbf{V}_m$ y una contribución externa prescrita continua $\mathbf{A} : I \to V$. El origen físico de esas contribuciones tendría que calibrarse en un problema experimental. Aquí la ley es una hipótesis de trabajo para estudiar un problema completo, no una afirmación de que toda resistencia o todo dispositivo tenga esa forma. La fuerza no depende de posición, pero sí de velocidad; no es una fuerza prescrita en el sentido de la definición 9.6.

Proposición 9.19 — Solución de una clase afín dependiente de velocidad. Sea $\gamma = \lambda/m > 0$. Dados $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ en $t_0 \in I$, el modelo anterior tiene una única solución en I, con

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{V}_m + e^{-\gamma\tau}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_m) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\mathbf{A}(s)\,ds, \qquad \tau = t - t_0,$$

y

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{V}_m + \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_m) + \frac{1}{m\gamma}\int_{t_0}^{t}(1-e^{-\gamma(t-s)})\mathbf{A}(s)\,ds.$$

Estrategia. Restar la velocidad del medio convierte la ecuación de velocidad en una ecuación lineal con coeficiente constante. Un factor integrante produce la primera fórmula; la segunda se comprueba derivando, sin necesitar intercambiar integrales dobles.

Demostración. La segunda ley es $\mathbf{v}' + \gamma(\mathbf{v}-\mathbf{V}_m) = \mathbf{A}/m$. Multiplicar por $e^{\gamma(t-t_0)}$ convierte el lado izquierdo en la derivada de $e^{\gamma(t-t_0)}(\mathbf{v}-\mathbf{V}_m)$. Integrar y recuperar el dato inicial da la fórmula de velocidad. La continuidad de $\mathbf{A}$ hace que esa expresión sea C^1 y satisfaga la ecuación.

Derivamos la expresión de posición. El término lineal aporta $\mathbf{V}_m$ y el exponencial aporta $e^{-\gamma\tau}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{V}_m)$. El término de borde de la integral es cero, porque su núcleo vale $1 - e^0 = 0$; la derivada del núcleo es $\gamma e^{-\gamma(t-s)}$. Tras cancelar γ, se obtiene la contribución integral de la velocidad. Así $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$, la posición es C^2 y en t_0 toma el valor $\mathbf{r}_0$. Una segunda derivación recupera Newton.

Para la unicidad, la diferencia de dos velocidades con el mismo dato satisface $\Delta\mathbf{v}' + \gamma\Delta\mathbf{v} = 0$. El mismo factor integrante tiene derivada cero y valor inicial cero, por lo que las velocidades coinciden. Las posiciones, con igual derivada e igual dato inicial, también coinciden. Las fórmulas están definidas en todo I: para cada instante la continuidad garantiza integrales finitas en el segmento entre ese instante y t_0, incluidas las integrales orientadas si $t < t_0$. □

En este caso no sólo contamos con un teorema local: la fórmula muestra existencia en todo el intervalo donde se ha dado la contribución continua $\mathbf{A}$. Esa afirmación matemática no amplía el dominio empírico del modelo. Si el medio cambia, la ley deja de ser lineal en la velocidad o una contribución se vuelve relevante, hay que revisar la hipótesis que permitió el cálculo.[10]

La constante γ tiene dimensión de tiempo inverso; $1/\gamma = m/\lambda$ es la escala temporal que organiza el efecto de la dependencia lineal. Las integrales de velocidad tienen dimensión $FT/m = L/T$ y las de posición dimensión $FT/(m\gamma) = L$. Comprobar esas dimensiones no prueba las fórmulas, pero permite detectar factores ausentes después de haberlas obtenido.

[10] Morin, cap. 3, §3.3, pp. 62–64. Contraste del procedimiento de integración de modelos dependientes de velocidad. Proposición 9.19 usa una clase vectorial afín con contribución temporal continua y velocidad del entorno; sus fórmulas y la prueba de unicidad se desarrollan en el capítulo. No se adopta ninguna cifra empírica de validez de resistencia para el modelo formal aquí declarado.

Principio metodológico 9.14 — Cerrar el ciclo de predicción. Una solución completa conserva la cadena entre sistema, marco, ley, parámetros, dominio, datos, ecuación, justificación matemática y contraste. La comprobación por sustitución acredita la solución del modelo; la comparación con un experimento acredita, dentro de incertidumbres y escalas, su adecuación física.

Ejercicios. Ejercicio 9.29. En el modelo de la proposición 9.19 toma $\mathbf{A}(t) = A_0 e_1$, $\mathbf{V}_m = U e_2$, $\mathbf{r}(0) = 0$ y $\mathbf{v}(0) = 0$, con $A_0 > 0$. Define $\mathbf{B} = (A_0/\lambda)e_1 + U e_2$. Encuentra la historia, verifica su resultante y estudia los regímenes $\gamma t \ll 1$ y $\gamma t \gg 1$. ¿La velocidad límite representa equilibrio en el marco inicial?

Solución. La integral constante de la proposición 9.19 produce $\mathbf{v}(t) = \mathbf{B}(1 - e^{-\gamma t})$ y $\mathbf{r}(t) = \mathbf{B}[t - (1 - e^{-\gamma t})/\gamma]$. La resultante es

$$A_0 e_1 - \lambda(\mathbf{v} - U e_2) = \lambda \mathbf{B} e^{-\gamma t},$$

igual a $m\mathbf{v}' = m\gamma \mathbf{B} e^{-\gamma t}$. Los datos iniciales se recuperan en cero. Para $\gamma t \ll 1$, la expansión del exponencial da $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{B} t + O(\|\mathbf{B}\|\gamma^2 t^2)$ y $\mathbf{r} = \frac{1}{2}\gamma \mathbf{B} t^2 + O(\|\mathbf{B}\|\gamma^2 |t|^3)$, entendiendo los restos como cotas en norma para $|\gamma t|$ pequeño. Para tiempos positivos con $\gamma t \gg 1$, la velocidad se aproxima a $\mathbf{B}$ y la posición a $\mathbf{B}(t - 1/\gamma)$, con error exponencialmente pequeño. Como $A_0 > 0$, $\mathbf{B} \neq 0$: la velocidad límite es la de un movimiento uniforme, no un equilibrio en el marco inicial. Partir directamente con velocidad $\mathbf{B}$ daría resultante cero y movimiento uniforme exacto; la historia que parte de reposo se aproxima a ese régimen sin alcanzarlo en tiempo finito.

Ejercicio 9.30. Audita este informe: «La fuerza de la proposición 9.19 es prescrita porque sus parámetros son conocidos. Con posición inicial basta para determinar la historia. Como la fuerza es continua, la unicidad y la existencia global quedan garantizadas. En otro marco basta escribir la misma fórmula con la nueva velocidad sin modificar $\mathbf{V}_m$. Las parejas de tercera ley se cancelan sobre la partícula. La verificación por sustitución demuestra que el modelo describe el experimento». Repara cada afirmación y determina qué conclusión matemática sí está acreditada para el modelo concreto de la proposición 9.19.

Solución. Conocer parámetros no equivale a conocer la fuerza como función del tiempo: ésta depende de la velocidad desconocida y no cumple definición 9.6. El problema necesita además la velocidad inicial, como muestran definición 9.9 y ejercicio 9.16. La continuidad sola no garantiza unicidad, según el ejercicio 9.17; aun la suavidad local no garantiza existencia global, según el ejercicio 9.19. Para este modelo particular, proposición 9.19 sí prueba una solución única en todo el intervalo donde $\mathbf{A}$ sea continua, mediante una fórmula explícita y un factor integrante.

El cambio de marco debe transformar la velocidad del medio, $\widetilde{\mathbf{V}}_m = Q^{\mathsf{T}}(\mathbf{V}_m - \mathbf{u})$, y la contribución prescrita, $\widetilde{\mathbf{A}} = Q^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$. Con esos parámetros la ley conserva su forma; omitir la velocidad transformada del medio cambia el problema. La pareja de una fuerza externa actúa sobre su agente, fuera de la ecuación de la partícula; no cancela la contribución sobre el receptor. Sólo al ampliar el sistema y sumar ecuaciones podrían cancelarse los pares internos apropiados.

Por último, sustituir la historia en la ecuación demuestra que es una solución de la ley escogida. Para evaluar el experimento se necesitan calibraciones y observaciones independientes, con incertidumbre y dominio de validez. La conclusión acreditada es concreta: dadas la ley afín, sus parámetros, el intervalo de continuidad y ambos datos iniciales, las fórmulas de la proposición 9.19 constituyen la única historia matemática del modelo en ese intervalo. Ninguna de las correcciones exige renunciar a esa predicción; exige expresar exactamente de qué depende.

Puente hacia las fuerzas concretas. El capítulo ha separado las leyes estructurales de Newton de las leyes particulares de interacción. Podemos identificar receptores, formular un estado

completo, transformar marcos y justificar una evolución bajo hipótesis explícitas. El siguiente capítulo pondrá contenido físico en el lado de las fuerzas: gravedad uniforme, contacto, tensión, fricción, resistencia y resortes, junto con los diagramas de cuerpo libre. Esa transición requiere conservar las distinciones ya establecidas, porque una ecuación diferencial impecable puede comenzar con una lista de fuerzas equivocada.

Capítulo 10

Fuerzas elementales y diagramas de cuerpo libre

El capítulo 9 estableció cómo una resultante determina la aceleración y bajo qué hipótesis puede hablarse de una evolución única. Ahora debemos construir esa resultante a partir de una situación física. Trabajaremos con partículas de masa constante y marcos inerciales, salvo indicación explícita. Las fuerzas elementales serán leyes e idealizaciones del modelo, no consecuencias deducidas de Newton sin información sobre la interacción.

1. Elegir el cuerpo antes de dibujar fuerzas

Un objeto se apoya sobre una mesa y una mano lo tira mediante una cuerda. La escena contiene mesa, objeto, cuerda, mano y Tierra. Un dibujo de toda la escena ayuda a entender qué ocurre, pero no es todavía la herramienta que necesitamos para escribir una ecuación de Newton. Esa ecuación debe tener un receptor definido. Si mezclamos fuerzas sobre el objeto con fuerzas sobre la mano, la suma dejará de representar la resultante de un cuerpo particular.

El primer paso es elegir qué queremos determinar. Para calcular la aceleración del objeto, lo tomamos como sistema. Para estudiar cuánto se estira la cuerda, la cuerda tendría que entrar en la descripción con variables adicionales. Para averiguar la fuerza que recibe la mano, cambiamos de receptor. Cada elección conserva la misma escena física y cambia la lista de fuerzas que corresponde escribir.

Definición 10.1 — Diagrama de cuerpo libre. Un diagrama de cuerpo libre representa un sistema seleccionado y las fuerzas externas que actúan sobre él, con dirección, sentido y receptor identificables. En el modelo puntual, cada contribución se representa por un vector asociado al punto que sustituye al cuerpo. El dibujo no incluye como fuerzas las que ese sistema ejerce sobre cuerpos externos.

«Libre» significa aquí separado gráficamente de su entorno; no significa sin interacciones. Una partícula libre en el sentido del capítulo 9 carecía de interacciones relevantes. Un cuerpo representado en un diagrama de cuerpo libre puede tener muchas. La coincidencia de la palabra no identifica ambos conceptos.[1]

Una lista de agentes proporciona un control eficaz. En el ejemplo, la Tierra ejerce la fuerza gravitatoria, la mesa una fuerza de contacto y la cuerda una fuerza de tracción. La mano no debe añadirse otra vez como una fuerza directa sobre el objeto si sólo actúa sobre él mediante la cuerda y no lo toca. La historia causal de una intervención no coincide con la lista de agentes que interactúan directamente con el receptor en el modelo.

Proposición 10.1 — Componentes y agentes no multiplican interacciones. Si sobre un receptor actúan contribuciones $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k$, representarlas por sus componentes en una base fija no

[1] David Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2008, cap. 3, §3.2, pp. 55–58. Se consultó el tratamiento de diagramas separados y selección de subsistemas. Las demostraciones y ejercicios presentes son desarrollos propios.

añade nuevas fuerzas a la resultante. Tampoco pertenece a esa resultante la pareja de tercera ley que actúa sobre otro receptor.

Demostración. Si $\mathbf{F}_\alpha = \sum_i F_{\alpha i} e_i$, la linealidad de la suma da $\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \sum_i (\sum_\alpha F_{\alpha i}) e_i$. Las componentes son otra representación de las mismas contribuciones; sumarlas además de los vectores originales duplicaría términos. La última afirmación sigue de que una resultante sobre un sistema sólo incluye fuerzas cuyo receptor pertenece a él, como establecieron definición 10.4 y proposición 10.4 del capítulo 9. □

En un modelo de partícula no podemos usar el punto de aplicación para estudiar el efecto de giro de una fuerza: no hemos incluido orientación del cuerpo ni dinámica rotacional. Para las preguntas de este capítulo basta con la suma vectorial que produce la aceleración representada. La posterior distinción entre traslación y rotación exigirá conservar más información geométrica.

Principio metodológico 10.1 — Seleccionar el receptor y enumerar agentes. Antes de dibujar flechas, escribe el nombre del sistema y de cada agente externo que actúa sobre él. Una fuerza debe tener una interacción que la justifique; una velocidad, una aceleración o la intención de mover el cuerpo no constituyen agentes adicionales.

Ejercicios. Ejercicio 10.1. Una caja se apoya en una mesa horizontal y una persona la tira mediante una cuerda. No hay contacto directo persona–caja. Se desprecia la influencia del aire. Identifica los agentes de fuerza sobre la caja y sobre la cuerda. ¿La fuerza de la caja sobre la mesa debe aparecer en el diagrama de la caja?

Solución. Sobre la caja actúan la Tierra, la mesa y la cuerda. Sobre la cuerda actúan la persona y la caja; la Tierra también debe incluirse si su peso no se ha despreciado. Declarar una cuerda de peso despreciable elimina esa contribución del modelo, no demuestra que no exista en una cuerda real. La fuerza de la caja sobre la mesa tiene como receptor a la mesa y no pertenece al diagrama de la caja. Su pareja es la fuerza de la mesa sobre la caja, que sí debe aparecer. El inventario precede al cálculo de magnitudes, que todavía desconocemos.

Ejercicio 10.2. Un estudiante dibuja sobre un objeto el peso $m\mathbf{g}$, sus dos componentes cartesianas y una flecha adicional denominada «fuerza de movimiento» en el sentido de la velocidad. Localiza los errores y repara el diagrama.

Solución. El peso y sus componentes representan una sola contribución, no tres. Podemos dibujar el vector peso o dibujar sus componentes indicando que son una descomposición, pero no sumarlos conjuntamente. La flecha «fuerza de movimiento» no tiene agente ni ley de interacción y debe retirarse. Si se desea señalar velocidad, se usa una marca distinguible y se declara que no pertenece a la suma de fuerzas. La reparación no necesita que el objeto esté en reposo: un cuerpo puede conservar una velocidad no nula sin una resultante en ese sentido.

2. Del diagrama a las ecuaciones

Un diagrama permite ver direcciones y detectar omisiones, pero no resuelve automáticamente el problema. Después de identificar contribuciones debemos expresar sus componentes, incluir las condiciones cinemáticas admitidas y comprobar que disponemos de información suficiente para las incógnitas. Algunas magnitudes provienen de una ley calibrada; otras se determinan como fuerzas de contacto necesarias para mantener un movimiento permitido.

Elegir ejes no cambia las fuerzas. Cambia la facilidad con que se escriben sus componentes. En una mesa horizontal suele convenir separar direcciones horizontal y vertical; en un plano inclinado, direcciones tangente y normal al plano. En ambos casos usaremos una base ortonormal fija del

marco inercial. Una base ligada a una superficie curva y que varía con la posición requeriría el cálculo adicional del capítulo 8.

Definición 10.2 — Componente firmada de una fuerza. Respecto de una dirección unitaria fija e_i, la componente de $\mathbf{F}$ es $F_i = \mathbf{F} \cdot e_i$. Puede ser positiva, negativa o cero; la magnitud $\|\mathbf{F}\|$ es no negativa. Para una base ortonormal completa, $\mathbf{F} = \sum_i F_i e_i$.

Proposición 10.2 — Ecuaciones por proyección. Para una partícula de masa constante $m > 0$, la ecuación $m\mathbf{a} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha$ equivale, en una base ortonormal fija, a

$$m a_i = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha \cdot e_i$$

para cada componente i.

Demostración. Tomar el producto escalar de la igualdad vectorial con cada e_i proporciona las ecuaciones. Recíprocamente, si todas las componentes coinciden, la diferencia entre ambos vectores tiene producto escalar cero con cada elemento de la base. Sus coeficientes son todos cero y la diferencia es nula. □

Un dibujo esquemático no fija por sí solo magnitudes ni igualdad entre ellas. Dos flechas de longitud semejante pueden representar fuerzas desconocidas. Si la longitud se usa como escala cuantitativa hay que declararlo; en los diagramas del capítulo las longitudes son esquemáticas y las direcciones constituyen la información que debe leerse. Las magnitudes se obtienen de las ecuaciones y las hipótesis.

También hay que distinguir una ecuación dinámica de una condición sobre el movimiento. Escribir $a_y = 0$ exige una razón: por ejemplo, que el objeto permanezca a una altura constante durante un intervalo. Tener $v_y = 0$ en un instante no basta para inferir $a_y = 0$, como mostró capítulo 9. Del mismo modo, si dos objetos tienen la misma aceleración, esa igualdad debe provenir de una relación cinemática o de la solución, no de haberlos dibujado cerca.

Principio metodológico 10.2 — Separar dibujo, ley y condición cinemática. Cada término de una ecuación debe proceder de una contribución del diagrama o de una condición declarada. Después de resolver, comprueba signos, dimensiones y admisibilidad del régimen supuesto, además de la igualdad algebraica.

No existe una garantía general de que los problemas de fuerzas produzcan sistemas lineales. Los ejemplos iniciales sí lo harán, pero una fuerza puede depender no linealmente de posición o velocidad, y las condiciones de contacto pueden introducir desigualdades. La estructura del capítulo 9 seguirá siendo necesaria cuando el dibujo desemboque en una ecuación diferencial en vez de una lista de números.

Ejercicios. Ejercicio 10.3. Sobre una partícula de $2\,\mathrm{kg}$ actúan dos fuerzas, $(6, -2)\,\mathrm{N}$ y $(-2, 8)\,\mathrm{N}$, en una base ortonormal fija. Calcula la aceleración por proyecciones. Si la velocidad instantánea es $(-3, 0)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, ¿debe cambiarse el sentido de alguna fuerza?

Solución. Las componentes de la resultante son $(4, 6)\,\mathrm{N}$, de modo que $a_x = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y $a_y = 3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. La velocidad indicada no obliga a cambiar ninguna fuerza: el dato de velocidad y las interacciones tienen papeles diferentes. La aceleración horizontal positiva modifica una velocidad inicialmente negativa; no supone que la partícula ya se mueva a la derecha. Para decidir una evolución posterior habría que conocer las leyes y los datos completos, no sólo estos valores instantáneos.

Ejercicio 10.4. Se sabe que en una dirección e_y el objeto tiene $v_y(t_0) = 0$. Un informe reemplaza inmediatamente la ecuación vertical por $\sum F_y = 0$. Da un contraejemplo y formula una condición que sí permita esa sustitución durante un intervalo.

Solución. Una historia $y(t) = y_0 + \frac{1}{2}A(t - t_0)^2$, con $A \neq 0$, tiene velocidad vertical cero en t_0 y aceleración vertical A. Su resultante vertical es mA, no cero. Si en cambio se declara que $y(t) = y_0$ durante un intervalo, entonces $y' = y'' = 0$ en él y la segunda ley sí exige $\sum F_y = 0$. La reparación consiste en aportar la condición temporal que falta, por ejemplo la permanencia en un soporte fijo, y luego comprobar que la fuerza de contacto obtenida permite esa permanencia.

3. Gravedad uniforme y peso

Un cuerpo liberado cerca del suelo suele acelerar hacia abajo. Para describir ese movimiento en una región pequeña y durante tiempos adecuados usamos un campo gravitatorio aproximadamente uniforme. «Uniforme» significa aquí que el vector del campo se toma constante en la región y en el tiempo del problema. No significa que la gravitación tenga esa forma en todas las escalas.[2]

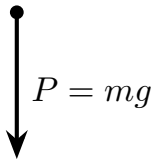


Figura 10.1. Partícula en caída libre en el campo uniforme: la única fuerza es el peso $P = mg$ hacia abajo. La ausencia de apoyo significa $N = 0$, aunque la partícula se aproxime al suelo. Véase §3.

Definición 10.3 — Modelo de gravedad uniforme. En un marco aproximadamente inercial elegido, se admite una fuerza gravitatoria

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \qquad \mathbf{g} = -ge_y, \qquad g > 0,$$

con e_y vertical hacia arriba y $\mathbf{g}$ constante. La letra g representa una aceleración, de dimensión LT^{-2}; $\mathbf{P}$ representa una fuerza, de dimensión MLT^{-2}.

La expresión usa la misma masa que aparece en la respuesta inercial. Esa identificación incorpora una propiedad empírica de la gravitación, no una deducción de la segunda ley. Si distinguiéramos masa gravitatoria m_g de masa inercial m_i, escribiríamos $\mathbf{P} = m_g\mathbf{g}$ y obtendríamos $\mathbf{a} = (m_g/m_i)\mathbf{g}$ cuando sólo actuara esa contribución. Nuestro modelo adopta la identificación correspondiente a una calibración común; no la demuestra mediante cancelar símbolos iguales.

[2]Daniel Kleppner y Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge 2010, cap. 2, §2.5, pp. 80–84: campo gravitatorio, peso y distinción entre masa gravitatoria e inercial. El campo uniforme se declara como aproximación del modelo.

Proposición 10.3 — Caída libre en el campo uniforme. Si la única fuerza incluida es $m\mathbf{g}$, con $m > 0$ constante, la aceleración es $\mathbf{g}$ y, dados posición y velocidad iniciales,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0 + \tfrac{1}{2}(t - t_0)^2\mathbf{g}.$$

La historia es única en el intervalo del modelo y su aceleración no depende de m.

Demostración. Newton da $m\mathbf{r}'' = m\mathbf{g}$. Dividir por $m > 0$ produce $\mathbf{r}'' = \mathbf{g}$ y la reconstrucción con aceleración prescrita de la proposición 9.6 proporciona la historia y su unicidad. La cancelación de masa es válida porque definición 10.3 puso el mismo parámetro en la fuerza y en la ecuación inercial. □

La caída libre no exige velocidad vertical ni velocidad dirigida hacia abajo. Un objeto lanzado hacia arriba puede estar en caída libre mientras sólo actúe la gravedad: su velocidad apunta inicialmente hacia arriba y su aceleración hacia abajo. Si el aire ejerce una fuerza relevante, el modelo de la proposición 10.3 deja de incluir todas las contribuciones y debe ampliarse.

Definición 10.4 — Peso gravitatorio y lectura de un soporte. Llamaremos peso gravitatorio al vector $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. La lectura de una balanza ideal de apoyo será la magnitud de la fuerza normal que ejerce sobre el cuerpo, en el modelo donde esa lectura se ha calibrado. Se puede denominar peso aparente a esa lectura, pero no se identificará automáticamente con mg.

La distinción evita una ambigüedad cotidiana: la masa puede conservarse mientras cambia la lectura del soporte por su aceleración o por otra fuerza aplicada. Una balanza que muestra «kilogramos» transforma una fuerza en una indicación mediante una calibración; no altera las dimensiones de la fuerza de contacto que mide. En §5 calcularemos esa diferencia.

Principio metodológico 10.3 — Declarar el campo y las contribuciones omitidas. Usa $m\mathbf{g}$ como una ley aproximada con dirección y escala de validez especificadas. Antes de aplicar la solución de caída libre, comprueba que se han descartado contacto, tensión y resistencia dentro del modelo del intervalo considerado.

Ejercicios. Ejercicio 10.5. Dos cuerpos con masas m y $3m$ se liberan con iguales posición y velocidad iniciales en un mismo campo uniforme, despreciando todas las otras interacciones. Compara pesos, aceleraciones e historias. ¿La conclusión permanece si sus masas gravitatorias e inerciales tienen razones diferentes?

Solución. Sus pesos tienen magnitudes mg y $3mg$, pero ambas aceleraciones son $\mathbf{g}$ y las historias de la proposición 10.3 coinciden. La fuerza mayor sobre el segundo cuerpo compensa su mayor respuesta inercial en la proporción admitida por el modelo. Si las razones m_g/m_i fueran diferentes, las aceleraciones serían esas razones multiplicadas por $\mathbf{g}$ y las historias no coincidirían en general. La independencia de masa usa una hipótesis física, no sólo el nombre «gravedad».

Ejercicio 10.6. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad $V > 0$ desde altura h, bajo el modelo de la proposición 10.3. Calcula la velocidad y la altura cuando se anula la velocidad vertical por primera vez. ¿Se anula también el peso o la aceleración en ese instante?

Solución. Con $t_0 = 0$, $v_y = V - gt$ y $y = h + Vt - gt^2/2$. La velocidad se anula en $t = V/g$ y la altura es $h + V^2/(2g)$. El peso sigue siendo $-mge_y$ y la aceleración $-ge_y$, ambos no nulos. Ese instante es reposo vertical instantáneo, no equilibrio. La fórmula describe el tramo sólo mientras persisten las hipótesis del campo uniforme y ausencia de otras fuerzas; no afirma por sí sola cómo termina el movimiento al encontrar un soporte.

4. Contacto normal y unilateralidad

Una superficie puede impedir que un cuerpo la atraviese sin sujetarlo a ella. Esta diferencia importa: una mesa ordinaria empuja un objeto apoyado, pero no lo atrae cuando el objeto se eleva. El contacto sin adhesión es, por tanto, una interacción que sólo puede actuar en un sentido. Su magnitud se obtiene de las ecuaciones; su signo permitido forma parte del modelo.

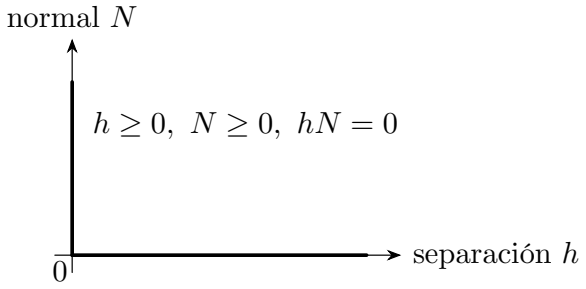


Figura 10.2. Para un contacto unilateral ideal no adhesivo, la separación y la normal satisfacen $h \geq 0$, $N \geq 0$ y $hN = 0$. Los estados admisibles están sobre los ejes: contacto con reacción o separación sin reacción. Véase §4.

Definición 10.5 — Descomposición de la fuerza de contacto. Sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria que apunta desde una superficie hacia el lado accesible al cuerpo. Escribimos la fuerza de contacto sobre éste como

$$\mathbf{F}_c = N\mathbf{n} + \mathbf{f}_t, \qquad \mathbf{f}_t \cdot \mathbf{n} = 0.$$

La componente normal es $N\mathbf{n}$ y la componente tangencial es $\mathbf{f}_t$. En un contacto no adhesivo, $N \geq 0$. Una superficie lisa ideal se modela mediante $\mathbf{f}_t = 0$.

Que una superficie sea lisa no obliga a que la normal sea vertical. Tampoco convierte una fuerza de contacto general en una fuerza puramente normal: ésta es una idealización que debemos declarar. El nombre «normal» especifica una dirección perpendicular a la superficie local, no una dirección universal del espacio.[3]

Definición 10.6 — Contacto unilateral sin adhesión. Para una superficie horizontal de altura $y_s(t)$ y un cuerpo puntual de altura $y(t)$, definimos la separación $h = y - y_s$. El modelo impone

$$h \geq 0, \qquad N \geq 0, \qquad Nh = 0.$$

La primera condición excluye penetración. La segunda excluye tracción normal. La tercera establece que una separación positiva elimina la fuerza normal. Estas condiciones describen los tramos regulares; un choque requiere además una descripción del cambio de velocidad que aquí no estamos desarrollando.

El producto $Nh = 0$ no dice que siempre haya una fuerza positiva al tocar la superficie. Permite $h = 0$ y $N = 0$. Tampoco determina por sí solo la evolución: necesitamos Newton y datos iniciales compatibles. En particular, observar $h = 0$ en un instante no autoriza a imponer que h sea constante durante un intervalo. Un objeto puede estar justo abandonando el soporte o llegando a él.

[3]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.5, p. 92; R. Shankar, *Fundamentals of Physics I*, edición ampliada, Yale University Press, 2019, cap. 4, §4.3, pp. 55–56. Las condiciones unilaterales y el análisis por ramas se explicitan aquí como hipótesis y consecuencias del modelo, sin atribuir toda esa formulación a estos pasajes.

Supongamos que usamos una base inercial con e_y vertical hacia arriba. Sea $A = \ddot{y}_s$ la aceleración del soporte y sea C_y la componente vertical de las otras fuerzas, excluyendo peso y normal. La ecuación sobre el cuerpo es $m\ddot{y} = N - mg + C_y$.

Proposición 10.4 — Normal durante un tramo de contacto sostenido. Si $h = 0$ durante un intervalo abierto y las posiciones son dos veces diferenciables, entonces

$$\ddot{y} = A, \qquad N = m(g + A) - C_y.$$

Esta rama del modelo sólo es admisible si $N \geq 0$. Si $h > 0$, la normal vale cero y la aceleración vertical debe calcularse sin ella.

Demostración. La identidad $y = y_s$ en todo el intervalo permite diferenciarla dos veces. Al sustituir $\ddot{y} = A$ en Newton resulta la fórmula de N. Su no negatividad procede de la definición 10.6 y no de una elección de eje. Para separación positiva, $Nh = 0$ exige $N = 0$, que debe volver a introducirse en Newton. □

El orden del cálculo tiene una consecuencia práctica. Primero ensayamos el contacto sostenido; después comprobamos el signo de la fuerza obtenida. Un resultado negativo no representa una «normal hacia abajo» sobre una mesa no adhesiva. Indica que la mesa tendría que tirar del cuerpo para producir la aceleración supuesta. Hay que abandonar esa rama y resolver la dinámica sin contacto, si los datos permiten la separación. No basta con sustituir el resultado negativo por cero y conservar la aceleración del soporte: esa combinación incumpliría Newton.

En el límite $N = 0$ debemos examinar los datos y la evolución posterior. Una separación inicialmente nula con velocidad relativa positiva conduce a separación. Con velocidad relativa nula, el signo de la aceleración relativa aporta información local. Cuando también ésta se anula, la continuación depende de las fuerzas y del movimiento posteriores. Las desigualdades no reemplazan ese análisis temporal.

Principio metodológico 10.4 — Comprobar la rama de contacto. Distingue la igualdad cinemática que ensayas de la desigualdad física que debe satisfacer la fuerza. Resuelve la primera y comprueba la segunda. Si falla, reconstruye las ecuaciones para el régimen admisible.

Ejercicios. Ejercicio 10.7. Un objeto se encuentra a distancia positiva de una mesa fija. En un instante su velocidad apunta hacia abajo. Sólo actúa la gravedad mientras permanece separado. Determina la normal y la aceleración. ¿La dirección de su velocidad basta para incorporar la mesa al diagrama?

Solución. Como $h > 0$, definición 10.6 da $N = 0$. Newton da $\ddot{y} = -g$. La mesa puede ser relevante para un evento futuro, pero aún no ejerce una fuerza de contacto dentro del modelo. Si la trayectoria alcanza $h = 0$, termina este tramo y habrá que describir el encuentro. Añadir una normal anticipada modificaría indebidamente la aceleración antes del contacto. El diagrama representa las interacciones actuales, aunque la solución también permita predecir cuándo cambia su lista.

Ejercicio 10.8. Una plataforma comienza con un cuerpo apoyado, separación y velocidad relativa nulas. Durante el intervalo siguiente su aceleración vertical es $A = -2g$. No hay otras fuerzas. Decide si puede conservarse el contacto y calcula la separación inicial posterior al cambio.

Solución. La rama sostenida produciría $N = m(g - 2g) = -mg$, inadmisible. Sin contacto, el cuerpo tiene aceleración $-g$ y la plataforma $-2g$, por lo que $\ddot{h} = g$. Con $h(0) = \dot{h}(0) = 0$, resulta $h(t) = gt^2/2 > 0$ para $t > 0$. Esta trayectoria verifica la rama separada y confirma $N = 0$. Si conserváramos $\ddot{y} = -2g$ después de fijar $N = 0$, Newton exigiría una fuerza adicional que no está presente.

5. Normal, peso aparente y fuerzas oblicuas

La lectura de un soporte depende de cuánto debe empujar para acompañar el movimiento requerido. El peso gravitatorio sigue siendo mg en el campo uniforme del modelo, mientras que la normal puede ser mayor, menor o nula. Esta distinción permite interpretar una balanza en un ascensor sin alterar la ley gravitatoria.[4]

Proposición 10.5 — Lectura de un soporte acelerado. Si un cuerpo mantiene contacto con un soporte horizontal cuya aceleración vertical es A, y sólo recibe peso y normal, la magnitud de la fuerza medida por un soporte ideal es

$$N = m(g + A).$$

La rama exige $A \geq -g$ y datos compatibles con el contacto. Para $A < -g$ no existe contacto sostenido no adhesivo bajo esas fuerzas.

Demostración. proposición 10.4 con $C_y = 0$ da la fórmula y definición 10.6 exige $N \geq 0$. Como $m > 0$, esta desigualdad equivale a $A \geq -g$. La demostración usa un marco inercial: A es la aceleración del cuerpo y del soporte respecto de él. □

Una velocidad ascendente no implica lectura mayor. Un ascensor que sube frenando tiene aceleración descendente y puede producir una lectura menor. De igual modo, un ascensor que baja frenando tiene aceleración ascendente y produce una lectura mayor. La velocidad caracteriza cómo se desplaza; la aceleración entra en la ecuación que fija la resultante. Si la aceleración es cero, el movimiento uniforme del soporte no altera $N = mg$.

Consideremos ahora una superficie horizontal fija y lisa. Una fuerza aplicada de magnitud $F \geq 0$ forma un ángulo φ sobre la horizontal, con $0 \leq \varphi < \pi/2$. Su componente vertical ayuda a sostener el cuerpo; su componente horizontal lo acelera. Mientras persiste el contacto, no hay aceleración vertical.

Proposición 10.6 — Tracción oblicua sobre un soporte liso. En la rama de contacto sostenido,

$$N = mg - F\sin\varphi, \qquad a_x = \frac{F\cos\varphi}{m}.$$

La rama requiere $F\sin\varphi \leq mg$. Si $F\sin\varphi > mg$, la solución sin contacto tiene $N = 0$ y $a_y = F\sin\varphi/m - g > 0$, mientras siga actuando la misma fuerza.

Demostración. Proyectar Newton horizontalmente da $ma_x = F\cos\varphi$. Verticalmente da $0 = N + F\sin\varphi - mg$ para contacto sostenido. La desigualdad se obtiene de $N \geq 0$. En la rama separada se elimina la normal y Newton vertical da la aceleración indicada. Con separación y velocidad relativa inicialmente nulas, esa aceleración positiva inicia la separación. □

Si $F\sin\varphi = mg$, las fuerzas verticales pueden equilibrarse con normal nula. Bajo fuerzas constantes y datos verticales nulos, el cuerpo permanece a la altura de la mesa en el modelo puntual. Éste es un caso marginal específico. No convierte todo instante de normal nula en contacto garantizado, ni elimina la necesidad de comprobar la trayectoria si las fuerzas cambian.

Una fuerza aplicada hacia abajo produce el efecto opuesto: aumenta la normal necesaria. Basta usar su componente vertical firmada en la proposición 10.4. Esta observación muestra por qué $N = mg$ no es una ley de interacción universal. Es una solución condicionada por fuerzas, orientación del soporte y aceleración normal nula.

[4] Shankar, obra citada, cap. 3, §3.5, pp. 49–50: peso y lectura de soportes acelerados. Se distingue la fuerza gravitatoria de la fuerza normal medida.

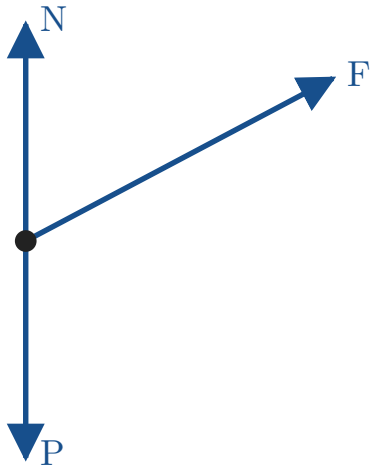


Figura 10.3. Fuerzas sobre el cuerpo: normal hacia arriba, peso hacia abajo y fuerza aplicada oblicua. Las longitudes de las flechas son esquemáticas; no representan magnitudes medidas.

La normal y el peso tampoco forman una pareja de tercera ley, aunque coincidan en magnitud en un caso. Ambos actúan sobre el cuerpo. La pareja del peso es la fuerza gravitatoria del cuerpo sobre la Tierra. La pareja de la normal es la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el soporte. Sólo las fuerzas con el mismo receptor pueden compensarse dentro de su ecuación de Newton.

Principio metodológico 10.5 — Separar equilibrio y reciprocidad. Para decidir si dos fuerzas se compensan, verifica que tengan el mismo receptor y suma sus vectores. Para identificarlas como pareja de tercera ley, verifica que correspondan a una misma interacción y tengan receptores distintos. La igualdad de magnitudes por sí sola no decide ninguna de esas preguntas.

Ejercicios. Ejercicio 10.9. Una balanza ideal acompaña un soporte vertical. Calcula su lectura para aceleraciones $+g/4$ y $-g/4$. Compara, además, un soporte que sube a velocidad constante con otro que baja a velocidad constante.

Solución. En contacto sostenido, proposición 10.5 da respectivamente $N = 5mg/4$ y $N = 3mg/4$. Ambos valores son admisibles. Los dos movimientos a velocidad constante tienen $A = 0$ y lectura mg. La lectura distingue aceleraciones, no el signo de la velocidad. Los resultados suponen que el cuerpo acompaña el soporte y que éste mide exclusivamente la fuerza normal; una fuerza vertical adicional cambiaría la ecuación.

Ejercicio 10.10. Un cuerpo sobre una mesa lisa recibe una fuerza a 30° sobre la horizontal. Compara $F = mg$ con $F = 3mg$, partiendo en ambos casos de separación y velocidad vertical nulas.

Solución. Para $F = mg$, $N = mg/2$ y $a_x = \sqrt{3}g/2$. El contacto es admisible. Para $F = 3mg$, la rama sostenida daría $N = -mg/2$ y debe rechazarse. En la rama separada, $a_y = g/2$ y $a_x = 3\sqrt{3}g/2$. Si la fuerza permanece constante, la altura sobre la mesa aumenta como $gt^2/4$. El segundo cálculo no es una simple prolongación del primero con normal negativa: cambió la condición cinemática vertical.

6. Plano inclinado sin fricción

El plano inclinado introduce una orientación distinta sin introducir todavía una ley de rozamiento. Sea θ su ángulo sobre la horizontal, con $0 \le \theta < \pi/2$. Elegimos una base fija adaptada al plano: e_t hacia arriba de la pendiente y e_n perpendicular al plano hacia el lado accesible. En una base horizontal y vertical (e_x, e_y),

$$e_t = \cos\theta\, e_x + \sin\theta\, e_y, \qquad e_n = -\sin\theta\, e_x + \cos\theta\, e_y.$$

La base facilita las proyecciones, pero no cambia las fuerzas físicas. El peso sigue siendo vertical. Su expresión adaptada al plano es $\mathbf{P} = -mg\sin\theta\, e_t - mg\cos\theta\, e_n$.

Estas dos componentes reemplazan la representación vertical para el cálculo; no se añaden a ella como interacciones nuevas. El contacto liso aporta Ne_n. Como el plano es fijo y recto, mantener el contacto durante un intervalo significa posición normal constante y, por tanto, aceleración normal nula. No estamos atribuyendo esa propiedad a cualquier superficie curva: allí la geometría puede exigir una aceleración normal diferente.[5]

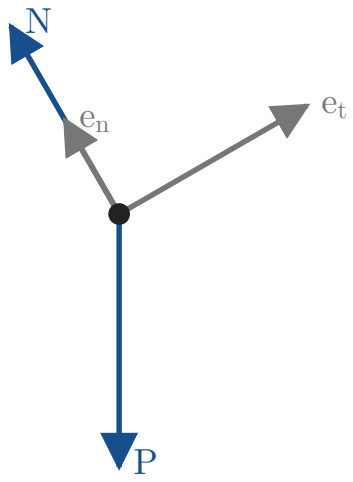


Figura 10.4. Sobre el cuerpo actúan peso y normal. Las flechas grises indican la base y no son fuerzas. La inclinación dibujada es representativa; las fórmulas usan el ángulo declarado en cada problema.

Proposición 10.7 — Movimiento sobre un plano fijo y liso. Bajo peso y normal, en la rama de contacto sostenido,

$$N = mg\cos\theta, \qquad a_t = -g\sin\theta, \qquad a_n = 0.$$

Una fuerza adicional Qe_t, con Q firmado, cambia únicamente la ecuación tangencial: $a_t = Q/m - g\sin\theta$.

[5]Shankar, obra citada, cap. 4, §4.5, pp. 57–60; Morin, obra citada, cap. 3, §3.2, pp. 55–56. Las proyecciones, signos y pruebas se desarrollan con la base fijada en el texto.

Demostración. Las proyecciones del peso son sus productos escalares con los dos vectores de la base. Newton normal da $0 = N - mg\cos\theta$, y Newton tangencial da $ma_t = -mg\sin\theta + Q$. Para el intervalo angular elegido, $\cos\theta > 0$, de modo que la normal calculada es positiva. La ausencia de componente normal de la fuerza adicional explica por qué no altera ese resultado. □

La masa desaparece de la aceleración cuando sólo actúan peso y normal. No desaparece de la fuerza normal. Un cuerpo más masivo necesita una fuerza de contacto proporcionalmente mayor para impedir la aceleración hacia el plano. También debemos distinguir la magnitud del peso, mg, de su componente tangencial, $mg\sin\theta$. La componente tangencial no es una segunda gravedad ni una fuerza que el plano ejerce hacia abajo.

Si s mide posición hacia arriba de la pendiente, entonces $\ddot{s} = -g\sin\theta$ para el caso sin fuerza adicional. El signo negativo fija la dirección de la aceleración, pero no la de la velocidad inicial. Un cuerpo lanzado cuesta arriba puede seguir subiendo durante un tiempo mientras su velocidad disminuye. Después del punto de retorno, baja con aceleración en el mismo sentido que antes. La fuerza no necesita invertirse en ese punto.

Una fuerza tangencial constante puede anular la aceleración si $Q = mg\sin\theta$. Ese ajuste permite reposo o velocidad constante, según los datos iniciales; no impone reposo. Si la fuerza fuera oblicua respecto del plano, habría que incluir también su componente normal y comprobar de nuevo la admisibilidad. La fórmula de la proposición 10.7 no se conserva automáticamente al cambiar esa hipótesis.

Principio metodológico 10.6 — Elegir una base sin duplicar fuerzas. Escribe primero los agentes y después proyecta en una base que simplifique la geometría. Mantén visible la distinción entre vectores físicos, componentes firmadas y vectores de base. Comprueba qué condición geométrica justifica cada componente de aceleración impuesta.

Ejercicios. Ejercicio 10.11. Un cuerpo se mueve sobre un plano liso de 30°, bajo gravedad uniforme. Determina normal, aceleración tangencial y componentes horizontal y vertical de la aceleración. Comprueba que la magnitud del peso no depende de la inclinación.

Solución. proposición 10.7 da $N = \sqrt{3}mg/2$ y $a_t = -g/2$. Como $\mathbf{a} = a_t e_t$, obtenemos $a_x = -\sqrt{3}g/4$ y $a_y = -g/4$. La componente vertical de la aceleración no es $-g$ porque la normal tiene componente vertical positiva. Las componentes adaptadas del peso son $-mg/2$ y $-\sqrt{3}mg/2$, cuya norma es mg. La rotación de la base conserva la norma del vector, aunque cambie sus componentes.

Ejercicio 10.12. En el mismo plano, una fuerza tangencial constante $Q = 3mg/4$ apunta cuesta arriba. El cuerpo comienza con velocidad $-Ue_t$, $U > 0$. Calcula la aceleración y el primer instante de velocidad nula. ¿Cambia la normal al detenerse?

Solución. La aceleración tangencial es $a_t = 3g/4 - g/2 = g/4$, y $v_t = -U + gt/4$. El primer reposo ocurre en $t = 4U/g$. Hasta entonces el cuerpo baja y se frena; después sube, si sigue disponible el mismo plano y la fuerza se mantiene. La normal permanece $\sqrt{3}mg/2$: ni el cambio de signo de la velocidad ni el reposo instantáneo modifican la ecuación normal. El resultado presupone un tramo suficientemente largo del plano para que el cuerpo no encuentre un borde antes del tiempo calculado.

7. Tensión e idealización de la cuerda

Una cuerda permite transmitir una tracción entre cuerpos separados. Para incorporarla al diagrama necesitamos conocer la dirección de su tramo próximo al cuerpo y declarar qué propiedades de la cuerda conservamos. Una cuerda flexible ordinaria puede tirar de un extremo, pero no sostener

una compresión longitudinal como una barra rígida: al intentar comprimirla, se afloja o cambia de forma.

masa al extremo de una cuerda

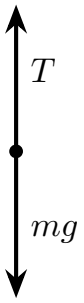


Figura 10.5. Sobre una masa colgante actúan tensión hacia la cuerda y peso hacia abajo. La ecuación vertical es $T - mg = ma_y$; sólo si $a_y = 0$ resulta $T = mg$. Véase §7.

Definición 10.7 — Tensión y fuerza de una cuerda flexible. La tensión T es una magnitud escalar no negativa que caracteriza la tracción longitudinal en una sección de la cuerda. Sobre un cuerpo unido a un extremo, la cuerda ejerce una fuerza $T\mathbf{t}$, donde $\mathbf{t}$ apunta desde el cuerpo hacia el tramo de cuerda que lo tira. En la rama floja sin otras interacciones de la cuerda con ese cuerpo, esta tracción es nula.

Las fuerzas sobre dos extremos pueden tener sentidos opuestos sin que una de las tensiones sea negativa. El signo pertenece a la componente en un eje; la tensión definida como magnitud satisface $T \geq 0$. Una solución que exige tensión negativa pide a la cuerda que empuje y queda fuera de esta idealización.

Definición 10.8 — Cuerda ideal tensa e inextensible. En este capítulo, una cuerda ideal tiene masa despreciable frente a las masas estudiadas y longitud constante mientras está tensa. Para un tramo recto sin fuerzas tangenciales intermedias, se supone además una aceleración acotada al despreciar su masa. La igualdad de tensiones se aplica a ese tramo bajo estas condiciones; no se postula para toda cuerda real ni para cualquier dispositivo que la desvíe.

La inextensibilidad relaciona posiciones de sus extremos cuando la cuerda está tensa. La masa despreciable permite simplificar su balance de fuerzas. Son hipótesis distintas. Una cuerda puede estirarse poco y tener masa importante, o ser liviana y elástica. Confundir las dos hipótesis oculta el origen de la relación que estamos usando.[6]

Proposición 10.8 — Transmisión de tensión en un tramo recto liviano. Considérese un tramo recto de masa $\mu > 0$, con eje unitario $\mathbf{t}$ hacia la derecha. Sus fuerzas tangenciales externas son $T_R\mathbf{t}$ en el extremo derecho y $-T_L\mathbf{t}$ en el izquierdo. Si no hay otras fuerzas tangenciales,

$$T_R - T_L = \mu a_t,$$

con a_t la aceleración tangencial de su centro de masa. Si se desprecia μ manteniendo a_t acotada, la diferencia de tensiones tiende a cero.

[6]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.5, pp. 87–88, ejemplos de bloques conectados y cuerda colgante. Se usa un límite de masa despreciable con aceleración acotada y se evita dividir por masa nula. La cuerda con peso del ejercicio 10.14 conserva explícitamente su masa.

Demostración. Dividimos el tramo en elementos de masa constante y sumamos sus ecuaciones de Newton. Las fuerzas internas se cancelan por pares. La proyección de la resultante externa es $T_R - T_L$ y la suma de masas por aceleraciones es μa_t, con $a_t = \sum_j m_j a_{jt}/\mu$, la aceleración de la posición media ponderada por las masas. Este balance elemental no requiere desarrollar todavía la teoría general del centro de masa. Para una cota $|a_t| \le K$, se tiene $|T_R - T_L| \le \mu K \to 0$. No hemos dividido por una masa nula: hemos explicitado el límite que motiva el balance ideal. □

Para un tramo que conserve su forma recta y traslade todos sus puntos con la misma aceleración, a_t coincide con la de cualquier punto. La formulación mediante centro de masa permite expresar el balance sin necesitar esa condición adicional. No usaremos aquí una teoría del movimiento interno de cuerdas: el balance identifica qué se omite al reemplazar un tramo material por uno ideal.

Si una cuerda de masa apreciable cuelga verticalmente, la gravedad aporta fuerzas tangenciales distribuidas y las tensiones varían con la altura. Incluso si está en reposo, los extremos de un tramo deben sostener su peso. Si la cuerda pasa por una polea, la dirección cambia y la polea interactúa con ella. Igualar tensiones a ambos lados exige idealizaciones adicionales sobre ese dispositivo, como ausencia de resistencia y de inercia rotacional relevante. Un dibujo de una cuerda continua no sustituye esas hipótesis.

El balance del tramo también aclara la tercera ley. La cuerda tira del cuerpo; el cuerpo tira de la cuerda con una fuerza opuesta. Esa pareja tiene receptores distintos. Si una cuerda tira de dos cuerpos, las dos fuerzas que ejerce sobre ellos no constituyen entre sí una pareja de tercera ley. Cada una tiene su pareja sobre la cuerda. La igualdad de sus magnitudes procede del balance y de las hipótesis que acabamos de precisar.

Principio metodológico 10.7 — Declarar qué cuerda se está modelando. Antes de igualar tensiones o relacionar aceleraciones, indica si desprecias masa y extensibilidad y si mantienes la rama tensa. Comprueba después $T \ge 0$. Al cambiar de tramo o introducir un cuerpo intermedio, reconstruye el balance correspondiente.

Ejercicios. Ejercicio 10.13. Un cuerpo de masa m cuelga de una cuerda vertical y tiene aceleración A hacia arriba, firmada en un eje vertical ascendente. Determina la tensión y su dominio de admisibilidad cuando sólo recibe peso y tracción.

Solución. Newton da $T - mg = mA$, por lo que $T = m(g + A)$. La condición $T \ge 0$ exige $A \ge -g$. Si $A < -g$, las dos fuerzas declaradas no permiten esa aceleración: la cuerda tendría que empujar hacia abajo. En caída libre $A = -g$, la tensión puede ser cero, pero para decidir si la cuerda sigue geométricamente tensa necesitamos también la trayectoria del otro extremo. La igualdad límite de fuerzas no determina por sí sola la configuración.

Ejercicio 10.14. Una cuerda uniforme de longitud ℓ y masa total M cuelga en reposo de su extremo superior; el inferior está libre. Calcula la tensión en una sección situada a distancia x del extremo inferior, con $0 \le x \le \ell$.

Solución. Su densidad lineal es $\rho_\ell = M/\ell$. Elegimos como sistema el tramo inferior de longitud x. La sección superior ejerce tracción ascendente $T(x)$ y la Tierra ejerce peso descendente $\rho_\ell x g$. Como el tramo está en reposo, $T(x) = \rho_\ell g x$. En el extremo inferior $T(0) = 0$ y en el superior $T(\ell) = Mg$. No contradice proposición 10.8: aquí no se ha despreciado la masa y hay una fuerza tangencial distribuida. El corte usado para escoger el subsistema convierte la interacción con el resto de la cuerda en una fuerza externa de ese subsistema.

8. Cuerpos conectados y sistemas compartidos

Consideremos dos cuerpos sobre una superficie horizontal lisa y fija. El cuerpo B está a la izquierda y el cuerpo A a la derecha. Una cuerda recta ideal los conecta y una fuerza horizontal externa $F \geq 0$ tira de A hacia la derecha. Podemos escribir un diagrama por cuerpo y otro para el conjunto, pero debemos conservar la misma elección de receptores durante cada balance.

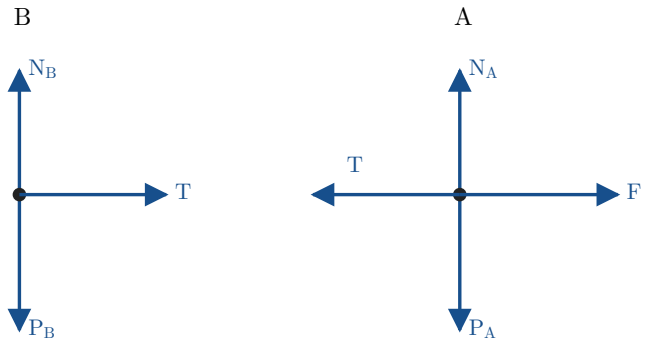


Figura 10.6. Diagramas separados: sobre B, la cuerda tira hacia la derecha; sobre A, hacia la izquierda. Cada cuerpo recibe además su propio peso y normal. Las dos fuerzas rotuladas T tienen receptores distintos y no forman entre sí una pareja de tercera ley.

Proposición 10.9 — Aceleración común en una conexión recta tensa. Si las posiciones horizontales satisfacen $x_A - x_B = \ell$ durante un intervalo, con ℓ constante y posiciones dos veces diferenciables, entonces $v_A = v_B$ y $a_A = a_B$ en ese intervalo.

Demostración. Diferenciar una vez la identidad da $v_A - v_B = 0$; diferenciarla de nuevo da $a_A - a_B = 0$. Las conclusiones proceden de la longitud constante en la rama tensa, no de una igualdad entre fuerzas. □

Imponer la misma aceleración exige datos iniciales compatibles con esa relación. Si la cuerda está floja, las posiciones no satisfacen necesariamente esa igualdad y los cuerpos pueden acelerarse de manera diferente. La relación tampoco se aplica sin modificación a cualquier geometría con poleas: allí habría que expresar primero la longitud mediante las posiciones pertinentes. El tratamiento sistemático de tales restricciones pertenece al capítulo 11.

Proposición 10.10 — Dos cuerpos sobre un soporte liso. Bajo las hipótesis anteriores, masas positivas m_A, m_B y datos compatibles con la rama tensa,

$$a = \frac{F}{m_A + m_B}, \qquad T = \frac{m_B F}{m_A + m_B}, \qquad N_A = m_A g, \qquad N_B = m_B g.$$

Demostración. proposición 10.8 permite una magnitud de tensión común para el tramo recto ideal, y proposición 10.9 una aceleración horizontal común. Newton sobre cada receptor da

$$F - T = m_A a, \qquad T = m_B a.$$

Al sumar, $F = (m_A + m_B)a$, y sustituir en la segunda ecuación da T. Los balances verticales independientes producen las normales indicadas. Para $F \geq 0$, la tensión es no negativa y ambas normales positivas, por lo que las fuerzas calculadas satisfacen las condiciones de admisibilidad. □

Sumar ecuaciones de cuerpos distintos es legítimo si se sabe qué expresa esa suma. En este caso cancela los términos de tracción opuestos ya justificados por la proposición 10.8. Para clasificar

todas las interacciones como internas o externas, resulta especialmente claro elegir el conjunto $A + B+$ cuerda y luego despreciar la masa de ésta: las interacciones cuerpo–cuerda son internas y sus parejas se cancelan al sumar todas las ecuaciones. Si se elige sólo $A + B$, la cuerda queda fuera y sus fuerzas son externas a ese sistema, aunque su suma sea cero en el modelo ideal. «Interna» depende de la frontera elegida, no de que una contribución termine cancelándose.

La resultante F determina la aceleración conjunta, pero no basta para encontrar la tensión. La ecuación de uno de los cuerpos conserva información que se pierde al sumar. Ésta es una razón para combinar perspectivas: el balance del conjunto simplifica la aceleración; el de un subsistema revela la interacción transmitida. Para B, la tensión es toda la resultante horizontal, mientras que para A la resultante es $F - T$.

La fórmula también muestra cómo aparece un fallo de régimen. Si una fuerza firmada $F < 0$ empujara a A hacia B, el cálculo tenso produciría $T < 0$. La cuerda flexible no puede suministrar esa compresión. Partiendo de longitud máxima y velocidades iguales, una solución inicial floja tiene $T = 0$, $a_A = F/m_A$ y $a_B = 0$: la distancia entre cuerpos disminuye. Ese tramo continúa hasta que ocurra otro evento relevante. No debemos mantener la aceleración común después de rechazar la fuerza que la hacía posible.

En una cadena vertical, dos cuerdas diferentes pueden tener tensiones diferentes incluso si cada cuerda es ideal. La cuerda superior puede sostener dos masas y la inferior una sola. Hay un cuerpo entre ellas que recibe ambas tracciones; su masa impide usar el balance de un único tramo liviano para igualarlas. El nombre común «tensión» no obliga a introducir una sola incógnita en toda la escena.

Principio metodológico 10.8 — Combinar balances sin borrar sus hipótesis. Obtén las relaciones de aceleración desde la geometría declarada y las relaciones de tensión desde el modelo de cuerda. Usa el conjunto para simplificar la resultante y los cuerpos separados para recuperar las fuerzas internas. Comprueba que cada ecuación tenga un receptor inequívoco.

Ejercicios. Ejercicio 10.15. En la configuración de la proposición 10.10, $m_A = 4\,\mathrm{kg}$, $m_B = 6\,\mathrm{kg}$ y $F = 20\,\mathrm{N}$. Calcula aceleración, tensión y resultante horizontal sobre cada cuerpo. Verifica los dos balances.

Solución. $a = 20/10 = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y $T = 6{\cdot}2 = 12\,\mathrm{N}$. Sobre A, la resultante es $20-12 = 8\,\mathrm{N} = 4{\cdot}2\,\mathrm{N}$; sobre B, es $12\,\mathrm{N} = 6{\cdot}2\,\mathrm{N}$. La fuerza aplicada de $20\,\mathrm{N}$ no es la resultante sobre A, porque éste también recibe la tracción hacia la izquierda. Las normales son $4g$ y $6g$ newtons si g se expresa en $\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Ejercicio 10.16. Dos cuerpos cuelgan en cadena vertical: A arriba y B abajo. Una cuerda ideal superior tira de A; otra, distinta, une A con B. Ambos tienen aceleración común α hacia arriba, firmada. Determina las tensiones T_U y T_L y explica por qué no son iguales en general.

Solución. Sobre B, $T_L - m_B g = m_B \alpha$, por lo que $T_L = m_B(g + \alpha)$. Sobre A, $T_U - T_L - m_A g = m_A \alpha$. Sustituyendo,

$$T_U = (m_A + m_B)(g + \alpha).$$

Para $\alpha > -g$, ambas tensiones son positivas y $T_U - T_L = m_A(g + \alpha) > 0$. La masa A está entre las dos cuerdas y requiere una resultante propia. No se trata de dos extremos del mismo tramo sin fuerzas intermedias. Para $\alpha < -g$, las tensiones calculadas son negativas y la aceleración prescrita no se realiza con estas únicas fuerzas. Para $\alpha = -g$, ambas pueden anularse; la continuidad de la configuración depende además del movimiento del extremo superior y de los datos iniciales.

Con esto queda construido el núcleo de selección del sistema, gravedad, contacto liso y transmisión ideal de tracción. Las secciones siguientes incorporan fuerzas tangenciales de fricción, resistencia y elasticidad. Cada ley añadirá condiciones de aplicación propias; el método de seleccionar receptor, proyectar Newton y comprobar el régimen seguirá siendo el mismo.

9. Fricción estática y admisibilidad

Empujar suavemente un cuerpo apoyado puede no producir movimiento relativo respecto del soporte. La ausencia de ese movimiento no implica ausencia de fuerza tangencial. Si una fuerza aplicada intenta desplazar el cuerpo y éste permanece en reposo sobre una mesa fija, el balance exige una contribución que la compense. Su valor se determina por la aceleración requerida y tiene un límite dentro del modelo de contacto seco.[7]

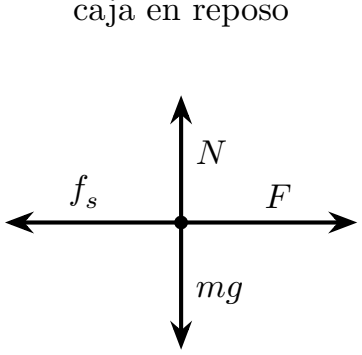


Figura 10.7. En un soporte horizontal, bajo un empuje F y sin aceleración, $f_s = F$ y $N = mg$. Esta rama requiere $F \le \mu_s mg$; f_s no vale siempre su máximo. Véase §9.

Definición 10.9 — Modelo de fricción estática seca. Durante un tramo sin deslizamiento tangencial relativo entre dos superficies en contacto, la fuerza tangencial $\mathbf{f}_s$ satisface

$$\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad \|\mathbf{f}_s\| \le \mu_s N,$$

con $N \ge 0$ y coeficiente estático $\mu_s \ge 0$ adimensional. Su valor dentro de ese límite se obtiene del balance que permite el movimiento sin deslizamiento. En una dirección tangencial única, la condición es $|f_s| \le \mu_s N$.

La definición es una aproximación macroscópica. No afirma que todos los materiales tengan un coeficiente constante bajo cualquier carga, temperatura o historia. En los problemas que siguen declararemos valores constantes para superficies y condiciones dadas. La ley aproxima lo necesario para construir un balance, sin sustituir una descripción microscópica de la interacción.

La igualdad $|f_s| = \mu_s N$ sólo corresponde al límite de admisibilidad. Para fuerzas aplicadas pequeñas, la magnitud de fricción puede ser menor, incluso cero. Usar siempre el máximo fabricaría una aceleración que no corresponde al reposo supuesto. La normal debe calcularse antes: una fuerza oblicua o un soporte acelerado pueden cambiarla, como mostraron proposiciones 10.4–10.6.

[7] R. Shankar, *Fundamentals of Physics I*, edición ampliada, Yale University Press, 2019, cap. 4, §4.4, pp. 56–57; Daniel Kleppner y Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge 2010, cap. 2, §2.5, pp. 92–93. Se distingue el máximo estático de la fuerza efectiva y se separan los coeficientes estático y cinético. No se adopta como universal la desigualdad estricta entre ambos que aparece en una de las exposiciones.

Proposición 10.11 — Reposo sobre una mesa fija. Un cuerpo sobre una mesa horizontal fija recibe peso, normal y una fuerza horizontal constante Qe_x, con Q firmado. Existe un balance de reposo compatible con la definición 10.9 si y sólo si

$$|Q| \le \mu_s mg.$$

En él, $N = mg$ y $f_s = -Q$.

Demostración. El reposo exige ambas componentes de aceleración nulas. Newton vertical da $N = mg$ y Newton horizontal $0 = Q + f_s$. Definición 10.9 exige entonces $|Q| \le \mu_s mg$, de modo que la condición es necesaria. Recíprocamente, si se cumple, elegir $N = mg$ y $f_s = -Q$ satisface Newton y las condiciones de contacto. Con posición inicial apoyada y velocidad inicial nula, la historia constante realiza ese balance. □

El enunciado prueba que el reposo es admisible; no asegura que todo cuerpo sometido a ese Q ya esté en reposo. Si llega deslizando, debemos usar la ley del régimen móvil y examinar si se detiene. Una misma fuerza aplicada puede coexistir con reposo en una historia y con movimiento en otra, porque los datos y el régimen difieren.

Proposición 10.12 — Fricción estática sobre un soporte que acelera horizontalmente. Sea un soporte horizontal que no acelera verticalmente y tiene aceleración horizontal A. Si el cuerpo lo acompaña sin deslizamiento, bajo peso, contacto y fuerza horizontal Q, entonces

$$N = mg, \qquad f_s = mA - Q.$$

El acompañamiento sólo es admisible si $|mA - Q| \le \mu_s mg$.

Demostración. Durante el acompañamiento, la diferencia de posiciones horizontales del cuerpo y del punto correspondiente del soporte es constante. Diferenciar dos veces da $a_x = A$. Newton horizontal exige $mA = Q + f_s$; el balance vertical mantiene $N = mg$. Sustituir la fuerza requerida en la definición 10.9 produce la desigualdad. □

Si $Q = 0$ y $A > 0$, la fricción sobre el cuerpo apunta hacia la derecha. Puede acelerar al cuerpo en el mismo sentido que su velocidad respecto del suelo. No hay contradicción: «estática» significa sin deslizamiento relativo, y el soporte también se mueve. En los dibujos se deben distinguir la velocidad respecto del marco inercial y la velocidad respecto de la superficie. Sólo la segunda decide el régimen de contacto tangencial.

Cuando la desigualdad falla, el soporte no puede comunicar la aceleración supuesta con esa interacción. Rechazamos el acompañamiento y calculamos el deslizamiento. La situación se parece al contacto normal inadmisible de §4, pero aquí el límite afecta una componente tangencial y no implica necesariamente separación normal. El cuerpo puede seguir apoyado mientras desliza.

Principio metodológico 10.9 — Calcular antes de saturar. En una rama sin deslizamiento, calcula la fricción requerida por Newton y comprueba después su límite. Identifica la superficie respecto de la cual el movimiento relativo es nulo. No reemplaces esa comprobación por una flecha siempre opuesta a la velocidad del laboratorio.

Ejercicios. Ejercicio 10.17. Sobre una mesa fija, un cuerpo inicialmente en reposo recibe una fuerza horizontal $Q = 0{,}3mg$. El coeficiente estático es $\mu_s = 0{,}5$. Determina un balance admisible y compara la fricción efectiva con su máximo.

Solución. $N = mg$ y la fricción requerida es $f_s = -0{,}3mg$. Como $0{,}3mg < 0{,}5mg$, el reposo es admisible y la fricción no alcanza su máximo. Si se escribiera $f_s = -0{,}5mg$, la resultante sería $-0{,}2mg$ y el cuerpo aceleraría en sentido opuesto a la fuerza aplicada: ese resultado contradice la

rama que intentábamos resolver. Al retirar Q, un balance de reposo tiene $f_s = 0$; el coeficiente no obliga a mantener una fuerza tangencial residual.

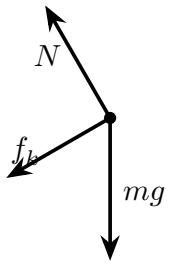
Ejercicio 10.18. Un cuerpo de $2\,\mathrm{kg}$ debe acompañar un soporte horizontal con aceleración $3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Una fuerza externa horizontal de $2\,\mathrm{N}$ apunta en ese sentido. Usa $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y compara $\mu_s = 0{,}3$ con $\mu_s = 0{,}1$.

Solución. La fricción requerida es $f_s = 2\cdot 3 - 2 = 4\,\mathrm{N}$ y la normal $20\,\mathrm{N}$. Con el primer coeficiente, el máximo es $6\,\mathrm{N}$, de modo que el acompañamiento es admisible. Con el segundo, el máximo es $2\,\mathrm{N}$ y no alcanza: la rama sin deslizamiento falla. No podemos afirmar que el cuerpo tenga aceleración 3 y asignarle arbitrariamente $2\,\mathrm{N}$ de fricción, porque Newton daría sólo $2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Para la rama móvil necesitamos además un modelo cinético y los datos de velocidad relativa.

10. Fricción cinética y cambio de régimen

Una vez que las superficies deslizan entre sí, el modelo más sencillo asigna una fuerza tangencial opuesta a esa velocidad relativa. Su magnitud se aproxima por un coeficiente cinético multiplicado por la normal. Hay que distinguir este valor de la fricción que se ajustaba al balance estático.

caja que desliza cuesta arriba



plano a 30°; tangente positiva hacia arriba

Figura 10.8. Para una caja que desliza cuesta arriba en un plano a 30°, la normal es perpendicular al plano y f_k apunta cuesta abajo. El peso permanece vertical; sus proyecciones no son fuerzas nuevas. Véase §10.

Definición 10.10 — Modelo de fricción cinética seca. Si la velocidad tangencial relativa del cuerpo respecto de la superficie es $\mathbf{w}_t \neq 0$, se admite

$$\mathbf{f}_k = -\mu_k N \frac{\mathbf{w}_t}{\|\mathbf{w}_t\|}, \qquad \mu_k \geq 0.$$

En una dirección tangencial única, $f_k = -\mu_k N \operatorname{sgn}(w_t)$. La fórmula se aplica al tramo deslizante y no asigna una dirección cuando $w_t = 0$. Usaremos coeficientes constantes cuando así se declare. Los valores μ_s y μ_k son parámetros diferentes. En varios ejemplos elegiremos $\mu_k < \mu_s$, una idealización frecuente para esos casos; no la deducimos de Newton ni la proclamamos universal para cualquier material. Tampoco afirmamos una ley exacta independiente de velocidad o del estado de las superficies.

Proposición 10.13 — Tramo deslizante sobre una mesa fija. Bajo peso, normal, fuerza horizontal constante Q y definición 10.10, mientras la velocidad horizontal conserve signo $\sigma \in \{-1, 1\}$,

$$N = mg, \qquad a_x = \frac{Q}{m} - \sigma\mu_k g,$$

$$v_x(t) = v_0 + a_x(t - t_0), \qquad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a_x(t - t_0)^2.$$

Las fórmulas describen sólo el intervalo en que ese signo y el contacto persisten.

Demostración. Para una mesa fija, $w_t = v_x$ y definición 10.10 da $f_k = -\sigma\mu_k mg$. Newton horizontal produce la aceleración constante. Integrar dos veces con los datos iniciales da la historia, cuya validez exige comprobar $\operatorname{sgn}(v_x) = \sigma$ en el tramo. □

Si $v_0 > 0$ y $Q < \mu_k mg$, la velocidad llega a cero tras

$$\Delta t = \frac{mv_0}{\mu_k mg - Q}.$$

Hasta ese evento, la fricción apunta hacia la izquierda. Continuar la misma aceleración más allá puede predecir una velocidad negativa manteniendo una fricción también negativa, lo que incumple definición 10.10. El evento obliga a reconstruir la rama: se ensaya una continuación estática si es admisible, o se determina el nuevo sentido de deslizamiento con los balances correspondientes. En los ejemplos adoptamos permanencia sin deslizamiento cuando el balance la permite y no se prescribe otro cambio.

En el límite exacto de reposo relativo, la fórmula con signo no es una ley diferencial suave. Las condiciones estáticas admiten un conjunto de valores y las cinéticas seleccionan valores según el sentido de deslizamiento. Por eso no se puede aplicar sin más el teorema de unicidad para un campo regular del capítulo 9 a todo el movimiento con fricción seca. Cada tramo calculado puede ser perfectamente determinado, pero su unión exige condiciones de régimen y una regla de continuación. No atribuir una garantía global evita confundir una solución algebraica local con un teorema de evolución completo.

La fricción opuesta al movimiento relativo puede aumentar la rapidez respecto del suelo. Una cinta que se mueve hacia la derecha más rápido que un cuerpo apoyado sobre ella lo roza hacia la derecha. El cuerpo se desplaza hacia atrás respecto de la cinta aunque avance respecto del suelo. La dirección de la fuerza se fija por esa diferencia de velocidades.

Principio metodológico 10.10 — Detener el cálculo en el evento. Declara el signo de la velocidad relativa para cada tramo cinético. Si ésta llega a cero, comprueba el régimen siguiente antes de prolongar la solución. No uses la fórmula de un tramo para decidir automáticamente cómo actúa la fuerza en otro.

Ejercicios. Ejercicio 10.19. Un cuerpo desliza sobre una mesa fija con velocidad inicial $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Sólo recibe peso y contacto, con $\mu_k = 0{,}2$, $\mu_s = 0{,}3$ y $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determina tiempo y distancia hasta detenerse, y una continuación admisible.

Solución. Mientras $v_x > 0$, $a_x = -2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, de modo que $v_x = 4 - 2t$. El primer cero ocurre a los 2 s. El desplazamiento es $4 \cdot 2 - 2^2 = 4\,\mathrm{m}$. En reposo, ninguna otra fuerza tangencial requiere compensación y $f_s = 0$ es admisible; el cuerpo permanece detenido bajo la continuación adoptada. Seguir con $v_x = 4 - 2t$ y la misma fricción después de $t = 2$ haría que ésta ayudara al supuesto movimiento hacia la izquierda, en contradicción con la ley cinética.

Ejercicio 10.20. Una cinta horizontal avanza a velocidad constante $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ respecto del suelo. Un cuerpo apoyado tiene inicialmente velocidad $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ en ese sentido. Con $\mu_k = 0{,}1$ y $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, sin otras fuerzas tangenciales, calcula su movimiento hasta igualar la velocidad de la cinta.

Solución. La velocidad relativa inicial es $w_t = 2 - 5 = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La fricción cinética sobre el cuerpo apunta a la derecha y da $a_x = 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Así, $v_x = 2 + t$ mientras $t < 3\,\mathrm{s}$. En ese tiempo recorre $2\cdot 3 + 3^2/2 = 10{,}5\,\mathrm{m}$ respecto del suelo. Al igualar velocidades, acompañar la cinta constante exige aceleración cero y fricción estática cero, admisible para cualquier $\mu_s \geq 0$. El cuerpo continúa con velocidad 5 bajo esa rama. Su desplazamiento relativo hasta el evento es $10{,}5 - 5\cdot 3 = -4{,}5\,\mathrm{m}$; la fuerza redujo el deslizamiento hacia atrás, aunque aumentó la rapidez respecto del suelo.

11. Plano inclinado y umbrales de deslizamiento

Volvamos al plano fijo de §6, con base e_t cuesta arriba y e_n hacia afuera. El contacto ahora puede aportar una fuerza tangencial fe_t. Una fuerza adicional Qe_t, firmada, deja intacto el balance normal: $N = mg\cos\theta$. El balance tangencial es $ma_t = Q - mg\sin\theta + f$.

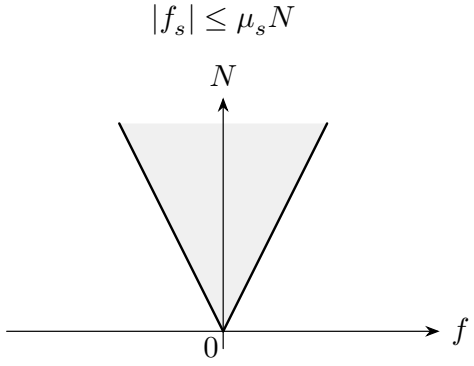


Figura 10.9. Para $\mu_s = 1/2$, la cuña representa $|f_s| \leq N/2$ y $N \geq 0$. En el interior la fricción se ajusta al equilibrio; la frontera corresponde al umbral del modelo de Coulomb. Véase §11.

La ecuación sirve para ambos regímenes; lo que cambia es la ley y la condición de movimiento usada para encontrar f.[8]

Proposición 10.14 — Intervalo de reposo admisible en un plano inclinado. Con $0 \leq \theta < \pi/2$, fuerza tangencial Q y definición 10.9, el reposo sobre el plano es admisible si y sólo si

$$|Q - mg\sin\theta| \leq \mu_s mg\cos\theta.$$

Equivale al intervalo

$$mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) \leq Q \leq mg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta).$$

Demostración. El reposo requiere $f_s = mg\sin\theta - Q$. El límite estático es $|f_s| \leq \mu_s N$, con $N = mg\cos\theta > 0$. Sustituir da la primera desigualdad y despejar sus dos lados da el intervalo. Recíprocamente, esas fuerzas satisfacen Newton y los límites, con datos iniciales de reposo. □

Para $Q = 0$, la condición se reduce a $\tan\theta \leq \mu_s$. La fricción requerida apunta cuesta arriba y vale $mg\sin\theta$. Si se aumenta lentamente la inclinación de un plano con un cuerpo inicialmente en reposo, el límite del balance estático ocurre en $\theta_c = \arctan\mu_s$. La igualdad es el borde del conjunto

[8] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.5, ejemplo 2.14, pp. 93–94; Shankar, obra citada, cap. 4, §§4.4–4.5, pp. 56–60. Los intervalos con fuerza tangencial, el umbral oblicuo y los ejercicios son desarrollos propios a partir de los balances declarados.

admisible, no una garantía de inicio de movimiento en ese instante sin considerar la perturbación o la evolución posterior.

Si $Q > mg\sin\theta$, la fricción estática requerida apunta cuesta abajo. La fuerza tangencial no tiene una dirección fijada por la inclinación sola: depende de qué movimiento impediría el balance. Este cambio de signo dentro del intervalo estático no obliga a deslizar. En el punto $Q = mg\sin\theta$, la fricción requerida es cero.

Proposición 10.15 — Aceleración deslizante en el plano fijo. Si el cuerpo desliza con signo tangencial σ, bajo las mismas fuerzas y definición 10.10,

$$a_t = \frac{Q}{m} - g\sin\theta - \sigma\mu_k g\cos\theta.$$

Para descenso, $\sigma = -1$ y la fricción apunta cuesta arriba; para ascenso, $\sigma = 1$ y apunta cuesta abajo.

Demostración. El plano fijo identifica velocidad tangencial relativa con v_t. Definición 10.10 da $f_k = -\sigma\mu_k mg\cos\theta$; sustituir en Newton y dividir por $m > 0$ produce la expresión. El sentido del movimiento y el signo de la aceleración pueden diferir: deben comprobarse por separado. □

Un cuerpo que ya baja puede acelerar, mantener su rapidez o frenarse según el signo de $-g\sin\theta + \mu_k g\cos\theta$, cuando $Q = 0$. Si se frena hasta detenerse, el balance estático decide si puede quedar allí. En cambio, un cuerpo que sube sin fuerza adicional tiene aceleración cuesta abajo por peso y fricción, ambos en ese sentido. Su descenso posterior requiere cambiar el signo de la contribución cinética y comprobar el evento de reposo.

La fuerza aplicada puede modificar además la normal. Para separar ese efecto, consideremos de nuevo la mesa horizontal, ahora rugosa, con tracción F a ángulo φ sobre la horizontal. Mantener reposo exige normal $mg - F\sin\varphi$ y fricción $-F\cos\varphi$.

Proposición 10.16 — Umbral con tracción oblicua. Para $F \geq 0$, $0 \leq \varphi < \pi/2$ y $\mu_s \geq 0$, el reposo sobre esa mesa es admisible exactamente cuando

$$F \leq F_c := \frac{\mu_s mg}{\cos\varphi + \mu_s\sin\varphi}.$$

Si $\mu_s > 0$ y $\sin\varphi > 0$, ese umbral es menor que el de pérdida de contacto $mg/\sin\varphi$.

Demostración. La desigualdad estática es $F\cos\varphi \leq \mu_s(mg - F\sin\varphi)$, junto con $N \geq 0$. Como el denominador es positivo, despejar da $F \leq F_c$. Para esas fuerzas,

$$N \geq mg - F_c\sin\varphi = \frac{mg\cos\varphi}{\cos\varphi + \mu_s\sin\varphi} > 0,$$

por lo que el contacto también es admisible. Si $\mu_s = 0$, sólo $F = 0$ permite reposo. Para los valores positivos indicados, comparar los umbrales equivale a $\mu_s\sin\varphi < \cos\varphi + \mu_s\sin\varphi$, cierto porque $\cos\varphi > 0$. □

La comparación muestra que perder el reposo no equivale a perder apoyo. La tracción oblicua puede provocar deslizamiento mientras la normal aún es positiva. También muestra por qué usar $\mu_s mg$ como máximo sin calcular la normal daría un umbral incorrecto: parte de la tracción ya está descargando el contacto.

Principio metodológico 10.11 — Identificar qué límite se alcanza. Compara por separado el límite de fricción y el de contacto normal. En un plano, conserva los signos de una base declarada al pasar de reposo a ascenso o descenso. Un umbral marca el final de una rama, no especifica por sí solo toda la historia siguiente.

Ejercicios. Ejercicio 10.21. Un cuerpo inicialmente en reposo se apoya en un plano fijo, sin otra fuerza que peso y contacto. Para $\mu_s = 0{,}4$, encuentra la inclinación límite del reposo y la fricción efectiva cuando $\tan\theta = 0{,}2$.

Solución. El límite es $\theta_c = \arctan(0{,}4)$, aproximadamente $21{,}8^\circ$. Para $\tan\theta = 1/5$, $\sin\theta = 1/\sqrt{26}$ y $\cos\theta = 5/\sqrt{26}$. Así, $f_s = mg/\sqrt{26}$ cuesta arriba y el máximo es $0{,}4 \cdot 5mg/\sqrt{26} = 2mg/\sqrt{26}$. La fricción efectiva es la mitad del máximo. La masa multiplica ambas fuerzas y se cancela al comparar el ángulo admisible, dentro de este modelo de coeficiente constante.

Ejercicio 10.22. En un plano de 30°, toma $\mu_s = 0{,}6$ y $\mu_k = 0{,}4$, sin fuerza aplicada adicional. Compara un cuerpo inicialmente en reposo con otro que ya desliza cuesta abajo.

Solución. Para el primero, $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3} < 0{,}6$ y el reposo es admisible con $f_s = mg/2$. Para el segundo, $\sigma = -1$ y

$$a_t = -g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{5}\right) < 0.$$

El cuerpo que baja aumenta su rapidez. El balance estático admisible no lo detiene automáticamente porque la ley efectiva durante el deslizamiento tiene otra magnitud. Las dos historias usan los mismos coeficientes, pero datos y regímenes distintos. La normal permanece $\sqrt{3}mg/2$ en ambas.

Ejercicio 10.23. Sobre una mesa, $\mu_s = 1/2$ y la tracción apunta a 30° sobre la horizontal. Calcula F_c y la normal en ese umbral. Compáralo con una tracción horizontal.

Solución. proposición 10.16 da

$$F_c = \frac{2mg}{2\sqrt{3}+1}, \qquad N_c = mg - \frac{F_c}{2} = \frac{2\sqrt{3}mg}{2\sqrt{3}+1}.$$

La normal es positiva y el límite corresponde a fricción, no a separación. Con tracción horizontal, $F_c = mg/2$. En este caso concreto, la tracción a 30° tiene umbral menor porque $2/(2\sqrt{3}+1) < 1/2$. No debe extrapolarse que todo aumento del ángulo siempre disminuya el umbral: en la expresión general cambian tanto la descarga normal como la componente horizontal de la fuerza.

12. Resistencia lineal y cuadrática

Un cuerpo que se mueve en un fluido puede recibir una fuerza que depende de su movimiento respecto del medio. A diferencia del rozamiento seco ideal, las aproximaciones que estudiaremos se anulan al anularse esa velocidad relativa y crecen con ella. La elección entre una ley lineal y una cuadrática debe apoyarse en el régimen físico o en datos; Newton no selecciona el exponente.[9]

[9]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.5, pp. 95–97; David Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2008, cap. 3, §3.3, pp. 62–64. Se consultaron las leyes de velocidad, el ejemplo de caída lineal y las cautelas sobre régimen. La solución cuadrática y la comparación de familias se demuestran aquí; no se atribuyen íntegramente a esos pasajes.

caída con resistencia lineal



$v_y < 0$; resistencia hacia arriba

Figura 10.10. Durante la caída con $v_y < 0$, la fuerza $-bv_y e_y$ se opone a la velocidad. Al alcanzar $|v_y| = mg/b$ se equilibran ambas fuerzas; antes de ese límite sus módulos pueden diferir. Véase §12.

Definición 10.11 — Velocidad relativa al medio. En el marco inercial elegido, si el cuerpo tiene velocidad $\mathbf{v}$ y el medio tiene velocidad local $\mathbf{u}$, definimos $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Para los ejemplos elementales de esta sección, $\mathbf{u}$ será constante y uniforme.

Un viento uniforme cambia la velocidad que debe entrar en la ley de resistencia. Un cuerpo en reposo respecto del suelo puede recibir resistencia si el medio se mueve. Usar $\mathbf{v}$ sin declarar que el medio está en reposo sería omitir una hipótesis física. Si el medio no es uniforme, $\mathbf{u}$ puede depender de posición y tiempo, y la ecuación necesita conservar esa dependencia.

Definición 10.12 — Dos modelos de resistencia. Con coeficientes positivos constantes, admitiremos alternativamente

$$\mathbf{F}_r = -b\mathbf{w} \quad \text{(lineal)}, \qquad \mathbf{F}_r = -c\|\mathbf{w}\|\mathbf{w} \quad \text{(cuadrático)}.$$

Sus dimensiones son $[b] = MT^{-1}$ y $[c] = ML^{-1}$. Ambas fuerzas apuntan contra $\mathbf{w}$ cuando ésta es no nula y valen cero cuando es nula. En una dirección, la ley cuadrática es $F_r = -c|w|w$, no $-cw^2$ para cualquier signo. Esta última expresión siempre apuntaría hacia el lado negativo del eje y sería incorrecta cuando el movimiento relativo sea negativo. Si se trabaja sólo con rapidez positiva, hay que indicar por separado la dirección del vector.

Estas leyes describen la contribución de resistencia incluida, no necesariamente toda la interacción con el fluido. Un problema puede requerir flotación u otras fuerzas. En los ejemplos de caída de esta sección despreciamos esas contribuciones y conservamos peso y resistencia; la solución es válida mientras esa selección y los coeficientes constantes sigan siendo adecuados. No fijaremos velocidades de transición universales: la geometría y las propiedades del medio también importan.

Proposición 10.17 — Resistencia lineal con fuerza adicional constante. Sea $m > 0$ constante y sean $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{u}$ y $b > 0$ constantes. Bajo

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_0 - b(\mathbf{v} - \mathbf{u}),$$

definimos $\tau = m/b$ y $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{u} + \mathbf{F}_0/b$. Dados $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ en t_0, la historia es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_\infty + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_\infty)e^{-(t-t_0)/\tau},$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_\infty(t - t_0) + \tau(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_\infty)(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}).$$

Demostración. Al restar $\mathbf{v}_\infty$, la ecuación queda $\dot{\mathbf{v}} = -(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty)/\tau$. Derivar la expresión propuesta verifica esa igualdad y el dato inicial. Integrar la velocidad da la posición y su dato. La diferencia de dos soluciones con igual dato cumple $\dot{\mathbf{d}} = -\mathbf{d}/\tau$; multiplicar por $e^{(t-t_0)/\tau}$ da derivada cero, por lo que $\mathbf{d} = 0$. Integrar la diferencia de velocidades con igual posición inicial prueba también unicidad de la posición. □

La velocidad terminal es la que hace nula la resultante, no la velocidad que hace nula cada fuerza. Para caída en un medio quieto, tomando el eje positivo hacia abajo, $F_0 = mg$ y $v_\infty = mg/b$. En el límite, resistencia y peso tienen igual magnitud. El cuerpo continúa moviéndose con velocidad no nula aunque su aceleración tienda a cero.

Desde reposo, $v(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau})$. Para tiempos pequeños frente a τ, la pendiente inicial es g: al comenzar, la resistencia es cero. Para tiempos grandes frente a τ, la diferencia respecto de v_∞ disminuye exponencialmente. Excepto si se parte ya de la velocidad terminal, el valor exacto no se alcanza en un tiempo finito en este modelo. La aproximación práctica depende de la tolerancia con que se mida la diferencia.

La masa no desaparece de estas expresiones. Si se escribe una ley $F_r = -m\alpha v$, entonces $\alpha = b/m$: cambiar la masa manteniendo b cambia también α. La notación puede ocultar un parámetro físico; no autoriza a transferir la independencia de masa de la proposición 10.3 a una caída con resistencia.

Proposición 10.18 — Caída desde reposo con resistencia cuadrática. En un medio quieto, con eje vertical positivo hacia abajo, peso y resistencia cuadrática, define

$$v_* = \sqrt{\frac{mg}{c}}, \qquad \tau_* = \frac{v_*}{g}.$$

La solución de velocidad desde reposo es $v(t) = v_* \tanh(t/\tau_*)$, $\quad t \geq 0$. Es no negativa, menor que v_* para todo tiempo finito y tiende a v_*.

Demostración. Para $v \geq 0$, Newton es $\dot{v} = g - (c/m)v^2 = g(1 - v^2/v_*^2)$. La función $\tanh z = (e^z - e^{-z})/(e^z + e^{-z})$ satisface $(\tanh z)' = 1 - \tanh^2 z$. Derivar la expresión propuesta da precisamente la ecuación, porque $v_*/\tau_* = g$, y $v(0) = 0$. Para $z \geq 0$, $0 \leq \tanh z < 1$ y su límite es uno; esto verifica la rama no negativa y las afirmaciones de límite. La ley completa $v \mapsto g - (c/m)|v|v$ es localmente Lipschitz, así que la unicidad local del capítulo 9 identifica la solución con esos datos. La expresión acotada proporciona su continuación para todo $t \geq 0$ dentro del modelo. □

Para una velocidad inicial hacia arriba no se usa sin modificación esta fórmula de caída desde reposo. El término $|v|v$ cambia de signo y la resistencia apunta entonces hacia abajo, en el mismo sentido que el peso. Al llegar a velocidad cero, el peso permanece y puede comenzar el descenso. La ley cuadrática vectorial ya incorpora el cambio de dirección; no se introduce una fuerza constante nueva en el punto de retorno.

Los dos modelos tienen velocidades terminales distintas: mg/b y $\sqrt{mg/c}$. Compararlas numéricamente exige coeficientes calibrados y condiciones físicas compatibles; b y c ni siquiera tienen las mismas unidades. Que ambos ejemplos produzcan un límite no permite intercambiar sus parámetros ni sus escalas temporales.

Principio metodológico 10.12 — Declarar el medio y comprobar los límites. Especifica la velocidad relativa que entra en la ley, las demás contribuciones y el régimen donde admites los coeficientes. Verifica dimensiones, dirección de resistencia, datos iniciales y límite temporal de cada solución. Una velocidad terminal corresponde a balance de fuerzas, no a ausencia de interacción.

Ejercicios. Ejercicio 10.24. Un cuerpo cae desde reposo bajo peso y resistencia lineal en un medio quieto. ¿Cuándo alcanza la mitad de su velocidad terminal? ¿Qué cambia si se duplica la masa conservando el mismo coeficiente b?

Solución. $v/v_\infty = 1 - e^{-t/\tau} = 1/2$ da $t = \tau \ln 2 = (m/b)\ln 2$. Duplicar m duplica $v_\infty = mg/b$, duplica $\tau = m/b$ y duplica el tiempo para alcanzar la mitad de la nueva velocidad terminal. La aceleración inicial sigue siendo g porque la resistencia inicial es cero. La comparación mantiene explícitamente b fijo; si cambiar el cuerpo modifica también su forma o interacción con el medio, habría que recalibrarlo y estos factores ya no se siguen automáticamente.

Ejercicio 10.25. Una partícula se mueve horizontalmente en un medio quieto con velocidad inicial $V > 0$. La única fuerza es resistencia cuadrática. Calcula velocidad y desplazamiento, y decide si la distancia total hasta tiempos arbitrariamente grandes es finita.

Solución. Mientras $v > 0$, $m\dot{v} = -cv^2$. La expresión

$$v(t) = \frac{V}{1 + cVt/m}$$

satisface la ecuación y el dato inicial; sigue positiva para todo tiempo finito. Al integrar,

$$x(t) - x_0 = \frac{m}{c} \ln\left(1 + \frac{cVt}{m}\right).$$

La velocidad tiende a cero, pero el desplazamiento crece sin cota en este modelo mantenido indefinidamente. No hay una detención finita ni una distancia total finita. Con resistencia lineal y ninguna otra fuerza horizontal, proposición 10.17 da en cambio desplazamiento límite mV/b. La comparación distingue dos leyes y evita deducir una distancia finita sólo porque la velocidad tienda a cero. Una aplicación real debe comprobar si la aproximación cuadrática sigue siendo válida al disminuir tanto la velocidad.

13. Resortes y ley de Hooke

Un resorte puede ejercer una fuerza que depende de cuánto se aparta de su longitud natural. Aquí importa distinguir esa longitud de la posición de equilibrio de un cuerpo sometido a otras fuerzas. Un resorte vertical que sostiene una masa suele estar alargado en equilibrio: la fuerza elástica compensa el peso y no es cero.[10]

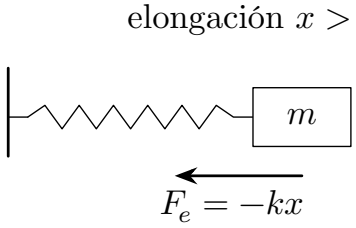


Figura 10.11. El resorte está extendido hacia la derecha respecto del equilibrio $x = 0$. Su fuerza sobre la masa apunta hacia la izquierda. En una mesa lisa, peso y normal se compensan verticalmente. Véase §13.

[10]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.5, pp. 97–98; Shankar, obra citada, cap. 4, §4.1, pp. 51–54. Se usa la respuesta elástica lineal con referencia natural declarada. El equilibrio bajo peso, las equivalencias y los ejercicios se desarrollan en el texto; la teoría completa del oscilador queda fuera del alcance actual.

Definición 10.13 — Resorte lineal ideal y deformación. Sea ℓ_0 la longitud natural de un resorte y $\ell > 0$ su longitud actual. La deformación firmada es $q = \ell - \ell_0$. En un modelo axial lineal, la fuerza sobre el extremo unido al cuerpo es

$$\mathbf{F}_e = -kq\mathbf{n}, \qquad k > 0,$$

con $\mathbf{n}$ dirigido desde el anclaje hacia ese extremo. La constante k tiene dimensión MT^{-2}, o unidades de fuerza por longitud. En geometría unidimensional con orientación fija, $F_e = -kq$.

Para $q > 0$, el resorte estirado tira hacia el anclaje. Para $q < 0$, un resorte ideal apto para compresión empuja alejándose de él. Esta última propiedad lo diferencia de la cuerda flexible de §7. No todo dispositivo elástico soporta ambos signos: un elemento que sólo transmite tracción requiere otro modelo y su propia comprobación de admisibilidad.

La ley de Hooke es una aproximación en un intervalo de deformaciones. La constante positiva expresa la respuesta lineal restauradora en ese intervalo; no implica proporcionalidad exacta para deformaciones arbitrarias. También despreciamos aquí la masa del resorte y sus modos internos cuando lo usamos como interacción entre un anclaje y un cuerpo. De conservarlos, necesitaríamos más variables y balances.

En un resorte horizontal guiado, si x_0 es la posición del extremo a longitud natural, $q = x - x_0$. La fuerza es $-k(x - x_0)$, no necesariamente $-kx$. Escribir la forma abreviada exige declarar el origen. Cambiar el cero de posición sin cambiar esa expresión modificaría artificialmente la interacción. La fuerza depende de una diferencia geométrica, no del número con que se etiqueta el extremo.

Proposición 10.19 — Equilibrio vertical y desplazamiento respecto de él. Un cuerpo cuelga de un resorte ideal vertical, con eje positivo hacia abajo, bajo peso y fuerza elástica. Su equilibrio tiene

$$q_{\mathrm{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

Si $\delta = q - q_{\mathrm{eq}}$, la ecuación de movimiento es $m\ddot{\delta} = -k\delta$. La reducción es válida mientras se mantiene la geometría axial y la ley elástica admitida.

Demostración. Como el anclaje y ℓ_0 están fijos, $\ddot{q}$ es la aceleración del cuerpo. Newton da $m\ddot{q} = mg - kq$. El equilibrio exige $0 = mg - kq_{\mathrm{eq}}$. Sustituir $q = q_{\mathrm{eq}} + \delta$ cancela los términos constantes y produce la ecuación indicada. □

La fuerza elástica por separado sigue siendo $-k(q_{\mathrm{eq}} + \delta)$; la resultante es $-k\delta$. No se ha eliminado el peso del diagrama: se ha usado su compensación constante al expresar la resultante en una coordenada distinta. En equilibrio, la deformación no es cero y la aceleración sí lo es. En la longitud natural, el resorte no ejerce fuerza y el peso acelera al cuerpo.

La ecuación obtenida anticipa un sistema restaurador, pero no desarrollaremos aquí su teoría temporal completa ni una demostración de estabilidad por energía. El objetivo presente es construir correctamente la fuerza y la ecuación. Los capítulos posteriores tratarán las herramientas correspondientes. No hace falta resolver todas las oscilaciones para saber qué aceleración produce una deformación dada.

Proposición 10.20 — Rigidez equivalente de dos resortes ideales. Dos resortes lineales de constantes $k_1, k_2 > 0$, alineados y con geometría axial fija, tienen:

- en paralelo, deformación común q y resultante elástica $F_e = -(k_1 + k_2)q$;
- en serie, con unión intermedia de masa despreciable y sin otra fuerza axial, rigidez equivalente $k_{\mathrm{eq}} = k_1 k_2/(k_1 + k_2)$ respecto de la deformación total $q = q_1 + q_2$.

Demostración. En paralelo, cada resorte aporta $-k_i q$ sobre el mismo receptor y la suma da la primera expresión. En serie, el balance de la unión ideal exige una fuerza axial transmitida común, de magnitud S para extensión. Entonces $q_i = S/k_i$, por lo que $q = S(1/k_1 + 1/k_2)$. Despejar da $S = k_{\mathrm{eq}} q$. Las ecuaciones firmadas proporcionan el mismo resultado en compresión si ambos resortes y la guía admiten ese régimen. □

La igualdad de fuerza en serie proviene del balance de la unión, como ocurrió con el tramo liviano de cuerda. Si la unión tiene masa apreciable y acelera, las fuerzas pueden diferir. La deformación común en paralelo proviene de la geometría de anclajes y extremo, no de que los resortes sean idénticos. Las dos equivalencias dejan de ser aplicables si se cambia cualquiera de esas condiciones.

Principio metodológico 10.13 — Fijar la referencia de deformación. Separa longitud natural, posición actual y equilibrio bajo otras fuerzas. Declara los signos de deformación admitidos y qué masa o movimiento interno del resorte se desprecia. Al combinar resortes, justifica primero las relaciones de fuerza y deformación.

Ejercicios. Ejercicio 10.26. Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ cuelga de un resorte de $100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, con $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determina su deformación de equilibrio y la aceleración cuando la deformación es $0{,}25\,\mathrm{m}$, usando eje positivo hacia abajo.

Solución. $q_{\mathrm{eq}} = 20/100 = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Para $q = 0{,}25\,\mathrm{m}$, el peso es $+20\,\mathrm{N}$ y la fuerza elástica $-25\,\mathrm{N}$, de modo que la resultante es $-5\,\mathrm{N}$ y $a = -2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, hacia arriba. La velocidad instantánea no cambia esta fuerza en el resorte ideal: el cuerpo podría subir o bajar en ese instante. Usar $-kq$ como resultante omitiendo el peso daría una aceleración incorrecta.

Ejercicio 10.27. Dos resortes de 100 y $200\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ se usan primero en paralelo y luego en serie, bajo las hipótesis de la proposición 10.20. Calcula la fuerza necesaria para una deformación de $0{,}02\,\mathrm{m}$ en paralelo y $0{,}09\,\mathrm{m}$ en serie. En este último caso, calcula cada deformación.

Solución. En paralelo, $k_{\mathrm{eq}} = 300\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ y la fuerza de tracción equilibrante tiene magnitud $6\,\mathrm{N}$. En serie, $k_{\mathrm{eq}} = 200/3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ y la fuerza común vuelve a ser $6\,\mathrm{N}$. Las deformaciones son $q_1 = 6/100 = 0{,}06\,\mathrm{m}$ y $q_2 = 6/200 = 0{,}03\,\mathrm{m}$, cuya suma es $0{,}09\,\mathrm{m}$. La igualdad de las fuerzas numéricas corresponde a deformaciones totales diferentes; no implica equivalencia entre ambas conexiones.

Ejercicio 10.28. Una masa de $1\,\mathrm{kg}$ se apoya en una mesa horizontal rugosa y está unida a un resorte horizontal de $100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Usa $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\mu_s = 0{,}3$ y $\mu_k = 0{,}2$. Encuentra las deformaciones que permiten reposo. Desde $q = 0{,}05\,\mathrm{m}$ y reposo, calcula la aceleración inicial de la rama deslizante hacia la longitud natural.

Solución. En reposo, la fricción debe ser $f_s = kq$ y la normal $mg = 10\,\mathrm{N}$. La condición $|kq| \le 3\,\mathrm{N}$ da $|q| \le 0{,}03\,\mathrm{m}$. Para $q = 0{,}05\,\mathrm{m}$, no hay balance estático. La fuerza elástica es $-5\,\mathrm{N}$; una rama inicial con velocidad negativa tiene fricción $+2\,\mathrm{N}$ y aceleración inicial $-3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. El signo calculado es compatible con iniciar movimiento hacia valores menores de q. La aceleración no permanecerá constante, pues el resorte cambia de fuerza al cambiar q. Tampoco puede prolongarse esta rama sin revisar un posible futuro evento de velocidad nula.

14. Síntesis y auditoría de fuerzas

Construir un diagrama reúne información de naturaleza distinta. El peso viene de un campo admitido; el resorte, de una ley de deformación; la resistencia, de una ley de velocidad relativa. La normal, la fricción estática y ciertas tensiones se obtienen como fuerzas necesarias para realizar una geometría o un movimiento permitido. Todas entran en Newton, pero no se determinan de la misma manera.

Una comprobación completa empieza por el receptor. Luego identifica agentes, selecciona leyes con sus parámetros y declara las relaciones cinemáticas usadas. Sólo entonces proyecta y resuelve. Al final debe volver a las hipótesis: signo de normal y tensión, límite estático, sentido de deslizamiento, intervalo elástico y vigencia del modelo del medio. Una solución que verifica una igualdad pero incumple una de esas condiciones no describe la rama anunciada.

Contribución	Expresión del modelo	Comprobación decisiva
Peso uniforme	$m\mathbf{g}$	Campo y masa adoptados; región de validez
Contacto normal	$N\mathbf{n}$	$N \geq 0$, separación y movimiento normal
Cuerda flexible	$T\mathbf{t}$	$T \geq 0$, rama tensa y modelo del tramo
Fricción estática	Incógnita tangencial	Ausencia de deslizamiento y $\|\mathbf{f}_s\| \leq \mu_s N$
Fricción cinética	$-\mu_k N \mathbf{w}_t / \|\mathbf{w}_t\|$	$\mathbf{w}_t \neq 0$ y sentido relativo
Resistencia lineal	$-b\mathbf{w}$	Medio, coeficiente y régimen físico
Resistencia cuadrática	$-c\|\mathbf{w}\|\mathbf{w}$	Medio, signo y régimen físico
Resorte lineal	$-kq\mathbf{n}$	Referencia natural, geometría e intervalo elástico

Las dimensiones ayudan a encontrar errores, pero no garantizan una ley correcta. Tanto $-bv$ como $-c|v|v$ tienen dimensiones de fuerza con coeficientes adecuados. Una aceleración observada en un único instante tampoco identifica por sí sola cuál de las dos leyes actúa. Newton informa sobre la resultante; atribuirla a una interacción exige hipótesis o mediciones adicionales.

Proposición 10.21 — Comparación de dos leyes de resistencia mediante dos velocidades. Supongamos que la única fuerza en una dirección horizontal es resistencia en un medio quieto, que la masa es constante y que los coeficientes positivos de las leyes candidatas no cambian. Para dos velocidades positivas distintas v_1, v_2, las magnitudes de desaceleración satisfacen

$$\frac{|a_2|}{|a_1|} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{en el modelo lineal,} \qquad \frac{|a_2|}{|a_1|} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \quad \text{en el cuadrático.}$$

Estas predicciones son distintas; un solo par velocidad–aceleración no basta para distinguir ambas familias.

Demostración. Newton da $|a_i| = (b/m)v_i$ para la primera ley y $|a_i| = (c/m)v_i^2$ para la segunda. Dividir elimina los coeficientes y la masa. Si $r = v_2/v_1 > 0$ y $r \neq 1$, entonces $r \neq r^2$. Para un solo dato $v > 0$, $|a| > 0$, se pueden elegir $b = m|a|/v$ o $c = m|a|/v^2$ y ambas leyes reproducen ese dato. □

La proposición compara dos familias bajo condiciones precisas; no prueba que dos mediciones establezcan una ley universal ni que excluyan toda otra función de velocidad. Si hay una fuerza adicional desconocida, cambios de coeficiente o errores experimentales relevantes, la inferencia debe incorporar esos factores. La diferencia entre resolver un modelo e identificarlo mediante datos forma parte del uso responsable de los diagramas.

También debe mantenerse la frontera del sistema al sumar balances. Para un cuerpo aislado, una cuerda puede ejercer una fuerza externa; para un conjunto que incluye cuerpo y cuerda, esa misma interacción es interna. Dibujar su pareja sobre otro receptor no permite borrarla del balance individual. La cancelación sólo se justifica dentro de la suma apropiada o mediante un balance de transmisión declarado.

Principio metodológico 10.14 — Auditar el resultado contra el modelo. Comprueba receptor, agentes, leyes, relaciones cinemáticas, dimensiones y condiciones de régimen. Verifica los datos y los eventos que terminan el tramo. Expresa qué predice el cálculo y qué necesitaría información adicional; conserva las ecuaciones individuales cuando el balance del conjunto haya eliminado una fuerza que aún interesa determinar.

Ejercicios. Ejercicio 10.29. Dos cuerpos A y B están conectados como en la proposición 10.10. Ahora el soporte de A es liso y el de B rugoso, con $\mu_k = 0{,}2$ y $\mu_s = 0{,}3$. Toma $m_A = 2\,\mathrm{kg}$, $m_B = 3\,\mathrm{kg}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y fuerza $F = 5\,\mathrm{N}$ sobre A hacia la derecha. Ambos comienzan con velocidad común $U > 0$ a la derecha y cuerda tensa. Calcula la aceleración y la tensión durante ese tramo, el tiempo hasta el primer reposo y una continuación admisible.

Solución. Las normales son 20 y 30 N. Sobre B la fricción cinética es $-6\,\mathrm{N}$. Los balances son

$$5 - T = 2a, \qquad T - 6 = 3a.$$

Al sumar, $a = -1/5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, y sustituir da $T = 27/5\,\mathrm{N} = 5{,}4\,\mathrm{N} > 0$. Las resultantes individuales son $-0{,}4$ y $-0{,}6\,\mathrm{N}$, compatibles con la aceleración común. La tensión puede superar la fuerza aplicada sobre A: la resultante sobre éste apunta hacia atrás. No existe una regla general $T \le F$ fuera de las hipótesis específicas de la proposición 10.10.

La velocidad común llega a cero tras $t = U/(1/5\,\mathrm{m\,s^{-2}})$. En reposo, el balance de A exige $T = 5\,\mathrm{N}$ y el de B fricción $-5\,\mathrm{N}$. Su máximo estático es $9\,\mathrm{N}$, por lo que esta continuación es admisible y la cuerda sigue transmitiendo tracción. Cambian tensión y ley de fricción en el evento; la velocidad permanece continua. El salto de aceleración entre tramos no implica aquí un salto de velocidad ni requiere incorporar una colisión.

Ejercicio 10.30. En un medio quieto, una partícula sólo recibe resistencia horizontal y tiene masa conocida m. Cuando su velocidad es $V > 0$, su aceleración es $-A$, con $A > 0$. Cuando es $2V$, su aceleración es $-2A$. Compara los modelos lineal y cuadrático con coeficientes constantes. ¿Bastaría el primer dato?

Solución. La razón de magnitudes observada es dos para una razón de velocidades dos. Proposición 10.21 coincide con el modelo lineal, con $b = mA/V$. El modelo cuadrático ajustado al primer dato tendría $c = mA/V^2$ y predeciría aceleración $-4A$ en el segundo, incompatible con el dato exacto declarado. El primer dato solo permitiría ajustar cualquiera de ambos coeficientes. La conclusión distingue esas dos familias bajo las hipótesis del ejercicio; no excluye otras leyes ni convierte dos datos en una validación ilimitada del modelo.

El capítulo deja una práctica común para fuerzas de formas distintas: escoger el sistema, expresar la interacción, justificar el movimiento admitido y comprobar el régimen. El capítulo 11 organizará las relaciones de restricción y los grados de libertad que aquí aparecieron en ejemplos elementales. El capítulo 12 estudiará trabajo y energía cinética. Ambos desarrollos partirán de las ecuaciones e idealizaciones que ahora podemos construir sin confundir fuerza, velocidad y condición geométrica.

Capítulo 11

Restricciones elementales y grados de libertad

1. Restricción geométrica y problema dinámico

Una cuenta ensartada en un alambre puede recorrerlo sin abandonarlo. Un cuerpo unido a una cuerda tensa no puede alejarse arbitrariamente del otro extremo. Dos objetos que permanecen apoyados sobre una plataforma pueden tener movimientos relacionados con el de ésta. Tales condiciones reducen los movimientos posibles, pero no especifican por sí mismas la rapidez o las fuerzas necesarias para realizarlos.[1]

Definición 11.1 — Restricción activa de un modelo mecánico. Una restricción activa es una condición que deben satisfacer las posiciones o los movimientos de los cuerpos durante el régimen considerado. Puede expresar una geometría impuesta, una conexión ideal o la permanencia de un contacto. Su forma y su intervalo de aplicación pertenecen al modelo físico.

El adjetivo «activa» recuerda que algunas relaciones sólo valen mientras persiste un régimen. Una cuerda de longitud ℓ impide una distancia mayor que ℓ, pero permite distancias menores cuando está floja. La igualdad distancia $= \ell$ describe su rama tensa, no toda configuración posible de esa cuerda. Un suelo no adhesivo impide penetrar y puede dejar que el cuerpo se separe; la igualdad de alturas sólo describe contacto sostenido. El capítulo 10 mostró cómo comprobar las fuerzas que permiten mantener esas ramas.

Una guía bilateral ideal ofrece otro caso: puede obligar a una cuenta a permanecer sobre una línea, ejerciendo la reacción que sea necesaria hacia cualquiera de sus lados dentro del modelo. Para una superficie que sólo empuja, esa posibilidad no está garantizada. Escribir la misma ecuación geométrica para ambas no elimina la diferencia física de sus fuerzas admisibles.

Proposición 11.1 — Una trayectoria geométrica no fija una historia temporal. Para una partícula restringida a una circunferencia fija de radio $R > 0$, la relación $x^2 + y^2 = R^2$ no determina por sí sola su velocidad ni su aceleración.

Demostración. Para cualquier función dos veces diferenciable $\theta(t)$,

$$\mathbf{r}(t) = R\cos\theta(t)\,e_x + R\sin\theta(t)\,e_y$$

satisface la relación. La velocidad tiene magnitud $R|\dot\theta|$ y la aceleración depende tanto de $\dot\theta$ como de $\ddot\theta$. Elegir funciones angulares diferentes produce historias distintas sobre la misma circunferencia. La igualdad geométrica no selecciona ninguna de esas funciones. □

Para averiguar qué historia se realiza, debemos añadir fuerzas y datos compatibles. Una guía lisa, una cuerda y un motor que impone una rotación pueden conducir a esa misma circunferencia y producir balances diferentes. El dibujo de una curva no identifica automáticamente la interacción que la mantiene.

[1] Daniel Kleppner y Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 2, §2.4, pp. 69–70: ecuaciones de movimiento y restricciones. Las definiciones y distinciones locales se desarrollan aquí; no se atribuye a ese pasaje una teoría general de grados de libertad.

Conviene separar tres preguntas. La primera es qué posiciones permite la geometría. La segunda es qué velocidades y aceleraciones son compatibles con permanecer en ella. La tercera es qué fuerzas producen esas aceleraciones y cumplen los límites físicos del vínculo. Saltar directamente a la tercera puede ocultar una relación cinemática; responder sólo la primera deja incompleta la dinámica.

Principio metodológico 11.1 — Escribir el vínculo antes de usar sus consecuencias. Declara la relación geométrica y el régimen que la activa. Deduce después sus condiciones cinemáticas y conserva las fuerzas de vínculo como incógnitas cuando corresponda. Una palabra como «unidos» no sustituye la geometría de la conexión.

Ejercicios. Ejercicio 11.1. Una partícula permanece en una circunferencia fija de radio R. Compara las historias con $\theta(t) = \omega t$ y $\theta(t) = 2\omega t$, para $\omega > 0$. ¿La restricción permite ambas? ¿Requieren la misma aceleración en el punto inicial?

Solución. Ambas satisfacen $x^2 + y^2 = R^2$ y comienzan en $(R, 0)$. Sus velocidades iniciales son $R\omega e_y$ y $2R\omega e_y$. Sus aceleraciones iniciales son $-R\omega^2 e_x$ y $-4R\omega^2 e_x$. La geometría permite ambas, pero exige resultantes distintas si la masa es la misma. No son soluciones del mismo problema dinámico con los mismos datos: precisamente ilustran la información que falta al conocer sólo la curva.

Ejercicio 11.2. Dos partículas se mueven en un plano y aún no se ha declarado ninguna conexión entre ellas. Enumera las coordenadas de posición necesarias. Un informe afirma que compartir el plano obliga a tener la misma aceleración. Evalúa la afirmación.

Solución. Podemos usar (x_1, y_1, x_2, y_2): cuatro números describen la posición conjunta. Compartir el plano no relaciona los valores de las dos parejas ni impone aceleración común. Hace falta una conexión o una solución dinámica que justifique esa igualdad. La tercera ley, si las partículas interactúan, relacionaría sus fuerzas recíprocas; tampoco impone por sí sola igualdad de aceleraciones. Con masas distintas, incluso fuerzas opuestas de igual magnitud pueden producir aceleraciones de magnitudes diferentes.

2. Relaciones de posición fijas y dependientes del tiempo

Muchas restricciones elementales pueden escribirse utilizando sólo posiciones y tiempo. Una cuenta sobre una recta fija satisface $y = 0$; una cuenta sobre una circunferencia fija satisface $x^2 + y^2 = R^2$. Un cuerpo que acompaña verticalmente una plataforma de altura prescrita $y_s(t)$ satisface $y - y_s(t) = 0$ mientras mantiene contacto. La diferencia entre los tres casos aparece al derivar sus ecuaciones.[2]

Definición 11.2 — Restricción holónoma elemental. Llamaremos holónoma a una restricción expresable mediante una o varias relaciones de posición

$$\Phi_\alpha(Q, t) = 0,$$

donde Q reúne las coordenadas de los cuerpos. Si la relación no depende explícitamente de t, la geometría es fija respecto del marco elegido; si lo hace, puede describir una geometría que se mueve de manera prescrita.

La definición no garantiza que cualquier lista de funciones describa un dispositivo realizable ni que sus ecuaciones sean independientes. Tampoco convierte una desigualdad unilateral en una

[2]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.4, ejemplo 2.4, pp. 74–75: cuña, polea con soporte móvil y relación de longitudes. El conteo por eliminación, la redundancia y los ejemplos singulares de §§3–4 son desarrollos propios, con argumentos explícitos.

igualdad válida siempre. Para el suelo, $y-y_s \geq 0$ describe la región accesible; en la rama de contacto sostenido se añade la igualdad. Es útil mantener las dos formas y recordar cuál se está usando.

La dependencia explícita del tiempo debe distinguirse de la dependencia de posiciones desconocidas. Si una cuña tiene posición horizontal $X(t)$ que debe determinarse dinámicamente, escribir una relación con X no equivale a imponer externamente su movimiento. X es otra coordenada del sistema. Si un dispositivo controla y prescribe $X(t)$, se trata de información adicional: deja de ser una variable de posición que podamos elegir libremente a ese tiempo.

Proposición 11.2 — Consecuencias de una relación afín móvil. Si durante un intervalo

$$y(t) - \alpha x(t) - s(t) = 0,$$

con α constante y funciones dos veces diferenciables, entonces $v_y - \alpha v_x = \dot{s}, \qquad a_y - \alpha a_x = \ddot{s}.$

Demostración. Diferenciar una y dos veces la igualdad produce las expresiones. La constancia de α evita términos adicionales. Si ésta variara con el tiempo, también habría que derivarla y conservar los términos correspondientes. □

En una recta fija, s es constante y las dos relaciones tienen lado derecho cero. En una recta que se traslada, $\dot{s}$ y $\ddot{s}$ pueden ser no nulos. Usar la fórmula de la recta fija después de cambiar el soporte daría una condición cinemática equivocada, incluso si el dibujo instantáneo de la línea se parece al anterior.

Proposición 11.2 expresa condiciones necesarias para una historia que cumple la relación. Si sólo se conoce la ecuación de aceleraciones, no se recupera automáticamente la posición original: al integrar quedan constantes que deben ajustarse con posición y velocidad iniciales. Esta distinción será decisiva cuando resolvamos poleas. Los términos constantes de longitud desaparecen al derivar, pero siguen siendo necesarios para comprobar la configuración inicial.

Principio metodológico 11.2 — Conservar el origen geométrico de las ecuaciones derivadas. Antes de igualar aceleraciones, escribe posiciones con signos y referencias explícitos. Distingue una coordenada desconocida de una trayectoria prescrita. Cuando una constante desaparezca por diferenciación, no la borres del control de los datos iniciales.

Ejercicios. Ejercicio 11.3. Una partícula permanece en una recta que satisface $y-\alpha x-ct = 0$, con α adimensional y c de dimensión velocidad. Obtén las relaciones entre componentes de velocidad y aceleración. ¿El movimiento de la recta desaparece de ambas?

Solución. proposición 11.2 da $v_y = \alpha v_x + c$ y $a_y = \alpha a_x$. La velocidad de traslación aparece en la primera y desaparece de la segunda porque es constante. Esto no vuelve fija la recta ni elimina c del dato de velocidad compatible. Por ejemplo, una partícula con $v_x = 0$ necesita $v_y = c$ para acompañarla. Imponer también $v_y = 0$ sólo sería compatible si $c = 0$.

Ejercicio 11.4. Una guía circular centrada en el origen tiene radio prescrito $R(t) = R_0 + ct > 0$. En $t = 0$, la partícula está en $(R_0, 0)$. ¿Es compatible una velocidad inicial $(0, V)$ cuando $c \neq 0$? Obtén la componente que debe cambiar.

Solución. Diferenciar $x^2 + y^2 = R(t)^2$ da $xv_x + yv_y = R\dot{R}$. En el instante inicial resulta $R_0 v_x = R_0 c$, por lo que $v_x = c$. La velocidad tangencial $v_y = V$ puede elegirse libremente en ese punto, pero la componente radial no puede ser cero si el radio cambia. La compatibilidad geométrica no informa aún qué fuerza expande el vínculo ni cuánto vale su reacción. El ejemplo usa el marco inercial del centro fijo, sin atribuir reposo al cuerpo respecto de toda la guía.

3. Variables independientes y grados de libertad

Contar coordenadas cartesianas es un punto de partida. Una partícula en el plano necesita dos; dos partículas en el plano necesitan cuatro. Las restricciones pueden reducir cuántos números de posición se eligen independientemente. Para hacer esa reducción de manera fiable debemos exhibir cómo los demás quedan determinados.

Definición 11.3 — Grados de libertad de posición en una descripción local regular. A un tiempo fijado, una familia de posiciones admisibles tiene d grados de libertad si, en la región considerada, puede describirse mediante d parámetros de posición independientes que determinan unívocamente las posiciones, con una parametrización regular y una recuperación local regular de esos parámetros. En los ejemplos, ambas descripciones serán explícitas y diferenciables; una variación no nula de los parámetros debe producir alguna variación de posición a primer orden.

«Regular» excluye que una parametrización pierda información local o se detenga artificialmente por una elección de variable defectuosa. No desarrollaremos aquí una teoría general de superficies de configuración. Comprobaremos directamente cada relación: qué parámetros pueden variar, cómo reconstruyen las coordenadas y cómo se recuperan de ellas. Los puntos donde esa descripción cambia se examinarán por separado.

Proposición 11.3 — Conteo por eliminación explícita. Si n coordenadas de posición están relacionadas de modo que k de ellas se expresan unívocamente como funciones regulares de las otras $n-k$, y éstas varían independientemente en una región abierta, la descripción local tiene $n-k$ grados de libertad.

Demostración. Elegir las $n-k$ coordenadas libres reconstruye todas las posiciones mediante las funciones declaradas. Proyectar una posición reconstruida sobre esas coordenadas recupera los parámetros sin ambigüedad. Así se obtiene exactamente la descripción local de la definición 11.3; el número de variables independientes es $n-k$. □

Por ejemplo, una partícula en la recta $y = \alpha x + s$ tiene una coordenada libre x y una coordenada reconstruida y. Dos partículas sobre una misma recta fija tienen dos posiciones libres, una por partícula, antes de declarar una relación entre ellas. Si su separación firmada es fija, una de las dos posiciones determina la otra y queda una sola variable de posición independiente.

La circunferencia requiere una descripción local cuidadosa. En una porción que no cruce el punto de corte elegido, un ángulo θ dentro de un intervalo abierto de longitud menor que 2π determina $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ y se recupera unívocamente sobre ese arco. Tiene un grado de libertad. Que la misma circunferencia necesite varios intervalos para evitar duplicar el ángulo no aumenta ese número local.

El tiempo no se suma al conteo de posiciones a tiempo fijado. Tampoco se suma la masa ni un parámetro geométrico prescrito. Si el radio de la guía es conocido, no es una posición adicional que el cuerpo pueda elegir. Si el radio pasa a ser una coordenada dinámica independiente de un dispositivo, el sistema elegido ha cambiado y su conteo debe reconstruirse.

Grados de libertad de posición y número de datos iniciales cumplen funciones distintas. Una ecuación dinámica de segundo orden para una coordenada suele requerir posición y velocidad iniciales. Eso no significa dos grados de libertad de posición: significa dos datos para seleccionar una historia temporal de una variable de posición. Tampoco el conteo geométrico garantiza que todos los datos se permitan físicamente; la velocidad debe ser compatible con los vínculos y las fuerzas con el régimen.

Principio metodológico 11.3 — Mostrar las variables libres. Justifica el conteo reconstruyendo las coordenadas dependientes desde parámetros que se puedan elegir independientemente.

Indica la región donde esa reconstrucción es unívoca y separa número de coordenadas de posición, parámetros del modelo y datos iniciales.

Ejercicios. Ejercicio 11.5. Dos partículas se mueven sobre una línea y permanecen unidas por una conexión de separación firmada constante $x_2 - x_1 = \ell > 0$. Cuenta los grados de libertad de posición. ¿Qué cambia si sólo se declara que cada una permanece sobre la línea?

Solución. Con la conexión activa, elegir x_1 fija $x_2 = x_1 + \ell$; queda un grado de libertad. Sin la relación de separación, x_1 y x_2 se eligen independientemente y hay dos. La longitud prescrita ℓ no es una tercera coordenada libre. El conteo conectado exige mantener el orden y la relación indicada; una cuerda floja sólo impondría un límite de distancia y requeriría distinguir la región interior de la rama tensa.

Ejercicio 11.6. Una partícula está restringida a una circunferencia fija y se describe localmente por θ. Para determinar su historia se proporcionan θ_0 y $\dot\theta_0$. Un informe cuenta dos grados de libertad porque aparecen dos números. Corrígelo y señala qué controla cada dato.

Solución. Hay un grado de libertad de posición: θ determina el punto del arco. θ_0 fija la posición inicial y $\dot\theta_0$ la velocidad tangencial inicial, de magnitud $R|\dot\theta_0|$. Son datos de distinto orden para una historia de una sola coordenada de posición. No existe una segunda dirección de posición libre en la circunferencia. La velocidad no tiene que ser nula, pero no puede incluir una componente radial para la guía fija.

4. Ecuaciones redundantes y puntos singulares

La expresión «restar una por cada restricción» resulta peligrosa si «restricción» significa cada ecuación escrita. Podemos repetir una misma relación, multiplicarla por una constante o escribir una forma equivalente. La posición admisible no cambia y el número de variables libres tampoco. El conteo debe referirse a condiciones independientes efectivas.

Definición 11.4 — Restricción redundante respecto de una lista. Una ecuación añadida es redundante si toda posición que satisface las relaciones anteriores ya la satisface. En ese caso no reduce el conjunto de posiciones admisibles. Dos listas son equivalentes en una región si permiten exactamente las mismas posiciones allí.

Proposición 11.4 — La repetición de una igualdad no reduce otra vez la libertad. Si $\Phi(Q,t) = 0$ es una relación y $\lambda \neq 0$ una constante, añadir $\lambda\Phi(Q,t) = 0$ no cambia las posiciones admisibles ni un conteo local válido para ellas.

Demostración. Toda posición con $\Phi = 0$ satisface $\lambda\Phi = 0$. Recíprocamente, la primera relación sigue incluida. Las dos listas permiten el mismo conjunto, de modo que los parámetros que lo describían siguen reconstruyendo todas sus posiciones. □

Una dificultad distinta aparece cuando una ecuación deja de describir una reducción regular en el punto considerado. No basta con que una relación sea nueva en el papel. Por ejemplo, en el plano la igualdad $x^2 + y^2 = 0$ parece una sola ecuación, pero permite únicamente el origen. No deja una curva sobre la cual mover una partícula.

Proposición 11.5 — Una igualdad singular puede fijar dos coordenadas. Sobre coordenadas reales, la relación $x^2 + y^2 = 0$ equivale a $x = 0$ y $y = 0$. Su conjunto admisible tiene cero grados de libertad de posición, aunque se haya escrito una sola igualdad.

Demostración. Ambos cuadrados son no negativos. Si su suma es cero, cada uno debe ser cero, de donde $x = y = 0$. Recíprocamente, el origen satisface la relación. No queda parámetro de posición que pueda variar en el conjunto de un solo punto. □

La primera derivada de esa igualdad da $xv_x + yv_y = 0$. En el origen se convierte en $0 = 0$ y parece no limitar ninguna velocidad. Pero una historia que permanezca en el conjunto de un solo punto tiene necesariamente velocidad cero. La condición obtenida al derivar es necesaria y, en este caso singular, insuficiente para reconocer todas las velocidades realizables. No debemos reemplazar la geometría por su primera derivada y olvidar el conjunto que describía.

Otra relación, $x^2 - y^2 = 0$, permite dos rectas que se cruzan. Sobre una rama alejada del cruce hay una coordenada libre. En el cruce no hay una única curva regular con una dirección tangente única que describa las dos ramas a la vez. Para hablar del movimiento debemos identificar qué rama sigue la historia o examinar el encuentro. Este ejemplo no añade un formalismo nuevo; muestra el límite de usar una descripción local sin comprobar su región.

En los problemas elementales que siguen trabajaremos en ramas regulares y exhibiremos parámetros independientes. No formularemos una regla universal $n - r$ basada sólo en contar ecuaciones. Una regla general necesitaría hipótesis de independencia y regularidad precisas, además de herramientas para verificarlas; el método por eliminación de la proposición 11.3 basta para nuestros ejemplos.

Principio metodológico 11.4 — Contar condiciones efectivas en una región. Retira duplicaciones lógicas antes de contar. Si una relación parece perder información al derivarla o aparecen varias ramas, vuelve al conjunto de posiciones permitido. Distingue un conteo regular de una afirmación sobre un punto singular.

Ejercicios. Ejercicio 11.7. Una partícula en el plano debe satisfacer $y = 0$ y $2y = 0$. ¿Tiene cero grados de libertad? Compara con las condiciones $y = 0$ y $x = 0$.

Solución. Las primeras dos ecuaciones son equivalentes a $y = 0$ y dejan x libre: un grado de libertad. La segunda ecuación es redundante y no elimina otra coordenada. Con $y = 0$ y $x = 0$, sólo se permite el origen y hay cero grados de libertad. Contar el mismo número de ecuaciones en ambas listas daría el mismo resultado erróneo para conjuntos diferentes.

Ejercicio 11.8. En el origen, un informe acepta cualquier velocidad para la restricción $x^2+y^2 = 0$ porque su primera derivada vale cero automáticamente. Explica el fallo y determina posición, velocidad y aceleración de una historia admisible.

Solución. proposición 11.5 obliga a que $x(t) = y(t) = 0$ durante todo el intervalo. Por tanto, $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{a} = 0$. La primera condición derivada en un único instante no es suficiente. Incluso su segunda derivada aporta aquí información: $v_x^2 + v_y^2 + xa_x + ya_y = 0$ implica velocidad cero en el origen, pero el argumento del conjunto completo ya determina toda la historia. Una velocidad no nula saldría inmediatamente de la única posición permitida.

5. Compatibilidad de velocidades y aceleraciones

Estar en una posición admisible no garantiza que cualquier velocidad permita conservar el vínculo. Una partícula situada sobre una circunferencia fija, pero con velocidad radial hacia afuera, empieza a abandonarla si no ocurre un cambio de velocidad. Para resolver una evolución regular debemos proporcionar datos compatibles con la restricción activa. Si se plantea un choque que corrige una velocidad, se trata de otro problema, no de una aceleración ordinaria que pueda borrar instantáneamente el dato.

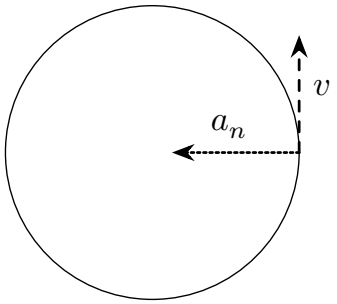


Figura 11.1. En una circunferencia fija, la velocidad es tangente y la componente normal de aceleración apunta al centro. No debe imponerse aceleración normal nula. Estas flechas son cinemáticas. Véase §5.

Definición 11.5 — Velocidad compatible con una restricción activa. Una velocidad en una posición y tiempo dados es compatible si puede ser la derivada en ese instante de una historia diferenciable que satisface la restricción durante un intervalo. Diferenciar las relaciones de posición proporciona condiciones necesarias, que deben interpretarse dentro de la geometría original.

Definición 11.6 — Aceleración compatible con una historia restringida. Una aceleración es compatible con una posición y velocidad si puede ser la segunda derivada de una historia dos veces diferenciable que conserva la restricción. Sus condiciones se obtienen derivando dos veces las relaciones, sin omitir los términos que dependen de la velocidad o del movimiento prescrito del vínculo.

En relaciones afines fijas, las condiciones derivadas siguen siendo lineales y no contienen productos de velocidades. Una curva puede producir esos términos aunque sea fija. Este hecho explica por qué «permanecer en una trayectoria» no equivale a «tener aceleración tangente a ella».[3]

Proposición 11.6 — Compatibilidad en una circunferencia fija. Si $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = R^2$ durante un intervalo y $R > 0$ es constante, entonces

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -\|\mathbf{v}\|^2.$$

Con normal radial exterior $\mathbf{n} = \mathbf{r}/R$, la componente normal de aceleración es $a_n = -\|\mathbf{v}\|^2/R$.

Demostración. La primera derivada de $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = R^2$ da $2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$. Diferenciar esa igualdad da $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0$. Dividir el segundo término por $R > 0$ proporciona la componente respecto de la normal exterior. □

La velocidad es tangente a la circunferencia, pero la aceleración tiene una componente normal hacia el centro cuando la rapidez no es cero. No se trata de una fuerza nueva: es una consecuencia cinemática que las fuerzas reales deben producir. El capítulo 8 estableció la descomposición de aceleración para trayectorias curvas; aquí la misma componente surge directamente de diferenciar el vínculo.

La igualdad deja libre, desde la geometría sola, la componente tangencial de aceleración. Ésta cambia la rapidez y se obtiene de Newton tangencial una vez declaradas las fuerzas. Confundir la componente normal necesaria con toda la aceleración conduciría a suponer rapidez constante sin

[3]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.4, ejemplos 2.5–2.6, pp. 75–76. Se consulta la aceleración radial y la admisibilidad de la tensión. Proposición 11.6 obtiene sus condiciones directamente por diferenciación y usa la cinemática del capítulo 8 como enlace interno.

justificación. Por el contrario, si la rapidez sí es constante, queda nula la componente tangencial y la normal persiste.

Las ecuaciones derivadas no deben usarse hacia atrás sin datos suficientes. Si una función cumple $\ddot{y} = 0$, entonces y es afín en el tiempo, no necesariamente constante ni nula. Para recuperar una guía fija $y = 0$, también se requieren $y(t_0) = 0$ y $\dot{y}(t_0) = 0$. En ejemplos regulares afines, esas condiciones y la ecuación de aceleraciones sí preservan el vínculo por integración. En ejemplos singulares como §4, debemos volver a la geometría completa.

El control de compatibilidad precede a resolver las fuerzas. Un dato incompatible no se corrige cambiando silenciosamente la velocidad inicial. Se debe identificar el problema: o el vínculo no está activo, o se necesita un evento de cambio de régimen, o el conjunto de datos no corresponde al modelo anunciado. Esta separación evita presentar una solución de otro problema como si satisficiera el inicial.

Principio metodológico 11.5 — Comprobar datos de distintos órdenes. Verifica posiciones, velocidades y aceleraciones con las relaciones correspondientes. Diferencia durante el intervalo declarado, no sólo en una instantánea. Si obtienes una ecuación de aceleraciones, conserva los datos iniciales necesarios para que su integración mantenga la geometría.

Ejercicios. Ejercicio 11.9. Una partícula sobre una circunferencia fija de radio 2 m tiene posición $(2, 0)$ m y velocidad $(0, 3)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Obtén la condición sobre su aceleración. ¿Es compatible una aceleración nula? ¿Queda fijada la componente vertical?

Solución. La velocidad es compatible porque $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$. Proposición 11.6 exige $2a_x = -9$, con unidades consistentes, por lo que $a_x = -4{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. La aceleración nula no mantiene la circunferencia con esa velocidad. a_y es la componente tangencial en ese punto y no queda fijada por la geometría. Para determinarla necesitamos las fuerzas tangenciales; fijarla en cero equivaldría a añadir una condición dinámica o de rapidez.

Ejercicio 11.10. Una ecuación obtenida para una guía recta fija es $\ddot{y} = 0$. Decide si asegura $y = 0$. Da datos suficientes para que sí lo haga y un ejemplo de datos que no lo permitan.

Solución. La solución general es $y(t) = y_0 + V(t - t_0)$. Para obtener $y = 0$ en todo el intervalo se necesitan $y_0 = 0$ y $V = 0$. Con $y_0 = 0$ y $V \neq 0$, la partícula parte sobre la guía pero sale de ella. Con $y_0 \neq 0$ y $V = 0$, permanece en una recta paralela distinta. La ecuación de aceleraciones sola perdió dos constantes al derivar; la posición y velocidad iniciales restituyen la información requerida.

6. Fuerzas de vínculo y guías lisas

Una restricción activa debe coexistir con Newton. Si el cuerpo recibe una fuerza que lo desviaría de una guía, alguna interacción debe proporcionar la contribución necesaria para conservarla. A esa contribución la llamaremos fuerza de vínculo, manteniendo el receptor y el agente físico que la produce. No es una fuerza adicional sin origen: puede ser contacto de una guía o tracción de una cuerda, ya estudiados en el capítulo 10.

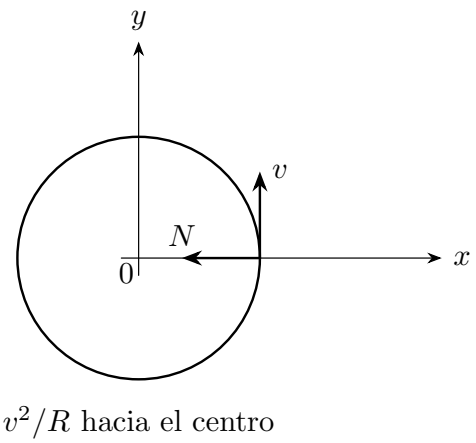


Figura 11.2. Una partícula en una guía circular fija y lisa puede tener reacción normal centrípeta, perpendicular a su velocidad. Si esa reacción es la única fuerza, su potencia es cero aunque cambie la dirección del movimiento. Véase §6.

Definición 11.7 — Fuerza de vínculo. Es una fuerza incluida para representar la interacción de un dispositivo o entorno que mantiene una restricción física. En un modelo ideal puede aparecer como incógnita determinada por Newton y las condiciones cinemáticas. Su dirección y sus valores admisibles requieren hipótesis sobre esa interacción; no se deducen de una ecuación geométrica aislada.

Definición 11.8 — Vínculo bilateral y vínculo unilateral. Un vínculo bilateral impone una igualdad geométrica y, dentro de su idealización, puede impedir desviaciones hacia ambos lados de ella. Un vínculo unilateral limita una región accesible y puede dejar de estar activo al separarse el cuerpo. En el contacto no adhesivo, la fuerza normal sólo empuja y debe verificarse su no negatividad.

Una ranura lisa puede modelarse como una guía bilateral: si el cuerpo intenta desviarse hacia una pared o la otra, el contacto correspondiente suministra la reacción. La reacción normal neta firmada puede tener ambos signos, aunque cada pared individual sólo empuje. Una mesa sola tiene un único lado accesible y no puede producir cualquier signo. La igualdad de posiciones durante contacto no vuelve bilateral esa mesa.

Para un ejemplo plano, tomemos una guía recta fija con dirección tangente e_t y normal e_n, ambas constantes. Sea $\mathbf{F} = F_t e_t + F_n e_n$ la suma de otras fuerzas. La guía se declara lisa y su reacción se modela como $R_n e_n$, sin componente tangencial. Ésta es información física adicional a la geometría de la recta.

Proposición 11.7 — Reacción de una guía recta lisa. Mientras una partícula conserva la guía fija, su aceleración normal es cero y Newton exige

$$a_t = \frac{F_t}{m}, \qquad R_n = -F_n.$$

Para una guía bilateral ideal, R_n puede ser firmado. Si el mismo cálculo representa un soporte no adhesivo con e_n hacia afuera, se exige además $R_n \geq 0$.

Demostración. La posición normal constante da $a_n = 0$. Proyectar Newton normal produce $0 = F_n + R_n$ y proyectar tangencialmente produce $ma_t = F_t$. Las condiciones de signo proceden del tipo de interacción declarado en la definición 11.8 y en el capítulo 10, no del despeje algebraico. □

La fuerza de vínculo no tiene por qué compensar toda la fuerza aplicada. Compensa aquí su componente normal; la tangencial continúa acelerando a la partícula. Si el cuerpo está en reposo instantáneo y $F_t \neq 0$, comienza a moverse sobre la guía. Para equilibrio se necesitaría además $F_t = 0$ bajo estas fuerzas, o una contribución tangencial que lo compense.

En una guía curva, la reacción no se obtiene imponiendo aceleración normal cero. Si se declara contacto liso bilateral con una circunferencia fija, proposición 11.6 y Newton normal dan

$$R_n = -m\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{R} - F_n.$$

La reacción sigue siendo normal por la hipótesis de contacto liso, pero debe producir la aceleración normal requerida por la curvatura. Si el vínculo sólo puede tirar hacia el centro, como una cuerda, habría que escribir $R_n = -T$ y comprobar $T \geq 0$. La compatibilidad geométrica y la capacidad física del dispositivo siguen siendo controles distintos.

Podemos reducir el movimiento sobre una recta a una coordenada tangencial y conservar el balance normal para calcular la reacción. Eliminar una coordenada de posición no significa eliminar una interacción física. La coordenada reducida simplifica la historia, mientras que la ecuación normal responde una pregunta sobre la fuerza que sostiene esa historia.

Principio metodológico 11.6 — Separar reducción y reacción. Usa el vínculo para reducir variables de posición, pero conserva el balance necesario para encontrar su fuerza. Declara qué dirección permite la idealización y verifica sus signos. En una curva, calcula primero la aceleración normal compatible antes de resolver la reacción.

Ejercicios. Ejercicio 11.11. Una partícula de 2 kg está en una guía recta lisa horizontal, con datos compatibles. La suma de otras fuerzas es $(6, -8)\,\mathrm{N}$ en ejes horizontal y vertical. Calcula aceleración y reacción. ¿Se compensa toda esa fuerza?

Solución. La aceleración vertical es cero. Proposición 11.7 da $a_x = 3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y reacción $(0, 8)\,\mathrm{N}$. La resultante es $(6, 0)\,\mathrm{N}$: sólo se compensó la componente normal. La respuesta también es admisible para un soporte inferior no adhesivo si se mantiene contacto, porque la reacción apunta hacia arriba y tiene magnitud positiva. La fuerza dada ya es la suma de las otras contribuciones; no se añade un peso nuevo si estaba incluido en ella.

Ejercicio 11.12. Repite el balance con fuerza externa total $(6, 8)\,\mathrm{N}$. Compara una ranura bilateral ideal con un soporte inferior no adhesivo. Parte de posición apoyada y velocidad vertical nula.

Solución. La rama restringida exigiría reacción $(0, -8)\,\mathrm{N}$ y aceleración $(3, 0)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. La ranura puede suministrar esa reacción mediante su pared superior, dentro de la idealización. El soporte inferior no puede tirar hacia abajo: se rechaza la rama de contacto. Sin esa reacción, la aceleración es $(3, 4)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y la separación vertical inicial aumenta como $2t^2$ metros si t se expresa en segundos. El mismo vínculo algebraico de altura constante tiene capacidades físicas diferentes según el dispositivo.

7. Cuerda sobre una polea fija

Una cuerda tensa de longitud constante relaciona posiciones antes de relacionar aceleraciones. Para una polea fija que une dos cuerpos colgantes en ramas verticales, hay dos tramos rectos

variables y un arco fijo sobre la polea. Si uno de los tramos se alarga, el otro debe acortarse en igual cantidad. Esta afirmación necesita los ejes y la geometría; no procede de la tercera ley.[4]

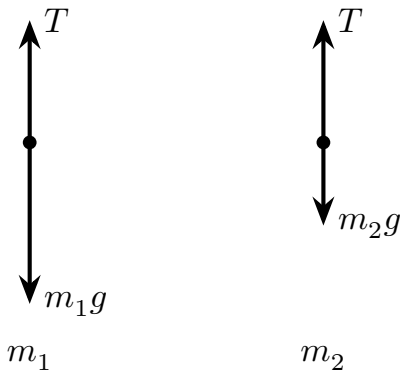


Figura 11.3. Con $m_1 > m_2$, la máquina de Atwood ideal tiene una tensión común y aceleraciones opuestas. Los diagramas corresponden a cada masa por separado: $m_1 g > T > m_2 g$. La polea y la cuerda no se incluyen dentro de esos cuerpos. Véase §7.

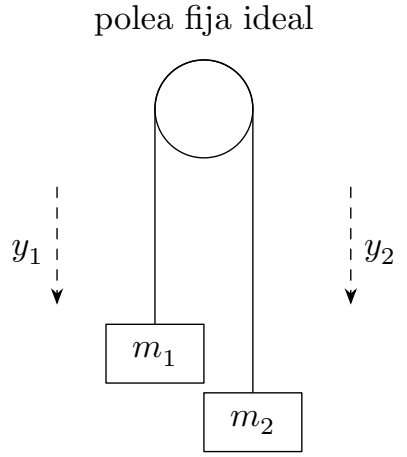


Figura 11.4. Ambas coordenadas crecen hacia abajo. La cuerda inextensible impone $y_1 + y_2 = \text{constante}$, y por tanto $a_1 + a_2 = 0$. Esta relación proviene de la geometría, no de la tercera ley. Véase §7.

Definición 11.9 — Polea ideal en los ejemplos elementales. Admitiremos una polea que mantiene la geometría declarada de la cuerda y despreciamos fricción, masa e inercia relevantes del dispositivo. La cuerda será flexible, de masa despreciable e inextensible en su rama tensa. Bajo esta idealización se transmite una magnitud de tensión común a lo largo de una misma cuerda sin otros cuerpos intermedios. No se divide por una masa nula; se adopta el balance ideal motivado por el límite de la proposición 10.8.

[4]David Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2008, cap. 3, §3.2, pp. 58–59: separación entre balances de Newton y conservación de longitud. La máquina fija de la proposición 11.9 se resuelve en el texto; ejercicio 11.14 desarrolla el soporte móvil a partir de la geometría del ejemplo 2.4 de Kleppner–Kolenkow, pp. 74–75.

Una polea real puede requerir tensiones distintas para cambiar su rotación o vencer resistencia. No basta con que la cuerda sea continua para excluir esos efectos. Aquí declaramos el dispositivo ideal porque el objetivo es estudiar la longitud y los balances de partículas; la dinámica rotacional se desarrollará después.

Sea y_1 la longitud vertical del tramo del cuerpo 1 y y_2 la del cuerpo 2, ambos medidos positivos hacia abajo desde referencias fijas. Absorbiendo el arco y los otros tramos constantes en L, la rama tensa satisface $y_1 + y_2 = L$. La ubicación de cada masa también debe permanecer dentro de la región donde los tramos siguen verticales y ningún cuerpo encuentra la polea o el suelo.

Proposición 11.8 — Relación cinemática de una polea fija. Si $y_1+y_2 = L$ con L constante durante un intervalo, entonces

$$v_1 + v_2 = 0, \qquad a_1 + a_2 = 0.$$

Una descripción de posición tiene un grado de libertad: elegir y_1 fija $y_2 = L - y_1$.

Demostración. Las relaciones de velocidad y aceleración se obtienen diferenciando la igualdad. La eliminación explícita de y_2 cumple proposición 11.3 en cualquier intervalo abierto de posiciones compatible con los tramos declarados. □

Los signos opuestos corresponden a haber elegido ambos ejes hacia abajo. Si uno se toma hacia arriba y el otro hacia abajo, las componentes de aceleración serán iguales. Ninguna de las dos convenciones modifica el movimiento físico. Decir sólo «tienen la misma aceleración» sin indicar si se comparan magnitudes, componentes o vectores deja una ambigüedad que la ecuación de longitud evita.

Proposición 11.9 — Máquina de Atwood elemental. Dos masas positivas m_1, m_2 cuelgan de la cuerda ideal de la proposición 11.8, bajo gravedad uniforme y sin otras fuerzas sobre ellas. En los ejes descendentes declarados,

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \qquad a_2 = -a_1, \qquad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Demostración. Newton sobre cada receptor da $m_1 g - T = m_1 a_1$ y $m_2 g - T = m_2 a_2$. Sustituir $a_2 = -a_1$ y restar elimina T y produce $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a_1$. La suma de masas es positiva y permite despejar. Sustituir en cualquiera de los balances da T, que es positiva para masas y g positivos. La tensión calculada es admisible para la rama tensa. □

Si las masas son iguales, la aceleración es cero. Eso permite reposo o movimiento uniforme con velocidades opuestas compatibles. El reposo no se deduce de igualar masas: depende de los datos iniciales. Si una masa es mayor, su aceleración apunta hacia abajo, pero podría estar subiendo inicialmente y frenarse antes de bajar. De nuevo, la resultante fija la aceleración y no impone el signo instantáneo de velocidad.

Principio metodológico 11.7 — Relacionar primero longitudes. Separa los tramos variables de los constantes, define los ejes y deriva la longitud total. Justifica la tensión común mediante el dispositivo ideal y usa Newton por receptor. No reemplaces la relación geométrica por una supuesta consecuencia de acción y reacción.

Ejercicios. Ejercicio 11.13. En proposición 11.9, $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ y $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Calcula las aceleraciones firmadas y la tensión. Si el cuerpo 2 comienza subiendo, ¿contradice el signo de su aceleración?

Solución. $a_1 = -2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $a_2 = +2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y $T = 24\,\mathrm{N}$. Los balances son $20 - 24 = 2(-2)$ y $30 - 24 = 3(2)$, ambos en newtons. Una velocidad inicial ascendente del cuerpo 2 significa $v_2 < 0$

y es compatible con aceleración positiva: inicialmente se frena. El dato del cuerpo 1 debe cumplir $v_1 = -v_2$. Las fórmulas valen hasta que cambie la geometría, el régimen o las fuerzas admitidas.

Ejercicio 11.14. Ahora la polea superior se traslada verticalmente con posición prescrita $Y(t)$. Usa un único eje positivo hacia arriba para las alturas y_1, y_2, Y. Los tramos siguen verticales y el arco permanece constante. Obtén la relación de aceleraciones y la tensión cuando $\ddot{Y} = A$ es constante. Examina su admisibilidad.

Solución. La longitud variable es $(Y - y_1) + (Y - y_2)$, de modo que $2Y - y_1 - y_2 = C$ y $a_1 + a_2 = 2A$. Newton ascendente da $T - m_i g = m_i a_i$. Sumando las aceleraciones despejadas,

$$T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) - 2g = 2A,$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + A), \qquad a_i = \frac{T}{m_i} - g.$$

La rama tensa requiere $A \geq -g$ y datos compatibles con la longitud y su primera derivada. Para $A < -g$, la tensión sería negativa y se rechaza esa rama. Para $A = -g$, la tensión nula es un caso marginal cuya geometría depende también de los datos y la continuación. Con masas iguales se obtiene $a_1 = a_2 = A$, pero no se deduce que sus velocidades relativas a la polea sean nulas: la relación inicial sólo fija su suma. Los cálculos se hicieron en el marco inercial, aunque el soporte acelere.

8. Polea móvil y factores geométricos

Consideremos una cuerda con un extremo fijo en el soporte superior. Desde allí baja, rodea una polea móvil, sube a una polea fija superior y baja finalmente hasta un cuerpo de masa m_1. La polea móvil lleva otro cuerpo de masa m_2; su propia masa se desprecia y su centro mantiene la misma altura que ese cuerpo salvo una distancia fija. Ambas poleas son ideales y los tramos variables son verticales.[5]

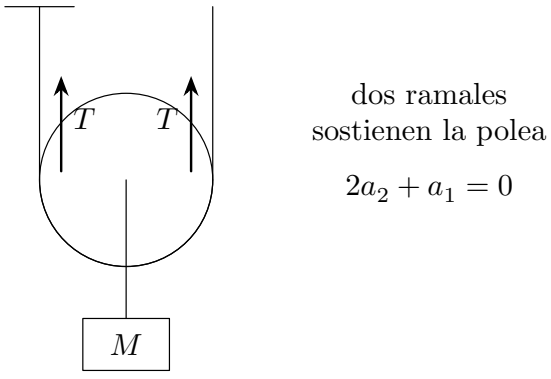


Figura 11.5. En una polea móvil ideal, los dos ramales ejercen una resultante ascendente $2T$ sobre el conjunto polea–carga. Si el extremo libre se mueve con coordenada descendente y_1 y la polea con y_2, $y_1 + 2y_2$ es constante. Véase §8.

[5]Morin, obra citada, cap. 3, §3.2, ejemplo de máquina de Atwood, pp. 58–59. Se adapta la convención a ejes descendentes y se conserva el factor dos de longitud y fuerza. La masa despreciable se trata mediante el balance ideal del capítulo 10, sin dividir por cero. Aceleración nula no se identifica automáticamente con reposo.

Esta descripción permite reconstruir la longitud sin necesitar adivinar una razón de velocidades. Si el centro de la polea móvil baja, se alargan dos tramos de cuerda. Para conservar la longitud, el tramo que llega a m_1 debe acortarse el doble. Los arcos constantes no contribuyen a la derivada, pero las dos ramas variables de la polea móvil sí.

Sea y_1 la posición descendente de m_1 y y_2 la de la polea móvil y su carga, con referencias superiores fijas. La longitud toma la forma $y_1 + 2y_2 + C_0 = \ell$. Escribimos $y_1 + 2y_2 = L$, absorbiendo las constantes geométricas en L.

Proposición 11.10 — Relación de una polea móvil con dos ramas verticales. Durante la rama tensa de esa geometría,

$$v_1 + 2v_2 = 0, \qquad a_1 + 2a_2 = 0.$$

La descripción de posición tiene un grado de libertad y no exige igualdad de magnitudes de aceleración.

Demostración. Diferenciar dos veces la longitud da las relaciones. Elegir y_2 determina $y_1 = L - 2y_2$, de modo que proposición 11.3 cuenta una variable libre. Si $a_2 \neq 0$, la relación implica $|a_1| = 2|a_2|$, no igualdad. □

El coeficiente dos tiene aquí dos manifestaciones relacionadas con la misma geometría. Dos tramos cambian de longitud cuando se mueve la polea y dos tracciones de magnitud T tiran hacia arriba de ella. La carga móvil recibe así una fuerza ascendente total $2T$ en el modelo de polea de masa despreciable. Si se introduce un lazo corto que conecta polea y carga, su tensión sería $2T$, no T: es otra cuerda, cuyo balance debe distinguirse.

No sumamos una tercera tracción sobre la carga por haber mencionado ese lazo: o estudiamos el conjunto carga–polea y sus dos tracciones externas, o separamos la polea y transmitimos el resultado mediante el lazo. Mezclar ambas elecciones duplicaría fuerzas. El mismo cuidado con receptores del capítulo 10 sigue siendo necesario.

Proposición 11.11 — Dinámica de la polea móvil cargada. Bajo gravedad uniforme, masas positivas y las idealizaciones anteriores,

$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_1}{m_2 + 4m_1} g, \qquad a_1 = -2a_2, \qquad T = \frac{3m_1 m_2}{m_2 + 4m_1} g.$$

Demostración. Los balances descendentes son

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \qquad m_2 g - 2T = m_2 a_2.$$

Proposición 11.10 da $a_1 = -2a_2$, por lo que el primer balance produce $T = m_1 g + 2m_1 a_2$. Sustituir en el segundo da $(m_2 - 2m_1)g = (m_2 + 4m_1)a_2$. El denominador es positivo; despejar y sustituir proporciona las expresiones. La tensión es positiva, compatible con la tracción de la cuerda. □

Las masas que producen aceleración nula no son iguales: la condición es $m_2 = 2m_1$. La carga móvil recibe dos tracciones y el cuerpo del extremo una. Este balance no implica una regla general que multiplique fuerza sin modificar movimiento. La longitud obliga simultáneamente a una razón de desplazamientos. No desarrollamos aquí trabajo ni potencia; basta notar que conservar sólo el factor de fuerza y olvidar la relación geométrica dejaría incompletas las ecuaciones.

También conviene evitar una regla basada únicamente en contar poleas visibles. El factor aparece al contar tramos variables de la longitud respecto de una coordenada concreta. Una polea fija puede cambiar dirección sin introducir el mismo factor. Un conjunto con otra ruta de cuerda, soportes

móviles o ángulos variables requiere reconstruir la longitud. Los coeficientes constantes de este ejemplo no se transfieren automáticamente.

Los límites sirven para comprobar el resultado. Si m_2 es mucho mayor que m_1, la carga móvil tiene aceleración próxima a g descendente y el extremo ligero acelera hacia arriba con magnitud próxima a $2g$. Que esa magnitud supere g no viola una cota universal: el cuerpo ligero recibe tensión además de peso. La fuerza transmitida debe producir esa aceleración en su balance individual.

Principio metodológico 11.8 — Contar tramos y receptores, no símbolos. Obtén el factor cinemático de los tramos que cambian de longitud y el factor de fuerza de las tracciones sobre el receptor elegido. Si hay varias cuerdas o uniones, asigna incógnitas distintas hasta que un balance justifique relacionarlas.

Ejercicios. Ejercicio 11.15. En proposición 11.11, toma $m_1 = m$ y $m_2 = 3m$. Calcula las aceleraciones y la tensión, y verifica ambos balances. Compara con la afirmación de que los dos cuerpos deben acelerar con igual magnitud porque los une una cuerda.

Solución. $a_2 = g/7$, $a_1 = -2g/7$ y $T = 9mg/7$. Sobre el cuerpo del extremo,

$$mg - \frac{9mg}{7} = -\frac{2mg}{7} = ma_1.$$

Sobre la carga móvil, $3mg - 2\frac{9mg}{7} = \frac{3mg}{7} = 3ma_2$. Se verifica también $a_1 + 2a_2 = 0$. La igualdad de magnitudes no es compatible con esta longitud salvo que ambas aceleraciones sean cero. Una misma tensión transmitida no produce aceleraciones iguales en geometrías ni receptores diferentes.

Ejercicio 11.16. En la misma geometría, elige $m_2 = 2m_1$. Calcula tensión y aceleraciones. ¿El balance obliga al reposo? Propón datos de velocidad compatibles que produzcan movimiento uniforme mientras permanezca disponible la geometría.

Solución. proposición 11.11 da $a_1 = a_2 = 0$ y $T = m_1 g$, de modo que $2T = m_2 g$. No obliga al reposo. Podemos elegir $v_2 = V$ descendente y $v_1 = -2V$ ascendente, con cualquier V compatible con el intervalo físico considerado. Esas velocidades constantes preservan $y_1 + 2y_2 = L$ si las posiciones iniciales ya lo satisfacen. El movimiento termina de ajustarse a este modelo si un cuerpo encuentra un límite geométrico o cambia alguna idealización; equilibrio de fuerzas no garantiza disponibilidad indefinida del recorrido.

Las ocho secciones fijan el método de este capítulo: expresar el vínculo, contar variables mediante una reconstrucción local, comprobar datos y deducir las relaciones de aceleración antes de resolver fuerzas. Las secciones siguientes estudian vínculos móviles, contactos curvos y varias relaciones simultáneas, y reunirá sus condiciones de validez sin anticipar el formalismo del capítulo 25.

9. Vínculos móviles y coordenadas relativas

Una guía puede trasladarse sin cambiar su forma. La posición del cuerpo respecto de ella facilita la descripción geométrica, aunque las aceleraciones que entran en Newton sigan medidas en el marco inercial. Esta diferencia requiere mantener el movimiento del soporte en las ecuaciones.[6]

Definición 11.10 — Movimiento prescrito de un vínculo. Una posición de soporte $\mathbf{c}(t)$ es prescrita cuando el modelo la proporciona como función conocida del tiempo. No se determina entonces resolviendo Newton para ese soporte. Si debe calcularse a partir de fuerzas y datos, su posición es una variable dinámica adicional del sistema elegido.

[6]Kleppner–Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 2, §2.4, ejemplo 2.4, pp. 74–75. El pasaje aporta geometrías con soportes móviles. Definiciones 11.10–11.11 y proposición 11.12 desarrollan explícitamente el cambio de variables con orientación fija, sin atribuir al ejemplo un tratamiento de ejes giratorios.

Un motor puede imponer aproximadamente una trayectoria conocida al soporte; para estudiar el movimiento de la partícula podemos usar esa trayectoria como dato. Si queremos averiguar qué fuerza necesita el motor o cómo responde un soporte libre, debemos ampliar el sistema y sus balances. La geometría no cambia al modificar la pregunta, pero sí cambia qué información está dada y qué incógnitas debemos resolver.

Definición 11.11 — Coordenada relativa a un soporte en traslación. Para un soporte de posición $\mathbf{c}(t)$ y un cuerpo de posición inercial $\mathbf{r}(t)$, definimos $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$. En ejes de orientación fija,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{c}}, \qquad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{c}}.$$

La orientación fija es parte de la definición usada aquí. No estamos calculando derivadas en una base que rote con el soporte. Si éste rota, las derivadas de la base introducen términos adicionales; no se pueden trasladar sin cambios las fórmulas presentes.

Proposición 11.12 — Circunferencia de centro móvil prescrito. Si una partícula conserva $\|\mathbf{q}\| = R$, con $R > 0$ constante y $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{c}(t)$, entonces

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{c}}) = 0,$$

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{a} - \ddot{\mathbf{c}}) = -\|\mathbf{v} - \dot{\mathbf{c}}\|^2.$$

A un tiempo fijado, la partícula mantiene un grado de libertad de posición sobre un arco regular si $\mathbf{c}(t)$ está prescrita.

Demostración. Diferenciar $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = R^2$ una y dos veces da las relaciones de la proposición 11.6 aplicadas a $\mathbf{q}$. Sustituir las derivadas de la definición 11.11 produce las expresiones. A tiempo fijado, el centro es conocido y un ángulo local determina $\mathbf{r} = \mathbf{c} + R(\cos\theta, \sin\theta)$; por la proposición 11.3 queda una coordenada libre. □

La velocidad relativa es tangente a la circunferencia; la velocidad inercial no tiene por qué ser perpendicular al radio instantáneo. Puede incluir la velocidad de traslación del centro. Del mismo modo, la aceleración inercial contiene la aceleración del soporte además de la requerida por el movimiento relativo. Una fotografía del círculo no permite omitir esas contribuciones.

Newton sigue siendo $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Sustituir definición 11.11 lo reescribe como $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{c}}$. En este cálculo, el término restado procede del cambio de variable: no lo añadimos al diagrama inercial como una nueva interacción física sobre el cuerpo. Así podemos usar una coordenada relativa sin confundirla con una aceleración absoluta. El tratamiento general de marcos no inerciales tendrá su lugar posterior.

Si el centro puede moverse horizontalmente con coordenada desconocida X, la descripción conjunta $\mathbf{r} = (X + R\cos\theta, R\sin\theta)$ tiene dos posiciones independientes, X y θ, en un arco regular. Dar después una función prescrita $X(t)$ elimina una de esas elecciones a tiempo fijado. No vuelve imposible el movimiento: sólo cambia cuáles de sus partes se determinan dentro del problema.

Una medición relativa debe indicar respecto de qué soporte se tomó. Si el laboratorio mide la velocidad del cuerpo y la del centro por separado, primero se restan para obtener la velocidad que aparece en la proposición 11.12. Si el instrumento acompaña al centro sin girar y entrega directamente esa velocidad relativa, no se vuelve a restar el movimiento del centro. Hacerlo dos veces daría una condición radial falsa. La misma regla se aplica a la aceleración: reconstruir la magnitud inercial exige sumar la aceleración prescrita del soporte una sola vez. Esta comprobación de referencias precede al uso de números y permite interpretar correctamente ejercicio 11.18.

Principio metodológico 11.9 — Distinguir coordenada útil y aceleración física. Usa posiciones relativas para expresar el vínculo, conserva el movimiento del soporte al derivar y escribe Newton en el marco declarado. Indica si el soporte es una incógnita del sistema o una trayectoria externa conocida.

Ejercicios. Ejercicio 11.17. Una plataforma horizontal tiene altura prescrita $y_s(t) = y_0 + At^2/2$. Un cuerpo mantiene contacto con ella bajo peso y normal. Obtén sus velocidad y aceleración verticales, la normal y su condición de admisibilidad. ¿Queda fijado su movimiento horizontal?

Solución. El contacto sostenido impone $y = y_s$, de donde $v_y = At$ y $a_y = A$. Newton vertical exige $N = m(g + A)$, admisible sólo si $A \geq -g$ y los datos iniciales acompañan la plataforma. Si $A < -g$, la normal sería negativa y la rama se rechaza. La relación de altura no fija la coordenada horizontal: para un soporte liso infinito y sin fuerza horizontal, la velocidad horizontal será constante según sus datos, no necesariamente cero. El soporte móvil impone una parte del movimiento y no toda la historia.

Ejercicio 11.18. El centro de una guía circular de radio 2 m tiene aceleración $(1, 0)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. En un instante, la posición relativa del cuerpo es $(2, 0)\,\mathrm{m}$ y su velocidad relativa $(0, 3)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Determina la condición sobre su aceleración inercial y compárala con la guía fija.

Solución. proposición 11.12 da $2(a_x - 1) = -9$ y, por tanto, $a_x = -3{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. La guía fija habría requerido $a_x = -4{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, como en el ejercicio 11.9. La componente tangencial instantánea a_y no queda fijada por esta relación normal y necesita el balance de fuerzas. El cálculo no exige conocer la velocidad absoluta del centro si ya se dio la velocidad relativa, pero ésta no debe confundirse con la velocidad del cuerpo respecto del suelo.

10. Cuña móvil y geometría compartida

Una cuña que desliza sobre una mesa muestra por qué una aceleración relativa no debe entrar sola en Newton. El cuerpo que baja sobre ella se mueve respecto de la cuña y ésta se mueve respecto de la mesa. Usaremos coordenadas que reconstruyan ambas posiciones, conservando ejes inerciales horizontales y verticales.[7]

$$x = X + s\cos\alpha,\; y = s\sin\alpha$$

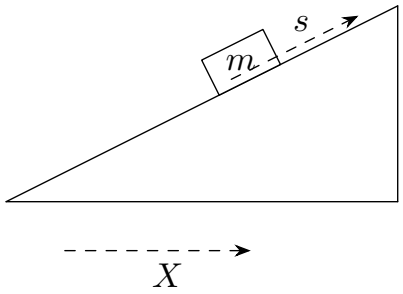


Figura 11.6. Si X sitúa el pie izquierdo de la cuña y s mide la distancia del bloque cuesta arriba, $x = X + s\cos\alpha$ e $y = s\sin\alpha$. La posición horizontal mezcla ambas coordenadas. Véase §10.

[7] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.4, ejemplo 2.4(a), p. 74. Se usa la relación geométrica de la cuña; el sistema libre de la proposición 11.14 y sus reacciones se obtienen en el texto mediante Newton para ambos cuerpos.

Sea la pendiente ascendente hacia la derecha, con $0 < \theta < \pi/2$. La cuña tiene masa $M > 0$ y posición horizontal X. Un cuerpo de masa $m > 0$ desliza sin fricción sobre su plano. Elegimos

$$e_t = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad e_n = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

Definición 11.12 — Coordenada de deslizamiento sobre una cuña en traslación. Mientras persiste el contacto y la cuña conserva orientación fija, describimos la posición del cuerpo mediante

$$\mathbf{r} = Xe_x + se_t + \mathbf{r}_*,$$

con $\mathbf{r}_*$ constante y s firmado hacia arriba de la pendiente. X y s son las dos coordenadas independientes de posición del conjunto en esta rama. La mesa se declara lisa y la cuña se mantiene horizontalmente orientada, sin vuelco. El modelo trata su traslación y omite la dinámica rotacional; supone además una distribución y geometría capaces de mantener el apoyo. Estas hipótesis evitan convertir un resultado de traslación en una afirmación sobre la estabilidad de cualquier cuña real.

Proposición 11.13 — Aceleraciones de un cuerpo sobre una cuña móvil. Con $A = \ddot{X}$, la aceleración del cuerpo es

$$\mathbf{a} = Ae_x + \ddot{s}e_t.$$

En componentes adaptadas al plano, $a_t = A\cos\theta + \ddot{s}, \qquad a_n = -A\sin\theta.$

Demostración. Derivar dos veces definición 11.12 produce la primera expresión porque la orientación es fija. Sus productos escalares con e_t y e_n dan las otras. La posición relativa normal constante elimina la aceleración normal relativa, pero no la componente normal inercial de Ae_x. □

El último término es decisivo. Escribir $a_n = 0$ para el cuerpo equivaldría a tratar el plano como fijo, aunque se haya declarado cuña móvil. La posición normal sólo es constante respecto de la cuña. El contacto debe producir también la parte de aceleración inercial que acompaña su desplazamiento.

Proposición 11.14 — Cuña libre y cuerpo sin fricción. Bajo gravedad uniforme, contacto liso y mesa lisa, sin otra fuerza horizontal sobre la cuña, la rama de contacto satisface

$$A = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta},$$

$$\ddot{s} = -\frac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}, \qquad N = \frac{mMg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}.$$

Demostración. Sobre el cuerpo actúan peso y Ne_n. Newton tangencial con la proposición 11.13 da $m(A\cos\theta + \ddot{s}) = -mg\sin\theta$. Newton normal da $-mA\sin\theta = N - mg\cos\theta$, o $N = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$. La cuña recibe la reacción opuesta del cuerpo, cuya componente horizontal es $N\sin\theta$; la mesa no aporta fuerza horizontal, así que $MA = N\sin\theta$. Sustituir N produce $(M + m\sin^2\theta)A = mg\sin\theta\cos\theta$. El denominador es positivo. Despejar y volver a los otros balances da las fórmulas. También $N > 0$ bajo las hipótesis angulares y de masas, por lo que el contacto calculado es admisible. □

El cuerpo y la cuña reciben fuerzas de contacto opuestas, pero sus aceleraciones no son opuestas de igual magnitud. El cuerpo tiene movimiento vertical y relativo además de la traslación compartida. En las ecuaciones individuales aparecen esas componentes y masas diferentes. La tercera ley no reemplaza proposición 11.13 ni determina la razón de aceleraciones.

La mesa debe sostener verticalmente la cuña. La reacción del cuerpo sobre ella tiene componente vertical $-N\cos\theta$, de modo que la normal total de la mesa es $Mg + N\cos\theta > 0$ en este modelo de

traslación. Esto comprueba el signo del apoyo sin desarrollar el problema de momentos y vuelco, que quedó fuera de las hipótesis.

Si la cuña está sujeta, el soporte suministra además fuerza horizontal y ya no vale $MA = N\sin\theta$ para una cuña libre. La condición $A = 0$ produce $\ddot{s} = -g\sin\theta$ y $N = mg\cos\theta$, el plano fijo del capítulo 10. Cambiar el modo de sostener la cuña modifica un balance físico, aunque su ecuación geométrica instantánea conserve la forma.

Principio metodológico 11.10 — Reconstruir la aceleración del receptor. Antes de proyectar Newton, expresa la posición inercial mediante las coordenadas compartidas y derívala. Escribe por separado el balance del soporte cuando éste sea libre. Una posición relativa constante no implica una aceleración inercial nula.

Ejercicios. Ejercicio 11.19. En proposición 11.14, toma $M = 3\,\mathrm{kg}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\theta = 30^\circ$ y $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Calcula A, $\ddot{s}$ y N, y verifica el balance horizontal de la cuña.

Solución. El denominador es $3 + 1/4 = 13/4$ en kilogramos. Las expresiones dan

$$A = \frac{10\sqrt{3}}{13}\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \qquad \ddot{s} = -\frac{80}{13}\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \qquad N = \frac{60\sqrt{3}}{13}\,\mathrm{N}.$$

La cuña satisface $MA = 30\sqrt{3}/13\,\mathrm{N} = N\sin 30^\circ$. Sobre el cuerpo, $a_n = -A/2$; no es cero. Su aceleración horizontal es $A + \ddot{s}\cos 30^\circ = -30\sqrt{3}/13\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, coherente con la fuerza horizontal $-N/2$ dividida por su masa. El movimiento relativo cuesta abajo y la cuña hacia la derecha se combinan en el marco inercial.

Ejercicio 11.20. Mantén m y θ fijos y examina las expresiones de la proposición 11.14 cuando M crece sin cota. Compara ese límite con una cuña sujeta. ¿Permite concluir que una cuña de masa finita está exactamente inmóvil?

Solución. Al dividir numeradores y denominador por M, se obtiene $A \to 0$, $\ddot{s} \to -g\sin\theta$ y $N \to mg\cos\theta$. Coinciden con los resultados del soporte fijo como límite de masas. Para cualquier M finita y ángulo interior, el numerador de A es positivo y $A > 0$: la cuña libre no está exactamente inmóvil. La cuña sujeta tiene $A = 0$ porque una interacción externa modifica su balance horizontal, no porque se le haya asignado una masa grande. El límite aproxima una respuesta; no elimina una fuerza que el caso sujeto requiere.

11. Péndulo y reacción en un vínculo curvo

Una cuerda tensa puede restringir una masa a una circunferencia sin imponer rapidez constante. Para estudiar el péndulo basta distinguir la ecuación tangencial que modifica esa rapidez y el balance radial que determina la tensión. No resolveremos todavía su período ni su evolución mediante energía.[8]

[8] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 2, §2.4, ejemplo 2.6, p. 76: movimiento circular vertical y tensión admisible. Se declara una convención angular desde la vertical inferior y se derivan las ecuaciones exactas; no se desarrolla la aproximación de ángulo pequeño ni el periodo.

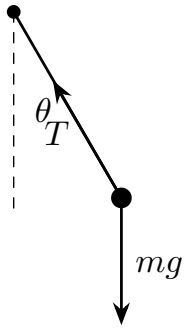


Figura 11.7. Sobre la masa del péndulo actúan peso y tensión. La tensión apunta al soporte; la componente radial de Newton contiene mv^2/ℓ, aunque la longitud sea constante. Véase §11.

Definición 11.13 — Péndulo simple en la rama tensa. El modelo consta de una masa puntual $m > 0$ unida a un punto fijo por una cuerda ideal de longitud $\ell > 0$, bajo gravedad uniforme. El movimiento es plano; se desprecia resistencia. La igualdad de distancia ℓ sólo se mantiene cuando la cuerda está tensa y la tensión calculada es admisible.

Medimos θ desde la vertical descendente y elegimos

$$\mathbf{r} = \ell(\sin\theta, -\cos\theta), \qquad e_r = (\sin\theta, -\cos\theta), \qquad e_\theta = (\cos\theta, \sin\theta).$$

La aceleración es $-\ell\dot\theta^2 e_r + \ell\ddot\theta e_\theta$. Estos vectores de base cambian con el ángulo; la expresión procede de derivar la posición completa, como en el capítulo 8, no de tratar la base como constante.

Proposición 11.15 — Ecuación angular y tensión del péndulo. Durante una rama tensa regular,

$$\ddot\theta = -\frac{g}{\ell}\sin\theta, \qquad T = m(g\cos\theta + \ell\dot\theta^2).$$

Demostración. La fuerza de cuerda es $-Te_r$ y el peso $-mge_y$. Sus componentes tangenciales suman $-mg\sin\theta$; Newton da $m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta$. Radialmente, el peso aporta $mg\cos\theta$ y Newton es $-m\ell\dot\theta^2 = mg\cos\theta - T$. Despejar las dos ecuaciones produce las expresiones. □

La tensión no es siempre $mg\cos\theta$. La diferencia $m\ell\dot\theta^2$ produce la aceleración hacia el centro necesaria para la curva. En el punto inferior, $T = mg + m\ell\dot\theta^2$, mayor que mg si el cuerpo se mueve. En un punto de retorno con velocidad angular cero, el término cinemático desaparece, pero el balance tangencial puede seguir dando aceleración no nula.

Proposición 11.16 — Admisibilidad de la rama tensa del péndulo. La fórmula de la proposición 11.15 es compatible con una cuerda flexible sólo si

$$g\cos\theta + \ell\dot\theta^2 \geq 0.$$

En posiciones con $\cos\theta < 0$, esto exige $\dot\theta^2 \geq -g\cos\theta/\ell$. La condición comprueba la tensión de la rama; en igualdad, su continuación requiere examinar la evolución y no sólo ese valor instantáneo.

Demostración. definición 10.7 exige $T \geq 0$. Como $m > 0$, sustituir proposición 11.15 equivale a la desigualdad. Cuando $\cos\theta < 0$, despejar el término cuadrático da el límite indicado. La igualdad permite tensión cero y no determina por sí misma las fuerzas ni la geometría posteriores. □

Una varilla rígida bilateral permite una fuerza axial de ambos signos dentro del modelo. Puede sostener una masa en una posición donde la cuerda tendría que empujar. Cambiar cuerda por

varilla conserva una igualdad de distancia y cambia la interacción admisible. La geometría sola no distingue esos dispositivos.

La ecuación angular tiene un resultado útil aun sin resolverla: en $0 < \theta < \pi$, la aceleración angular es negativa. Esto no impone velocidad angular negativa en ese instante; puede estar frenando una velocidad positiva. Tampoco permite calcular una rapidez en otra posición sin integrar la dinámica o usar herramientas posteriores. Una condición local en el punto superior no se debe anunciar como un umbral de lanzamiento desde el punto inferior sin el cálculo que los conecte.

Principio metodológico 11.11 — Separar ecuación tangencial y capacidad radial. Obtén la aceleración normal desde la curva, determina la tensión por Newton radial y comprueba su signo. Usa el balance tangencial para la evolución de la rapidez. No extrapoles un control instantáneo a todo el recorrido.

Ejercicios. Ejercicio 11.21. Un péndulo tiene $\theta = \pi/3$ y velocidad angular nula en un instante de su rama tensa. Calcula tensión y aceleración angular. ¿La velocidad nula implica equilibrio?

Solución. proposición 11.15 da $T = mg/2 > 0$ y $\ddot{\theta} = -\sqrt{3}g/(2\ell)$. La rama es admisible y la aceleración tangencial no es cero. El reposo instantáneo no es equilibrio: el peso tiene una componente tangencial que inicia o cambia el movimiento. La aceleración radial sí es cero en ese instante porque la rapidez es cero; eso no elimina la aceleración completa.

Ejercicio 11.22. La masa pasa por el punto superior con rapidez V. Calcula la tensión y la condición local para una rama tensa. ¿El resultado basta para fijar una rapidez mínima inicial en el punto inferior?

Solución. En $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$ y $\ell\dot{\theta}^2 = V^2/\ell$. Por tanto, $T = m(V^2/\ell - g)$ y la rama exige $V^2 \geq g\ell$. El resultado se refiere a la rapidez ya dada en el punto superior. No establece cómo se relaciona con una rapidez inicial inferior: falta resolver la evolución y controlar la tensión en el recorrido. La igualdad corresponde a tensión nula, cuyo mantenimiento no se deduce sólo del dato instantáneo.

Ejercicio 11.23. La masa está en el punto superior con velocidad cero. Compara una cuerda flexible con una varilla bilateral ideal. Determina una continuación inicial admisible para la cuerda y la fuerza axial que requiere el reposo con varilla.

Solución. La rama circular de cuerda exigiría $T = -mg$ y es inadmisible. Con cuerda floja y origen en el punto de suspensión, la posición inicial es $(0, \ell)$ y la caída libre inicial da $\mathbf{r}(t) = (0, \ell - gt^2/2)$: para tiempos positivos suficientemente pequeños, la distancia es menor que ℓ y la cuerda no tracciona. La solución verifica la rama floja sin mantener artificialmente la circunferencia. La varilla puede ejercer fuerza $+mge_r$, hacia arriba en el punto superior, y equilibrar el peso. Si se expresa como $-Se_r$, su componente axial firmada es $S = -mg$, una compresión admisible para la varilla. No se afirma aquí estabilidad de ese equilibrio.

12. Contacto unilateral y pérdida del vínculo

Una guía bilateral impone su geometría mediante fuerzas de cualquiera de los dos signos. Una superficie de apoyo sólo puede empujar al cuerpo hacia la región accesible. La diferencia cambia la lectura de una solución: primero se calcula la reacción que exigiría el contacto y después se comprueba que la superficie puede ejercerla. Si el signo es imposible, la ecuación de contacto deja de describir la trayectoria.

Definición 11.14 — Separación y rama de contacto. Para un obstáculo circular fijo de radio $R > 0$, centrado en el origen y accesible por el exterior, definimos $h = |\mathbf{r}| - R$. La región

permitida es $h \geq 0$. El contacto activo tiene $h = 0$ y una reacción Ne_r, con $N \geq 0$, dirigida hacia afuera. En una rama separada, $h > 0$ y $N = 0$. Estas condiciones se resumen como $h \geq 0$, $N \geq 0$, $Nh = 0$. El producto nulo expresa que no hay fuerza de contacto a distancia; no sustituye a las ecuaciones de movimiento ni describe por sí solo un impacto.

El modelo supone superficie lisa, punto material, movimiento plano y gravedad uniforme. Se estudian ramas suaves, con posiciones y velocidades iniciales compatibles. La llegada con velocidad normal no nula requiere una ley de impacto que no se desarrolla en este capítulo. Tampoco se supone que toda solución que alcanza $N = 0$ deba separarse inmediatamente: hay que estudiar la continuación.

En esta sección medimos θ desde la **vertical superior**. La convención es distinta de la del péndulo y se declara antes de proyectar:

$$e_r = (\sin\theta, \cos\theta), \qquad e_\theta = (\cos\theta, -\sin\theta).$$

Mientras hay contacto, $\mathbf{r} = Re_r$, $\mathbf{v} = R\dot{\theta}e_\theta$ y

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R}e_r + R\ddot{\theta}e_\theta, \qquad v^2 = R^2\dot{\theta}^2.$$

La componente radial de la aceleración apunta hacia el centro incluso cuando la fuerza de contacto apunta hacia afuera. El peso debe aportar la diferencia. No se pueden identificar dirección de aceleración y dirección de reacción.

Proposición 11.17 — Reacción en la cara exterior de una circunferencia. En una rama de contacto del modelo anterior,

$$N = m\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{R}\right), \qquad R\ddot{\theta} = g\sin\theta.$$

La rama exige $v^2/R \leq g\cos\theta$.

Demostración. El peso $(0, -mg)$ tiene componentes $-mg\cos\theta$ sobre e_r y $mg\sin\theta$ sobre e_θ. Newton da $-mv^2/R = N - mg\cos\theta$ y $mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta$. La primera igualdad fija la reacción; la segunda fija la aceleración tangencial. La desigualdad procede de $N \geq 0$, no de una nueva ecuación geométrica. En particular, si $\cos\theta < 0$, ninguna rapidez permite esta rama exterior bajo las fuerzas especificadas. □

Una partícula sobre una superficie curva no tiene, en general, la reacción $mg\cos\theta$ de un plano fijo. Aquí el término mv^2/R es indispensable. La curvatura exige aceleración normal y modifica cuánto debe empujar la superficie. Esta distinción usa la misma cinemática radial que el péndulo, pero con otro sentido de reacción y otra región accesible.[9]

Proposición 11.18 — Rechazo local de una reacción negativa. Supongamos $h = 0$, $\dot{h} = 0$ y velocidad tangencial de magnitud v en un instante inicial. Si proposición 11.17 exige $N < 0$, la continuación libre bajo el peso abre una separación positiva para tiempos suficientemente pequeños.

Demostración. Para $\rho = |\mathbf{r}| > 0$, diferenciamos $\rho^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ dos veces. Resulta $\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} = |\mathbf{v}|^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$. En el instante inicial, $\rho = R$, $\dot{\rho} = 0$ y la aceleración libre es $(0, -g)$. Por tanto,

$$\ddot{h} = \frac{v^2}{R} - g\cos\theta.$$

[9]La comparación con el vínculo circular de Kleppner–Kolenkow, ejemplo 2.6, p. 76, motiva distinguir aceleración radial y capacidad física del vínculo. El obstáculo exterior, proposiciones 11.17–11.18 y la separación de orden cuatro del ejercicio 11.25 se construyen y prueban aquí; no se atribuye ese caso completo al ejemplo bibliográfico.

La condición $N < 0$ de la proposición 11.17 hace positiva esta cantidad. Con $h(0) = \dot{h}(0) = 0$, la expansión $h(\tau) = \frac{1}{2}\ddot{h}(0)\tau^2 + o(\tau^2)$ implica $h(\tau) > 0$ para $\tau > 0$ suficientemente pequeño. La caída libre satisface entonces la región accesible y $N = 0$. La trayectoria circular que exigía una superficie atractiva se descarta. □

Esta prueba decide una situación local concreta. No establece toda la historia posterior ni garantiza ausencia de nuevos encuentros. Además, cuando $N = 0$, el término cuadrático puede anularse: conocer aceleración normal nula de separación no basta para decidir el contacto. El ejercicio siguiente muestra una apertura de orden superior sin recurrir al trabajo ni a una integral de energía.

Principio metodológico 11.12 — Resolver y comprobar un contacto. Declara la región accesible y el signo de la reacción. Resuelve Newton con la igualdad geométrica activa. Comprueba el signo de la fuerza obtenida y la compatibilidad inicial de posición y velocidad. Si la fuerza requerida es negativa, pasa a la rama sin contacto y verifica que su trayectoria entre en la región permitida. Si la fuerza es cero, estudia la continuación en lugar de decidir sólo por ese valor. Una velocidad que atraviesa la superficie requiere otro modelo, no una corrección arbitraria de signos.

Ejercicios. Ejercicio 11.24. Una partícula toca la cara exterior con $\theta = \pi/3$ y $v^2/R = g/4$. Calcula la reacción y la aceleración tangencial. Decide si el signo permite la rama.

Solución. proposición 11.17 da $N = m(g/2 - g/4) = mg/4 > 0$ y $a_\theta = R\ddot{\theta} = \sqrt{3}g/2$. La aceleración radial es $-g/4$ sobre e_r. El contacto es admisible en ese instante; por continuidad de una solución suave y del valor positivo de N, permanece admisible en un intervalo suficientemente pequeño si los restantes datos pertenecen a la rama. No se ha determinado el primer instante futuro de pérdida del contacto.

Ejercicio 11.25. En el punto superior $\mathbf{r}(0) = (0, R)$, la velocidad es horizontal $(V, 0)$. Examina la continuación libre para $V^2 = 2gR$ y para $V^2 = gR$. ¿La igualdad $N = 0$ garantiza contacto persistente?

Solución. En el primer caso, proposición 11.17 exige $N = m(g - 2g) = -mg$. La rama circular es inadmisible y proposición 11.18 da $\ddot{h} = g > 0$. La trayectoria libre es $\mathbf{r}(t) = (Vt, R - gt^2/2)$. Su norma al cuadrado vale

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = R^2 + (V^2 - gR)t^2 + \frac{g^2t^4}{4}.$$

Para $V^2 = 2gR$, es mayor que R^2 en tiempos positivos y confirma la separación. Para $V^2 = gR$, la reacción candidata inicial y $\ddot{h}(0)$ son cero, pero la misma expresión queda $R^2 + g^2t^4/4 > R^2$ para $t > 0$. La rama libre es admisible y abre $h(t) = g^2t^4/(8R) + o(t^4)$. Por eso, el valor nulo de la reacción en un solo instante no garantiza permanencia. Se ha comprobado una continuación local separada; no se ha introducido una ley de impacto ni una regla universal para todos los contactos marginales.

13. Sistemas con varias cuerdas

Una segunda cuerda aporta su propia conservación de longitud. También aporta su propia tensión, salvo que un balance justifique una relación con la tensión de otra cuerda. Confundir ambas afirmaciones produce dos errores frecuentes: contar las mismas posiciones varias veces y transmitir una única tensión a través de cuerdas físicamente distintas.

Definición 11.15 — Cuerdas distintas y tensiones asignadas. En el modelo ideal, cada cuerda continua, inextensible y tensa tiene longitud fija y una magnitud de tensión común a sus tramos si las poleas correspondientes satisfacen las hipótesis ideales. A cuerdas distintas se les

asignan inicialmente tensiones distintas. La igualdad o proporción entre ellas debe resultar de las ecuaciones de los cuerpos o de las poleas, no del hecho de pertenecer al mismo montaje.

Consideremos una máquina doble de Atwood. Una cuerda superior pasa por una polea fija: un extremo sostiene m_1 y el otro sostiene el centro de una polea inferior móvil. Una cuerda inferior pasa por esta segunda polea y sostiene m_2 y m_3. Las tres masas son positivas; las poleas y cuerdas son ideales, los tramos móviles son verticales y no hay contactos entre los cuerpos. La geometría mantiene los arcos constantes en el intervalo considerado. Denotamos por Y la altura del centro inferior y por y_1, y_2, y_3 las alturas de las masas, todas positivas **hacia abajo**, respecto de referencias fijas.

Las longitudes constantes se escriben

$$y_1 + Y = C_1, \qquad y_2 + y_3 - 2Y = C_2.$$

En la cuerda inferior, subir o bajar el centro altera los dos tramos rectos. El signo menos procede de medir cada longitud desde ese centro hasta el cuerpo situado debajo. Las constantes recogen las partes fijas y las referencias elegidas; su valor no altera las relaciones entre velocidades o aceleraciones.[10]

Proposición 11.19 — Geometría y grados de libertad de la máquina doble. El sistema tiene dos grados de libertad de posición en esta rama. Eliminando Y,

$$2y_1 + y_2 + y_3 = C_3, \qquad 2\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3 = 0, \qquad 2a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

con $C_3 = C_2 + 2C_1$.

Demostración. La primera longitud da $Y = C_1 - y_1$. Sustituirla en la segunda produce $y_3 = C_3 - 2y_1 - y_2$. Por tanto, elegidos y_1 y y_2 dentro de un intervalo abierto que respete la disposición física, se recuperan Y y y_3 de modo único. Los cambios independientes de y_1 y y_2 producen cambios de posición de primer orden y no hay una tercera relación de longitud. La parametrización tiene dos parámetros regulares. Diferenciar la igualdad eliminada da las otras dos relaciones. □

Se puede contar con cuatro alturas y dos ecuaciones independientes, o con tres alturas de masas y una ecuación después de eliminar el centro. Ambos procedimientos dan dos. Contar tres masas y restar dos cuerdas olvidando que la segunda polea tiene posición móvil daría uno y describiría otro sistema.

Proposición 11.20 — Dinámica de la máquina doble ideal. Si T es la tensión inferior y T_U la superior, entonces

$$T_U = 2T, \qquad T = \frac{4g}{4/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3},$$
$$a_1 = g - \frac{2T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{T}{m_3}.$$

Demostración. La polea inferior recibe dos tracciones T hacia abajo y una T_U hacia arriba. Su balance ideal de masa despreciable exige $T_U = 2T$; se usa el balance límite del capítulo 10, sin dividir una ecuación por masa cero. Newton para las masas, con los ejes declarados, da

$$m_1 g - 2T = m_1 a_1, \qquad m_2 g - T = m_2 a_2, \qquad m_3 g - T = m_3 a_3.$$

[10] David Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2008, cap. 3, §3.6, problema 3.2, p. 71, y §3.8, solución 3.2, pp. 84–85. Se adapta la máquina doble a coordenadas positivas hacia abajo. El conteo por eliminación y las verificaciones de datos iniciales se explicitan localmente.

Al sustituir estas aceleraciones en la proposición 11.19, $0 = 4g - T\left(\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)$.

El coeficiente es positivo; la ecuación tiene la única solución indicada. Las otras fórmulas proceden de los tres balances. Para $g > 0$, ambas tensiones son positivas, lo que permite la rama tensa mientras se mantenga la disposición geométrica. □

La dimensión del denominador es inversa de masa; la de T es fuerza. Los factores cuatro y dos tienen orígenes relacionados, pero no intercambiables: la longitud fija da el factor dos cinemático de a_1 y la polea móvil da el factor dos de fuerza sobre m_1. Ambos entran en el término $4/m_1$ al eliminar las aceleraciones.

Los dos grados de libertad no impiden escribir tres balances para las masas. Las aceleraciones están vinculadas y las reacciones son incógnitas adicionales; resolver el sistema completo permite recuperar las fuerzas. Una reducción puede ser útil, pero debe conservar la información necesaria para calcular tensiones y comprobar su admisibilidad. La uniformidad de tensión dentro de cada cuerda tampoco implica $T_U = T$ entre ambas: el balance de la polea demuestra aquí que esa igualdad sería incorrecta.

Es útil comprobar también la conservación de las dos longitudes originales después de eliminar el centro. Recuperamos $Y = C_1 - y_1$ y sustituimos las posiciones calculadas: la longitud inferior se reduce a $2y_1 + y_2 + y_3 - 2C_1 = C_2$. Si el residuo de la relación eliminada es cero, se recupera la segunda cuerda; si se verifican sólo las aceleraciones, faltan todavía las dos condiciones iniciales de esa relación. No es necesario integrar para verificar los balances de fuerza, pero sí aportar posiciones iniciales para decidir cuánto tiempo permite la disposición física. Una solución con aceleraciones constantes puede alcanzar el extremo de un recorrido finito. En ese evento cambia el problema aunque las fórmulas algebraicas sigan dando valores positivos de tensión. Por eso, positividad de las tensiones y disponibilidad de la geometría son comprobaciones distintas y ambas pertenecen a la interpretación del resultado.

Principio metodológico 11.13 — Separar longitudes y tensiones. Nombra cada cuerda y escribe su longitud con todas las posiciones móviles que alteran sus tramos. Elimina posiciones auxiliares antes de contar parámetros libres. Asigna una tensión a cada cuerda ideal continua y escribe los balances de los elementos que conectan cuerdas distintas. Finalmente resuelve Newton junto con las relaciones de aceleración y comprueba los signos. No impongas igualdad de movimientos sólo porque dos masas sean iguales.

Ejercicios. Ejercicio 11.26. En la máquina doble, las tres masas valen m. Calcula tensiones y aceleraciones, y verifica los balances.

Solución. El denominador de la proposición 11.20 es $6/m$, de modo que $T = 2mg/3$ y $T_U = 4mg/3$. Así $a_1 = -g/3$ y $a_2 = a_3 = g/3$: la masa superior sube y las inferiores bajan. Newton para m_1 da $mg - 4mg/3 = -mg/3$; para cada masa inferior, $mg - 2mg/3 = mg/3$. La geometría da $2(-g/3) + g/3 + g/3 = 0$. Además, $\ddot{Y} = -a_1 = g/3$, compatible con el movimiento del centro inferior. Todas las fuerzas y las longitudes usan el mismo eje descendente.

Ejercicio 11.27. Encuentra las relaciones de masas para que las tres aceleraciones sean cero. ¿Deben estar en reposo?

Solución. Si $a_2 = a_3 = 0$, los balances inferiores exigen $T = m_2 g = m_3 g$, luego $m_2 = m_3$. Si además $a_1 = 0$, $2T = m_1 g$, de donde $m_1 = 2m_2$. Recíprocamente, esas relaciones sustituidas en la proposición 11.20 dan $T = m_2 g$ y las tres aceleraciones nulas. Las velocidades pueden ser constantes y no nulas si satisfacen $2\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3 = 0$. El reposo requiere, además, velocidades iniciales cero. La solución sólo continúa mientras las posiciones permitan los tramos y contactos supuestos.

Ejercicio 11.28. Las tres masas son iguales. En un instante inicial compatible, $\dot{y}_1 = 0$, $\dot{y}_2 = V$ y $\dot{y}_3 = -V$. Decide si la simetría de masas obliga a que $y_2 - y_3$ permanezca constante.

Solución. Los datos satisfacen la longitud diferenciada, pues $2(0) + V - V = 0$. Por ejercicio 11.26, $a_2 = a_3 = g/3$, de modo que la segunda derivada de $y_2 - y_3$ es cero. Su primera derivada inicial es $2V$, y por tanto

$$y_2(t) - y_3(t) = y_2(0) - y_3(0) + 2Vt.$$

La igualdad de aceleraciones no elimina la diferencia inicial de velocidades. El centro inferior tiene $\dot{Y}(0) = 0$ y $\ddot{Y} = g/3$, mientras los extremos pueden desplazarse relativamente con velocidades opuestas. Este movimiento exhibe el segundo grado de libertad. Imponer además $y_2 = y_3$ requeriría posición inicial igual y $V = 0$; la simetría de las ecuaciones no autoriza borrar datos compatibles.

14. Síntesis: conteo, datos y admisibilidad

El conteo geométrico responde cuántas posiciones independientes describen una rama. Newton responde cómo evoluciona con las fuerzas especificadas. Los signos de tensión y reacción responden si los elementos físicos pueden sostener esa rama. Son preguntas conectadas, pero resolver una no equivale a resolver las demás.

Modelo y rama	Parámetros de posición libres	Comprobación física decisiva
Circunferencia fija en un plano	Un ángulo local	Fuerza radial requerida por la rapidez
Circunferencia con centro prescrito	Un ángulo local	Reacción y movimiento conocido del soporte
Cuña libre con partícula en contacto	Desplazamiento de cuña y deslizamiento	Newton de ambos cuerpos y $N \geq 0$
Péndulo de cuerda tensa	Un ángulo local	$T \geq 0$ durante la evolución
Partícula separada de superficie plana o curva	Dos coordenadas en el plano	Región accesible y reacción nula
Máquina doble de Atwood	Dos alturas independientes	Dos longitudes y dos tensiones relacionadas por la polea

El cuadro se refiere a las hipótesis de cada sección. Prescribir un movimiento que antes era incógnita reduce las posiciones libres en un instante, pero introduce datos dependientes del tiempo. Una coordenada ya conocida puede tener velocidad y aceleración no nulas. Tampoco desaparecen las fuerzas necesarias para imponerla.

Para un sistema descrito por n parámetros libres con ecuaciones de segundo orden, normalmente hay que dar n posiciones y n velocidades iniciales compatibles. Este enunciado señala el tipo de datos que usan los modelos del capítulo; no constituye un teorema general de existencia ni cubre impactos o puntos singulares. En una representación con coordenadas redundantes, las posiciones y velocidades deben cumplir las relaciones de vínculo antes de integrar.

Proposición 11.21 — Conservación de relaciones afines a partir de datos compatibles. Sean, en un intervalo, relaciones $\sum_j c_{ij} q_j(t) = b_i(t)$, con coeficientes constantes y funciones dos veces diferenciables. Si se cumplen las relaciones de aceleración $\sum_j c_{ij} \ddot{q}_j = \ddot{b}_i$ y, en un instante inicial,

las relaciones de posición y velocidad, entonces las relaciones de posición se mantienen en todo el intervalo.

Demostración. Para cada ecuación, definimos el residuo $u_i(t) = \sum_j c_{ij}q_j(t) - b_i(t)$. La hipótesis de aceleraciones da $\ddot{u}_i = 0$, así que $u_i(t) = u_i(t_0) + \dot{u}_i(t_0)(t - t_0)$. Las condiciones iniciales hacen cero ambos coeficientes. Luego $u_i(t) = 0$ en todo el intervalo. El argumento no presupone que las relaciones sean independientes; si alguna es redundante, su conservación no añade un grado de restricción. □

Proposición 11.21 explica por qué es legítimo usar ecuaciones de aceleración para las cuerdas del capítulo una vez verificados los datos iniciales. También explica el fallo de usarlas para reparar una longitud inicial errónea: el residuo no desaparece sólo porque su segunda derivada sea cero. En relaciones no afines, hay que volver a diferenciar la geometría completa; proposición 11.6 y proposición 11.12 muestran términos de rapidez que no se pueden omitir.

Las trayectorias deben interpretarse en intervalos donde se cumplen las hipótesis. Si una cuerda pierde tensión, una partícula abandona una superficie o dos cuerpos se encuentran, no se prolonga automáticamente la misma ecuación de vínculo. Se identifican los nuevos datos de posición y velocidad y se formula la rama posterior; cuando existe choque, hace falta un modelo adicional para la discontinuidad de velocidad. Esta limitación no afecta a la validez del cálculo anterior al evento, pero sí a su extensión.

Principio metodológico 11.14 — Cerrar un modelo elemental de vínculos. Revisa la secuencia completa: coordenadas y sentidos positivos; relaciones de posición con sus constantes; eliminación y parámetros libres; velocidades iniciales compatibles; relaciones de aceleración; fuerzas sobre cada cuerpo; solución; signos admisibles; intervalo de validez. Si un resultado contradice una condición unilateral, cambia la rama física. Si contradice la longitud inicial, corrige la formulación del problema antes de interpretar la integración. Conserva las reacciones cuando su valor sea parte de lo que se quiere conocer.

Ejercicios. Ejercicio 11.29. Un cálculo impone $a_1 + 2a_2 = 0$ para una polea móvil, pero empieza con $y_1(0) + 2y_2(0) - L = \delta$ y $\dot{y}_1(0) + 2\dot{y}_2(0) = \eta$. Determina el residuo de longitud y explica cuándo el cálculo representa la cuerda original.

Solución. Sea $u = y_1 + 2y_2 - L$. La ecuación de aceleración implica $\ddot{u} = 0$. Con los datos dados,

$$u(t) = \delta + \eta t.$$

La longitud original se conserva exactamente sólo si $\delta = \eta = 0$. Si $\eta = 0$ y $\delta \neq 0$, se conserva otra longitud, no la declarada. Si $\eta \neq 0$, ni siquiera se conserva una longitud fija. Hacer cero la aceleración del residuo no lo hace cero. Cambiar las posiciones o velocidades iniciales sin una justificación física crea otro problema; un eventual tensado brusco requiere un modelo de transición que aquí no se ha supuesto.

Ejercicio 11.30. Dos masas $m_1, m_2 > 0$ se desplazan en una guía horizontal lisa, con $y_1 = y_2 = 0$. Una varilla bilateral ideal impone $x_2 - x_1 = \ell > 0$. Cuenta los grados de libertad, examina la ecuación adicional $2(x_2 - x_1) = 2\ell$ y prescribe después $x_1 = X_0 + At^2/2$. Un actuador ejerce sobre la masa 2 una fuerza horizontal firmada F. Calcula F y la fuerza axial firmada S, definida positiva hacia la derecha sobre la masa 1.

Solución. De cuatro coordenadas, las dos condiciones de guía fijan las alturas y la varilla permite escribir $x_2 = x_1 + \ell$. Queda una posición libre. La ecuación multiplicada por dos es redundante y no cambia el conteo. Prescribir $x_1 = X(t)$ determina ambas posiciones: quedan cero grados de libertad de posición en cada instante, aunque ambas masas se muevan. Sus aceleraciones son A.

La varilla ejerce S sobre la masa 1 y $-S$ sobre la masa 2, por acción y reacción. Los balances horizontales son $S = m_1 A$ y $F - S = m_2 A$. De aquí

$$S = m_1 A, \qquad F = (m_1 + m_2) A.$$

Las reacciones verticales valen $m_1 g$ y $m_2 g$. La varilla admite ambos signos de S: para $A > 0$ tira de la masa 1 hacia la derecha; para $A < 0$ la empuja hacia la izquierda. Una cuerda flexible no permitiría automáticamente esa segunda rama. La posición prescrita fija el movimiento y determina la fuerza del actuador; imponer simultáneamente una fuerza arbitraria distinta sobredeterminaría ese modelo. El ejemplo muestra que cero posiciones libres no significa ausencia de movimiento, aceleración o fuerzas de vínculo.

La herramienta adquirida es concreta: escribir la geometría que permanece activa, identificar las posiciones verdaderamente libres y combinar sus derivadas con Newton sin perder las condiciones físicas. El capítulo 12 estudiará trabajo, potencia y energía cinética, lo que permitirá comparar estados del movimiento mediante otra forma de organizar las mismas leyes. El formalismo general del espacio de configuración y el principio de d'Alembert se reservan para el capítulo 25.

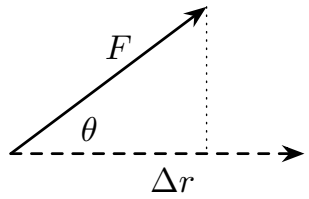
Capítulo 12

Trabajo, potencia y energía cinética

Newton relaciona la fuerza resultante con el cambio de velocidad. En este capítulo extraeremos de esa relación una igualdad escalar que permite comparar rapidez y trabajo a lo largo de una trayectoria. Ganaremos una forma de calcular ciertos resultados sin reconstruir primero toda la historia temporal; habrá que reconocer también qué información se pierde al pasar de vectores a escalares.

1. Fuerza, desplazamiento y trabajo constante

Empujar un cuerpo no produce el mismo efecto sobre su rapidez en cualquier dirección. Una fuerza puede acompañar el movimiento, oponerse a él o desviarlo sin cambiar instantáneamente la rapidez. El producto escalar del capítulo 4 permite distinguir esas situaciones. Para comenzar, tomemos una fuerza constante y un tramo recto de desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$.[1]



$$W = F\,|\Delta r|\cos\theta$$

Figura 12.1. Sólo la componente paralela al desplazamiento contribuye al trabajo de una fuerza constante. La flecha discontinua es un desplazamiento y no una fuerza adicional. Véase §1.

Definición 12.1 — Trabajo de una fuerza constante en un tramo recto. El trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ sobre el punto material durante ese desplazamiento es el escalar

$$W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}.$$

Para magnitudes no nulas, $W = |\mathbf{F}|\,|\Delta\mathbf{r}|\cos\alpha$, donde α es el ángulo entre ambos vectores. La definición incluye trabajo cero si uno de ellos es nulo.

El signo se refiere a la contribución de esa fuerza durante el desplazamiento elegido. Una fuerza en el sentido del tramo tiene trabajo positivo; una fuerza contraria tiene trabajo negativo. Si es perpendicular al tramo, su trabajo es cero. No estamos identificando todavía el trabajo de una fuerza con el cambio de rapidez: sobre el cuerpo pueden actuar otras fuerzas que también hagan trabajo.

[1] Daniel Kleppner y Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 4, §4.6, ejemplo 4.7, p. 165: trabajo de una fuerza uniforme. La suma poligonal se demuestra localmente y se distingue distancia de desplazamiento.

La dimensión de trabajo es fuerza por longitud, ML^2T^{-2}. Su unidad SI es el joule: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$. Que una cantidad tenga esa dimensión no demuestra que sea trabajo; la definición necesita el producto escalar y un receptor. La dimensión permite comprobar un cálculo una vez declarada la magnitud.

«Trabajo» tiene aquí un significado físico preciso. Sostener un objeto inmóvil puede resultar fatigoso para una persona, pero la fuerza ejercida sobre ese punto material realiza trabajo mecánico nulo durante un intervalo en que su posición no cambia. La actividad fisiológica de quien lo sostiene requiere otro sistema y otras formas de intercambio. Tampoco se mide trabajo contando cuánto tiempo se aplica una fuerza: una fuerza puede mantenerse mucho tiempo sin desplazamiento del receptor.

Proposición 12.1 — Trabajo constante sobre un recorrido poligonal. Si la misma fuerza constante $\mathbf{F}$ actúa durante todos los tramos de un recorrido poligonal de A a B, la suma de sus trabajos es

$$W = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

No depende de la longitud total de ese recorrido.

Demostración. Sean $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_A, \dots, \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_B$ los vértices. La suma es $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1})$. Por linealidad del producto escalar, es $\mathbf{F} \cdot \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1})$. La suma interior telescopa y deja $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. □

La hipótesis de una fuerza constante es decisiva. No se puede sacar de la suma una fuerza que cambie de dirección o magnitud entre tramos. En particular, una resistencia siempre opuesta al movimiento cambia de dirección cuando el cuerpo regresa, aunque su magnitud sea constante. Ese caso no cumple proposición 12.1 y no tiene trabajo neto necesariamente nulo en una ida y vuelta.

Proposición 12.1 distingue desplazamiento neto y distancia recorrida. La fuerza fija Fe_x hace trabajo $F\Delta x$, no F multiplicado por toda la distancia. Un tramo vertical contribuye cero; un tramo hacia la izquierda contribuye negativamente si $F > 0$. Un rodeo puede aumentar la distancia y dejar igual la suma de trabajo de esta fuerza concreta.

Principio metodológico 12.1 — Identificar fuerza, receptor y tramo. Antes de multiplicar fuerza por distancia, escribe los vectores o la componente en el sentido del desplazamiento. Declara si la fuerza permanece constante en todo el recorrido. Conserva el signo y distingue trabajo de una contribución de trabajo total.

Ejercicios. Ejercicio 12.1. Una fuerza constante $(3, -4)\,\mathrm{N}$ actúa sobre una partícula que se desplaza $(2, 1)\,\mathrm{m}$. Calcula el trabajo y compara con multiplicar las magnitudes.

Solución. El producto escalar da $W = 3(2) - 4(1) = 2\,\mathrm{J}$. El producto de magnitudes sería $5\sqrt{5}\,\mathrm{J}$, y no coincide porque los vectores no son paralelos. El desplazamiento contiene una contribución horizontal de $6\,\mathrm{J}$ y una vertical de $-4\,\mathrm{J}$. Su suma es positiva; no se puede inferir aún el cambio de energía cinética sin conocer el trabajo de las demás fuerzas.

Ejercicio 12.2. La fuerza constante $(5, 0)\,\mathrm{N}$ actúa durante el recorrido $(0, 0) \to (0, 3) \to (4, 3) \to (4, 0)$, con coordenadas en metros. Calcula el trabajo por tramos y por desplazamiento neto. ¿Qué ocurriría en un recorrido cerrado?

Solución. Los tramos dan 0, 20 y 0 joules. El desplazamiento neto es $(4, 0)\,\mathrm{m}$ y proposición 12.1 da también $20\,\mathrm{J}$. La distancia total es $10\,\mathrm{m}$, pero multiplicarla por $5\,\mathrm{N}$ produciría un resultado incorrecto. En cualquier polígono cerrado bajo esa misma fuerza constante, el desplazamiento neto

es cero y el trabajo de la fuerza es cero. Esto no afirma que el cuerpo no se haya movido ni que cada tramo tenga trabajo nulo.

2. Trabajo de una fuerza variable en una dimensión

Cuando la fuerza cambia a lo largo de una línea, una sola multiplicación no incorpora la variación. Dividimos el recorrido en pequeños tramos, multiplicamos en cada uno la componente firmada de fuerza por el desplazamiento firmado y pasamos a una integral. Las herramientas son las sumas y el teorema fundamental del cálculo de M2–M3; no hace falta introducir aún campos potenciales.[2]

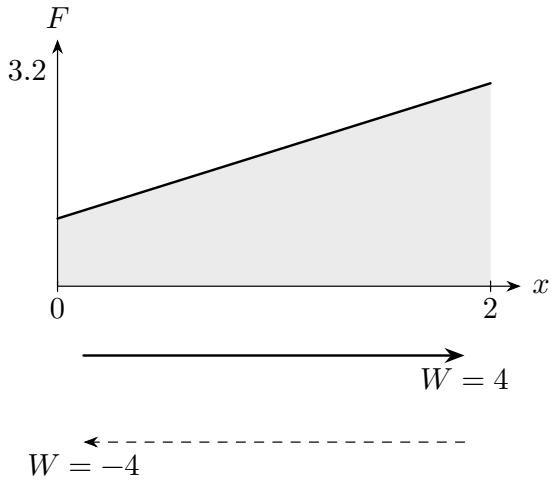


Figura 12.2. Con $F(x) = 1 + x$ y desplazamiento desde 0 hasta 2, el trabajo normalizado vale $\int_0^2 (1 + x)\,dx = 4$. Invertir el sentido de integración cambia su signo. Véase §2.

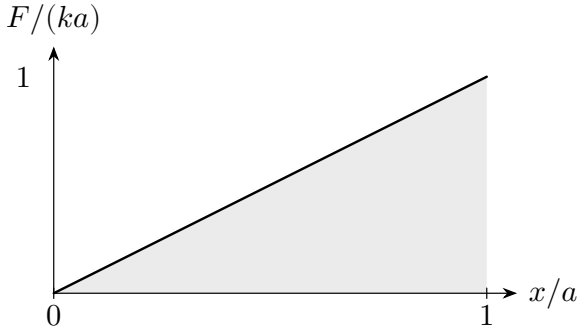


Figura 12.3. Para $F(x) = kx$ y $0 \le x \le a$, el área bajo la gráfica es $ka^2/2$. Los ejes normalizados son x/a y $F/(ka)$. Véase §2.

Definición 12.2 — Trabajo unidimensional de una fuerza de posición. Para una componente de fuerza continua $F(x)$ sobre una línea, el trabajo orientado desde x_a hasta x_b es

[2]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §§4.2–4.3, pp. 153–156; David Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2008, cap. 5, §5.1, pp. 140–141, ecuación 5.5 y teorema 5.1. El argumento de la proposición 12.2 usa una primitiva y no divide por velocidad ni exige monotonicidad.

$$W_{a\to b} = \int_{x_a}^{x_b} F(\xi)\, d\xi.$$

La variable ξ identifica el argumento de integración y se distingue de los extremos. Los límites fijan la orientación; no se ordenan por tamaño para hacer positivo el resultado.

Si $x_b > x_a$, una fuerza negativa aporta trabajo negativo. Si el desplazamiento se invierte, el signo cambia para ese mismo campo $F(x)$. El área entre la gráfica y el eje horizontal sólo coincide con el trabajo cuando se conservan sus signos. Sumar áreas geométricas positivas borraría la diferencia entre acelerar y frenar.

Para una fuerza lineal $F(x) = f_0 + kx$, con f_0 de dimensión fuerza y k de dimensión fuerza por longitud, $W_{a\to b} = f_0(x_b - x_a) + \frac{k}{2}(x_b^2 - x_a^2)$. En un tramo con fuerza variable, evaluar sólo $F(x_b)$ y multiplicar por $x_b - x_a$ no es exacto en general. Para esa función lineal, la media de los valores extremos sí produce la integral porque el área firmada es la de un trapecio. Esa propiedad pertenece a la forma lineal; no se transfiere a cualquier gráfica.

Proposición 12.2 — Trabajo de posición y retrocesos en una línea. Si F es continua y $x(t)$ es una historia continuamente diferenciable, entonces

$$\int_{t_a}^{t_b} F(x(t))\dot{x}(t)\, dt = \int_{x(t_a)}^{x(t_b)} F(\xi)\, d\xi,$$

aunque $x(t)$ tenga retrocesos o instantes con $\dot{x} = 0$.

Demostración. Fijemos una referencia x_* y sea $G(x) = \int_{x_*}^{x} F(\xi)\, d\xi$. Por el teorema fundamental, $G' = F$. La regla de la cadena da $\frac{d}{dt}G(x(t)) = F(x(t))\dot{x}(t)$. Integrar en el tiempo produce $G(x(t_b)) - G(x(t_a))$, igual a la integral entre las posiciones extremas. No se divide por $\dot{x}$ ni se exige que x sea invertible como función del tiempo. □

El resultado usa que la componente de fuerza es una función fija de la posición. Una resistencia que cambie de signo con la velocidad no es ese mismo $F(x)$. Una fuerza controlada externamente que varíe con el tiempo tampoco queda descrita por la gráfica única usada en la definición 12.2. En esos casos habrá que conservar la historia temporal en la integral.

El argumento de la primitiva es aquí una herramienta de cálculo. La generalización del trabajo independiente del camino en varias dimensiones, su relación con energía potencial y las condiciones de integrabilidad se estudiarán en el capítulo 13. Una línea con una función continua no justifica anunciar el mismo resultado para cualquier campo vectorial.

Principio metodológico 12.2 — Integrar con orientación. Usa la componente firmada de fuerza y los extremos en el orden del movimiento. Para retrocesos, identifica si la fuerza sigue siendo el mismo campo de posición; sólo entonces se cancelan las contribuciones de ida y vuelta. No sustituyas una integral por fuerza final multiplicada por distancia sin una hipótesis que lo permita.

Ejercicios. Ejercicio 12.3. Sobre una línea, $F(x) = kx$ con $k = 4\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Calcula el trabajo desde 1 m hasta 3 m y en el recorrido inverso. Compara con usar la fuerza final en el primer tramo.

Solución. $W_{1\to 3} = \frac{4}{2}(3^2 - 1^2) = 16\,\mathrm{J}$ y $W_{3\to 1} = -16\,\mathrm{J}$. Usar $F(3) = 12\,\mathrm{N}$ durante todo el primer desplazamiento daría 24 J, que sobreestima la integral. La fuerza media lineal es $(4 + 12)/2 = 8\,\mathrm{N}$ y multiplicarla por 2 m sí da 16 J. El signo inverso corresponde al mismo campo, no a una fuerza que se oponga siempre al movimiento.

Ejercicio 12.4. Una partícula sigue $x(t) = a\sin(\omega t)$ entre $t = 0$ y $t = \pi/\omega$, con $a, \omega > 0$, bajo la contribución de fuerza $F(x) = kx$. Calcula su trabajo por la proposición 12.2 y directamente en el tiempo. ¿Debe ser nulo en cada mitad?

Solución. Los extremos tienen $x = 0$, por lo que proposición 12.2 da trabajo total cero. Directamente, $F\dot{x} = ka^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)$; una primitiva es $ka^2\sin^2(\omega t)/2$. Entre los extremos también da cero. La primera mitad aporta $ka^2/2$ y la segunda $-ka^2/2$. La suma se anula, pero los trabajos parciales no. Se está evaluando una contribución sobre una historia dada: no se afirma que $F = kx$ sea por sí sola la fuerza que produce esa historia sinusoidal.

3. Energía cinética y cambio de rapidez

El factor cuadrático de la velocidad aparece al multiplicar aceleración por velocidad. Antes de usar Newton conviene establecer la identidad matemática que lo produce. Esto permitirá demostrar el teorema sin dividir por rapidez y conservar su validez en instantes de reposo.

Definición 12.3 — Energía cinética de un punto material. Para una masa constante $m > 0$ con velocidad $\mathbf{v}$ medida en el marco elegido, definimos

$$K = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2.$$

En coordenadas cartesianas ortonormales, $K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Es un escalar de dimensión ML^2T^{-2} y se expresa en joules. El modelo es el de una partícula newtoniana de masa constante, no un cuerpo con rotación o deformación interna.

Proposición 12.3 — Positividad y pérdida de información direccional. La energía cinética es no negativa y es cero exactamente cuando $\mathbf{v} = 0$. Velocidades distintas pueden tener la misma energía cinética; para una masa fijada, K determina la rapidez pero no la dirección.

Demostración. La norma al cuadrado es suma de cuadrados no negativos y sólo se anula cuando todas las componentes son cero. Como $m > 0$, se conservan esas propiedades al multiplicar por $m/2$. Dado $K \geq 0$, la rapidez es $\sqrt{2K/m}$. Cualquier vector con esa magnitud produce el mismo valor; por ejemplo, $\mathbf{v}$ y $-\mathbf{v}$ lo comparten. □

Que K sea escalar significa que no cambia al girar los ejes ortonormales de un mismo marco. No significa que sea independiente del observador en movimiento. Un cuerpo en reposo en un marco puede desplazarse en otro y tener otra energía cinética. La comparación entre marcos se retomará después de establecer el trabajo y el teorema dentro de un marco inercial declarado.

Proposición 12.4 — Derivada de la energía cinética. Para una velocidad diferenciable y masa constante,

$$\frac{dK}{dt} = m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}.$$

La identidad sigue siendo válida cuando $\mathbf{v} = 0$.

Demostración. Por la regla del producto, $\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}$. Multiplicar por $m/2$ produce la fórmula. Ningún paso exige dividir por la norma de velocidad, de modo que el instante de reposo no queda excluido. □

Esta identidad separa cambio de rapidez y cambio de dirección. Una aceleración perpendicular a la velocidad puede desviar el movimiento y dejar $dK/dt = 0$. Una aceleración paralela o antiparalela produce una contribución de signo definido mientras la velocidad sea no nula. El movimiento circular uniforme del capítulo 8 tiene aceleración no nula y energía cinética constante.

En un instante de reposo, proposición 12.4 da $dK/dt = 0$ aunque la aceleración no sea cero. No hay contradicción: el crecimiento inicial de K puede ser cuadrático. Si una aceleración constante $\mathbf{a}_0$ inicia el movimiento desde reposo, $\mathbf{v} = \mathbf{a}_0 t$ y $K = \frac{1}{2} m \|\mathbf{a}_0\|^2 t^2$. Su derivada vale cero en $t = 0$ y es positiva inmediatamente después si $\mathbf{a}_0 \neq 0$. Una tasa instantánea nula no obliga a una función constante en un intervalo.

Principio metodológico 12.3 — Recuperar sólo lo que el escalar determina. Usa K para calcular rapidez y comprueba $K \geq 0$. Conserva los datos de dirección y la cinemática cuando se necesite reconstruir velocidad o trayectoria. Un cambio nulo de energía cinética no implica aceleración nula.

Ejercicios. Ejercicio 12.5. Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ tiene velocidad $(3, 4)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcula K y propone otras dos velocidades con ese mismo valor. ¿Las tres tienen que corresponder al mismo movimiento?

Solución. La rapidez es $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y $K = \frac{1}{2}(2)(9+16) = 25\,\mathrm{J}$. Las velocidades $(-3, -4)$ y $(5, 0)$, en las mismas unidades, dan también $25\,\mathrm{J}$. Difieren en dirección y pueden producir trayectorias distintas desde la misma posición. La coincidencia del escalar no identifica los datos iniciales vectoriales ni las fuerzas que los acompañan.

Ejercicio 12.6. Una masa m parte del reposo con aceleración constante $(a, 0)$, $a \neq 0$. Calcula $K(t)$ y su derivada. Compara el instante inicial con un movimiento circular uniforme de rapidez $V > 0$.

Solución. $\mathbf{v}(t) = (at, 0)$, luego $K(t) = ma^2t^2/2$ y $dK/dt = ma^2t$. En $t = 0$, la derivada es cero pese a la aceleración no nula. En el círculo uniforme, $K = mV^2/2$ es constante durante el intervalo porque aceleración y velocidad son perpendiculares en cada instante. El primer caso tiene tasa nula sólo inicialmente; el segundo, en todo el régimen. Ninguno permite identificar tasa nula con fuerza resultante nula.

4. Trabajo a lo largo de una trayectoria

Para recorrer una curva debemos sumar contribuciones locales, usando en cada una la fuerza y el desplazamiento correspondientes. La posición final menos la inicial no basta para un campo variable general. Podemos formular la integral directamente con una parametrización, de modo que todos sus elementos se reduzcan a operaciones de una variable.[3]

Definición 12.4 — Trayectoria parametrizada y orientación. Una trayectoria se describe por una aplicación $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ continuamente diferenciable por tramos. Su orientación corresponde a recorrer el parámetro de a hacia b. Se permite dividir el intervalo en un número finito de partes suaves; el trabajo total se define sumando las integrales de esas partes.

Definición 12.5 — Trabajo sobre una historia de movimiento. Si $\mathbf{r}(t)$ describe al punto material y $\mathbf{f}(t)$ es el valor de una fuerza concreta sobre él a lo largo de esa historia, definimos

$$W_{t_a \to t_b} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{f}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt.$$

Suponemos funciones continuas por tramos e integral existente. Si la fuerza procede de un campo fijo de posición $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, la integral sobre una curva parametrizada se escribe

[3] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §§4.4–4.6, pp. 158–165; Morin, obra citada, cap. 5, §5.3, pp. 148–149, producto escalar y trabajo sobre un camino. Las integrales se definen mediante parametrizaciones explícitas; no se traslada una integración por componentes como si cada eje fuese un recorrido independiente.

$$W_C = \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(u)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(u)\, du = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

La segunda expresión abrevia la primera; el diferencial vectorial representa $\boldsymbol{\gamma}'(u)\, du$ y no una dirección constante. La versión temporal permite fuerzas dependientes de tiempo o velocidad: se evalúa su valor real $\mathbf{f}(t)$ sobre la historia. La versión de campo fijo permite cambiar el parámetro de recorrido sin cambiar la ley espacial. No deben confundirse. Si una fuerza cambia con el tiempo, recorrer la misma curva a otra hora o con otro ritmo puede modificar el trabajo.

Proposición 12.5 — Suma de fuerzas y unión de recorridos. El trabajo es lineal respecto de las fuerzas evaluadas sobre una misma historia. Además, si se divide el recorrido en dos partes consecutivas, su trabajo es la suma de los trabajos parciales.

Demostración. Para $\mathbf{f} = \sum_i \mathbf{f}_i$, la distributividad del producto escalar da $\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}$. La linealidad de la integral permite sumar sus trabajos. Para una división en t_c, la aditividad de la integral da $\int_{t_a}^{t_b} = \int_{t_a}^{t_c} + \int_{t_c}^{t_b}$. Las mismas identidades se aplican por tramos a una parametrización espacial. □

Proposición 12.6 — Cambio de parámetro y orientación para un campo fijo. Sea $\mathbf{F}$ un campo continuo sobre la curva. Un cambio de parámetro continuamente diferenciable, creciente, con extremos correspondientes, conserva W_C. Recorrer la curva en sentido inverso cambia su signo.

Demostración. Si $u = \phi(s)$ es creciente, con $\phi(c) = a$ y $\phi(d) = b$, la curva nueva es $\boldsymbol{\gamma}(\phi(s))$. Su derivada es $\boldsymbol{\gamma}'(\phi(s))\phi'(s)$. Sustituir en la integral y efectuar el cambio de variable $u = \phi(s)$ recupera W_C. Para el sentido inverso usamos $u = a + b - s$, con s de a a b; los extremos de u van de b a a y la integral resulta $\int_b^a \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(u)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(u)\, du = -W_C$. □

Proposición 12.6 compara el mismo campo espacial, no una resistencia que invierta su dirección al invertir la velocidad. Tampoco afirma que cambiar el ritmo de la trayectoria mantenga su validez dinámica: una curva recorrida con otra velocidad puede exigir otra fuerza resultante. La igualdad es una propiedad del cálculo de trabajo de esa contribución sobre los recorridos dados.

Para una fuerza constante, la integral espacial da $\mathbf{F} \cdot \int_a^b \boldsymbol{\gamma}'(u) du = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$, lo que extiende proposición 12.1 a curvas suaves por tramos. Para un campo variable, se debe conservar $\boldsymbol{\gamma}$ en el integrando. Cada componente de fuerza se evalúa sobre toda la curva, no sobre un eje independiente inventado.

Principio metodológico 12.4 — Escribir primero la parametrización. Sustituye la curva en todas las componentes del campo y deriva su posición respecto del parámetro. Multiplica escalarmente antes de integrar. Si la fuerza depende de tiempo o velocidad, conserva la historia necesaria para evaluarla; no reemplaces esa historia por los extremos espaciales.

Ejercicios. Ejercicio 12.7. Sea $\mathbf{F}(x, y) = (0, \kappa x)$, con κ de dimensión fuerza por longitud. Calcula su trabajo sobre $\boldsymbol{\gamma}(u) = (Lu, Hu)$, $0 \le u \le 1$, con $L, H > 0$. Repite con $\boldsymbol{\eta}(s) = (Ls^2, Hs^2)$, $0 \le s \le 1$.

Solución. En la primera curva, $\mathbf{F} = (0, \kappa L u)$ y $\boldsymbol{\gamma}' = (L, H)$; el integrando es $\kappa L H u$, cuya integral da $\kappa LH/2$. En la segunda, $\mathbf{F} = (0, \kappa L s^2)$ y $\boldsymbol{\eta}' = (2Ls, 2Hs)$; el integrando es $2\kappa LH s^3$ y da también $\kappa LH/2$. La derivada del cambio de parámetro se anula en un extremo, pero el cálculo directo sigue siendo válido. Ambas curvas recorren el mismo segmento con orientación igual; no se ha afirmado que ambas sean soluciones de Newton con la misma fuerza total.

Ejercicio 12.8. En una historia de 0 a $T > 0$, un cuerpo se mueve con $\mathbf{r}(t) = (vt, 0)$, $v > 0$, y una contribución externa es $\mathbf{f}(t) = (\beta t, 0)$, con β de dimensión fuerza por tiempo. Calcula el trabajo

y compara con recorrer el mismo segmento en tiempo $T/2$, desde la misma hora inicial, con rapidez $2v$.

Solución. El primer trabajo es $\int_0^T \beta t v\,dt = \beta v T^2/2$. El segundo es $\int_0^{T/2} \beta t(2v)\,dt = \beta v T^2/4$. Los extremos espaciales son los mismos, pero la fuerza temporal se evalúa durante intervalos distintos. Proposición 12.6 no iguala ambos resultados. Se trata de una contribución sobre historias prescritas; otras fuerzas deben compensarla si se quiere mantener la rapidez constante indicada.

5. Teorema trabajo–energía para una partícula

Disponemos de dos expresiones con el mismo integrando: la derivada de energía cinética contiene $m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}$ y la integral de trabajo contiene $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Newton identifica ambas cuando $\mathbf{F}$ es la fuerza resultante. La demostración consiste en hacer esa identificación y después integrar; el alcance físico depende de las hipótesis conservadas.[4]

Proposición 12.7 — Teorema trabajo–energía. Sea un punto material de masa constante $m > 0$, con posición dos veces continuamente diferenciable en un marco inercial. Si $\mathbf{F}_{\mathrm{tot}}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ es la suma de todas las fuerzas sobre él durante $[t_a, t_b]$, entonces

$$W_{\mathrm{tot}} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\mathrm{tot}}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\,dt = K(t_b) - K(t_a).$$

El trabajo total puede escribirse como suma de los trabajos de las fuerzas individuales sobre esa misma historia.

Demostración. proposición 12.4 da $\frac{dK}{dt} = m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}$. Por Newton, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\mathrm{tot}}$, de modo que $\frac{dK}{dt} = \mathbf{F}_{\mathrm{tot}}\cdot\mathbf{v}$. Integrar en $[t_a, t_b]$ y usar el teorema fundamental produce la igualdad. La suma de contribuciones procede de la proposición 12.5 aplicado a la descomposición de la fuerza resultante. La demostración no divide por velocidad ni presupone que la fuerza dependa sólo de la posición. □

El teorema es una consecuencia de Newton para este modelo. Una fuerza temporal, una resistencia dependiente de velocidad o una reacción de vínculo siguen incluidas si se evalúan sobre la historia y satisfacen sus hipótesis. No hace falta suponer que cada fuerza tenga trabajo independiente del camino. El teorema compara la energía cinética con el trabajo total realmente efectuado; no afirma que esa energía cinética sea constante.

La condición $W_{\mathrm{tot}} > 0$ entre dos instantes implica rapidez final mayor que inicial, para la misma masa. Un trabajo total negativo implica rapidez final menor. Un trabajo total cero implica rapideces iguales en los extremos, pero permite variaciones intermedias. Si el integrando total se anula en todo un intervalo, entonces K permanece constante durante él; ésa es una afirmación más fuerte que una integral total nula.

Una aplicación correcta exige mantener el receptor. Para la partícula que sube con rapidez constante, el peso tiene trabajo negativo y la fuerza de elevación positivo; sus trabajos se cancelan. Si sólo se escribe el de elevación como ΔK, se concluye un aumento de rapidez que no ocurrió. En sentido inverso, un trabajo positivo del peso durante una bajada puede compensarse con un trabajo negativo del freno. Es la suma la que decide la variación cinética.

También hay que mantener el modelo de masa constante. La derivada de $mv^2/2$ adquiere otro término si m varía, y un sistema abierto con transferencia de materia requiere balances adicionales. No basta sustituir una masa dependiente de tiempo en la fórmula probada. Del mismo modo, un

[4] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §§4.4–4.6, pp. 158–164. Proposición 12.7 se prueba mediante Newton y la derivada temporal de K, con masa constante y marco inercial. La afirmación sobre trabajo nulo de vínculos se restringe a la perpendicularidad efectiva de una guía fija lisa; no se generaliza a soportes móviles.

cuerpo que gira puede recibir trabajo que cambie su energía cinética rotacional; representarlo sólo por una partícula no recoge esa contribución.

El procedimiento evita a veces integrar dos veces Newton, pero no elimina todas las incógnitas. Para evaluar trabajo necesitamos conocer la trayectoria o alguna propiedad de la fuerza que permita calcular la integral. Si la trayectoria está fijada por una guía, la geometría del capítulo 11 proporciona parte de esa información. Si está desconocida y el campo es general, el teorema no permite reemplazar la integral por una función arbitraria de los extremos.

Principio metodológico 12.5 — Sumar antes de interpretar el cambio cinético. Declara el marco, la masa y el punto material elegido. Enumera todas las fuerzas y sus trabajos, incluidos los de signo negativo. Escribe después $\Delta K = W_{\mathrm{tot}}$. Comprueba si el resultado determina sólo rapidez o si hacen falta dirección, trayectoria y datos temporales.

Ejercicios. Ejercicio 12.9. Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ tiene rapidez inicial $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Durante un tramo, una fuerza hace $20\,\mathrm{J}$ y otra $-4\,\mathrm{J}$; las demás hacen trabajo nulo. Calcula la rapidez final. Evalúa la solución que usa sólo los $20\,\mathrm{J}$.

Solución. La energía inicial es $K_a = 9\,\mathrm{J}$. El trabajo total es $16\,\mathrm{J}$, luego $K_b = 25\,\mathrm{J}$ y la rapidez final es $\sqrt{2(25)/2} = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Usar sólo la contribución positiva daría $K_b = 29\,\mathrm{J}$ y rapidez $\sqrt{29}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, incorrecta para los trabajos declarados. El resultado correcto no fija la dirección final: ésta requiere otra información del movimiento.

Ejercicio 12.10. Una partícula recorre una circunferencia fija con rapidez constante $V > 0$. Su fuerza resultante es radial, dirigida hacia el centro. Calcula su trabajo en una vuelta y explica por qué el resultado no significa fuerza resultante cero.

Solución. La velocidad es tangencial y la resultante radial, por lo que $\mathbf{F}_{\mathrm{tot}} \cdot \mathbf{v} = 0$ en cada instante. El trabajo es cero y proposición 12.7 da $\Delta K = 0$, compatible con $K = mV^2/2$. La resultante tiene magnitud $mV^2/R > 0$ y cambia la dirección de velocidad. No contribuye a la tasa de cambio de rapidez. Una fuerza de trabajo nulo puede ser indispensable para mantener la trayectoria.

6. Componente tangencial y dependencia del recorrido

El producto escalar selecciona la componente de fuerza en el sentido local del movimiento. Podemos expresar esa selección usando longitud de arco, siempre que conservemos la tangente orientada de la curva. En una curva, «distancia» y «desplazamiento vectorial» cumplen funciones diferentes.

Definición 12.6 — Longitud recorrida y componente tangencial de fuerza. En un tramo regular parametrizado por $\boldsymbol{\gamma}(u)$, con $\boldsymbol{\gamma}'(u) \neq 0$, escribimos $ds = \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|\,du$ para el incremento de longitud en el sentido creciente del parámetro. La tangente unitaria orientada es $\mathbf{t} = \boldsymbol{\gamma}'/\|\boldsymbol{\gamma}'\|$ y la componente de fuerza sobre ella es $F_{\parallel} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$.

Proposición 12.8 — Trabajo como integral tangencial. Sobre los tramos regulares de un recorrido orientado,

$$W_C = \int_C F_{\parallel}\, ds.$$

En particular, una fuerza perpendicular a la tangente en todo el tramo tiene trabajo cero en él.

Demostración. La definición de tangente da $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}'(u)\,du = \mathbf{t}\,ds$. Por tanto, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\,ds = F_{\parallel}\,ds$. Integrar prueba la igualdad y la afirmación de perpendicularidad. Si la descripción temporal tiene un instante de reposo, se usa directamente definición 12.5: el integrando es cero allí sin definir una tangente a partir de una velocidad nula. □

ds es no negativo en el sentido del recorrido; el signo del trabajo queda en $F_{\parallel}$. Para una resistencia de magnitud fija $f > 0$ que se opone a la velocidad, $F_{\parallel} = -f$ durante los tramos móviles y $W = -fS$, donde S es la longitud total recorrida. Esa fuerza puede hacer trabajo negativo en la ida y en la vuelta. La orientación de la fuerza se adapta al movimiento, de modo que no es el mismo campo espacial en ambos sentidos.

Para una guía fija lisa, la reacción normal es perpendicular al desplazamiento y no hace trabajo mientras se mantenga ese modelo. La palabra «fija» importa: un soporte móvil puede tener una reacción perpendicular al deslizamiento relativo y, sin embargo, realizar trabajo sobre el movimiento inercial del cuerpo. Los casos móviles se estudiarán en el segundo macrotramo. No debemos extender la conclusión de una guía fija a todos los vínculos del capítulo 11.

Tampoco un campo que dependa sólo de la posición tiene automáticamente el mismo trabajo entre dos extremos. La dependencia del recorrido puede mostrarse mediante dos parametrizaciones y sus integrales; no hace falta introducir todavía una condición de rotacional ni el lenguaje de energía potencial.

Proposición 12.9 — Un campo espacial puede tener trabajos distintos entre los mismos extremos. Para $\mathbf{F}(x, y) = \kappa(-y, x)$, con $\kappa > 0$, consideremos $A = (0, 0)$ y $B = (L, H)$, $L, H > 0$. El camino que va primero horizontalmente hasta $(L, 0)$ y luego verticalmente hasta B tiene trabajo κLH. El que va primero hasta $(0, H)$ y luego horizontalmente hasta B tiene trabajo $-\kappa LH$.

Demostración. En el primer tramo horizontal, $y = 0$ y $dy = 0$, así que $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\kappa y\,dx + \kappa x\,dy = 0$. En el vertical siguiente, $x = L$ y el trabajo es $\int_0^H \kappa L\,dy = \kappa LH$. Para el otro camino, el primer tramo vertical tiene $x = 0$ y trabajo cero; el horizontal superior da $\int_0^L -\kappa H\,dx = -\kappa LH$. La diferencia es $2\kappa LH \neq 0$ pese a los extremos comunes. □

Si se recorre el primer camino y se vuelve por el inverso del segundo, proposiciones 12.5–12.6 dan trabajo cerrado $2\kappa LH$. No se contradice proposición 12.1: aquí la fuerza varía con la posición. Tampoco se contradice proposición 12.7: si ésa fuera la fuerza total sobre un cuerpo que realmente completara el camino, el trabajo no nulo exigiría otro valor de energía cinética al terminar. Volver al mismo punto no significa volver con la misma velocidad.

La evaluación de una integral sobre una curva prescrita no demuestra por sí sola que esa curva sea una trayectoria realizable bajo el campo como única fuerza. Se podrían necesitar guías, actuadores o condiciones iniciales adicionales. Proposición 12.9 prueba una propiedad del trabajo del campo; los balances de Newton determinan su realización física. Separar ambos problemas evita utilizar una figura geométrica como solución dinámica sin demostrarlo.

Principio metodológico 12.6 — Comprobar el camino antes de reducir a extremos. Una fuerza constante permite la reducción de la proposición 12.1; un campo variable exige una prueba adicional o el cálculo sobre la trayectoria. En curvas, usa la tangente local. Si se afirma que una reacción no hace trabajo, identifica el movimiento respecto del cual es perpendicular.

Ejercicios. Ejercicio 12.11. En proposición 12.9, toma $\kappa = 2\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $L = 3\,\mathrm{m}$ y $H = 4\,\mathrm{m}$. Calcula ambos trabajos y el del circuito formado por el primer camino de ida y el segundo de vuelta. ¿Puede obtenerse el trabajo multiplicando la fuerza en B por el desplazamiento neto?

Solución. Los trabajos son $24\,\mathrm{J}$ y $-24\,\mathrm{J}$. Al invertir el segundo, su contribución es $+24\,\mathrm{J}$, de modo que el circuito da $48\,\mathrm{J}$. En B, la fuerza vale $(-8, 6)\,\mathrm{N}$, cuyo producto con $(3, 4)\,\mathrm{m}$ da cero. Esa multiplicación ignora la variación de campo y no reproduce ninguno de los dos trabajos. El desplazamiento neto del circuito es cero, pero su integral no lo es.

Ejercicio 12.12. Calcula el trabajo del mismo campo $\mathbf{F} = \kappa(-y, x)$ sobre el arco $\mathbf{r}(\theta) = R(\cos\theta, \sin\theta)$, de $\theta = 0$ a $\pi/2$, con $R > 0$. Compara con una contribución puramente radial sobre ese arco.

Solución. Sobre la curva, $\mathbf{F} = \kappa R(-\sin\theta, \cos\theta)$ y $d\mathbf{r} = R(-\sin\theta, \cos\theta)d\theta$. El producto es $\kappa R^2 d\theta$, luego $W = \kappa R^2 \pi/2$. La fuerza es tangencial y favorece el recorrido elegido. Una fuerza puramente radial es perpendicular a $d\mathbf{r}$ y tiene trabajo cero. Si el campo tangencial forma parte de la resultante, la rapidez no será constante salvo que otra contribución compense su trabajo; no se impuso un ritmo de recorrido al evaluar la integral.

7. Potencia media e instantánea

Dos procesos pueden realizar el mismo trabajo y requerir tiempos distintos. La potencia expresa la tasa de trabajo, de modo que añade una información temporal que la integral total no contiene.[5]

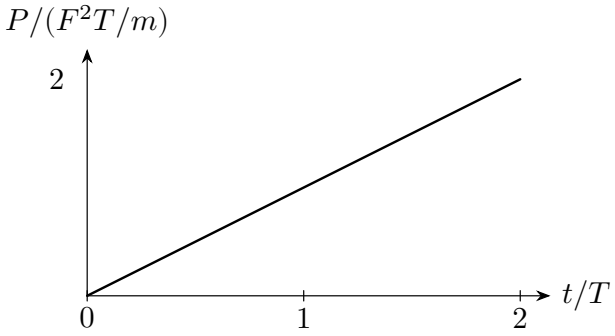


Figura 12.4. Una fuerza constante paralela al movimiento produce $v = Ft/m$ desde el reposo y potencia $P = F^2 t/m$. El trabajo acumulado es el área bajo esta recta. Véase §7.

Definición 12.7 — Potencia media. Para el trabajo W de una fuerza durante un intervalo de duración $\Delta t > 0$, definimos su potencia media como $\overline{P} = W/\Delta t$. Su signo es el del trabajo neto durante ese intervalo.

Definición 12.8 — Potencia instantánea. Sea $W(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau)\cdot\mathbf{v}(\tau)\,d\tau$ el trabajo acumulado. Donde el integrando es continuo, la potencia instantánea de esa fuerza es $P(t) = dW/dt$. La unidad SI es el watt: $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}}$, de dimensión ML^2T^{-3}.

Proposición 12.10 — Potencia de fuerza y tasa cinética. Bajo las hipótesis de la definición 12.8,

$$P = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}, \qquad |P| \le \|\mathbf{f}\|\,\|\mathbf{v}\|.$$

Para la resultante de una partícula de la proposición 12.7, $P_{\mathrm{tot}} = dK/dt$.

Demostración. El teorema fundamental aplicado al trabajo acumulado da $P = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$. Cauchy–Schwarz proporciona la cota de magnitudes. Newton y proposición 12.4 dan la igualdad de la potencia total con la derivada cinética. La suma de potencias individuales coincide con la total por distributividad del producto escalar. □

[5] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.13, p. 186: definición de potencia y relación $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Se toma el desarrollo mecánico, sin incorporar como información actual las cifras históricas de rendimiento humano, baterías o consumo nacional del pasaje.

La potencia depende tanto de fuerza como de velocidad. Una fuerza grande sobre un punto inmóvil tiene potencia mecánica cero en ese instante. La misma fuerza sobre un punto que avanza rápidamente en su dirección tiene potencia positiva mayor. Una fuerza perpendicular a la velocidad tiene potencia cero y puede cambiar la dirección del movimiento.

Para elevar una masa puntual a rapidez vertical constante $V > 0$, sin resistencia y con gravedad uniforme, la tracción debe ser $T = mg$. La potencia de elevación es mgV y la del peso $-mgV$. La suma es cero porque la energía cinética no cambia. La potencia del motor entregada al punto material no es la potencia neta sobre él. Si se quisiera calcular consumo eléctrico, eficiencia o pérdidas del motor, habría que declarar otro modelo; mgV sólo responde al intercambio mecánico especificado.

Una potencia media tampoco fija la instantánea. Si $P(t)$ varía, el trabajo es $\int P(t)dt$, no necesariamente el valor final de P multiplicado por la duración. La media recoge esa integral dividida por tiempo. Dos historias con igual integral pueden tener demandas máximas distintas, lo que importa para seleccionar un actuador, aunque ese problema de ingeniería quede fuera del cálculo elemental.

En una fuerza paralela al movimiento, escribir $F = P/v$ sólo es lícito cuando $v \neq 0$. Un modelo que prescribe potencia positiva constante y pretende iniciar desde reposo exige una fuerza que crezca sin cota al acercarse a ese instante. La identidad $P = Fv$ sigue siendo válida; es la hipótesis simultánea de potencia positiva y fuerza finita en reposo la que resulta incompatible. No se resuelve el problema dividiendo por cero.

Principio metodológico 12.7 — Distinguir potencia entregada y potencia neta. Escribe el producto escalar con la velocidad del receptor. Declara el intervalo si se pide una media y conserva cada contribución de signo contrario. Antes de despejar fuerza como potencia dividida por rapidez, comprueba que ésta sea no nula y que la fuerza tenga la dirección supuesta.

Ejercicios. Ejercicio 12.13. Una masa de $50\,\mathrm{kg}$ sube $2\,\mathrm{m}$ con rapidez constante $0{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Usa $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y desprecia resistencia. Calcula la potencia de elevación, el trabajo, la duración y la potencia neta sobre la masa.

Solución. La tracción es $500\,\mathrm{N}$, su potencia $500(0{,}4) = 200\,\mathrm{W}$ y su trabajo $500(2) = 1000\,\mathrm{J}$. La duración es $2/0{,}4 = 5\,\mathrm{s}$, y $1000/5 = 200\,\mathrm{W}$ confirma la media. El peso hace $-1000\,\mathrm{J}$ y tiene potencia $-200\,\mathrm{W}$. La potencia neta es cero, como exige la rapidez constante. El ascenso presupone aquí un tramo uniforme, sin incluir las fases de inicio o frenado.

Ejercicio 12.14. Una contribución de fuerza es $(3, 4)\,\mathrm{N}$ y la velocidad del cuerpo $(4, -3)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcula su potencia. Después, una fuerza temporal tiene potencia $P(t) = ct$, $c > 0$, en $0 \le t \le T$. Calcula trabajo y potencia media y compáralos con usar la potencia final durante todo el intervalo.

Solución. El producto escalar de los primeros vectores es $12 - 12 = 0\,\mathrm{W}$: fuerza y velocidad son perpendiculares. Para la segunda historia, $W = \int_0^T ct\,dt = cT^2/2$ y $\overline{P} = cT/2$. El producto $P(T)T = cT^2$ duplica el trabajo porque trata una tasa creciente como constante. La dimensión de c es potencia por tiempo; por tanto, ambas expresiones de trabajo tienen dimensión de energía aunque sólo una respete la historia.

8. Rapidez, frenado y límites de la ecuación escalar

Una aplicación frecuente del teorema consiste en calcular la rapidez en una posición conocida de una línea. La reducción funciona especialmente bien si la fuerza total está dada como función de posición. Los instantes de reposo requieren atención: la energía cinética debe seguir siendo no negativa, pero su valor cero no determina por sí solo la continuación.

Proposición 12.11 — Rapidez en una fuerza unidimensional de posición. Sea una partícula de masa constante $m > 0$ que satisface $m\ddot{x} = F(x)$ en un marco inercial, con F continua y datos iniciales $x(t_a) = x_a$, $\dot{x}(t_a) = v_a$. Durante la historia,

$$\dot{x}(t)^2 = v_a^2 + \frac{2}{m}\int_{x_a}^{x(t)} F(\xi)\,d\xi.$$

El lado derecho debe ser no negativo en toda posición alcanzada.

Demostración. proposición 12.7 da $\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_{t_a}^{t} F(x(\tau))\dot{x}(\tau)d\tau$. Proposición 12.2 transforma el trabajo en la integral entre posiciones, sin exigir movimiento monótono. Multiplicar por $2/m$ produce la fórmula. La no negatividad procede del cuadrado de una velocidad real. □

La fórmula determina magnitud, no signo de velocidad. En un tramo donde no hay reposo, el signo se fija con el dato inicial de dirección y la continuidad. Entonces se puede escribir $\dot{x} = \sigma\sqrt{v_a^2 + (2/m)\int_{x_a}^{x} F\,d\xi}$, con $\sigma = +1$ o -1, y buscar tiempo por una integración adicional. El signo no puede cambiar durante ese tramo sin pasar por velocidad cero.

En un punto donde el lado derecho se anula, hay que examinar Newton y el régimen de fuerzas. Puede ocurrir un retorno, un equilibrio o un cambio de modelo como el fin de un deslizamiento. La igualdad escalar no distingue automáticamente esas posibilidades. Una región con lado derecho negativo es incompatible con la historia declarada, pero una región positiva tampoco garantiza por sí sola que se alcance desde los datos iniciales: faltan orientación y evolución.

Proposición 12.12 — Distancia de frenado con resistencia constante. En una línea horizontal, una partícula de masa $m > 0$ parte de $x = 0$ con velocidad $v_0 > 0$. Mientras se mueve hacia la derecha, la fuerza horizontal total es $-f$, con $f > 0$ constante. La primera detención ocurre a distancia

$$d = \frac{mv_0^2}{2f}.$$

Demostración. Hasta la detención, proposición 12.11 da $v^2 = v_0^2 - 2fx/m$. Al imponer $v = 0$ se obtiene la distancia indicada. Para comprobar que se alcanza, Newton produce $v(t) = v_0 - ft/m$, cuya primera anulación es $t_* = mv_0/f$. Integrar da $x(t) = v_0t - ft^2/(2m)$; evaluarla en t_* recupera d. Antes de ese instante, $v > 0$ y la rama de fuerza supuesta es válida. □

La verificación temporal evita tratar un cero algebraico como un evento que nunca se alcanza. También impide extender $v^2 = v_0^2 - 2fx/m$ a $x > d$ como si una rapidez imaginaria describiera el movimiento. El modelo de resistencia especificó sólo el tramo de avance. Después de detenerse, una fricción que se opone al deslizamiento no sigue empujando necesariamente hacia la izquierda: hay que declarar las fuerzas y el régimen posterior.

La distancia de frenado aumenta cuadráticamente con la rapidez inicial y linealmente con la masa si f está fijada. Si la resistencia fuese $f = \mu mg$, la masa se cancelaría y quedaría $d = v_0^2/(2\mu g)$ bajo esas hipótesis. La diferencia no es una contradicción: en un caso se mantiene fija la fuerza y en el otro cambia proporcionalmente con la masa. Toda comparación debe indicar qué magnitudes permanecen constantes.

Principio metodológico 12.8 — Comprobar alcance y continuación. Usa la ecuación escalar para rapidez y para excluir valores negativos de energía cinética. Conserva el sentido inicial del movimiento y comprueba que los eventos calculados se alcanzan. En detenciones o cambios de contacto, vuelve a Newton y a las condiciones del vínculo antes de prolongar la misma rama.

Ejercicios. Ejercicio 12.15. Una masa m parte de $x = 0$ con velocidad $v_0 > 0$. Durante su avance, la fuerza horizontal total es $-(f_0 + \kappa x)$, con $f_0, \kappa > 0$. Obtén la rapidez como función de posición, la distancia candidata de detención y una comprobación de que esa detención se alcanza en tiempo finito.

Solución. La integral de trabajo es $-f_0 x - \kappa x^2/2$, por lo que $v^2 = v_0^2 - 2f_0 x/m - \kappa x^2/m$. La raíz positiva que anula ese valor es

$$d = \frac{\sqrt{f_0^2 + \kappa m v_0^2} - f_0}{\kappa}.$$

La otra raíz es negativa y no corresponde al avance inicial. Para $0 \le x < d$, el cuadrado es positivo y se toma la rama $v = +\sqrt{v_0^2 - 2f_0 x/m - \kappa x^2/m}$. Su tiempo hasta d es la integral de dx/v. Si $q(x)$ denota el radicando, $q(d) = 0$ y $q'(d) = -2(f_0 + \kappa d)/m < 0$. Así, cerca de d, $q(x)$ es comparable con una constante positiva multiplicada por $d - x$. La integral local de $(d - x)^{-1/2}$ es finita, y lejos de d el integrando es continuo. La detención se alcanza en tiempo finito. La ley de fuerza posterior al reposo no se ha especificado; no se prolonga esa resistencia como empuje automático hacia la izquierda.

Ejercicio 12.16. En una línea sin fuerza resultante, una masa parte de $x = 0$ con rapidez $V > 0$. Compara las historias $x_+(t) = Vt$ y $x_-(t) = -Vt$. Después examina $x_c(t) = Vt + c\,t^2$, con $c \neq 0$, cerca de $t = 0$. ¿Compartir el valor inicial de energía cinética basta para resolver Newton?

Solución. Las dos primeras historias tienen aceleración cero, energía cinética $mV^2/2$ constante y trabajo total cero. Satisfacen el teorema y Newton, pero se seleccionan mediante signos distintos de la velocidad inicial. La tercera tiene la misma velocidad inicial V y el mismo valor inicial de K, pero aceleración $2c \neq 0$, incompatible con fuerza resultante cero. Además, su energía cinética $m(V + 2ct)^2/2$ no permanece constante en un intervalo, lo que contradice el trabajo nulo. Coincidir en un dato escalar inicial no resuelve la historia ni sustituye las ecuaciones. Para fijar posición y dirección hay que conservar los datos cinemáticos correspondientes.

Las ocho secciones establecen el cálculo del trabajo y su relación con la energía cinética, incluyendo su tasa temporal. Las secciones siguientes aplicarán esas herramientas al peso, las fuerzas elásticas, el rozamiento, los vínculos móviles y los sistemas de partículas; examinará además el cambio de marco y los límites de la reducción escalar. La energía potencial y las condiciones generales de conservación se desarrollarán en el capítulo 13.

9. Trabajo del peso y de fuerzas elásticas

El peso uniforme y el resorte lineal permiten calcular trabajo sin reconstruir todos los instantes del movimiento. La simplificación procede de sus leyes de fuerza. El trabajo del peso sólo requiere el cambio de altura; el de un resorte fijo unidimensional requiere las deformaciones inicial y final. Ninguna de esas fórmulas autoriza a omitir las demás fuerzas cuando se busca el cambio de energía cinética.[6]

Tomemos un eje vertical y positivo hacia arriba y un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$, con $g > 0$. La masa es constante. La aproximación se aplica en una región donde variar la altura no modifica apreciablemente g; no describe ascensos comparables con el radio terrestre ni campos

[6]Kleppner–Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 4, §4.2, ejemplos 4.1–4.2, pp. 154–156. Se desarrollan directamente las integrales del peso uniforme y de Hooke, sin introducir todavía el formalismo general de energía potencial. La corrección para un apoyo móvil se deduce localmente de la velocidad del receptor.

arbitrarios. Una trayectoria puede tener desplazamientos horizontales y retrocesos verticales: el producto escalar selecciona su componente vertical.

Proposición 12.13 — Trabajo del peso uniforme. Para una historia $\mathbf{r}(t)$ de clase C^1 por tramos, el trabajo del peso $-mg\mathbf{e}_y$ entre dos instantes es

$$W_g = -mg(y_b - y_a).$$

Demostración. definición 12.5 da $W_g = \int_{t_a}^{t_b} (-mg\mathbf{e}_y)\cdot\dot{\mathbf{r}}\,dt = -mg\int_{t_a}^{t_b} \dot{y}\,dt$. El teorema fundamental del cálculo, aplicado en los tramos y sumado en sus extremos comunes, produce $-mg(y_b - y_a)$. Las componentes horizontales no intervienen. □

Un descenso da trabajo positivo y un ascenso da trabajo negativo. Si la partícula vuelve a la altura inicial, el trabajo total del peso es cero aunque haya recorrido una longitud considerable. En el ascenso y descenso aparecen contribuciones de signos opuestos. Esta cancelación es propia de la fuerza declarada; no implica que el trabajo total de todas las fuerzas se cancele.

Para el resorte elegimos una coordenada x sobre una guía recta fija. Su origen es la posición sin deformación del resorte; x es una deformación con signo, no la longitud del resorte. Suponemos la ley de Hooke $F_s(x) = -kx$, con $k > 0$ constante, dentro de su rango de validez. El signo invierte la fuerza al pasar de extensión a compresión. Un resorte que sólo puede tirar, o que se destensa, requiere un modelo por regímenes diferente.

Proposición 12.14 — Trabajo del resorte lineal fijo. Bajo la ley anterior, el trabajo del resorte sobre la partícula es

$$W_s = -\frac{k}{2}(x_b^2 - x_a^2),$$

incluso si la partícula invierte su movimiento durante el intervalo.

Demostración. proposición 12.2 expresa el trabajo como $\int_{x_a}^{x_b} (-k\xi)\,d\xi$. Una primitiva es $-k\xi^2/2$ y su evaluación en los extremos da la fórmula. Alternativamente, $-kx\dot{x}$ es la derivada temporal de $-kx^2/2$, sin dividir por $\dot{x}$. Ambas pruebas incluyen instantes de reposo y retrocesos. □

Reducir la magnitud de la deformación da trabajo positivo del resorte; aumentarla da trabajo negativo. Ir de a a $-a$ da trabajo neto cero, pero el resorte puede aumentar la rapidez al acercarse al origen y reducirla después. El trabajo neto sólo compara los extremos: no afirma que la potencia sea cero en los instantes intermedios.

Si el extremo de apoyo se mueve y la ley toma la forma $F_s = -k[x - c(t)]$, no puede sustituirse directamente x por la deformación $q = x - c(t)$ en la proposición 12.14. El trabajo sobre la partícula utiliza su velocidad $\dot{x} = \dot{q} + \dot{c}$, de modo que

$$W_s = -\frac{k}{2}(q_b^2 - q_a^2) - k\int_{t_a}^{t_b} q(t)\dot{c}(t)\,dt.$$

Esta identidad sale al desarrollar $-kq\dot{x}$ e integrar $q\dot{q}$. El segundo término registra la influencia del movimiento del apoyo. Para c constante recuperamos proposición 12.14, con el origen trasladado. La fuerza se evalúa en la deformación, pero el desplazamiento del receptor se mide en el marco elegido.

Principio metodológico 12.9 — Fijar el origen y el soporte. Al usar el trabajo del peso, declara el sentido vertical y la aproximación de campo uniforme. Al usar un resorte, identifica la deformación y comprueba que el apoyo es fijo. Escribe después la suma de trabajos que modifica K; una contribución conocida no representa por sí sola la fuerza resultante.

Ejercicios. Ejercicio 12.17. Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ sube de $y = 1\,\mathrm{m}$ a $y = 4\,\mathrm{m}$ y luego baja a $y = 2\,\mathrm{m}$, recorriendo además varios tramos horizontales. Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Calcula el trabajo del peso en cada tramo vertical y en la historia completa. Si parte con $K_a = 30\,\mathrm{J}$ y una fuerza aplicada realiza $50\,\mathrm{J}$, sin otros trabajos, calcula K_b.

Solución. En el ascenso, $W_{g,1} = -20(4-1) = -60\,\mathrm{J}$; en el descenso, $W_{g,2} = -20(2-4) = 40\,\mathrm{J}$. Los tramos horizontales dan cero. La suma es $-20\,\mathrm{J}$, igual a $-mg(2-1)$. El balance total produce $K_b = 30 - 20 + 50 = 60\,\mathrm{J}$ y rapidez final $\sqrt{2K_b/m} = \sqrt{60}\,\mathrm{m/s}$. Los datos de trabajo total no permiten calcular la rapidez en la altura máxima, porque no dicen cómo se distribuyó el trabajo aplicado antes de alcanzarla. El resultado final es condicional a una historia que cumpla esos datos y Newton.

Ejercicio 12.18. Una masa de $1\,\mathrm{kg}$ sobre una guía horizontal lisa está unida a un resorte fijo de constante $k = 100\,\mathrm{N/m}$. Se suelta desde $x_a = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Calcula la rapidez cuando cruza $x = 0$ y cuando alcanza $x_b = -0{,}10\,\mathrm{m}$. Justifica que ambas posiciones pertenecen al movimiento.

Solución. Peso y normal realizan trabajo cero. Hasta el origen, el resorte realiza $100(0{,}20)^2/2 = 2\,\mathrm{J}$; así, $v^2 = 4$ y la rapidez es $2\,\mathrm{m/s}$. Hasta $-0{,}10\,\mathrm{m}$, realiza $50[(0{,}20)^2 - (0{,}10)^2] = 1{,}5\,\mathrm{J}$, por lo que la rapidez es $\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$. Newton tiene la solución $x(t) = 0{,}20\cos(10t)$, que verifica la ecuación y los datos iniciales. Cruza el origen en $t = \pi/20$ y alcanza por primera vez $-0{,}10$ en $t = \pi/15$, con velocidad negativa en ambos cruces. La solución temporal comprueba alcance y dirección; el balance por sí solo entregaba las magnitudes.

10. Rozamiento y longitud recorrida

El rozamiento cinético muestra por qué la longitud recorrida puede importar aunque los extremos coincidan. En una superficie fija, la fuerza se opone a la velocidad de deslizamiento: al invertir el movimiento se invierte también la fuerza. Los trabajos de ida y vuelta tienen entonces el mismo signo negativo. No se cancelan como los del peso o los de un resorte fijo.[7]

Consideremos una partícula que desliza por una guía fija. En los intervalos de deslizamiento, escribamos $\mathbf{f} = -f\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, donde $f \geq 0$ puede variar a lo largo de la historia. La relación sólo se prescribe para $\mathbf{v} \neq 0$. Los instantes de detención se tratan mediante el modelo de contacto correspondiente; no se define una dirección de fricción cinética dividiendo por cero. Basta para integrar que las fuerzas y velocidades sean regulares por tramos y que los intervalos de reposo tengan velocidad nula.

Proposición 12.15 — Trabajo de una resistencia al deslizamiento sobre una guía fija. Bajo el modelo anterior, la potencia durante el deslizamiento es $P_f = -f|\mathbf{v}|$. El trabajo sobre toda la historia es

$$W_f = -\int_{t_a}^{t_b} f(t)|\mathbf{v}(t)|\,dt = -\int f\,ds \leq 0.$$

Si f es constante, $W_f = -fS$, donde S es la longitud total recorrida, con todas las repeticiones.

Demostración. proposición 12.10 da $P_f = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} = -f\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}/|\mathbf{v}| = -f|\mathbf{v}|$ en cada tramo de deslizamiento. Integrar y usar $ds = |\mathbf{v}|dt$ produce la primera igualdad y su forma por longitud. Los intervalos de reposo contribuyen cero. Si f es constante, sale de la integral y queda $-f\int ds = -fS$. La desigualdad procede de $f \geq 0$ y $ds \geq 0$. □

[7] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.6, p. 166 y §4.11, ejemplo 4.17, pp. 183–184; Morin, *Introduction to Classical Mechanics*, 2008, cap. 5, §5.1, p. 143. Los argumentos de longitud se restringen a una superficie fija. El balance del par bloque–cinta y la distinción entre trabajo individual y relativo se desarrollan localmente.

La notación $\int f\,ds$ integra sobre el recorrido realizado, no sobre el conjunto geométrico de puntos visitados. Una vuelta completa cuenta toda su longitud; recorrerla dos veces cuenta el doble. Conocer únicamente $\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$ no basta. Tampoco se puede emplear una integral orientada de $-f\,dx$ para una historia con retrocesos manteniendo el mismo signo de fuerza: al cambiar la dirección cambia el régimen.

Sobre un plano horizontal fijo, sin otras fuerzas verticales, $N = mg$ y la ley cinética de Coulomb da $f = \mu_k mg$. En un plano inclinado recto, bajo las mismas condiciones de contacto, $N = mg\cos\theta$. En una curva vertical la reacción puede depender de rapidez y curvatura; allí no debe sustituirse automáticamente por mg. El balance tangencial puede ahorrar cálculo, pero la componente normal de Newton sigue determinando el contacto.

Para un soporte móvil de velocidad local $\mathbf{u}$, la fricción se opone a la velocidad relativa tangencial $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ en el modelo de deslizamiento plano que consideramos. Su potencia sobre la partícula es $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$, que puede ser positiva. Una cinta puede acelerar un bloque: el hecho de que exista deslizamiento no exige que disminuya su energía cinética en el laboratorio.

Si la reacción sobre el soporte es $-\mathbf{f}$, la suma de potencias de ambas fuerzas es

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{f}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{w} = -f|\mathbf{w}| \le 0.$$

Esta desigualdad se refiere al par de cuerpos y a su deslizamiento relativo. No identifica el trabajo sobre un solo cuerpo con toda la producción térmica. Describir temperatura, deformaciones y energía interna requiere ampliar el modelo; el teorema del punto material sólo contabiliza su energía cinética. La elección del sistema determina qué fuerzas y trabajos figuran en el balance.

Principio metodológico 12.10 — Distinguir desplazamiento, longitud y deslizamiento relativo. Para una superficie fija, integra la resistencia con la longitud recorrida. Para un soporte móvil, calcula primero la velocidad relativa que fija la dirección de la fricción y luego la potencia con la velocidad del receptor en el marco elegido. Verifica aparte la normal, la permanencia del contacto y el régimen al detenerse.

Ejercicios. Ejercicio 12.19. Una fuerza externa arrastra una partícula de $1\,\mathrm{kg}$ sobre una mesa horizontal fija, primero de $x = 0$ a $x = 3\,\mathrm{m}$ y luego hasta $x = 1\,\mathrm{m}$. La fricción cinética tiene magnitud $2\,\mathrm{N}$. Los tramos se recorren con deslizamiento y la detención de inversión no añade trabajo. Calcula el trabajo de fricción. Si las energías cinéticas inicial y final son iguales, ¿cuánto trabajo realizó la fuerza externa?

Solución. La ida mide $3\,\mathrm{m}$ y la vuelta $2\,\mathrm{m}$, por lo que $S = 5\,\mathrm{m}$. En la ida la fricción apunta a la izquierda y realiza $-6\,\mathrm{J}$; en la vuelta apunta a la derecha y realiza $-4\,\mathrm{J}$. El total es $-10\,\mathrm{J}$. Usar $-2(1-0) = -2\,\mathrm{J}$ sería mantener indebidamente la dirección de fuerza. Como peso y normal no hacen trabajo y $\Delta K = 0$, el agente externo realizó $10\,\mathrm{J}$. La igualdad de energías en los extremos no exige rapidez constante durante la inversión.

Ejercicio 12.20. Una partícula desliza hacia abajo por un plano fijo de inclinación $0 < \theta < \pi/2$, con rapidez inicial $v_0 > 0$. El coeficiente cinético es μ_k y el descenso vertical es $h > 0$. Obtén la rapidez candidata al final y las condiciones para alcanzar ese descenso en el régimen supuesto.

Solución. La longitud es $s = h/\sin\theta$, el peso realiza mgh y la fricción $-\mu_k mg\cos\theta\, s$. La normal realiza cero. Por tanto,

$$v_b^2 = v_0^2 + 2gh(1 - \mu_k\cot\theta).$$

Newton tangencial da aceleración constante $a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$. Si $a \ge 0$, todo descenso finito se alcanza con movimiento descendente; para $a = 0$ la rapidez permanece v_0. Si $a < 0$, la

primera detención está a $s_* = v_0^2/(2|a|)$, y se alcanza el extremo en la misma rama sólo si $s \le s_*$. La igualdad da llegada con rapidez cero; después se debe comprobar el modelo estático o el reinicio. Un radicando negativo indica que el extremo no se alcanza por deslizamiento descendente continuo. No se presupone que un bloque en reposo arranque: eso requeriría información sobre fricción estática.

Ejercicio 12.21. Una cinta horizontal se mueve hacia la derecha con velocidad constante $U = 4\,\mathrm{m/s}$. Sobre ella se deposita un bloque de masa $m = 2\,\mathrm{kg}$, inicialmente en reposo en el laboratorio. Mientras desliza, recibe fricción de magnitud $f = 2\,\mathrm{N}$. Calcula el tiempo hasta igualar velocidades, el trabajo sobre el bloque y el trabajo de la reacción sobre la cinta. Compara su suma con el deslizamiento relativo.

Solución. La fricción sobre el bloque apunta a la derecha mientras $v < U$. Newton da $v = ft/m = t$ y $t_* = mU/f = 4\,\mathrm{s}$. El desplazamiento del bloque es $ft_*^2/(2m) = 8\,\mathrm{m}$, así que $W_b = f\Delta x = 16\,\mathrm{J}$, igual a $mU^2/2$. La cinta recorre $Ut_* = 16\,\mathrm{m}$ y recibe la reacción $-f$: su trabajo de contacto es $W_c = -32\,\mathrm{J}$. La suma vale $-16\,\mathrm{J}$. La longitud relativa es $\int_0^{t_*}(U - v)dt = 8\,\mathrm{m}$, que multiplicada por $-f$ da el mismo resultado. El motor que mantiene la cinta a velocidad constante debe compensar la reacción; su trabajo no se incluyó entre los dos trabajos de contacto. Tras igualar velocidades termina el régimen cinético supuesto.

11. Trabajo de vínculos fijos y móviles

En el capítulo 11 distinguimos la condición geométrica de un vínculo y la fuerza que la hace efectiva. Para calcular trabajo interesa una propiedad concreta: la relación entre la reacción y la velocidad del punto que la recibe. Una guía fija lisa suele imponer perpendicularidad y entonces su reacción no cambia K. Una guía móvil puede entregar o retirar energía cinética aun siendo lisa.[8]

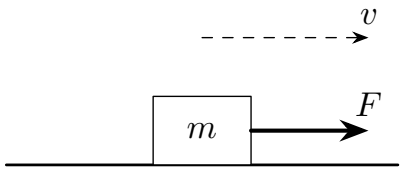


Figura 12.5. Una fuerza de vínculo tiene potencia $F \cdot v$ evaluada en el punto sobre el cuerpo. Cuando su punto de aplicación se mueve en la dirección de la fuerza, esa potencia puede ser positiva. No basta invocar idealidad para imponer trabajo nulo. Véase §11.

La palabra «lisa» elimina la componente tangencial de contacto en el modelo ideal. No elimina la reacción normal ni garantiza trabajo nulo en todos los marcos. Tampoco la palabra «restricción» determina por sí sola la potencia. Necesitamos conocer la velocidad efectiva del receptor y cómo se mueve el soporte.

Proposición 12.16 — Reacción normal de una guía fija lisa. Sea una partícula que permanece sobre una curva regular fija $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\gamma}(q(t))$, con $\boldsymbol{\gamma}'(q) \neq 0$. Si su reacción $\mathbf{R}$ satisface $\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma}' = 0$, entonces su potencia y su trabajo son cero.

[8] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.5, p. 161, trata fuerzas de restricción perpendiculares al movimiento. Proposición 12.16 explicita las condiciones de guía fija y regular; proposición 12.17 y el ejemplo de plataforma se deducen aquí por regla de la cadena y Newton. No se extiende el trabajo nulo a soportes móviles ni se usa el formalismo de d’Alembert.

Demostración. La regla de la cadena da $\mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma}'(q)\dot{q}$. Por proposición 12.10, $P_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma}')\dot{q} = 0$. Integrar produce $W_R = 0$. El argumento también vale cuando $\dot{q} = 0$ y no exige dividir por rapidez. □

La misma idea vale sobre una superficie fija si la reacción es normal y la velocidad es tangente. En una cuerda inextensible con centro fijo, la tensión radial es perpendicular a la velocidad mientras el hilo permanece tenso. Estos resultados no afirman que la reacción sea pequeña ni irrelevante: puede determinar una aceleración normal grande y decidir si el contacto es posible.

Para una guía que se traslada sin cambiar de forma, escribamos $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}(t) + \boldsymbol{\gamma}(q(t))$. El punto de la guía con etiqueta q tiene velocidad $\dot{\mathbf{c}}$; la partícula añade su movimiento relativo sobre ella. Supondremos una reacción ideal perpendicular al vector tangente de la guía, sin fricción.

Proposición 12.17 — Potencia de una guía lisa trasladada. Bajo las hipótesis anteriores,

$$P_R = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{c}}, \qquad W_R = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{c}}\, dt.$$

Demostración. Derivar la parametrización da $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\gamma}'\dot{q}$. El producto escalar con $\mathbf{R}$ elimina el segundo término porque $\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma}' = 0$. Proposición 12.10 da la potencia y definición 12.5 su integral. □

La perpendicularidad se establece con la velocidad relativa sobre la guía, no necesariamente con la velocidad del laboratorio. Si la traslación es tangente a una guía recta, la reacción normal sigue realizando trabajo cero; si tiene componente normal puede hacer trabajo. Para un soporte que gira o se deforma, $\dot{\mathbf{c}}$ no describe toda la velocidad de sus puntos: hay que usar la parametrización temporal completa. Proposición 12.17 se limita deliberadamente a la traslación de una forma fija.

Un caso elemental es una plataforma horizontal lisa que sube con velocidad $U > 0$ constante. Una masa que permanece sobre ella comparte la velocidad vertical U. Sin otras fuerzas verticales, Newton da $N = mg$. La normal entrega potencia mgU y el peso entrega $-mgU$; la energía cinética permanece constante. La normal realiza trabajo positivo durante el ascenso, aunque no exista rozamiento.

En una plataforma acelerada con altura $c(t)$, la permanencia del contacto exige $N = m[g+\ddot{c}(t)] \geq 0$. Si la expresión necesaria es negativa, una plataforma que sólo empuja no puede ejercerla: se pierde el contacto y cesa la parametrización impuesta. El balance escalar no reemplaza esa desigualdad. Una reacción calculada algebraicamente debe pertenecer al conjunto de fuerzas que el contacto puede realizar.

Principio metodológico 12.11 — Justificar cada trabajo nulo. Para omitir una reacción del balance, demuestra que su producto escalar con la velocidad del receptor es cero. En un vínculo móvil, separa movimiento del soporte y movimiento relativo. Después verifica con Newton la reacción y la admisibilidad del contacto; una cuenta correcta de trabajo no sostiene por sí sola una guía unilateral.

Ejercicios. Ejercicio 12.22. Una partícula recorre una circunferencia fija lisa de radio R, bajo una fuerza tangencial aplicada y una reacción normal. Entre dos puntos, el trabajo tangencial aplicado es A. ¿Qué determina ese dato si la rapidez inicial es v_a? ¿Permite calcular la reacción?

Solución. proposición 12.16 da trabajo normal cero y proposición 12.7 produce $v_b^2 = v_a^2 + 2A/m$, siempre que no haya otras fuerzas con trabajo. Ese valor es necesario y debe ser no negativo. La reacción no sale del trabajo porque es perpendicular a la velocidad. Si la fuerza aplicada es puramente tangencial y no hay otras fuerzas radiales, Newton radial requiere una fuerza hacia el centro de magnitud mv^2/R en cada instante. Para conocer su historia se necesita la rapidez a lo

largo de la circunferencia, no sólo su valor final. Una guía capaz de empujar en un único sentido requiere además comprobar el signo de la reacción. El dato A tampoco fija el tiempo empleado ni el punto de llegada por sí mismo.

Ejercicio 12.23. Una masa de $3\,\mathrm{kg}$ permanece sobre una plataforma horizontal lisa cuya altura es $c(t) = t^2/2$ metros durante $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$. Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Calcula reacción, trabajos del peso y de la normal, y cambio cinético. Comprueba el contacto.

Solución. La aceleración vertical es $1\,\mathrm{m/s^2}$ y $N - mg = m\ddot{c}$ da $N = 33\,\mathrm{N} > 0$. La subida es $2\,\mathrm{m}$, por lo que $W_N = 66\,\mathrm{J}$ y $W_g = -60\,\mathrm{J}$. La suma vale $6\,\mathrm{J}$. La velocidad vertical pasa de 0 a $2\,\mathrm{m/s}$ y $\Delta K = 3(2)^2/2 = 6\,\mathrm{J}$. La normal es compatible con un contacto que sólo empuja. La energía cinética aumenta por el trabajo neto; eliminar la normal por ser un vínculo liso habría dado un cambio negativo imposible desde el reposo.

12. Balance cinético de sistemas de partículas

El teorema trabajo–energía puede sumarse sobre un conjunto finito de partículas. La suma exige conservar el receptor de cada fuerza: dos fuerzas iguales y opuestas no realizan necesariamente trabajos opuestos, porque actúan sobre partículas con velocidades distintas. Esta diferencia impide trasladar al trabajo la cancelación de fuerzas internas usada en otros balances.[9]

Elegimos un sistema de n partículas de masas constantes $m_i > 0$, todas medidas en el mismo marco inercial. La lista de partículas es fija durante el intervalo: no entran ni salen cuerpos y no cambia la masa de sus miembros. Suponemos trayectorias de clase C^2 y fuerzas continuas por tramos que satisfacen Newton. Un flujo de materia o una masa variable requeriría otro balance.

Definición 12.9 — Energía cinética de un sistema finito. La energía cinética del sistema es la suma

$$K_{\mathrm{sis}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2.$$

Cada término utiliza la velocidad de su partícula. La definición no sustituye todas esas velocidades por una velocidad común ni supone rigidez. Denotemos por $\mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}}$ la suma de fuerzas sobre la partícula i debidas a agentes exteriores al sistema. Denotemos por $\mathbf{F}_{ij}$ la fuerza sobre i ejercida por j. Esta convención fija el receptor en el primer índice y evita intercambiar signos durante la suma. Suponemos que las interacciones internas admiten esta descomposición por pares.

Proposición 12.18 — Balance cinético por suma de partículas. Si

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij},$$

entonces

$$\frac{dK_{\mathrm{sis}}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i.$$

Al integrar, ΔK_{sis} es la suma de los trabajos externos e internos sobre sus respectivos receptores.

[9] El balance proposición 12.18 y el agrupamiento proposición 12.19 se deducen localmente de Newton, proposición 12.4 y sumas finitas. Morin, obra citada, cap. 5, §5.1, apartado «Work vs. potential energy», pp. 144–146, distingue la descripción de un punto material y la de un cuerpo deformable. Se conserva esa distinción de modelo sin anticipar centro de masa, impulso ni descomposición rotacional.

Demostración. proposición 12.4 aplicado a cada partícula da $dK_i/dt = m_i\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i$. Sustituir Newton y distribuir el producto escalar produce la expresión individual. La suma es finita, así que se puede intercambiar con la derivación y la integración. Definición 12.9 identifica la suma de derivadas y definición 12.5 identifica cada integral de potencia con su trabajo. □

Esta identidad no usa todavía la tercera ley. Si además las fuerzas de cada par cumplen $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, las contribuciones internas se agrupan en pares no ordenados. La cancelación vectorial de las fuerzas sigue siendo verdadera, pero las velocidades permanecen en los productos escalares.

Proposición 12.19 — Potencia de un par interno y condición de anulación. Para un par que satisface acción y reacción,

$$P_{ij} = \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j).$$

Si la fuerza es central y la distancia entre las partículas permanece constante y no nula, esa potencia es cero. En general, acción y reacción por sí solas no la anulan.

Demostración. La potencia de las dos fuerzas es $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$. Para una fuerza central escribimos $\mathbf{F}_{ij} = \lambda(t)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. La distancia constante implica, al derivar su cuadrado, $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = 0$. Su producto por λ da potencia cero. Sin esa condición, el producto puede tener cualquier signo. □

Así, un resorte entre dos masas puede modificar la suma de sus energías cinéticas aunque no exista fuerza externa. Al reducirse o crecer su deformación, las fuerzas internas pueden realizar trabajo neto positivo o negativo. La condición «aislado» significa aquí ausencia de agentes externos; no significa automáticamente K_{sis} constante.

Para un modelo de partículas con separaciones rígidas y fuerzas internas centrales, proposición 12.19 permite omitir esas potencias internas. No permite reemplazar el trabajo externo por la resultante externa multiplicada por el desplazamiento de un punto arbitrario: las fuerzas externas pueden actuar en receptores distintos con desplazamientos distintos. La simplificación adicional requiere una relación cinemática justificada.

La frontera del sistema también importa. Si elegimos sólo una masa unida a otra por un resorte, la fuerza del resorte cuenta como externa para esa masa. Si incluimos ambas partículas, pasa al balance interno de pares. Los cálculos físicos son compatibles, pero las listas de trabajos cambian. Una partícula equivalente que represente un cuerpo extenso tampoco describe automáticamente su calentamiento o deformación: el nivel de detalle debe declararse.

Principio metodológico 12.12 — Elegir el sistema antes de sumar. Fija sus miembros y calcula la potencia de cada fuerza con la velocidad de su receptor. Agrupa fuerzas internas por pares sólo después de escribir sus dos potencias. Para omitirlas, comprueba una condición que anule el producto con la velocidad relativa; no basta citar acción y reacción.

Ejercicios. Ejercicio 12.24. Dos partículas en una línea reciben sólo un par de fuerzas internas. En un instante, la fuerza sobre la primera es $F_{12} = 5\,\text{N}$ hacia la derecha y la de la segunda es $F_{21} = -5\,\text{N}$. Sus velocidades son $v_1 = 3\,\text{m/s}$ y $v_2 = 1\,\text{m/s}$. Calcula las potencias individuales y la tasa de cambio de K_{sis}. ¿Qué ocurriría si ambas velocidades fueran iguales?

Solución. La primera potencia es $5 \cdot 3 = 15\,\text{W}$ y la segunda $-5 \cdot 1 = -5\,\text{W}$. La suma es $10\,\text{W}$, también $5(3-1)$, por lo que K_{sis} aumenta a esa tasa pese a que la fuerza total del sistema es cero. El dato corresponde a un instante y no determina un trabajo finito sin conocer la evolución. Si $v_1 = v_2$, la potencia del par sería cero en ese instante. Para asegurar trabajo nulo en todo un intervalo tendría que mantenerse esa condición, o una perpendicularidad equivalente, durante el intervalo.

Ejercicio 12.25. Dos partículas están unidas por un resorte ideal sin masa de constante k. Sea $q = x_2 - x_1 - \ell_0$ su deformación con signo. El resorte ejerce $F_{12} = kq$ sobre la primera y $F_{21} = -kq$ sobre la segunda. No hay trabajos externos. Si q pasa de a a b, obtén ΔK_{sis} y explica por qué no hacen falta velocidades iguales.

Solución. La potencia del par es $kq\dot{x}_1 - kq\dot{x}_2 = -kq\dot{q}$, ya que $\dot{q} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$. Integrarla da

$$\Delta K_{\text{sis}} = -\frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

El resultado depende de la variación de deformación y permite velocidades diferentes. Si $|b| < |a|$, aumenta la suma cinética. Si las dos velocidades fueran idénticas durante todo el intervalo, q permanecería constante y el trabajo del par sería cero. En este modelo ideal, el resorte se representa mediante las dos fuerzas y no añade un término de energía cinética propio. Las deformaciones propuestas deben pertenecer a la solución dinámica; el balance no garantiza cualquier cambio elegido de a a b.

13. Trabajo y energía cinética entre marcos inerciales

La energía cinética usa velocidades y por eso depende del marco de referencia. El trabajo también depende del marco: el mismo punto receptor puede recorrer desplazamientos diferentes para dos observadores. La igualdad entre trabajo total y cambio cinético se mantiene si ambos lados se calculan coherentemente en cada marco.[10]

Comparemos marcos inerciales S y S' con ejes paralelos, sin rotación relativa. Elegimos un origen común en $t = 0$ y suponemos que el origen de S' se mueve con velocidad constante $\mathbf{U}$ respecto de S. La transformación es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{U}t$, con el mismo tiempo en ambos marcos. Entonces $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ y $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$. La masa clásica permanece igual.

Proposición 12.20 — Cambio de energía cinética por traslación uniforme. Para una partícula de masa constante m,

$$K' = K - m\mathbf{U}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{2}m|\mathbf{U}|^2,$$

y entre dos instantes correspondientes, $\Delta K' = \Delta K - m\mathbf{U}\cdot(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a)$.

Demostración. definición 12.3 en S' da $K' = m|\mathbf{v} - \mathbf{U}|^2/2$. Desarrollar el cuadrado produce $m|\mathbf{v}|^2/2 - m\mathbf{U}\cdot\mathbf{v} + m|\mathbf{U}|^2/2$. Al restar los valores final e inicial, el término constante se cancela y queda la segunda identidad. □

No existe contradicción si una partícula está en reposo para un observador y tiene energía cinética positiva para otro. Tampoco tienen que coincidir los signos de ΔK y $\Delta K'$. La diferencia incorpora la variación de velocidad proyectada sobre $\mathbf{U}$, que el balance en un solo marco no elimina.

Para comparar trabajos necesitamos transformar también la ley de fuerza. En la mecánica newtoniana considerada suponemos que la fuerza sobre el mismo receptor tiene el mismo vector en ambos marcos de ejes paralelos, una vez expresados correctamente sus argumentos. Si en S es $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, la ley correspondiente en S' es

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}' + \mathbf{U}t, \mathbf{v}' + \mathbf{U}, t).$$

[10] Morin, obra citada, cap. 5, §5.6.1, p. 161, ecuación 5.55: relación galileana de velocidades. Proposición 12.20 y proposición 12.21 se deducen localmente por desarrollo del cuadrado y transformación de la integral de trabajo. No se introduce el marco de centro de masa ni la teoría de impulso de las secciones posteriores.

No se mantiene por comodidad una dependencia espacial que cambió al mover el origen. Un resorte anclado en reposo en S tiene un apoyo móvil en S'. Una fricción debe seguir calculándose con respecto a su superficie: restar $\mathbf{U}$ tanto al bloque como al soporte conserva su velocidad relativa.

Proposición 12.21 — Transformación del trabajo y coherencia del teorema. Para una historia de fuerza $\mathbf{f}(t)$ que representa el mismo vector físico en los dos marcos,

$$W' = W - \mathbf{U} \cdot \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{f}(t)\, dt.$$

Si $\mathbf{f}$ es la fuerza total que cumple Newton, entonces $W' = \Delta K'$ cuando $W = \Delta K$.

Demostración. definición 12.5 y $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ dan $W' = \int \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U}) dt = W - \mathbf{U} \cdot \int \mathbf{f} dt$. Para la fuerza total, Newton implica $\int \mathbf{f} dt = m(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a)$. Sustituir y usar proposición 12.20 prueba $W' = \Delta K - m\mathbf{U} \cdot (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a) = \Delta K'$. □

El paso que usa Newton se refiere a la fuerza total. Para una contribución individual permanece la primera identidad, pero su integral temporal no puede reemplazarse automáticamente por todo $m(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a)$. Si varias fuerzas actúan, sus correcciones se suman y sólo la suma cumple esa sustitución.

Una fuerza que hace trabajo cero en S puede hacerlo en S'. La reacción de una guía fija, por ejemplo, es perpendicular al movimiento relativo sobre esa guía. Para el observador que se traslada, la guía se mueve y la reacción puede tener potencia. Esto concuerda con la proposición 12.17: la velocidad del soporte y la del receptor deben medirse en el mismo marco.

La velocidad relativa entre dos partículas sí permanece igual: $\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$. Por eso, para un par interno con fuerzas iguales y opuestas que se transforman según lo supuesto, proposición 12.19 da la misma potencia conjunta en ambos marcos. Cada potencia individual puede cambiar. La anulación de la fuerza total del par hace cancelar las correcciones del trabajo conjunto, sin imponer que su potencia original sea cero.

Estas propiedades requieren traslación uniforme. En un marco acelerado, $\mathbf{a}'$ ya no coincide con $\mathbf{a}$ y Newton adopta otra forma. No se debe aplicar proposición 12.21 como si toda elección de observador conservara las mismas ecuaciones sin términos adicionales.

Principio metodológico 12.13 — Transformar ambos lados del balance. Declara el marco antes de calcular velocidades, energías y trabajos. Al cambiarlo, transforma la historia del receptor y la ley de fuerza, incluidos los soportes. Compara instantes que representan los mismos eventos físicos y calcula el trabajo y ΔK íntegramente en el marco solicitado.

Ejercicios. Ejercicio 12.26. Una masa de 2 kg recibe una fuerza horizontal total constante de 2 N durante 2 s. En S parte con velocidad 1 m/s hacia la derecha. Calcula el trabajo y el cambio cinético en S y en un marco S' que se mueve con $U = 2$ m/s hacia la derecha.

Solución. La aceleración es $1\,\mathrm{m/s^2}$ y la velocidad final 3 m/s. En S, el desplazamiento es $1 \cdot 2 + (1/2)1 \cdot 2^2 = 4$ m, así que $W = 8$ J. Las energías son 1 J y 9 J, con diferencia 8 J. En S', las velocidades pasan de -1 a 1 m/s y ambas energías son 1 J. Su desplazamiento neto es $4 - U \cdot 2 = 0$ y $W' = 0$. La partícula retrocede y luego avanza en ese marco; el trabajo constante se cancela entre ambos tramos. Proposición 12.21 da igualmente $W' = 8 - 2(2 \cdot 2) = 0$.

Ejercicio 12.27. Una masa de 1 kg asciende verticalmente en una plataforma lisa a velocidad constante $V = 2$ m/s durante 3 s. Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Compara los trabajos de peso y normal en el laboratorio y en el marco inercial que asciende con la plataforma.

Solución. En el laboratorio, $N = mg = 10$ N y el ascenso es 6 m. La normal realiza 60 J y el peso -60 J; el trabajo total y ΔK son cero. En el marco que sube con V, la partícula permanece en reposo y ambos trabajos son cero. Proposición 12.21 aplicada a cada contribución resta $V \int N dt = 60$ J a

la normal y resta $V\int(-mg)dt = -60\,\mathrm{J}$ al peso: se recuperan los dos ceros. La energía cinética vale 2 J en el laboratorio y cero en el otro marco, pero sus variaciones coinciden porque la velocidad no cambia. El marco de la plataforma es inercial sólo porque V es constante.

14. Síntesis del método y sus límites

El trabajo relaciona una fuerza con el desplazamiento de su receptor. El teorema trabajo–energía integra la componente de Newton que modifica la rapidez. Esa reducción es especialmente útil cuando se conoce la ley de fuerza a lo largo del recorrido y se busca una magnitud escalar, como una rapidez final o una distancia de frenado. Su utilidad no elimina las componentes de Newton que deciden dirección, curvatura y contacto.

Para organizar un problema, fijamos primero sistema, marco y régimen de fuerzas. Identificamos después el tramo real o la trayectoria supuesta y calculamos cada trabajo con el desplazamiento correspondiente. La suma produce $K_b - K_a$. Sólo entonces interpretamos los valores: verificamos no negatividad, dirección compatible con los datos iniciales, alcance de los eventos y validez de los vínculos. Si se busca tiempo o trayectoria, debemos recuperar la información adicional que el escalar no conserva.

Una fuerza individual puede efectuar trabajo positivo mientras la energía cinética disminuye, si otras contribuciones negativas predominan. Un trabajo neto cero en todo un intervalo asegura igualdad de energías en sus extremos, pero no rapidez constante dentro de él. Para asegurar esta última durante un intervalo basta que la potencia total sea cero en cada instante. La diferencia entre una igualdad integral y una igualdad puntual evita conclusiones temporales que los datos no sostienen.

La reducción también puede aceptar historias que no resuelven Newton. Incluso si una curva satisface exactamente el balance cinético para todos los tiempos, puede tener una aceleración normal que ninguna fuerza declarada produce. El siguiente resultado exhibe esa pérdida de información de manera explícita.

Proposición 12.22 — El balance cinético no determina la ecuación vectorial. En dimensión al menos dos, la igualdad $dK/dt = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ no implica en general $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, ni siquiera si $\mathbf{v}$ nunca se anula.

Demostración. En el plano tomemos $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y la curva $\mathbf{r}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$, con $R, \omega > 0$. Su rapidez es $R\omega$ constante y no nula, por lo que $dK/dt = 0 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ para todo t. Sin embargo, $m\mathbf{a} = -mR\omega^2(\cos\omega t, \sin\omega t) \neq \mathbf{0}$. La historia satisface la igualdad escalar pero no Newton con la fuerza indicada. □

En términos generales, el balance diferencial sólo exige $(m\mathbf{a}-\mathbf{F})\cdot\mathbf{v} = 0$. Un residuo perpendicular a $\mathbf{v}$ queda invisible en él. En una línea, donde no existe dirección normal independiente y $v \neq 0$, la igualdad $mv\dot{v} = Fv$ sí permite deducir $m\dot{v} = F$ al dividir por v. En un instante de reposo esa inferencia deja de funcionar: ambos lados del balance de potencia pueden ser cero para aceleraciones diferentes. Debemos volver a la ecuación original o a una prolongación continua justificada.

La hipótesis de masa constante aparece en todas las pruebas cinéticas del capítulo. Si cambia la masa, derivar $m(t)|\mathbf{v}|^2/2$ añade el término $\dot{m}|\mathbf{v}|^2/2$, y el intercambio de materia exige definir qué sistema seguimos. No se puede extender el teorema reemplazando simplemente m por $m(t)$ en sus fórmulas. Del mismo modo, la traslación de marco usada en §13 es uniforme y no representa un observador arbitrariamente acelerado.

Principio metodológico 12.14 — Usar el balance con sus condiciones de validez. Selecciona el método de trabajo para la información escalar que permite obtener. Conserva Newton

para dirección, reacción y continuación. En cada resultado distingue lo calculado de lo aún necesario: una rapidez candidata, un punto efectivamente alcanzado y un contacto físicamente admisible son conclusiones distintas.

Ejercicios. Ejercicio 12.28. Una masa m se declara libre de fuerzas en el plano. Se propone la historia circular de la proposición 12.22. Calcula trabajo total y energía cinética, identifica la fuerza que haría válida la historia y explica por qué la igualdad integral tampoco detecta el error.

Solución. Con la fuerza declarada, todo trabajo es cero. La energía cinética de la historia es $mR^2\omega^2/2$ constante, de modo que cualquier comparación entre instantes cumple $W = \Delta K = 0$. Para que la historia resuelva Newton se necesita $\mathbf{F}_{\text{req}} = -m\omega^2\mathbf{r}(t)$, dirigida hacia el centro. Esa fuerza también realiza trabajo cero porque $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. Por tanto, ambas declaraciones producen la misma información cinética, aunque sólo la segunda sostiene la curva. La componente normal no se recupera comparando más pares de instantes del mismo balance escalar.

Ejercicio 12.29. Un bloque de masa m llega con rapidez $v_0 > 0$ al extremo sin deformar de un resorte fijo horizontal de constante $k > 0$. Mientras lo comprime, desliza sobre una mesa con fricción cinética de magnitud constante $f > 0$. Usa $x \geq 0$ para la compresión. Calcula su primera compresión máxima y justifica que se alcanza. ¿Puede deducirse del balance si el bloque empieza a regresar?

Solución. Durante el avance, resorte y fricción realizan $-kx^2/2$ y $-fx$. La normal y el peso realizan cero. La rapidez satisface

$$v^2 = v_0^2 - \frac{k}{m}x^2 - \frac{2f}{m}x.$$

La raíz positiva es $d = [\sqrt{f^2 + kmv_0^2} - f]/k$. El radicando $q(x)$ es positivo para $0 \leq x < d$ y tiene derivada $q'(d) = -2(kd + f)/m < 0$. La rama inicial es $v = +\sqrt{q(x)}$; su tiempo de llegada es $\int_0^d dx/\sqrt{q(x)}$, finito porque cerca de d el integrando es comparable con $(d - x)^{-1/2}$. Así se alcanza la primera detención dentro del régimen supuesto. En ella el resorte empuja hacia el regreso con magnitud kd. Si la fricción estática máxima es $f_{s,\text{máx}}$, puede sostenerse el reposo cuando $kd \leq f_{s,\text{máx}}$; si $kd > f_{s,\text{máx}}$ no puede sostenerlo. Sin ese dato no se decide el reinicio. Al regresar, la fricción cinética cambia de signo y debe recalcularse el trabajo con el nuevo tramo.

Ejercicio 12.30. Una partícula desliza sin rozamiento sobre el exterior de un círculo vertical fijo de radio R. Parte del punto más alto con rapidez tangencial $v_0 > 0$, con $v_0^2 < gR$. La guía sólo puede empujar hacia afuera. Usa θ medido desde la vertical superior en el sentido de descenso. Determina la rapidez mientras hay contacto y el primer punto en que se pierde. Comprueba que ese punto se alcanza.

Solución. La altura es $y = R\cos\theta$. La normal es radial y proposición 12.16 da trabajo cero. El peso realiza $mgR(1 - \cos\theta)$, por lo que

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos\theta).$$

En dirección hacia el centro, el peso tiene componente $mg\cos\theta$ y la normal, dirigida hacia afuera, componente $-N$. Newton exige $mg\cos\theta - N = mv^2/R$, así que

$$N = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R}.$$

Inicialmente $N = m(g - v_0^2/R) > 0$. La primera anulación ocurre en $\cos\theta_* = (2 + v_0^2/(gR))/3$, número entre $2/3$ y 1. Antes de ella, $N > 0$ y $v \geq v_0 > 0$. Como $\dot{\theta} = v/R$, el tiempo $\int_0^{\theta_*} R\,d\theta/v(\theta)$ es finito y el punto se alcanza. Una prolongación sobre el círculo más allá requeriría $N < 0$, imposible para la guía unilateral. Desde la pérdida de contacto se inicia otra historia con el peso como fuerza, posición y velocidad de separación como datos iniciales. El balance cinético sobre el círculo por sí solo no habría detectado el límite del contacto.

El capítulo completa el cálculo de trabajo, potencia y energía cinética en modelos newtonianos de masa constante. Hemos obtenido trabajos que dependen sólo de extremos en ejemplos específicos y trabajos que dependen del recorrido, del soporte o del marco. El capítulo 13 estudiará cuándo esos cálculos permiten definir una energía potencial, qué condiciones aseguran independencia del camino y cómo se relacionan con conservación y estabilidad. Las pruebas de este capítulo permiten llegar a esa discusión sin confundir el balance de rapidez con la solución completa de la dinámica.

Capítulo 13

Energía potencial, fuerzas conservativas y estabilidad

El trabajo de una fuerza puede depender del camino. Cuando admite una representación mediante diferencias de una función de posición, el potencial reúne esa información y permite formular balances de energía mecánica. Estudiaremos las condiciones matemáticas de esa representación, la influencia del dominio y sus consecuencias dinámicas. La segunda parte desarrolla el análisis de equilibrio y estabilidad.

1. Potencial en una dimensión

En el capítulo 12 calculamos el trabajo de una fuerza y lo igualamos al cambio de energía cinética. Para una fuerza que depende sólo de la posición sobre una línea, esa integral puede almacenarse en una función de estado: basta conocer la posición para asignarle un valor. La construcción permite comparar trabajos mediante diferencias de una misma función y plantea la pregunta que organizará este capítulo: ¿cuándo sigue siendo posible en varias dimensiones?[1]

Comencemos sobre un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ con una fuerza continua $F : I \to \mathbb{R}$. La fuerza está especificada en la coordenada física x de una línea fija; no depende del tiempo ni de la velocidad. Elegimos una posición de referencia $x_0 \in I$ y un número U_0 con unidades de energía. Que I sea un intervalo garantiza que el segmento entre posiciones pertenece al dominio del modelo.

Definición 13.1 — Energía potencial unidimensional. La energía potencial de F con referencia (x_0, U_0) es

$$U(x) = U_0 - \int_{x_0}^{x} F(\xi)\, d\xi.$$

El signo menos hace que un trabajo positivo de la fuerza corresponda a una disminución del potencial. La integral es orientada: si $x < x_0$, se invierten sus límites con el signo correspondiente. No se está asignando una energía al camino recorrido, sino un valor a su extremo x.

Proposición 13.1 — Recuperación de fuerza y trabajo. La función definición 13.1 es de clase C^1 y satisface $F(x) = -U'(x)$. Para cualquier historia C^1 por tramos dentro de I, su trabajo es $W_F = U(x_a) - U(x_b)$, aunque haya retrocesos.

Demostración. La continuidad de F permite aplicar el teorema fundamental y obtener $U' = -F$. A lo largo de un tramo, la regla de la cadena da $dU(x(t))/dt = -F(x(t))\dot{x}(t)$. Integrar produce $\int F(x(t))\dot{x}(t)dt = U(x_a) - U(x_b)$. La suma sobre tramos cancela los valores en extremos intermedios. No se divide por velocidad, por lo que se incluyen instantes de reposo. □

La construcción funciona para toda fuerza continua de posición en un intervalo. No funciona de la misma manera para la fricción cinética, porque en un mismo punto ésta puede cambiar de

[1] Kleppner–Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 4, §§4.7–4.8, pp. 169–173. La construcción y su evaluación sobre historias con retrocesos se prueban aquí con el teorema fundamental y la regla de la cadena.

dirección según el movimiento. Tampoco almacena en una función $U(x)$ una fuerza con dependencia temporal arbitraria. Definir una integral sobre una historia concreta no convierte su resultado en función de posición independiente de la historia.

El potencial tiene unidades de energía y su derivada espacial unidades de fuerza. Una pendiente positiva produce fuerza hacia las x negativas; una pendiente negativa produce fuerza hacia las positivas. El valor de la pendiente, y no el valor absoluto de U, decide la fuerza. Un potencial grande y casi plano puede ejercer una fuerza pequeña, mientras uno de valor pequeño y pendiente fuerte puede ejercer una fuerza grande.

La fórmula del trabajo incluye una información física adicional: si esta fuerza es la resultante sobre una masa constante en un marco inercial, capítulo 12 da $K_b - K_a = U_a - U_b$. Si es sólo una contribución, todavía debemos sumar los trabajos de las restantes. Introducir U no cambia qué fuerzas actúan ni su jerarquía en Newton.

Principio metodológico 13.1 — Construir antes de interpretar. Especifica el intervalo y la ley de fuerza, fija una referencia y construye U. Comprueba $-U' = F$ y el signo de la diferencia que reproduce el trabajo. Antes de interpretar el cambio cinético, identifica si esa fuerza es total o sólo una contribución.

Ejercicios. Ejercicio 13.1. Una fuerza en una línea es $F(x) = A - Bx$, con A de unidades de fuerza y $B > 0$ de unidades de fuerza por longitud. Construye el potencial con $U(0) = 0$ y calcula el trabajo entre $x = a$ y $x = b$. Comprueba el resultado integrando la fuerza.

Solución. definición 13.1 da $U(x) = -Ax + Bx^2/2$. Su derivada es $-A + Bx$, de modo que $-U' = A - Bx$. El trabajo es $U(a) - U(b) = A(b-a) - B(b^2 - a^2)/2$, idéntico a $\int_a^b (A - Bx)dx$. La fórmula vale con $b < a$ y cambia de signo al intercambiar extremos. La posición de pendiente cero es A/B, pero clasificarla dinámicamente requiere precisar el modelo y el significado de estabilidad; aquí sólo se ha recuperado la fuerza.

Ejercicio 13.2. Una fuerza sobre una línea tiene ley $F(x) = -kx$, con $k > 0$. Una partícula se mueve de $a > 0$ a 0 y luego a $-a$. Obtén el trabajo de cada tramo mediante potencial y explica por qué el trabajo total cero no implica potencia cero en todo instante.

Solución. Con $U(0) = 0$, resulta $U(x) = kx^2/2$. El primer trabajo es $ka^2/2$ y el segundo $-ka^2/2$; el total es cero porque ambos extremos tienen el mismo potencial. Durante el movimiento, la potencia es $-kx\dot{x}$, que en general no se anula. Si el resorte es la única fuerza tangencial, la energía cinética aumenta hacia el origen y disminuye después. La igualdad entre los extremos no determina que la rapidez permaneciera constante, ni justifica omitir el tramo intermedio.

2. Cero de potencial y superposición

La posición de referencia introduce una libertad de representación. Cambiar el cero del potencial no cambia la fuerza ni el trabajo entre dos posiciones. Esa libertad no autoriza a cambiar por separado valores en puntos diferentes: la diferencia debe mantenerse. También permite sumar potenciales de varias fuerzas cuando éstas comparten la misma coordenada y el mismo dominio.[2]

Proposición 13.2 — Unicidad salvo una constante. Si U y V son potenciales C^1 de la misma fuerza en un intervalo I, existe una constante C tal que $V(x) = U(x) + C$ en todo I.

[2]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.7, pp. 169–172: libertad del cero y suma de contribuciones. Se prueban localmente la unicidad en un intervalo y la superposición; los ejercicios distinguen una historia posible de un tramo usado para calcular trabajo.

Demostración. Ambas funciones satisfacen $U' = -F = V'$, por lo que $(V-U)' = 0$. Para cualesquiera $a, b \in I$, el teorema del valor medio aplicado al segmento entre ellos da $(V-U)(b) = (V-U)(a)$. La diferencia es constante en el intervalo. □

El argumento depende de trabajar en una componente conectada. Si la fuerza estuviera definida en dos intervalos separados por una región excluida, cada componente admitiría su propia constante. El modelo no proporciona por sí solo una comparación energética entre ellas: ninguna historia dentro de su dominio conecta los dos lados. Más adelante veremos la versión en varias dimensiones.

Para el peso uniforme en un eje vertical ascendente, $F_y = -mg$ y un potencial es $U_g(y) = mgy + C$. Elegir el suelo, una plataforma o una mesa como altura cero cambia C. El trabajo entre alturas permanece $-mg(y_b - y_a)$. Un valor negativo de U_g sólo indica que la posición está por debajo del cero elegido; no implica rapidez negativa ni energía cinética negativa.

Para un resorte fijo horizontal, $U_s(x) = kx^2/2 + C$ cuando x mide la deformación con signo. La referencia habitual $U_s(0) = 0$ es cómoda, pero no obligatoria. Si usamos otra coordenada z y la posición sin deformación es z_0, la expresión pasa a $k(z - z_0)^2/2 + C$. Cambiar el cero de energía y cambiar el origen de posición son operaciones distintas: la segunda modifica cómo escribimos la deformación.

Proposición 13.3 — Superposición de potenciales. Si $F_1, \dots, F_n$ tienen potenciales $U_1, \dots, U_n$ en el mismo intervalo, la fuerza $F = \sum_i F_i$ tiene potencial $U = \sum_i U_i$.

Demostración. La suma finita es diferenciable y $-U' = -\sum_i U_i' = \sum_i F_i$. Proposición 13.1 convierte su diferencia entre extremos en el trabajo de la suma. □

En una línea vertical, un resorte anclado con posición sin deformación en $y = 0$ y el peso producen $U(y) = ky^2/2 + mgy + C$. Su fuerza es $-ky - mg$. Completar el cuadrado da $U(y) = \frac{k}{2}\left(y + \frac{mg}{k}\right)^2 + C - \frac{m^2g^2}{2k}$.

La posición de fuerza nula queda desplazada hacia abajo. La contribución constante no modifica esa posición. El cambio de potencial sigue incluyendo ambas interacciones, y no debe añadirse nuevamente el trabajo del peso si ya se empleó el potencial total para representar su efecto.

La suma describe un modelo con parámetros fijos. Si cambia k, se mueve el anclaje o varía el campo gravitatorio durante la historia, no basta comparar el mismo polinomio en dos posiciones: la función puede depender explícitamente del tiempo. Separaremos ese caso en §8.

Principio metodológico 13.2 — Mantener una referencia coherente. Usa un mismo potencial en los dos extremos de cada comparación. Suma contribuciones que correspondan a las fuerzas incluidas y declara qué coordenada mide cada deformación. Si representas una fuerza mediante su potencial, no agregues además su trabajo como una contribución nueva al mismo balance.

Ejercicios. Ejercicio 13.3. Para un mismo resorte se escriben $U_1(x) = kx^2/2$ y $U_2(x) = kx^2/2 + C$. Una historia tiene energías cinéticas K_a, K_b. Compara los trabajos y las diferencias de $K + U$ con ambas referencias. ¿Qué ocurre si se cambia el cero sólo en el extremo final?

Solución. Los trabajos coinciden porque $U_2(a) - U_2(b) = U_1(a) - U_1(b)$. También coincide $[K_b + U_2(b)] - [K_a + U_2(a)]$ con la expresión de referencia 1: los dos C se cancelan. Los valores absolutos de $K + U$ difieren en C. Si se usa $U_1(a)$ y $U_2(b)$, se introduce una diferencia espuria C y se mezclan convenciones. Un cambio uniforme de referencia no es una fuente de trabajo físico.

Ejercicio 13.4. Una masa m cuelga de un resorte vertical fijo de constante k, con coordenada y ascendente y deformación cero en $y = 0$. Construye el potencial total con valor cero en su posición de fuerza nula y calcula el trabajo total desde esa posición hasta un desplazamiento adicional a.

Solución. La posición de fuerza nula es $y_* = -mg/k$. El potencial con la referencia pedida es $U(y) = k(y - y_*)^2/2$. Su derivada produce $-U' = -k(y - y_*) = -ky - mg$, como requiere la suma

de fuerzas. Entre y_* y $y_* + a$, el trabajo total es $-ka^2/2$. Es negativo para cualquier $a \neq 0$. Esto no significa que una partícula soltada en reposo desde y_* llegue espontáneamente allí: sin otra acción, Newton mantiene el reposo. La fórmula calcula el trabajo de las fuerzas declaradas sobre el tramo propuesto, y su realización requiere datos o agentes compatibles.

3. Gradiente y fuerza potencial

En varias dimensiones una posición admite desplazamientos en direcciones distintas. La derivada de una función escalar debe expresar cómo cambia al movernos en cualquiera de ellas. En el espacio euclídeo, el gradiente reúne esas derivadas direccionales en un vector. Permite representar la fuerza a partir de una sola función y calcular su trabajo mediante la regla de la cadena.[3]

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto, con coordenadas cartesianas ortonormales $x_1, \dots, x_d$. Especificar el dominio es parte de especificar el campo: una región singular o excluida no puede cruzarse sin abandonar el modelo. Trabajaremos primero con un potencial $U : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

Definición 13.2 — Gradiente euclídeo. El gradiente de U es el vector

$$\nabla U = (\partial_1 U, \dots, \partial_d U),$$

que representa su diferencial mediante $DU(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = \nabla U(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ para todo desplazamiento $\mathbf{h}$. La definición vectorial se expresa aquí en una base ortonormal; la identificación usa el producto escalar euclídeo.

Definición 13.3 — Campo de fuerza con potencial. Un campo de posición $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tiene potencial U cuando $\mathbf{F} = -\nabla U$ en Ω. La función debe estar definida como un valor único en cada punto del dominio. Una expresión que cambia al rodear un agujero no constituye todavía un potencial global.

Proposición 13.4 — Trabajo de un campo potencial sobre una curva. Si $\mathbf{F} = -\nabla U$, el trabajo a lo largo de cualquier curva $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1 por tramos es

$$\int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) ds = U(\boldsymbol{\gamma}(a)) - U(\boldsymbol{\gamma}(b)).$$

Demostración. En cada tramo, la regla de la cadena da $dU(\boldsymbol{\gamma}(s))/ds = \nabla U(\boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s)$. Sustituir $\mathbf{F} = -\nabla U$ e integrar produce la diferencia. Al sumar los tramos se cancelan los valores intermedios. □

No se exige que la curva sea una solución de Newton para calcular esa integral. Una fuerza puede evaluarse sobre un recorrido de prueba; sólo al discutir la evolución de una partícula se requiere la ecuación dinámica. Esta separación permite comparar caminos y comprobar propiedades del campo sin introducir un agente que obligue físicamente a realizar cada recorrido.

Para un desplazamiento pequeño $\mathbf{h}$, la diferenciabilidad expresa $U(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - U(\mathbf{x}) = \nabla U(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|)$. El trabajo infinitesimal del campo tiene el signo opuesto. En un punto con gradiente no nulo, la dirección de mayor aumento del potencial es $\nabla U/|\nabla U|$: el producto con un vector unitario alcanza su máximo por Cauchy–Schwarz. La fuerza apunta hacia el descenso más pronunciado del potencial.

Si una curva permanece en un nivel $U = C$, derivarla da $\nabla U \cdot \boldsymbol{\gamma}' = 0$. Allí el campo potencial es perpendicular a sus direcciones tangentes, cuando el gradiente no se anula. Este hecho geométrico

[3]Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2008, cap. 5, §5.3, pp. 149–151, ecuaciones 5.27 y 5.30–5.32. Proposición 13.4 se demuestra mediante una parametrización única de la curva y regla de la cadena, sin dividir por componentes de velocidad.

no significa que toda trayectoria dinámica siga la dirección de la fuerza ni que deba permanecer en un nivel. La velocidad tiene sus propios datos iniciales; la fuerza gobierna su aceleración.

El gradiente cartesiano tampoco se obtiene derivando respecto de cualquier parámetro sin corregir la métrica. Si describimos una curva por q, entonces $dU/dq = \nabla U \cdot d\mathbf{r}/dq$, que es una proyección ponderada por la parametrización. No es automáticamente una componente cartesiana de fuerza. Reservaremos las coordenadas generalizadas y su formulación sistemática para su lugar posterior.

Principio metodológico 13.3 — Comprobar todas las componentes. Para verificar un potencial, deriva respecto de cada coordenada y compara $-\partial_i U$ con F_i. Para calcular trabajo sobre una curva usa la parametrización completa o la diferencia de potencial ya justificada. No conviertas la dirección de fuerza en una afirmación sobre la dirección de velocidad.

Ejercicios. Ejercicio 13.5. En el plano, sea $U(x, y) = kx^2/2 + \alpha xy + ky^2/2$, con constantes de unidades adecuadas. Obtén el campo y el trabajo desde $(0, 0)$ hasta (a, b) por cualquier curva contenida en el plano. ¿Es necesario que ese punto sea alcanzado por una partícula inicialmente en reposo en el origen?

Solución. El campo es $\mathbf{F} = (-kx-\alpha y, -\alpha x-ky)$. Proposición 13.4 da $W = -[k(a^2+b^2)/2+\alpha ab]$. El resultado es válido para cualquier recorrido de prueba entre los extremos. La fuerza en el origen es cero. Con datos de reposo allí, Newton admite la solución constante; como el campo es lineal y localmente Lipschitz, esa solución es única. Por tanto, un extremo distinto no se alcanza desde esos datos sin otra acción. Calcular trabajo entre posiciones no suministra una trayectoria espontánea.

Ejercicio 13.6. Sea $U(x, y) = A(x^2 + y^2)$, con $A > 0$. Calcula la fuerza, el trabajo sobre una vuelta circular de radio R y el trabajo sobre un tramo radial de radio R a radio $2R$.

Solución. La fuerza es $-2A(x, y)$, radial hacia el origen. Una vuelta circular mantiene $U = AR^2$ y realiza trabajo cero; también puede comprobarse porque fuerza y tangente son perpendiculares. En el tramo radial, el trabajo es $AR^2 - 4AR^2 = -3AR^2$. La fuerza realiza trabajo negativo cuando aumenta el radio. La diferencia no exige reconstruir el tiempo, pero tampoco decide si una partícula con datos concretos llega a $2R$. Una trayectoria circular bajo esa fuerza requiere además que su aceleración normal coincida con $-2A\mathbf{r}/m$.

4. Independencia del camino y circulación

Un campo potencial realiza el mismo trabajo sobre todos los caminos que comparten extremos. La recíproca también es verdadera bajo condiciones elementales de dominio y continuidad. Probarla muestra qué significa construir un potencial a partir del trabajo: la integral elegida no puede guardar una dependencia oculta del camino.[4]

[4]Morin, obra citada, cap. 5, §5.3, pp. 150–151, relaciona trabajo entre extremos y lazos. Las tres equivalencias se prueban aquí directamente para un campo continuo, usando segmentos locales y concatenación; no se presupone Stokes ni un criterio de rotacional sin condiciones de dominio.

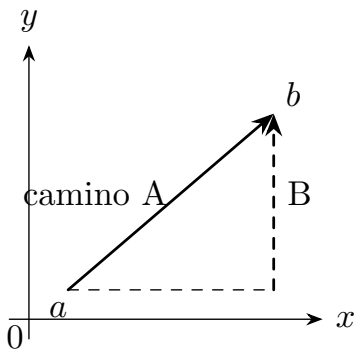


Figura 13.1. Para $F = -\nabla U$, los dos caminos con extremos a, b dan $W = U(a) - U(b)$. La igualdad requiere un potencial definido en el dominio considerado. Véase §4.

Tomemos un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ conectado por caminos C^1 por tramos y un campo continuo $\mathbf{F}$. Cada curva considerada queda íntegramente dentro de Ω. La integral conserva la orientación; invertirla cambia el signo, y concatenar recorridos suma sus trabajos, como se probó en el capítulo 12.

Definición 13.4 — Campo conservativo y circulación. El campo es conservativo en Ω si su integral entre cualesquiera dos puntos no depende del camino C^1 por tramos que los une. La circulación es la integral $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre una curva cerrada orientada.

Aquí «conservativo» describe un campo de posición en un dominio. No se usa como sinónimo de cualquier fuerza que en una historia particular efectúe trabajo cero. Un campo puede tener circulación cero sobre un lazo y distinta de cero sobre otro. La definición exige comparar todos los caminos pertinentes.

Proposición 13.5 — Equivalencias globales de conservatividad. Para el campo continuo anterior, son equivalentes: independencia del camino; circulación cero sobre toda curva cerrada C^1 por tramos; existencia de un potencial $U \in C^1(\Omega)$ con $\mathbf{F} = -\nabla U$.

Demostración. Si el trabajo es independiente del camino, toda curva cerrada puede compararse con el recorrido constante en su punto inicial; ambas tienen los mismos extremos y éste tiene integral cero. Así se anula toda circulación.

Si toda circulación es cero, tomemos dos caminos γ_1, γ_2 entre los mismos extremos. Concatenar γ_1 con el inverso de γ_2 da un lazo, cuya integral es $W_1 - W_2 = 0$. Por tanto, sus trabajos coinciden.

Con independencia del camino, fijemos $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y definamos $U(\mathbf{x}) = U_0 - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. El valor está bien definido. Alrededor de cualquier $\mathbf{x}$ hay una bola contenida en Ω. Para h pequeño, podemos prolongar un camino hasta $\mathbf{x}$ con el segmento a $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$; por independencia,

$$U(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - U(\mathbf{x}) = -\int_0^h F_i(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_i)\, ds.$$

Dividir por h y usar continuidad da $\partial_i U = -F_i$. Como esas parciales son continuas, U es C^1 y su gradiente es $-\mathbf{F}$. Finalmente, un campo con potencial tiene integral determinada por sus extremos por la proposición 13.4. □

La prueba no necesita que Ω sea convexo ni que no tenga agujeros: exige anulación de todas las circulaciones. La forma del dominio será decisiva cuando intentemos reemplazar esa condición global por un examen local de derivadas. No todas las curvas cerradas de una región perforada se reducen a pequeños recorridos alrededor de puntos ordinarios.

Proposición 13.6 — Unicidad del potencial en un dominio conectado. Dos potenciales C^1 del mismo campo en Ω difieren en una constante.

Demostración. Si U y V generan el mismo campo, $\nabla(V-U)=0$. Conectemos dos puntos por un camino permitido. La regla de la cadena da derivada cero de $V-U$ a lo largo de cada tramo, de modo que sus valores en los extremos coinciden. Como los puntos eran arbitrarios, la diferencia es constante. □

El dominio conectado permite propagar la constante por caminos. Para un dominio desconectado, el enunciado se aplica en cada componente conectada por caminos. No hay una condición local de fuerza que fije la diferencia entre constantes de componentes separadas.

Principio metodológico 13.4 — Distinguir un ejemplo de una propiedad global. Una circulación no nula basta para refutar conservatividad. Una circulación nula aislada no basta para probarla. Para afirmar que existe potencial, construye uno y verifica su gradiente, o acredita la independencia del camino con un argumento válido en todo el dominio.

Ejercicios. Ejercicio 13.7. En el plano, considera $\mathbf{F}(x,y)=\kappa(-y,x)$, con $\kappa\neq 0$. Calcula su circulación antihoraria sobre una circunferencia de radio $R>0$ y decide si existe un potencial global.

Solución. Parametrizamos $\mathbf{r}(\theta)=R(\cos\theta,\sin\theta)$, para $0\le\theta\le 2\pi$. Entonces $\mathbf{F}=\kappa R(-\sin\theta,\cos\theta)$ y $d\mathbf{r}/d\theta=R(-\sin\theta,\cos\theta)$. El producto vale κR^2; integrar da $2\pi\kappa R^2\neq 0$. Por proposición 13.5 no existe potencial global en el plano. Una trayectoria radial podría tener trabajo cero para este campo; eso no anula la circulación que acabamos de calcular ni rescata la propiedad global.

Ejercicio 13.8. Un campo continuo tiene circulación cero sobre toda curva cerrada dentro de un dominio conectado. Se fija $U(\mathbf{x}_0)=7\,\mathrm{J}$ y el trabajo desde $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{a}$ es $3\,\mathrm{J}$. Desde $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ es $-2\,\mathrm{J}$. Calcula ambos potenciales y el trabajo directo de $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{b}$.

Solución. proposición 13.5 garantiza que la construcción es independiente del camino. Resulta $U(\mathbf{a})=7-3=4\,\mathrm{J}$ y $U(\mathbf{b})=4-(-2)=6\,\mathrm{J}$. Por concatenación y conservatividad, el trabajo directo es $3-2=1\,\mathrm{J}$, igual a $U(\mathbf{x}_0)-U(\mathbf{b})$. El valor 7 fija una convención; elegir 0 desplazaría ambos potenciales en $-7\,\mathrm{J}$ y mantendría todos los trabajos.

5. Integrabilidad local y dominios estrellados

Buscar una función cuyo gradiente sea un campo dado plantea una condición de compatibilidad: las derivadas parciales cruzadas de la función deben coincidir. Esa condición produce una prueba rápida para refutar potenciales y, en dominios adecuados, permite construirlos. Mantendremos explícita la hipótesis geométrica necesaria para la construcción global.[5]

Proposición 13.7 — Condición necesaria de derivadas cruzadas. Si $\mathbf{F}\in C^1(\Omega)$ admite un potencial $U\in C^1(\Omega)$, entonces

$$\partial_j F_i=\partial_i F_j \qquad \text{para todo } i,j.$$

Demostración. Puesto que $\partial_i U=-F_i$ y cada F_i es C^1, las primeras parciales de U son C^1 y U es C^2. La igualdad de parciales mixtas continuas da $\partial_j\partial_i U=\partial_i\partial_j U$. Cambiar sus signos produce la identidad para el campo. □

[5]Morin, obra citada, cap. 5, §5.3, pp. 150–151, teorema 5.2, nota 8 y ecuaciones 5.30–5.33. Se retiene la condición necesaria y se prueba aquí una condición suficiente con dominio estrellado. No se adopta una equivalencia global basada únicamente en rotacional nulo en un abierto arbitrario.

En el plano sólo hay una condición independiente: $\partial_y F_x = \partial_x F_y$. En tres dimensiones hay tres comparaciones independientes. Constituyen el contenido coordenado de rotacional nulo, pero aquí no necesitamos desarrollar ese operador ni sus teoremas integrales. La condición se formula para un campo C^1 en el dominio declarado; no se evalúa en un punto singular donde el campo no existe.

Definición 13.5 — Dominio estrellado. Un conjunto abierto Ω es estrellado respecto de $\mathbf{a} \in \Omega$ si, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, todo el segmento $\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, $0 \le t \le 1$, pertenece a Ω.

Un abierto convexo es estrellado respecto de cualquiera de sus puntos. Una bola es el ejemplo local más simple. La condición no exige que todos los pares de puntos estén unidos por su segmento recto: basta un centro común desde el cual los segmentos permanezcan dentro. La geometría requerida será exactamente la que permite integrar radialmente sin atravesar zonas excluidas.

Proposición 13.8 — Construcción de potencial en un dominio estrellado. Sea Ω abierto y estrellado respecto de $\mathbf{a}$, y sea $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ con las igualdades de la proposición 13.7. Entonces

$$U(\mathbf{x}) = U_0 - \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})\, dt$$

es un potencial global C^1 de $\mathbf{F}$ en Ω, con $U(\mathbf{a}) = U_0$.

Demostración. Pongamos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ y $V = U_0 - U$. El segmento de integración queda en el dominio. Para $\mathbf{x}$ fijo, ese segmento es compacto y está contenido en el abierto; un pequeño cambio de $\mathbf{x}$ mantiene todos los puntos de integración dentro de un entorno compacto del dominio. La continuidad de las primeras derivadas de $\mathbf{F}$ justifica diferenciar bajo la integral en ese entorno.

Para la coordenada j obtenemos

$$\partial_j V = \int_0^1 \left[F_j(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) + t \sum_i h_i \partial_j F_i(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \right] dt.$$

Las igualdades cruzadas reemplazan $\partial_j F_i$ por $\partial_i F_j$. El integrando se vuelve $d[tF_j(\mathbf{a} + t\mathbf{h})]/dt$. Integrar entre 0 y 1 da $\partial_j V = F_j(\mathbf{x})$, porque el término en $t = 0$ se anula. Así, $\partial_j U = -F_j$ para cada j, y las parciales son continuas. En $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, el vector $\mathbf{h}$ es cero y la integral se anula, por lo que $U(\mathbf{a}) = U_0$. $\square$

La prueba permite una conclusión local en cualquier abierto: alrededor de cada punto hay una bola contenida en él. Si el campo es C^1 y cumple las igualdades cruzadas, proposición 13.8 construye un potencial en esa bola. Para que esas construcciones formen una sola función en todo el dominio, todavía debemos comprobar compatibilidad global. El próximo ejemplo mostrará por qué no basta afirmar que todas las bolas funcionan.

Una práctica habitual de integración por componentes también debe conservar las funciones aún desconocidas. Si $-\partial_x U = F_x$, integrar en x deja una función de las otras coordenadas, no simplemente una constante numérica. Comparar después las componentes restantes determina esa función o revela incompatibilidad.

Principio metodológico 13.5 — Separar compatibilidad y dominio. Comprueba primero regularidad e igualdades cruzadas. Si buscas suficiencia global, identifica una condición de dominio que la justifique o verifica un potencial explícito. Al integrar una componente conserva las funciones de las variables restantes hasta compararlas con las demás fuerzas.

Ejercicios. Ejercicio 13.9. En $\mathbb{R}^2$, sea $\mathbf{F} = (-2\alpha x - \beta y, -\beta x - 2\gamma y)$. Comprueba la condición de integrabilidad y construye un potencial sin usar la fórmula radial completa.

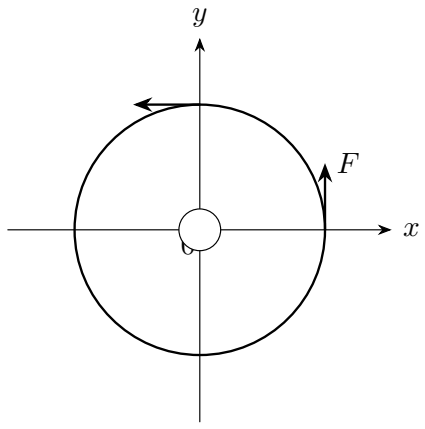
Solución. Las parciales cruzadas valen ambas $-\beta$ y el plano es estrellado. La primera componente exige $\partial_x U = 2\alpha x + \beta y$, así que $U = \alpha x^2 + \beta xy + h(y)$. La segunda exige $\partial_y U = \beta x + 2\gamma y$, de donde $h'(y) = 2\gamma y$ y $h(y) = \gamma y^2 + C$. Por tanto, $U = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + C$. Diferenciar las dos componentes verifica el campo. No se ha supuesto que α o γ sean positivos: la existencia de potencial no es todavía una afirmación sobre estabilidad.

Ejercicio 13.10. En el plano, sea $\mathbf{F} = (Ay, Bx)$, con A, B constantes. Decide cuándo existe potencial y calcula la circulación sobre el rectángulo antihorario de vértices $(0,0), (L,0), (L,H), (0,H)$, con $L, H > 0$.

Solución. Las derivadas cruzadas son A y B, por lo que proposición 13.7 exige $A = B$. Si coinciden, $U = -Axy + C$ verifica ambas componentes. En el rectángulo, el tramo inferior da cero, el derecho BLH, el superior $-ALH$ y el izquierdo cero. La circulación es $(B - A)LH$. Si $A \neq B$, refuta el potencial por la proposición 13.5 y confirma la incompatibilidad diferencial. Si $A = B$, no usamos sólo ese lazo para probar conservatividad: la demuestra el potencial explícito o proposición 13.8 en todo el plano.

6. Obstrucciones globales y dominios perforados

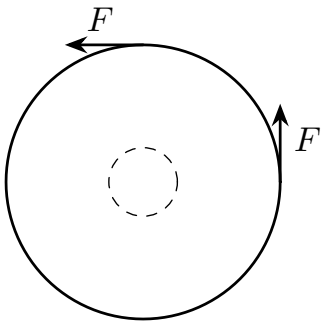
La información diferencial describe el campo cerca de cada punto ordinario. Una integral cerrada puede explorar la forma completa del dominio y rodear una región excluida. Para entender la diferencia, estudiaremos un campo que admite potencial en cada entorno pequeño pero no en todo el plano perforado. El cálculo directo evita atribuirle una contradicción a las derivadas cruzadas.[6]



$$\oint F \cdot dr = 2\pi$$

Figura 13.2. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el campo $F = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ tiene rotacional nulo localmente y circulación 2π en un círculo positivo. No admite allí un potencial escalar global monovaluado. Véase §6.

[6]Morin, obra citada, cap. 5, §5.3, pp. 150–151, nota 8, advierte una limitación del criterio basado en Stokes ante singularidades. El ejemplo del plano perforado y sus integrales se desarrollan aquí para explicitar la diferencia local–global sin usar teoremas de integración de campos de capítulos posteriores.



origen excluido; circulación 2π

Figura 13.3. El campo $F = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ tiene circulación 2π sobre un círculo orientado positivamente. Su rotacional local nulo fuera del origen no basta para producir un potencial global. Véase §6.

Definición 13.6 — Potencial local. Un campo tiene potencial local alrededor de $\mathbf{x}$ si existe un abierto $V \subset \Omega$ que contiene $\mathbf{x}$ y una función $U_V \in C^1(V)$ con $\mathbf{F} = -\nabla U_V$ en V. Tiene potencial global si una única función cumple esa relación en todo Ω.

La existencia global implica la local por restricción. Proposición 13.8 muestra que las igualdades cruzadas bastan para la existencia local de un campo C^1. La implicación inversa puede fallar, incluso en un dominio conectado donde el campo es suave en todos sus puntos. La singularidad no necesita pertenecer al dominio para afectar qué lazos están disponibles dentro de él.

Proposición 13.9 — Campo localmente potencial sin potencial global. En $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, el campo

$$\mathbf{F}(x,y) = A\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \qquad A \neq 0,$$

es suave y cumple las igualdades cruzadas, pero no admite potencial global.

Demostración. El denominador es positivo en Ω, así que ambas componentes son suaves. Con $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\partial_y F_x = A\frac{y^2 - x^2}{r^4}, \qquad \partial_x F_y = A\frac{y^2 - x^2}{r^4}.$$

Las derivadas coinciden. Sin embargo, sobre $\mathbf{r}(\theta) = R(\cos\theta, \sin\theta)$, $R > 0$, el campo es $(A/R)(-\sin\theta, \cos\theta)$ y la derivada de la curva es $R(-\sin\theta, \cos\theta)$. Su producto es A, por lo que la circulación antihoraria vale $2\pi A \neq 0$. Proposición 13.5 excluye un potencial global. En una bola suficientemente pequeña alrededor de cada punto del dominio, proposición 13.8 sí produce uno local. □

El campo sólo tiene sentido donde el origen está excluido. No cumple la hipótesis de un dominio estrellado respecto de un punto de Ω: para cualquier centro elegido, hay un punto al otro lado del origen cuyo segmento de unión lo atraviesa. Por tanto, proposición 13.8 no prometía una construcción global allí. El cálculo de circulación detecta precisamente lo que la prueba radial no podía atravesar.

En una región donde se elige un ángulo continuo θ, el campo es $A\nabla\theta$ y un potencial local es $U = -A\theta + C$. La expresión angular explica el problema: dar una vuelta modifica una determinación continua del ángulo en 2π, aunque se regrese a la misma posición. Una función de estado global

debe retornar al mismo valor en ese punto. Tratar el ángulo como un número real monovaluado en todo el plano perforado incumple esa exigencia.

Si retiramos del plano un semieje y elegimos una rama del ángulo, obtenemos un dominio distinto con potencial $-A\theta$. Los caminos que cruzaban el corte dejan de estar permitidos en esa representación. No se ha demostrado que el campo original sea globalmente conservativo: se ha restringido la región en la que se trabaja. Diferentes ramas pueden coincidir salvo constantes sobre componentes de intersección, pero eso no garantiza que se unan coherentemente al rodear el agujero.

No toda región perforada obliga a que todo campo falle. El campo $\mathbf{G} = -k(x, y)$ sigue teniendo potencial $k(x^2 + y^2)/2$ al restringirlo al mismo plano perforado. El dominio hace posible una obstrucción; la circulación del campo decide si ocurre. La mera presencia de un agujero no refuta un potencial explícito bien definido.

Principio metodológico 13.6 — Conservar el dominio durante la prueba. Examina qué puntos están excluidos y qué lazos siguen permitidos. No cruces una singularidad para aplicar una fórmula ni conviertas una rama angular en función global. Usa una circulación no nula para refutar el potencial, y un potencial monovaluado verificado para acreditarlo.

Ejercicios. Ejercicio 13.11. Para el campo de la proposición 13.9, calcula el trabajo desde $(R, 0)$ hasta $(-R, 0)$ por el semicírculo superior y por el inferior, con ambos recorridos orientados desde el primer punto al segundo. Interpreta su diferencia.

Solución. En el semicírculo superior, el ángulo crece de 0 a π y $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = A\, d\theta$, así que $W_+ = A\pi$. En el inferior puede elegirse el ángulo desde 0 hasta $-\pi$, con $W_- = -A\pi$. La diferencia es $2\pi A$. Concatenar el camino superior con el inverso del inferior da una vuelta antihoraria completa. Los dos extremos coinciden entre recorridos, pero el trabajo no: falla independencia del camino. Ningún valor único $U(-R, 0)$ puede reproducir las dos diferencias desde el mismo $U(R, 0)$.

Ejercicio 13.12. Restringe el campo de la proposición 13.9 al semiplano $x > 0$. Construye un potencial y verifica sus dos derivadas. Explica por qué su existencia no contradice proposición 13.9.

Solución. En ese semiplano puede elegirse $\theta = \arctan(y/x)$, con valores entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Sus derivadas son $\partial_x\theta = -y/(x^2 + y^2)$ y $\partial_y\theta = x/(x^2 + y^2)$. Así, $U = -A \arctan(y/x) + C$ satisface $-\nabla U = \mathbf{F}$. El semiplano es convexo y proposición 13.8 también garantiza la construcción. No contiene una vuelta alrededor del origen ni los dos semicírculos completos del ejercicio 13.11. La propiedad acreditada se refiere al dominio restringido, mientras proposición 13.9 excluye un potencial global en un dominio mayor con otros caminos permitidos.

7. Conservación de la energía mecánica

El potencial permite reescribir el teorema trabajo–energía como una cantidad constante cuando la fuerza total proviene de él. La conservación es una consecuencia de Newton y de la forma del campo. Su uso puede reducir el cálculo de rapidez, pero conserva los límites del balance escalar establecidos en el capítulo 12: no determina por sí solo dirección, contacto ni trayectoria.[7]

Definición 13.7 — Energía mecánica de una partícula en un potencial. Para una partícula de masa constante $m > 0$ en un marco inercial y un potencial de posición U, definimos

[7] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.7, pp. 169–172; Morin, obra citada, cap. 5, §5.3, p. 149, ecuación 5.28. La conservación se demuestra en tiempo con masa constante, marco inercial y potencias restantes nulas, sin identificar una guía móvil con una reacción sin trabajo.

$$E = K + U = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + U(\mathbf{r}).$$

La energía mecánica corresponde a las contribuciones representadas por ese U y a la energía cinética del modelo. No incluye automáticamente temperatura, deformaciones no modeladas, energía química o cualquier reserva energética de un agente externo.

Proposición 13.10 — Conservación con fuerza potencial y reacción sin potencia. Supongamos que una trayectoria C^2 cumple Newton con fuerza total $-\nabla U(\mathbf{r})+\mathbf{R}$, donde $U \in C^1(\Omega)$ no depende del tiempo y $\mathbf{R}\cdot\mathbf{v} = 0$ a lo largo de la historia. Entonces E es constante mientras esas hipótesis se mantienen.

Demostración. La derivada de K es $m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}$, por la proposición 12.4. Sustituir Newton da $dK/dt = -\nabla U\cdot\mathbf{v} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{v} = -\nabla U\cdot\mathbf{v}$. La regla de la cadena produce $dU(\mathbf{r}(t))/dt = \nabla U\cdot\mathbf{v}$. Al sumar, $dE/dt = 0$; integrar mantiene el mismo valor en todo el intervalo. □

El caso sin reacción se obtiene con $\mathbf{R} = 0$. Una guía fija lisa puede satisfacer la hipótesis de potencia nula; una guía móvil requiere comprobarla y no se incluye automáticamente. El teorema tampoco afirma que la reacción sea un campo potencial. Puede variar con la rapidez y el estado de contacto, pero no aporta potencia durante el régimen probado.

Cambiar U por $U + C$ cambia el valor de la constante E en el mismo C. Las diferencias y la conservación permanecen iguales. La afirmación física no es que exista un cero absoluto de energía mecánica en esta descripción, sino que su variación es nula bajo las hipótesis.

De $E = K + U$ se deduce $K = E - U \geq 0$. Una posición con $U > E$ no puede pertenecer a esa historia. En una dimensión, $v^2 = 2(E - U)/m$ permite calcular la rapidez donde se alcanza una posición. En varias dimensiones determina el módulo de velocidad, no sus componentes. Y aun en una dimensión un punto con $U \leq E$ puede pertenecer a otra componente permitida, o no alcanzarse en tiempo finito desde los datos iniciales.

La igualdad $U = E$ da reposo instantáneo para una partícula en este modelo. Para decidir si hay retorno o equilibrio se necesita la fuerza y la continuación de Newton. No conviene llamar a todo punto de igualdad «punto de retorno» sin esa comprobación. El segundo macrotramo analizará la estructura de regiones accesibles y las barreras con esas distinciones.

La conservación de energía y la conservatividad del campo tampoco son definiciones intercambiables. Proposición 13.5 es una propiedad de todos los caminos del dominio para un campo de posición. Proposición 13.10 es una propiedad de una historia dinámica sometida a ciertas fuerzas. Una fuerza dependiente de velocidad y perpendicular a ella puede no aportar potencia y mantener K constante sin ser un campo conservativo de posición en el sentido de la definición 13.4.

Principio metodológico 13.7 — Derivar la cantidad conservada del modelo. Antes de escribir $E_a = E_b$, identifica el potencial, verifica su independencia temporal y suma las fuerzas restantes. Justifica sus potencias nulas. Usa $E - U$ para rapidez y exclusiones, conservando los datos direccionales y las condiciones de alcance que el escalar no fija.

Ejercicios. Ejercicio 13.13. Una partícula se lanza desde $y = 0$ con velocidad inicial $(3, 4)\,\mathrm{m/s}$ bajo gravedad uniforme, con $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ y sin resistencia. Compara el límite de altura obtenido sólo de $K \geq 0$ con la altura máxima real. ¿Por qué son distintos?

Solución. Con $U = mgy$, la energía inicial es $25m/2$ y el balance da $v^2 = 25 - 20y$. La no negatividad sólo exige $y \leq 1{,}25\,\mathrm{m}$. Pero Newton horizontal da $v_x = 3$ constante y la detención vertical ocurre cuando $v_y = 4 - 10t = 0$, en $t = 0{,}4\,\mathrm{s}$. La altura es $y = 4t - 5t^2 = 0{,}8\,\mathrm{m}$. Allí la rapidez es $3\,\mathrm{m/s}$ y $K = 9m/2$, de modo que no se anula. El límite escalar 1,25 ignora la energía

cinética horizontal que no puede convertirse en altura bajo este campo. Es una condición necesaria más débil, no una predicción de alcance.

Ejercicio 13.14. Una partícula de masa m permanece en una guía fija lisa del plano. Sobre ella actúan el peso y una fuerza horizontal $F_x = -kx$. La guía une $A = (0, h)$ y $B = (L, 0)$, con $h, L > 0$. Si en A tiene rapidez v_a, calcula la rapidez candidata en B. Explica qué no queda demostrado por esa fórmula.

Solución. Las fuerzas tienen potencial total $U(x, y) = kx^2/2 + mgy$. La reacción hace potencia cero por el carácter fijo y liso de la guía, mientras se mantiene el contacto. Proposición 13.10 da $mv_b^2/2 + kL^2/2 = mv_a^2/2 + mgh$, de donde $v_b^2 = v_a^2 + 2gh - kL^2/m$. No añadimos nuevamente el trabajo del peso: ya está representado por mgy. El radicando debe ser no negativo, pero eso no prueba que se alcance B. La forma intermedia de la guía puede exigir pasar por potenciales mayores que E, y la reacción puede tener un signo incompatible con un contacto unilateral. Tampoco se ha obtenido el tiempo de viaje ni la dirección final de velocidad; requieren la geometría y Newton.

8. Fuerzas adicionales y potenciales temporales

La energía mecánica deja de ser constante cuando otras fuerzas aportan potencia o cuando el potencial cambia explícitamente con el tiempo. El balance sigue siendo útil: indica qué término modifica la cantidad $K + U$. Escribirlo evita aplicar conservación en un régimen donde un agente externo, una fricción o un soporte móvil intercambia energía con la partícula.[8]

Primero consideremos un potencial autónomo $U(\mathbf{r})$ y una fuerza adicional $\mathbf{f}$, que puede depender del tiempo, la velocidad o la historia de contacto. Toda contribución que no se haya incluido en $-\nabla U$ debe figurar en esa fuerza adicional, salvo que su potencia se haya acreditado como cero.

Proposición 13.11 — Balance mecánico con fuerza adicional. Si Newton toma la forma $m\mathbf{a} = -\nabla U + \mathbf{f}$, con masa constante y U independiente del tiempo, entonces

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \qquad E_b - E_a = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dt.$$

Demostración. Derivar K y sustituir Newton da $dK/dt = -\nabla U \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$. La regla de la cadena da $dU/dt = \nabla U \cdot \mathbf{v}$. Sumarlas cancela el término potencial. Integrar la identidad restante produce la diferencia de energías. □

Una resistencia viscosa $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$, con $b > 0$, da $dE/dt = -b|\mathbf{v}|^2 \le 0$. La energía mecánica no aumenta, aunque puede haber instantes de derivada cero cuando la velocidad se anula. El balance no describe por sí solo adónde va esa energía en un modelo ampliado: para estudiar calentamiento habría que incluir el medio y las variables internas correspondientes.

En cambio, una fuerza adicional perpendicular a la velocidad da $dE/dt = 0$ durante esa historia. Tener potencia nula no equivale a admitir un potencial de posición. El cálculo del balance distingue esa condición cinemática de las equivalencias globales de la proposición 13.5.

Definición 13.8 — Potencial con dependencia temporal explícita. Sea $U(\mathbf{r}, t)$ de clase C^1 en una región espacial y un intervalo temporal. El campo derivado a cada tiempo es $\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t)$, donde el gradiente deriva sólo las coordenadas espaciales, manteniendo t fijo.

[8] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.11, pp. 182–184, presenta el balance con fuerzas adicionales. Proposición 13.12 se deduce aquí mediante la regla de la cadena para U dependiente del tiempo; el ejemplo de anclaje móvil conserva el trabajo medido con el desplazamiento de la masa y distingue la derivada parcial de la derivada sobre la historia.

Para cada instante puede existir independencia espacial del camino, pero una historia atraviesa valores temporales diferentes. El trabajo sobre esa historia no se reduce en general a $U(\mathbf{r}_a, t_a) - U(\mathbf{r}_b, t_b)$. Una contribución temporal aparece al derivar la función compuesta.

Proposición 13.12 — Balance con potencial temporal. Si $m\mathbf{a} = -\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}$ y $E = K + U(\mathbf{r}, t)$, entonces

$$\frac{dE}{dt} = \partial_t U(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

En particular, el trabajo de la contribución potencial es $W_c = U_a - U_b + \int_{t_a}^{t_b} \partial_t U(\mathbf{r}(t), t)\, dt$.

Demostración. Newton y la derivada cinética dan $dK/dt = -\nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$. La regla de la cadena completa es $dU/dt = \nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \mathbf{v} + \partial_t U$. Al sumar se obtiene la primera identidad. Para la segunda, se integra $\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} = -dU/dt + \partial_t U$. □

Un resorte con anclaje móvil sobre una línea tiene $U(x, t) = k[x - c(t)]^2/2$. Su fuerza es $-k[x - c(t)]$ y $\partial_t U = -k[x - c(t)]\dot{c}(t)$. La variación del anclaje modifica el balance incluso sin fricción. El soporte fijo corresponde a $\dot{c} = 0$ y recupera la conservación bajo las otras condiciones habituales.

Aquí hay una libertad de referencia que requiere cuidado. Sumar una constante temporal $C(t)$ a U no cambia la fuerza espacial, pero aumenta dE/dt en $\dot{C}$ y también $\partial_t U$ en $\dot{C}$. La identidad sigue siendo correcta. Por eso no debe interpretarse un término temporal como una transferencia física sin especificar una referencia y un modelo coherentes. Con referencia fija, el movimiento de un anclaje sí aporta una dependencia física que puede contrastarse por trabajo.

Principio metodológico 13.8 — Conservar la derivada temporal completa. Al calcular dU/dt, distingue el cambio debido al movimiento del receptor y el cambio explícito de parámetros o soportes. Incluye todas las fuerzas adicionales y fija la convención energética antes de interpretar intercambios. No llames conservación a un balance que contiene una potencia no nula.

Ejercicios. Ejercicio 13.15. Una masa horizontal cumple $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$, con $k, b > 0$. Define su energía mecánica y prueba que no aumenta. ¿Puede una historia no constante conservar exactamente esa energía en todo un intervalo?

Solución. Tomamos $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$. Proposición 13.11 da $\dot{E} = -b\dot{x}^2 \le 0$ y $E_b - E_a = -b\int_{t_a}^{t_b} \dot{x}^2 dt$. Si E fuese constante en todo el intervalo, la integral no negativa sería cero; por continuidad, $\dot{x} = 0$ en cada instante. La historia sería constante, y Newton exigiría $kx = 0$, es decir, $x = 0$. Por tanto, ninguna historia no constante mantiene exactamente esa energía bajo el modelo. Un instante de velocidad cero sólo anula la tasa en ese instante y no demuestra conservación posterior.

Ejercicio 13.16. Un resorte horizontal tiene anclaje $c(t) = Vt$, con $V \neq 0$, y fuerza sobre la masa $F_s = -k[x - c(t)]$. Un agente adicional mantiene la deformación constante $q_0 \neq 0$, imponiendo $x(t) = Vt + q_0$ durante $0 \le t \le T$. Calcula las fuerzas, los trabajos y $d(K + U)/dt$ con $U = k[x - c(t)]^2/2$.

Solución. La aceleración es cero, así que el agente debe ejercer $F_a = kq_0$, opuesto al resorte $F_s = -kq_0$. El desplazamiento del receptor es VT; por tanto, $W_s = -kq_0VT$ y $W_a = kq_0VT$. Su suma es cero y $K = mV^2/2$ permanece constante. También $U = kq_0^2/2$ es constante sobre la historia. Sin embargo, su derivada parcial temporal es $\partial_t U = -kq_0V$, que no se anula. Proposición 13.12 da $\dot{E} = -kq_0V + F_aV = 0$. La diferencia total de potencial es cero, pero el resorte efectuó trabajo no nulo: la integral temporal es indispensable. Si se elimina el agente, la historia impuesta deja de satisfacer Newton y ya no puede usarse para predecir el movimiento espontáneo.

Las ocho secciones establecen cuándo existe una función potencial, cómo depende esa existencia del dominio y qué balance mecánico resulta. Las secciones siguientes estudiarán las regiones accesibles, los equilibrios y la estabilidad. Distinguirá mínimos de energía y estabilidad dinámica, y tratará los casos en que una segunda derivada nula o una dirección plana impiden una conclusión inmediata.

9. Paisajes de energía y regiones accesibles

Una vez acreditada la conservación de $E = K + U$, el potencial permite excluir posiciones y separar regiones de movimiento. En una dimensión, su gráfica también indica dónde puede anularse la velocidad. Para interpretar esos puntos necesitamos distinguir pertenencia a una región permitida, llegada en tiempo finito y continuación dinámica. Son preguntas diferentes.[9]

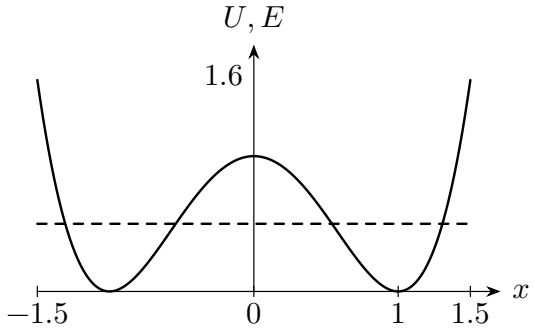


Figura 13.4. En el ejemplo normalizado $U = (x^2 - 1)^2$, la energía $E = 1/2$ (discontinua) deja dos regiones permitidas separadas por una barrera. Sólo donde $U \le E$ puede ser no negativa la energía cinética. Véase §9.

Definición 13.9 — Región permitida por una energía. Para un potencial autónomo U en un intervalo I y un valor E, llamamos región permitida al conjunto $\mathcal{A}_E = \{x \in I : U(x) \le E\}$. Su interior energético es $\{U < E\}$, donde una historia con esa energía tiene rapidez no nula. La definición expresa una condición necesaria y no una promesa de alcance desde cualquier dato inicial.

Proposición 13.13 — Restricción a la componente permitida inicial. Una historia continua con energía conservada E permanece en $\mathcal{A}_E$ y en la componente conectada de ese conjunto que contiene su posición inicial.

Demostración. De $K = E - U \ge 0$ se deduce que cada posición pertenece a $\mathcal{A}_E$. La imagen de cualquier intervalo temporal entre el instante inicial y un instante posterior es conectada, porque la posición es continua. Esa imagen contiene ambas posiciones y está contenida en $\mathcal{A}_E$; por tanto, ambas pertenecen a la misma componente conectada. □

Si dos regiones permitidas están separadas por una barrera donde $U > E$, una historia no puede saltar de una a otra en el modelo clásico continuo. Que en ambas exista un punto con potencial bajo no elimina la barrera intermedia. En varias dimensiones hay que buscar caminos permitidos alrededor de barreras; una sección de la gráfica por una sola línea puede ocultarlos.

En una rama con movimiento monótono, la dirección inicial fija el signo de $\dot{x}$. Para una rama hacia la derecha, el tiempo entre posiciones es $t_b - t_a = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$.

[9] Kleppner–Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 4, §4.9, pp. 176–177, presenta regiones permitidas y diagramas energéticos. La restricción por componentes y las pruebas de llegada finita o infinita se desarrollan aquí desde continuidad e integración temporal.

Se obtiene de $\dot{x} = +\sqrt{2(E-U)/m}$ mientras el radicando es positivo. La integral puede converger o divergir al aproximarse a una frontera; no basta resolver $U(x_b) = E$.

Proposición 13.14 — Llegada a un cero simple y aproximación a un cero cuadrático. Supongamos $U \in C^2$ y una rama de Newton que avanza hacia b, con $E - U(x) > 0$ para $a \le x < b$. Si $U(b) = E$ y $U'(b) > 0$, la rama llega a b en tiempo finito y retorna hacia la izquierda. Si, en cambio, $E - U(x)$ es comparable con $(b-x)^2$ cerca de b, el tiempo de aproximación a b es infinito.

Demostración. En el primer caso, la diferenciabilidad da $E - U(x) = U'(b)(b-x) + o(b-x)$. El integrando temporal es comparable con $(b-x)^{-1/2}$, cuya integral converge. La solución alcanza el límite $x = b, v = 0$; como el campo de estados es C^1 y el punto está dentro del dominio, Newton prolonga la solución. Su aceleración allí es $-U'(b)/m < 0$, de modo que la velocidad se vuelve negativa inmediatamente después. En el segundo caso, existen constantes positivas que acotan $E - U(x)$ por arriba y por abajo mediante múltiplos de $(b-x)^2$. El integrando es comparable con $1/(b-x)$, cuya integral diverge. Por tanto, ninguna llegada finita ocurre en esa rama. □

La prueba del retorno usa la fuerza no nula, además de la ecuación energética. Un punto crítico con $U' = 0$ necesita otro análisis. Una trayectoria puede acercarse indefinidamente a un equilibrio con velocidad decreciente sin llegar a él, aunque la posición límite pertenezca a la misma componente permitida. La región permitida contiene más información geométrica que temporal.

Las dos situaciones pueden aparecer en un mismo paisaje al variar la energía. En el potencial de dos pozos $a(x^2-b^2)^2$, energías por debajo de ab^4 separan los pozos. En el nivel exacto $E = ab^4$, la región permitida se conecta a través del origen, pero cerca de él $E - U = 2ab^2x^2 - ax^4$ tiene un cero cuadrático. Una rama que se dirige al origen tarda un tiempo infinito. Por encima de la barrera, el radicando allí es positivo y ese impedimento temporal desaparece. La conexión de conjuntos permitidos en el nivel crítico no acredita un cruce dinámico finito.

Principio metodológico 13.9 — Examinar la rama y el tiempo de llegada. Identifica la componente permitida de los datos iniciales y conserva el sentido del movimiento mientras no haya reposo. En una frontera $U = E$, estudia el orden del cero y la fuerza antes de afirmar que hay retorno, llegada o equilibrio.

Ejercicios. Ejercicio 13.17. Sea $U(x) = a(x^2-b^2)^2$, con $a, b > 0$. Para $0 < E < ab^4$, describe las componentes permitidas y decide si una partícula inicialmente en el pozo derecho puede pasar al izquierdo sin cambiar su energía.

Solución. La condición es $|x^2 - b^2| \le \sqrt{E/a}$. Como $\sqrt{E/a} < b^2$, definamos $r_- = \sqrt{b^2 - \sqrt{E/a}}$ y $r_+ = \sqrt{b^2 + \sqrt{E/a}}$. La región permitida es $[-r_+, -r_-] \cup [r_-, r_+]$. El origen queda excluido porque $U(0) = ab^4 > E$. Proposición 13.13 impide pasar entre componentes. Las cuatro fronteras tienen pendiente no nula y, desde una rama dirigida a ellas, son retornos de tiempo finito. La descripción energética no elimina la necesidad de fijar el signo inicial de velocidad.

Ejercicio 13.18. Para $U(x) = kx^2/2$, una partícula de masa m pasa por $x = 0$ hacia la derecha con rapidez $v_0 > 0$. Encuentra el primer extremo derecho y calcula su tiempo de llegada mediante la integral de energía.

Solución. La energía es $mv_0^2/2$, así que $b = v_0\sqrt{m/k}$. La rapidez es $v_0\sqrt{1 - x^2/b^2}$ sobre la rama de avance. La integral temporal da $t_* = (b/v_0)\int_0^1 du/\sqrt{1-u^2} = (\pi/2)\sqrt{m/k}$. Como $U'(b) = kb > 0$, proposición 13.14 garantiza el retorno. El cálculo determina este evento desde datos direccionales concretos; no usa sólo una igualdad entre energías finales.

Ejercicio 13.19. Sea $U(x) = -cx^2$, con $c > 0$, y energía $E = 0$. Una partícula parte de $x_a < 0$ hacia el origen. ¿Llega a $x = 0$ en tiempo finito? Verifica una historia explícita.

Solución. Para $x<0$, la rama positiva de velocidad es $\dot x=\sqrt{2c/m}(-x)$. Si $\lambda=\sqrt{2c/m}$, su solución es $x(t)=x_a e^{-\lambda t}$ y $\dot x=-\lambda x>0$. La aceleración es $\lambda^2 x$, que cumple $m\ddot x=2cx=-U'$. Su energía es cero y su límite es el origen, pero nunca lo alcanza en un tiempo finito. Aquí $E-U=cx^2$ tiene cero cuadrático. La rama pertenece a un nivel especial: este acercamiento de una historia no demuestra estabilidad del equilibrio para todos los datos próximos.

10. Equilibrio y estabilidad: definiciones

Una posición de fuerza nula no es todavía un estado de reposo si la partícula pasa por ella con velocidad no nula. Para hablar de estabilidad debemos describir el estado completo y precisar qué perturbaciones admitimos. La distinción es esencial en un sistema de segundo orden: una velocidad inicial arbitrariamente pequeña puede producir un desplazamiento grande si se espera suficiente tiempo.[10]

Consideraremos $m\ddot{\mathbf r}=-\nabla U(\mathbf r)$, con $U\in C^2(\Omega)$ y $m>0$ constante. En variables de estado, las ecuaciones son $\dot{\mathbf r}=\mathbf v$ y $\dot{\mathbf v}=-\nabla U/m$. Su campo es C^1, de modo que los datos iniciales determinan una solución local única. Las conclusiones de estabilidad se referirán a este modelo autónomo en un marco inercial.

Definición 13.10 — Estado de equilibrio. Un estado $(\mathbf r_*,\mathbf 0)$ es de equilibrio si la historia constante $\mathbf r(t)=\mathbf r_*$, $\mathbf v(t)=\mathbf 0$ satisface las ecuaciones. La posición es entonces una posición de equilibrio.

Proposición 13.15 — Equilibrios y puntos críticos. Para el modelo anterior, $(\mathbf r_*,\mathbf 0)$ es un equilibrio si y sólo si $\nabla U(\mathbf r_*)=\mathbf 0$.

Demostración. Una historia constante tiene velocidad y aceleración cero. Sustituirla en Newton exige $\nabla U(\mathbf r_*)=0$. Recíprocamente, si el gradiente se anula, la historia constante verifica ambas ecuaciones de estado. □

Para medir cercanía elegimos una escala temporal fija $\tau>0$ y usamos $d_\tau=|\mathbf r-\mathbf r_*|+\tau|\mathbf v|$. Ambos sumandos tienen unidades de longitud. Cambiar τ por otra constante positiva no cambia la noción cualitativa de estabilidad, porque las métricas resultantes se acotan mutuamente por factores constantes.

Definición 13.11 — Estabilidad de Lyapunov del estado. El equilibrio es estable si, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que todo dato con $d_\tau(0)<\delta$ produce una solución para todo $t\ge 0$ y satisface $d_\tau(t)<\varepsilon$. Es inestable si no cumple esa condición.

La definición exige controlar posición y velocidad, durante todo el futuro del modelo. En un dominio abierto puede tomarse primero ε suficientemente pequeño para que el entorno espacial quede dentro de él. Las pruebas energéticas que siguen también justificarán la continuación temporal mediante confinamiento en un conjunto compacto del dominio.

Definición 13.12 — Estabilidad asintótica. Un equilibrio es asintóticamente estable si es estable y, además, existe un entorno de datos iniciales cuyas soluciones convergen a $(\mathbf r_*,\mathbf 0)$ cuando $t\to\infty$.

Estabilidad significa permanecer cerca; atracción significa aproximarse al estado con el tiempo. Una oscilación pequeña puede cumplir la primera y no la segunda. Una trayectoria especial que se aproxima a un equilibrio inestable, como ejercicio 13.19, tampoco acredita atracción de un entorno completo.

[10] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.8, pp. 174–175, relaciona fuerza nula y extrema del potencial. Las definiciones sobre el estado completo, la escala temporal y la obstrucción a la estabilidad asintótica se formulan y prueban aquí; no se identifica estabilidad con atracción.

Proposición 13.16 — Obstrucción energética a la atracción de un entorno. En el modelo conservativo anterior, ningún equilibrio es asintóticamente estable.

Demostración. En cualquier entorno del estado de equilibrio hay datos con posición exactamente $\mathbf{r}_*$ y velocidad no nula tan pequeña como se quiera. Su energía es $U(\mathbf{r}_*) + m|\mathbf{v}_0|^2/2 > U(\mathbf{r}_*)$. Si la historia convergiera al estado, la continuidad de $K+U$ exigiría que su energía tendiera a $U(\mathbf{r}_*)$. Pero proposición 13.10 mantiene su valor inicial constante. Por tanto, esos datos no convergen, o no tienen una solución global; cualquiera de las dos posibilidades impide atracción del entorno exigido en la definición 13.12. □

El resultado no prohíbe que existan historias particulares que converjan, ni que haya estabilidad sin atracción. Tampoco se aplica sin cambios a un sistema que pierde energía por resistencia: allí el argumento de conservación deja de estar disponible. La descripción de las fuerzas decide qué noción puede probarse.

La elección de un horizonte temporal también cambia la pregunta. En un intervalo fijo $0 \le t \le T$, la dependencia continua de soluciones respecto de datos iniciales puede mantener cercanas historias de un equilibrio inestable si la perturbación se hace suficientemente pequeña. Definición 13.11 exige una sola elección de tamaño inicial que sirva para todos los tiempos futuros. No basta comprobar que durante diez segundos, o durante un número fijo de oscilaciones, el desplazamiento fue pequeño. El orden de los cuantificadores distingue control en una observación finita y estabilidad dinámica.

Principio metodológico 13.10 — Perturbar el estado completo. Al clasificar un equilibrio, incluye perturbaciones de posición y velocidad y declara si buscas permanencia cercana o convergencia. No sustituye esa clasificación el signo de una fuerza en un dibujo ni la evolución de una única historia seleccionada.

Ejercicios. Ejercicio 13.20. Para $U(x) = a(x^2 - b^2)^2$, determina los estados de equilibrio. ¿Una partícula que cruza $x = b$ con velocidad no nula está en equilibrio?

Solución. $U'(x) = 4ax(x^2 - b^2)$ se anula en $x = -b, 0, b$. Los estados de equilibrio son $(-b, 0), (0, 0), (b, 0)$, donde el segundo componente es velocidad. El estado (b, v) con $v \neq 0$ no es un equilibrio: aunque su aceleración instantánea sea cero, su posición cambia porque $\dot{x} = v$. Esta distinción no clasifica todavía los tres estados como estables o inestables; requiere los criterios y pruebas siguientes.

Ejercicio 13.21. Una masa bajo $F = -kx$, con $k > 0$, parte de $x = 0$ con velocidad $\eta \neq 0$ arbitrariamente pequeña. Explica por energía por qué no puede converger al equilibrio $(0, 0)$.

Solución. Su energía inicial es $m\eta^2/2 > 0$, tomando $U(0) = 0$. La conservación exige ese valor para todo instante. Convergencia de posición y velocidad a cero implicaría $m\dot{x}^2/2 + kx^2/2 \to 0$, incompatible con la constante positiva. La amplitud puede ser muy pequeña y la historia permanecer próxima; eso es compatible con estabilidad y excluye únicamente la atracción de estos datos. Concluir inestabilidad sólo porque no hay convergencia confundiría definición 13.11 y definición 13.12.

11. Extremos no degenerados en una dimensión

Un mínimo del potencial rodea el equilibrio con una barrera energética. Datos suficientemente próximos tienen energía insuficiente para cruzarla y, al mismo tiempo, velocidad pequeña. Este argumento permite probar estabilidad sin resolver la ecuación. Para un máximo con curvatura negativa, una pequeña separación inicial puede crecer hasta abandonar un entorno fijo.[11]

[11] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.8, pp. 174–175; Morin, *Introduction to Classical Mechanics*, 2008, cap. 5, §5.2, pp. 147–148. Las pruebas proposiciones 13.17–13.18 precisan estabilidad de estado, barrera energética, continuación y salida de un entorno; la aproximación oscilatoria sistemática queda para el capítulo 23.

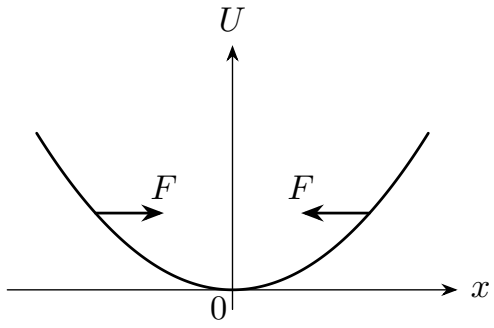


Figura 13.5. Para $U = 2x^2/5$, la fuerza es $F = -4x/5$. A ambos lados del mínimo apunta hacia el origen. Con masa positiva, la energía conserva las perturbaciones pequeñas dentro de niveles cercanos. Véase §11.

Trabajaremos con $m\ddot{x} = -U'(x)$, $U \in C^2(I)$, en un intervalo abierto. La regularidad asegura unicidad local y permite prolongar soluciones que permanecen en un compacto del espacio de estados dentro del dominio. La masa y el marco son los usados en la definición 13.11.

Proposición 13.17 — Mínimo local estricto y estabilidad unidimensional. Si x_* es un mínimo local estricto de U, el estado $(x_*, 0)$ es estable en el sentido de la definición 13.11.

Demostración. Escribamos $U_* = U(x_*)$. Como el mínimo es interior, $U'(x_*) = 0$ y proposición 13.15 da equilibrio. Fijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos $0 < \rho < \varepsilon/2$ tan pequeño que $[x_* - \rho, x_* + \rho] \subset I$ y $U(x) > U_*$ para $0 < |x - x_*| \le \rho$. La barrera

$$B = \min\{U(x_* - \rho), U(x_* + \rho)\} - U_*$$

es positiva. Tomemos $e_0 < \min\{B, m\varepsilon^2/(8\tau^2)\}$, con $e_0 > 0$. Por continuidad de U, hay $\delta > 0$ tal que datos con $|x_0 - x_*| + \tau|v_0| < \delta$ están dentro del intervalo de radio ρ y tienen energía relativa $e = mv_0^2/2 + U(x_0) - U_* < e_0$.

La conservación impide alcanzar cualquiera de sus dos fronteras, porque allí el potencial relativo es al menos $B > e$. Dentro, $U - U_* \ge 0$ y $mv^2/2 \le e < e_0$, de modo que $\tau|v| < \varepsilon/2$. También $|x - x_*| < \rho < \varepsilon/2$, y la distancia de la definición 13.11 queda por debajo de ε.

El conjunto de estados en el intervalo cerrado con energía relativa a lo sumo e_0 es compacto y no toca sus fronteras espaciales. La solución permanece en él; la continuación de un campo C^1 impide un fin de existencia en tiempo finito. Por tanto, el control vale para todo $t \ge 0$. □

El teorema no exige curvatura positiva: exige un mínimo estricto y regularidad suficiente para el modelo. Si $U''(x_*) > 0$, la condición se verifica porque Taylor da $U(x_* + q) - U_* = (U''(x_*)/2)q^2 + o(q^2) > 0$ para $q \neq 0$ pequeño. El test de segunda derivada es así una condición suficiente cómoda, no la definición de estabilidad.

Proposición 13.18 — Curvatura negativa e inestabilidad. Si $U'(x_*) = 0$ y $U''(x_*) < 0$, el equilibrio $(x_*, 0)$ es inestable.

Demostración. Por continuidad de U'' hay $\rho, c > 0$ con el intervalo de radio ρ dentro de I y $U'' \le -c$ en él. Para $0 < q \le \rho$, integrar desde x_* da $-U'(x_* + q) \ge cq$. Tomemos datos $x_0 = x_* + \eta$, $v_0 = 0$, con $0 < \eta < \rho$ tan pequeño como se quiera.

Mientras no abandone el intervalo hacia la derecha, su aceleración es positiva, su velocidad crece y $q(t) \ge \eta$. Por tanto, $\ddot{q} \ge c\eta/m$ y $q(t) \ge \eta + c\eta t^2/(2m)$. Esta cota obliga a alcanzar $q = \rho$ en tiempo finito. La solución puede continuarse hasta ese evento: antes, el potencial queda acotado en

un compacto y la conservación acota su velocidad. Para el entorno fijo de radio ρ, existen así datos arbitrariamente próximos que llegan a su frontera. Esto contradice definición 13.11. □

La prueba no se limita a una pendiente dibujada: exhibe perturbaciones arbitrariamente pequeñas y un entorno fijo que abandonan. El tiempo de salida puede crecer cuando η disminuye. Una salida lenta sigue siendo inestabilidad, porque definición 13.11 exige control durante todo el futuro, no sólo durante una observación de duración fija.

En un mínimo estable, la conservación excluye atracción de un entorno por la proposición 13.16. Una fuerza disipativa puede cambiar esa conclusión, pero entonces debe analizarse su balance y su dinámica. Añadir el término «estable» no introduce espontáneamente un mecanismo de amortiguamiento.

La prueba del mínimo controla una perturbación de estado mediante energía pequeña, no mediante una fuerza pequeña aislada. La fuerza puede ser cero exactamente en el equilibrio y no confinar velocidades perturbadas si el potencial es plano. A la inversa, un mínimo muy estrecho exige una escala inicial más pequeña para una tolerancia espacial dada, pero sigue satisfaciendo la definición. Los parámetros de masa, curvatura y escala temporal intervienen en la elección de δ; la clasificación cualitativa no afirma una misma tolerancia numérica para todos los modelos.

Principio metodológico 13.11 — Convertir el extremo en una prueba dinámica. Para un mínimo, construye una barrera que controle posición y velocidad y justifique existencia futura. Para una curvatura negativa, muestra datos próximos que escapan de un entorno fijo. Si la segunda derivada se anula, conserva la pregunta abierta hasta examinar el potencial y la dinámica completos.

Ejercicios. Ejercicio 13.22. Clasifica los tres equilibrios de $U(x) = a(x^2 - b^2)^2$ según las proposiciones 13.17–13.18. ¿Cuáles son asintóticamente estables en el modelo sin otras fuerzas?

Solución. $U''(x) = 12ax^2 - 4ab^2$. En $x = \pm b$ vale $8ab^2 > 0$, de modo que hay mínimos locales estrictos y los estados $(\pm b, 0)$ son estables. En el origen vale $-4ab^2 < 0$ y $(0, 0)$ es inestable por la proposición 13.18. Ninguno es asintóticamente estable por la proposición 13.16. El acercamiento especial al origen en un nivel crítico no modifica esa clasificación de todos los datos próximos.

Ejercicio 13.23. Para $U(x) = kx^2/2$, da una cota explícita de $|x(t)| + \tau|v(t)|$ en términos de la energía inicial y deduce estabilidad del origen sin resolver Newton.

Solución. La energía $E = mv^2/2 + kx^2/2$ es no negativa y constante. Cada sumando está acotado por E, así que $|x| \le \sqrt{2E/k}$ y $|v| \le \sqrt{2E/m}$. Por tanto,

$$|x| + \tau|v| \le \sqrt{2E}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{\tau}{\sqrt{m}}\right).$$

Si los datos tienden a $(0, 0)$, E tiende a cero y la cota tiende a cero uniformemente en el tiempo. El nivel de energía correspondiente es compacto, de modo que la solución existe para todo el futuro. La posición inicial sola no bastaría: mantener $x_0 = 0$ con velocidad grande no produce energía pequeña. El control incluye las dos componentes del estado.

12. Equilibrios degenerados y límites del criterio

La igualdad $U''(x_*) = 0$ no clasifica un equilibrio. Puede corresponder a un mínimo estricto, a un máximo, a un punto que no es extremo o a una región plana. Los términos de orden superior

pueden decidir la geometría, pero no siempre existe un primer término no nulo de una expansión de Taylor. Conviene volver al potencial real y a la definición dinámica.[12]

Para $U(x) = ax^4$, con $a > 0$, el origen es un mínimo estricto aunque $U''(0) = 0$. Proposición 13.17 demuestra su estabilidad sin exigir una aproximación cuadrática. El crecimiento de fuerza cerca del origen es cúbico: reemplazarlo por una fuerza lineal nula borraría el mecanismo que confina los estados de energía pequeña.

En cambio, $U(x) = -ax^4$ tiene un máximo degenerado. Aunque proposición 13.18 no se aplica porque su hipótesis de curvatura negativa falla, la fuerza $4ax^3$ empuja hacia afuera. Para datos $x_0 = \eta > 0, v_0 = 0$, mientras $x \geq \eta$ se cumple $\ddot{x} \geq 4a\eta^3/m$. La misma integración del argumento de la proposición 13.18 obliga a abandonar cualquier entorno derecho fijo en tiempo finito. El cero de la segunda derivada no impide inestabilidad.

Si $U(x) = ax^3$, el origen es crítico pero no es un extremo. La fuerza $-3ax^2$ apunta hacia la izquierda a ambos lados. Desde $x_0 = -\eta < 0, v_0 = 0$, la posición disminuye y la aceleración satisface $\ddot{x} \leq -3a\eta^2/m$ mientras no salga del entorno izquierdo. Otra vez hay perturbaciones arbitrariamente pequeñas que escapan. «Punto crítico» es la condición de equilibrio, no una garantía de mínimo.

Cuando un primer término no nulo de Taylor es cq^n, con $q = x - x_*$, el signo y la paridad describen el extremo local: n par y $c > 0$ da mínimo estricto; n par y $c < 0$ da máximo; n impar cambia de signo. Esa lectura requiere justificar que el resto sea menor que el término dominante. Si todos los coeficientes se anulan, no autoriza a afirmar que la función sea constante en un entorno.

Un ejemplo suave es $U(0) = 0$ y $U(x) = E_0 \exp(-\ell^2/x^2)$ para $x \neq 0$, con $E_0, \ell > 0$. Todas sus derivadas en el origen son cero, pero $U(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, de modo que hay un mínimo estricto. La suavidad se comprueba porque cada derivada fuera del origen es un polinomio en $1/x$ multiplicado por la exponencial; esta última tiende a cero más rápido que cualquier potencia de $|x|$. Proposición 13.17 sigue probando estabilidad. El polinomio de Taylor nulo no coincide con la función en un entorno.

Una región realmente plana plantea otra distinción. Si U es constante, toda posición con velocidad cero es un equilibrio. Una pequeña perturbación de posición con velocidad aún cero deja otro estado en reposo. Pero definición 13.11 también permite perturbar la velocidad, y entonces aparece una deriva indefinida.

Proposición 13.19 — Potencial constante e inestabilidad del estado libre. Para una partícula en $\mathbb{R}$ con U constante, cada estado $(x_*, 0)$ es inestable según la definición 13.11, aunque toda perturbación puramente posicional con velocidad cero permanezca en reposo.

Demostración. Newton da $\ddot{x} = 0$. Para datos $x_0 = x_*$ y $v_0 = \eta > 0$, la solución global es $x(t) = x_* + \eta t$, $v(t) = \eta$. La distancia inicial es $\tau\eta$, arbitrariamente pequeña. Para cualquier radio espacial fijo $\rho > 0$, en $t = \rho/\eta$ la distancia posicional alcanza ρ, por lo que abandona el entorno de estado correspondiente. No existe el control uniforme temporal exigido por la definición 13.11. Si $v_0 = 0$, en cambio, la historia permanece en su posición inicial. □

El lenguaje informal de «equilibrio neutro» suele referirse a la respuesta ante desplazamientos en reposo. Puede ser útil si se declara esa restricción, pero no debe sustituir la estabilidad de estado definida aquí. En varias dimensiones, una dirección plana puede producir el mismo fallo aunque las otras estén confinadas.

[12] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.8, p. 175, considera segundas derivadas nulas; Morin, obra citada, cap. 5, §5.2, pp. 147–148, limita la aproximación cuadrática. Aquí se distingue explícitamente serie de Taylor nula y función constante, y la respuesta «neutra» posicional de la estabilidad de Lyapunov del estado.

Tampoco se intercambian sin control el límite de perturbaciones pequeñas y el de tiempos grandes. Para la partícula libre, cada historia con velocidad η permanece cerca en cualquier intervalo fijo cuando η tiende a cero. Sin embargo, para cada $\eta \neq 0$ el desplazamiento crece sin límite cuando aumenta el tiempo. El caso ilustra por qué una aproximación que elimina un término pequeño puede ser adecuada durante una duración finita y fallar en una afirmación de estabilidad para todo el futuro.

Principio metodológico 13.12 — No clasificar con una derivada nula. Si el criterio cuadrático no decide, estudia órdenes superiores con resto controlado o usa una barrera directa. Distingue función plana de serie de Taylor nula, y respuesta a desplazamientos en reposo de estabilidad frente a todas las perturbaciones del estado.

Ejercicios. Ejercicio 13.24. Para $U(x) = ax^4$, obtén cotas de posición y velocidad en términos de la energía y decide si el equilibrio es estable o asintóticamente estable.

Solución. Con $E = mv^2/2 + ax^4$, se tiene $|x| \leq (E/a)^{1/4}$ y $|v| \leq \sqrt{2E/m}$. Ambas cotas tienden a cero con la energía inicial y valen durante toda la historia. Los niveles de energía son compactos, lo que permite continuación global. El origen es estable; no es asintóticamente estable por la proposición 13.16. El exponente $1/4$ del control de posición refleja que el potencial es más plano que un mínimo cuadrático, pero no elimina el confinamiento.

Ejercicio 13.25. Compara la estabilidad del origen para $U_+(x) = ax^4$, $U_-(x) = -ax^4$ y $U_0(x) = 0$, con $a > 0$. Todos tienen primera y segunda derivadas nulas allí. ¿Qué dato distingue las conclusiones?

Solución. U_+ tiene mínimo estricto y proposición 13.17 da estabilidad. U_- empuja hacia afuera con fuerza $4ax^3$; una perturbación positiva en reposo escapa por la cota de aceleración del texto, así que es inestable. U_0 no ejerce fuerza y proposición 13.19 da inestabilidad frente a perturbaciones de velocidad. Coincidir en dos derivadas no decide el comportamiento. Lo distinguen la barrera positiva del primer caso, el crecimiento hacia afuera del segundo y la deriva libre del tercero. En el último, permanecer en reposo bajo desplazamientos no equivale a estabilidad del estado completo.

13. Estabilidad en varias dimensiones

En varias dimensiones el potencial puede subir en una dirección y bajar en otra. Examinar una sola sección de su paisaje no basta para demostrar confinamiento. La prueba de estabilidad exige una barrera que rodee al punto en todas las direcciones; el Hessiano ofrece una condición suficiente para construirla cerca de un punto crítico.[13]

Definición 13.13 — Hessiano y positividad definida. Para $U \in C^2(\Omega)$, su Hessiano en $\mathbf{r}_*$ es la matriz simétrica $H_{ij} = \partial_i \partial_j U(\mathbf{r}_*)$. Es positivo definido si $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} > 0$ para todo vector no nulo $\mathbf{h}$. Es positivo semidefinido si el producto es no negativo, permitiendo direcciones no nulas donde se anula.

En coordenadas cartesianas, Taylor alrededor de un punto crítico toma la forma $U(\mathbf{r}_* + \mathbf{h}) = U_* + \mathbf{h}^T H \mathbf{h}/2 + o(|\mathbf{h}|^2)$. La matriz representa la curvatura cuadrática local, no todo el potencial. Una dirección de curvatura cero requiere examinar el resto o una barrera directa.

Proposición 13.20 — Mínimo estricto multidimensional y criterio del Hessiano. Para $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U$, con $U \in C^2$, un mínimo local estricto interior produce un equilibrio estable. En

[13] El uso del paisaje y de la aproximación cuadrática enlaza con Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §§4.8–4.10, pp. 174–178, y Morin, obra citada, cap. 5, §5.2, pp. 147–148. El Hessiano, la barrera esférica y las pruebas multidimensionales se desarrollan aquí; no se presupone un teorema espectral de estabilidad no lineal.

particular, un punto crítico con Hessiano positivo definido es un mínimo local estricto y produce estabilidad.

Demostración. En un mínimo interior, el gradiente se anula. Tomemos una bola cerrada de radio $\rho < \varepsilon/2$ alrededor de $\mathbf{r}_*$, contenida en el dominio y en una región donde $U > U_*$ fuera del centro. Por compacidad de su esfera frontera,

$$B = \min_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_*|=\rho} (U(\mathbf{r}) - U_*) > 0.$$

Escojamos energía relativa inicial e positiva o nula, suficientemente pequeña para que $e < B$ y $e < m\varepsilon^2/(8\tau^2)$. La continuidad permite asegurar esas desigualdades mediante datos suficientemente próximos. Como e se conserva, la trayectoria no alcanza la esfera. Dentro, $U - U_* \geq 0$, por lo que $\tau|\mathbf{v}| < \varepsilon/2$, y la distancia total es menor que ε. El subnivel de energía dentro de la bola es compacto, no toca la esfera y acota velocidades; garantiza continuación para todo tiempo futuro.

Si H es positivo definido, la función $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n}^T H \mathbf{n}$ sobre la esfera unitaria tiene mínimo $\lambda > 0$. Taylor da $U - U_* \geq \lambda|\mathbf{h}|^2/4$ para $\mathbf{h}$ pequeño: el resto se acota por $\lambda|\mathbf{h}|^2/4$. Por tanto, hay mínimo local estricto y se aplica el primer argumento. □

La prueba energética no requiere resolver cada coordenada ni diagonalizar el Hessiano. Su primera parte también cubre mínimos estrictos con curvaturas nulas, como $U = x^2 + y^4$ con coeficientes positivos. El criterio matricial es suficiente, mientras que una matriz semidefinida deja información pendiente.

Proposición 13.21 — Inestabilidad de una silla cuadrática. Para $U(x, y) = kx^2/2 - \ell y^2/2$, con $k, \ell > 0$, el origen es un equilibrio inestable aunque el movimiento en la dirección x esté confinado.

Demostración. Newton da $m\ddot{x} = -kx$ y $m\ddot{y} = \ell y$. Para datos $x_0 = 0, v_{x,0} = 0, y_0 = \eta > 0, v_{y,0} = 0$, la unicidad mantiene $x = 0$. La solución $y(t) = \eta \cosh(\sqrt{\ell/m}\, t)$ verifica la ecuación y los datos. Para cualquier radio fijo $\rho > 0$, alcanza $y = \rho$ en tiempo finito si $\eta < \rho$. Como η puede hacerse arbitrariamente pequeña, definición 13.11 falla. □

La prueba es para una silla cuadrática concreta. Un criterio general de inestabilidad de sistemas no lineales mediante el espectro de su linealización requiere herramientas adicionales; no lo damos por demostrado aquí. Los ejemplos con direcciones invariantes permiten verificar el escape directamente, y el Hessiano positivo se trata mediante una barrera sin usar ese criterio general.

Un cambio ortonormal de coordenadas no altera la positividad de la forma cuadrática: si $\mathbf{h} = Q\mathbf{z}$ con $Q^T Q = I$, entonces $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} = \mathbf{z}^T Q^T H Q \mathbf{z}$ y $|\mathbf{h}| = |\mathbf{z}|$. Las direcciones físicas no dependen de cómo orientamos los ejes. En cambio, una parametrización restringida o una coordenada curvilínea exige conservar la expresión cinética correspondiente. No se puede tomar una segunda derivada respecto de un parámetro arbitrario y tratarla, sin más, como toda la información cartesiana de fuerza y movimiento.

Principio metodológico 13.13 — Controlar todas las direcciones. Para demostrar estabilidad busca una barrera cerrada alrededor del punto, o una forma cuadrática positiva con resto controlado. Si hay direcciones planas, examina los términos superiores. Para demostrar escape, comprueba que la trayectoria usada satisface todas las componentes de Newton.

Ejercicios. Ejercicio 13.26. Sea $U = k(x^2 + y^2)/2 + \alpha xy$, con $k > 0$ y $|\alpha| < k$. Demuestra estabilidad del origen mediante una cota de energía, sin calcular autovalores.

Solución. Como $2|xy| \leq x^2 + y^2$, se tiene $U \geq (k - |\alpha|)(x^2 + y^2)/2$. El potencial es estrictamente positivo fuera del origen y tiene gradiente cero allí. Para energía E, resulta $|\mathbf{r}| \leq \sqrt{2E/(k - |\alpha|)}$ y

$|\mathbf{v}| \le \sqrt{2E/m}$. Ambas cotas tienden a cero con la energía inicial y confinan globalmente la historia en un compacto. El origen es estable por la definición 13.11. La condición estricta importa: cuando $|\alpha| = k$, esta cota espacial pierde una dirección y no acredita estabilidad.

Ejercicio 13.27. Compara $U_1 = kx^2/2 + ay^4$, $U_2 = kx^2/2$ y $U_3 = kx^2/2 - ay^4$, con $k, a > 0$. Sus Hessianos en el origen coinciden. Clasifica el origen usando las ecuaciones y el potencial.

Solución. Los tres Hessianos son $\mathrm{diag}(k, 0)$. En U_1 hay mínimo estricto y proposición 13.20 da estabilidad. En U_2, la coordenada y es libre; datos con $x = 0, v_x = 0, y = 0, v_y = \eta$ producen $y = \eta t$ y escape, como proposición 13.19. En U_3, la subhistoria $x = 0, v_x = 0$ es invariante y $m\ddot{y} = 4ay^3$; iniciar $y = \eta > 0, v_y = 0$ produce escape por el argumento de §12. Los dos últimos son inestables. Un mismo Hessiano semidefinido admite conclusiones distintas porque no registra los términos superiores ni el control de velocidades en la dirección plana.

Ejercicio 13.28. Para $U(x, y) = \alpha xy$, con $\alpha > 0$, construye datos arbitrariamente próximos al origen que escapen. Verifica que la línea propuesta es dinámicamente invariante.

Solución. Newton exige $m\ddot{x} = -\alpha y$ y $m\ddot{y} = -\alpha x$. Elijamos $y = -x$, con datos $x_0 = \eta, y_0 = -\eta$ y ambas velocidades cero. La historia $x(t) = \eta \cosh(\sqrt{\alpha/m}\, t)$, $y(t) = -x(t)$ satisface las dos ecuaciones: $m\ddot{x} = \alpha x = -\alpha y$ y $m\ddot{y} = -\alpha x$. Su distancia espacial es $\sqrt{2}\eta \cosh(\sqrt{\alpha/m}\, t)$ y supera cualquier radio fijo. No bastaba elegir una dirección de potencial decreciente: se ha comprobado además una solución completa que conserva esa dirección y escapa.

14. Síntesis y dominio de validez

El capítulo ha separado tres problemas. Primero, la existencia de potencial para un campo de posición: una cuestión de integrales, derivadas y dominio. Segundo, la conservación de energía mecánica en una historia: una consecuencia de Newton y de las potencias presentes. Tercero, la estabilidad de un equilibrio: una afirmación sobre todos los datos de estado suficientemente próximos y todos los tiempos futuros. Pasar de uno al siguiente requiere hipótesis nuevas.

Un campo conservativo puede tener un equilibrio inestable, como el máximo cuadrático. Un mínimo estable puede no atraer, como cualquier mínimo en el modelo conservativo tratado. Un campo sin potencial global puede admitir potenciales locales. Y una fuerza de potencia nula en una historia puede mantener la energía sin ser un campo conservativo de posición. Mantener esas distinciones evita usar la misma palabra para resultados matemáticos distintos.

La disipación introduce una variante útil del argumento de barrera. Una energía mecánica que no aumenta puede confinar los estados cercanos a un mínimo, aunque haya dejado de ser una cantidad conservada. Esto no convierte automáticamente la monotonía en una demostración de convergencia.

Proposición 13.22 — Estabilidad energética con resistencia viscosa. Sea $U \in C^2(\Omega)$ con mínimo local estricto interior en $\mathbf{r}_*$. Para $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U - b\dot{\mathbf{r}}$, con $m, b > 0$ constantes, el estado $(\mathbf{r}_*, \mathbf{0})$ es estable.

Demostración. El gradiente se anula en el mínimo y la resistencia se anula en reposo, por lo que hay equilibrio. Proposición 13.11 da $\dot{E} = -b|\mathbf{v}|^2 \le 0$. En la prueba de la proposición 13.20, escojamos una bola donde $U - U_* \ge 0$ y una barrera $B > 0$ en su esfera. Si la energía relativa inicial es menor que B, ninguna historia puede alcanzar la esfera: allí necesitaría energía al menos B, mientras $E(t) - U_* \le E(0) - U_* < B$.

Dentro, $m|\mathbf{v}|^2/2 \le E(t) - U_* \le E(0) - U_*$. Hacer suficientemente pequeña la energía inicial controla velocidad y posición como en la proposición 13.20. El campo de estados sigue siendo C^1

y el subnivel confinado es compacto dentro del dominio, de modo que la solución se prolonga para todo $t \geq 0$. Se cumple definición 13.11. □

El teorema acredita estabilidad y no necesita resolver el movimiento. Para probar atracción de un entorno habría que estudiar también qué estados pueden sostener una evolución límite de potencia disipada nula, y qué otras condiciones rigen el potencial. No invocamos sin prueba un principio general de invariancia. Que $\int_0^\infty b|\mathbf{v}|^2 dt$ sea finita no basta, por sí solo, para concluir toda convergencia de posición.

Una guía o una región singular también puede modificar el análisis. En una guía fija, el potencial se restringe al conjunto de posiciones permitidas, y las variaciones relevantes son las compatibles con ella. El mínimo ambiente y el mínimo restringido pueden diferir. Si la guía se mueve, el potencial efectivo puede adquirir dependencia temporal y el balance de la proposición 13.12 incorpora su accionamiento. La barrera autónoma no se aplica ignorando ese término.

Las posiciones excluidas deben conservarse durante todo el razonamiento. Un equilibrio interior regular permite aplicar existencia local y las pruebas anteriores. Un supuesto mínimo en una frontera de contacto unilateral requiere verificar la reacción; una singularidad del campo no es un equilibrio ordinario aunque una representación formal de energía parezca favorable. Las desigualdades de contacto y el dominio físico siguen teniendo autoridad sobre una prolongación algebraica.

El marco elegido forma parte de ese dominio de validez. La posición de un soporte fijo y la autonomía del potencial pueden cambiar de expresión al pasar a otro observador. Para aplicar el balance se transforman campo, soporte, velocidades y argumentos temporales de manera conjunta, como en el capítulo 12. La representación puede adquirir dependencia temporal aunque el fenómeno físico sea el mismo. Las pruebas de estabilidad de este capítulo usan un equilibrio estacionario y un sistema autónomo especificado; no se trasladan literalmente a una trayectoria móvil sin reformular qué estado de referencia se compara.

Principio metodológico 13.14 — Identificar qué conclusión está probada. Para potencial, comprueba campo y dominio. Para conservación, deriva el balance completo. Para estabilidad, fija el estado, el tipo de perturbación y el control temporal. Para atracción, añade una prueba de convergencia. Conserva las restricciones de contacto, regularidad y modelización en cada paso.

Ejercicios. Ejercicio 13.29. En el plano, sea $U(x, y) = -kx^2/2 + ky^2/2$, con $k > 0$, pero la partícula está restringida a la recta fija lisa $x = 0$. Compara la estabilidad sin guía y con guía. Declara el espacio de perturbaciones de cada conclusión.

Solución. Sin guía, la fuerza es $(kx, -ky)$; una perturbación en la dirección x crece como en la proposición 13.21 y el origen es inestable en el estado ambiente. Con la guía, las posiciones admisibles tienen $x = 0$ y las velocidades admisibles $v_x = 0$. El potencial restringido es $ky^2/2$ y la dinámica tangencial $m\ddot{y} = -ky$ tiene equilibrio estable por la proposición 13.17. La guía fija lisa no aporta potencia. La estabilidad restringida controla sólo datos compatibles (y, v_y): no afirma que una partícula liberada de la guía permanezca cerca ante perturbaciones en x. Como el modelo restringido es conservativo, tampoco produce estabilidad asintótica.

Ejercicio 13.30. Un bloque horizontal unido a un resorte fijo cumple $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$, con $k, b > 0$. Se exige que su estado permanezca dentro de $|x| + \tau|v| < \varepsilon$. Obtén una condición suficiente sobre la energía inicial y distingue lo acreditado de una prueba de convergencia.

Solución. La energía $E = mv^2/2 + kx^2/2$ satisface $E(t) \leq E_0$. Por las cotas del ejercicio 13.23,

$$|x(t)| + \tau|v(t)| \leq \sqrt{2E_0}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{\tau}{\sqrt{m}}\right).$$

Es suficiente imponer $E_0 < \varepsilon^2/[2(1/\sqrt{k} + \tau/\sqrt{m})^2]$. El subnivel es compacto y Newton prolonga la historia globalmente, así que la condición prueba permanencia para todo tiempo. Integrar $\dot{E} = -bv^2$ también da $\int_0^\infty bv^2 dt \leq E_0$. Estos argumentos acreditan estabilidad y disipación acumulada acotada; la convergencia de este sistema puede estudiarse por sus ecuaciones, pero no se ha demostrado únicamente con la desigualdad presentada. Esa distinción no niega una conclusión posterior: conserva el alcance de la prueba efectivamente realizada.

Con esto queda construido el puente entre trabajo, potencial y estabilidad. El dominio decide cuándo una fuerza admite representación global; el balance decide cuándo se conserva la energía mecánica; la geometría del potencial y las ecuaciones deciden qué perturbaciones quedan confinadas. El capítulo 14 estudiará momento lineal, impulso y centro de masa, y añadirá herramientas vectoriales para sistemas de partículas que el balance escalar no sustituye.

Capítulo 14

Momento lineal, impulso y centro de masa

Este capítulo estudia balances vectoriales de momento para partículas y sistemas materiales, su integración temporal y la separación del movimiento colectivo y relativo. Prerrequisitos físicos capítulo 9–10; matemática M2–M3 y M6 elemental. La comparación con energía enlaza con el capítulo 12. La segunda parte desarrolla colisiones y sistemas abiertos.

1. Momento lineal de una partícula

El balance de energía cinética compara rapidez y trabajo. Para conservar información direccional conviene introducir una magnitud vectorial que relaciona masa y velocidad: el momento lineal. Su variación se obtiene directamente de Newton y permitirá después sumar las ecuaciones de muchas partículas sin reconstruir primero sus interacciones.[1]

Definición 14.1 — Momento lineal de una partícula. Una partícula de masa constante $m > 0$, con velocidad $\mathbf{v}$ medida en un marco inercial elegido, tiene momento lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Sus unidades SI son $\mathrm{kg\,m/s}$, equivalentes a $\mathrm{N\,s}$.

El momento apunta en la dirección de velocidad. No es fuerza: sus unidades y su función en la ecuación son distintas. Tampoco es energía cinética: dos velocidades opuestas producen momentos opuestos y la misma energía $m|\mathbf{v}|^2/2$. Con masa conocida, el momento determina la velocidad completa mediante $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$.

Proposición 14.1 — Fuerza total y derivada del momento. Para masa constante en un marco inercial, Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\mathrm{tot}}$ equivale a $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_{\mathrm{tot}}$.

Demostración. Derivar definición 14.1 con m constante da $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}$. Sustituir una de las dos ecuaciones produce la otra. □

La igualdad usa la fuerza total sobre la partícula. Si actúan peso, tensión y contacto, se suman antes de identificar $\dot{\mathbf{p}}$. Una fuerza particular modifica el momento junto con las demás; no puede atribuirse todo el cambio a ella sin verificar que las otras contribuciones se anulan.

La formulación vectorial contiene una igualdad por componente. Si $\mathbf{F}_{\mathrm{tot}}$ es perpendicular a una dirección fija $\mathbf{e}$, entonces $d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e})/dt = 0$ aunque las otras componentes varíen. Si la dirección elegida gira con el tiempo, derivar $\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(t)$ añade $\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{e}}$; no se puede omitir ese término. Trabajaremos inicialmente con ejes fijos de un marco inercial.

El momento depende del marco porque la velocidad depende de él. Bajo una traslación uniforme de velocidad $\mathbf{U}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ y $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\mathbf{U}$. La diferencia entre dos instantes permanece igual cuando m y $\mathbf{U}$ son constantes. Esto anticipa una propiedad útil: observadores inerciales relacionados de ese modo coinciden en el cambio de momento, aunque no en su valor absoluto.

Para masa constante, la energía cinética puede expresarse como $K = |\mathbf{p}|^2/(2m)$. Esta expresión pierde la dirección al tomar el cuadrado del módulo. Conocer K no permite reconstruir $\mathbf{p}$; conocer

[1] Kleppner–Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, copia Cambridge University Press, 2010, cap. 3, §3.1, pp. 111–113; Morin, *Introduction to Classical Mechanics*, Cambridge University Press, 2008, cap. 5, §5.5.1, pp. 156–157. La equivalencia con Newton se prueba aquí para masa constante y marco inercial.

$\mathbf{p}$ y m sí permite calcular K. Los dos balances ofrecen información diferente y pueden combinarse cuando sus hipótesis son compatibles.

Si una descripción hace variar la masa que pertenece al objeto elegido, derivar formalmente $m(t)\mathbf{v}(t)$ añade $\dot{m}\mathbf{v}$. Pero ese cálculo no decide qué materia entra o sale ni qué momento transporta. Proposición 14.1 se ha probado para una partícula de masa constante; el balance de un sistema abierto requiere otra formulación que reservamos para §13.

Principio metodológico 14.1 — Fijar receptor, masa y marco. Declara sobre qué partícula actúan las fuerzas y en qué marco mides su velocidad. Conserva el carácter vectorial del momento y usa la resultante para su derivada. No extiendas la prueba de masa constante a un objeto con transferencia de materia.

Ejercicios. Ejercicio 14.1. Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ pasa de velocidad $(3,-1)\,\mathrm{m/s}$ a $(-1,2)\,\mathrm{m/s}$. Calcula los momentos inicial y final, su cambio y el cambio de energía cinética. ¿Permite el signo de este último deducir la dirección del cambio de momento?

Solución. Los momentos son $(6,-2)$ y $(-2,4)\,\mathrm{kg\,m/s}$; su cambio es $(-8,6)\,\mathrm{kg\,m/s}$. La energía inicial es $2(3^2+(-1)^2)/2 = 10\,\mathrm{J}$ y la final $2((-1)^2+2^2)/2 = 5\,\mathrm{J}$, por lo que $\Delta K = -5\,\mathrm{J}$. Ese signo dice que disminuyó la rapidez, pero no determina el vector $\Delta\mathbf{p}$. Aquí cambia tanto su componente horizontal como la vertical. Una igualdad escalar no sustituye los datos vectoriales.

Ejercicio 14.2. En una línea, una masa m parte con momento p_0 y recibe fuerza total constante F_0 durante $0 \le t \le T$. Obtén momento, velocidad y posición, suponiendo posición inicial x_0. Indica qué información inicial no aparece en la ecuación del momento.

Solución. proposición 14.1 da $p(t) = p_0 + F_0 t$, así que $v(t) = p_0/m + F_0 t/m$. Integrar produce $x(t) = x_0 + (p_0/m)t + F_0 t^2/(2m)$. El momento y la ley de fuerza permiten obtener velocidad, pero la posición requiere además x_0. Si la fuerza dependiera de posición, ambas ecuaciones tendrían que resolverse conjuntamente; no basta integrar una fuerza temporal que todavía no conocemos sobre la historia.

2. Impulso y fuerza media

Una fuerza puede variar mucho durante un contacto breve. Si buscamos el cambio de momento entre dos instantes, basta su integral temporal. Esa magnitud se llama impulso y se define también para fuerzas suaves que actúan durante largo tiempo: no presupone un golpe instantáneo ni una discontinuidad de velocidad.[2]

[2]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 3, §3.4, pp. 130–132; Morin, obra citada, cap. 5, §5.5.1, p. 157, ecuación 5.48. Se desarrolla la cota del impulso y se distingue fuerza total de fuerza de contacto, sin atribuir el pico a partir de la media.

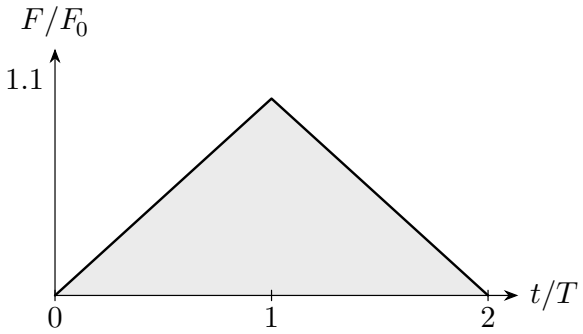


Figura 14.1. Un pulso triangular de duración $2T$ y altura F_0 tiene impulso F_0T. Su fuerza media es $F_0/2$; el área, y no la altura máxima por sí sola, determina el cambio de momento. Véase §2.

Definición 14.2 — Impulso de una fuerza. Para una historia de fuerza integrable $\mathbf{F}(t)$ en $[t_a, t_b]$, su impulso es $\mathbf{J} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(t)dt$. Es un vector con unidades de momento. La integral es temporal, no espacial.

Definición 14.3 — Fuerza media temporal. Si $\Delta t = t_b - t_a > 0$, la fuerza media es $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$. Representa el vector constante que tendría el mismo impulso en ese intervalo, sin afirmar que coincidan sus picos ni la posición del receptor.

Proposición 14.2 — Teorema impulso–momento. Para una partícula de masa constante que cumple Newton, $\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_a = \mathbf{J}_{\text{tot}}$. El impulso total es la suma de los impulsos de todas las fuerzas que actúan durante el intervalo.

Demostración. Integrar proposición 14.1 da $\int_{t_a}^{t_b} \dot{\mathbf{p}}\, dt = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\text{tot}} dt$. El lado izquierdo es la diferencia de momentos. Para una suma finita de fuerzas, la linealidad de la integral permite sumar sus impulsos. El argumento se aplica también por tramos con extremos comunes. □

El trabajo y el impulso integran información distinta. El primero usa $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, dt$ y tiene unidades de energía; el segundo usa $\mathbf{F}dt$ y tiene unidades de momento. Un impulso no nulo puede cambiar la dirección de velocidad sin cambiar la energía entre extremos. Un trabajo conocido tampoco determina todas las componentes del impulso.

Proposición 14.3 — Cota del impulso y error de una omisión. Si $|\mathbf{F}(t)| \le F_{\text{máx}}$ en un intervalo de duración Δt, entonces $|\mathbf{J}| \le F_{\text{máx}}\Delta t$. Si una fuerza omitida cumple esa cota, el error vectorial en el momento final calculado con las otras fuerzas es a lo sumo $F_{\text{máx}}\Delta t$, siempre que se usen sus impulsos sobre la historia real.

Demostración. La desigualdad triangular de la integral da $|\int \mathbf{F}dt| \le \int |\mathbf{F}|dt \le F_{\text{máx}}\Delta t$. El balance exacto difiere del que omite esa contribución en su impulso; se aplica la misma cota. □

La última precisión evita una confusión: omitir una fuerza al resolver la dinámica también puede cambiar la historia y los impulsos de las fuerzas restantes. Proposición 14.3 acota directamente la contribución omitida sobre la historia considerada, no un error global arbitrario de modelización. Para comparar dos historias habría que controlar esa dependencia adicional.

Durante un contacto breve, el impulso del peso tiene magnitud $mg\Delta t$. Puede ser pequeño frente al impulso de contacto, pero debe compararse con una escala de momento y una tolerancia. La brevedad por sí sola no garantiza un error relativo pequeño si el cambio total es casi cero por cancelación. En ese caso sigue siendo válida una cota absoluta.

Para un impulso fijo, alargar la duración reduce el módulo de la fuerza media. No obliga a reducir cualquier pico instantáneo imaginable: una historia larga puede contener un pulso muy alto

y estrecho. Una afirmación sobre picos requiere fijar además la forma temporal o una familia de modelos de contacto.

Principio metodológico 14.2 — Integrar todas las contribuciones y controlar la aproximación. Usa el impulso total para el cambio de momento. Si desprecias una fuerza, estima su impulso y declara la escala de comparación. Distingue fuerza media, pico y ley temporal; no deduzcas una historia completa sólo de su área bajo la curva.

Ejercicios. Ejercicio 14.3. Una masa de 0,5 kg cambia de velocidad vertical $-4\,\mathrm{m/s}$ a $3\,\mathrm{m/s}$ durante un contacto de 0,02 s. Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ y sentido positivo hacia arriba. Calcula impulso y fuerza media de contacto, incluyendo el peso.

Solución. El cambio de momento es $0{,}5[3-(-4)] = 3{,}5\,\mathrm{N\,s}$ hacia arriba. El peso aporta $-mg\Delta t = -0{,}1\,\mathrm{N\,s}$. Por tanto, el contacto aporta $J_c = 3{,}6\,\mathrm{N\,s}$ y su fuerza media es 180 N hacia arriba. La fuerza total media es 175 N. Confundir las dos omitiría los 5 N de peso. Estos datos no determinan el pico de contacto ni su distribución temporal.

Ejercicio 14.4. Una fuerza unidimensional sobre $0 \le t \le T$ tiene perfil triangular: $F(t) = 2F_p t/T$ hasta $T/2$ y $F(t) = 2F_p(1 - t/T)$ después, con $F_p > 0$. Calcula impulso y fuerza media. Compara con una fuerza constante de igual impulso.

Solución. Cada mitad aporta el área de un triángulo de base $T/2$ y altura F_p, igual a $F_pT/4$. El impulso es $F_pT/2$ y la fuerza media $F_p/2$. La fuerza constante correspondiente es $F_p/2$ durante todo el intervalo, y produce el mismo cambio de momento si ambas son fuerzas totales. Sus picos difieren: F_p para el triángulo y $F_p/2$ para la constante. Sus posiciones intermedias difieren; para estos dos perfiles simétricos y los mismos datos iniciales, el desplazamiento final coincide: $v_0T + F_pT^2/(4m)$ para una partícula de masa constante m. En general, el impulso total no fija el desplazamiento: éste depende también de la distribución temporal de la fuerza, mediante $\Delta x = v_0T + m^{-1}\int_0^T (T - t)F(t)dt$.

3. Momento de un sistema material

Para sumar las ecuaciones de partículas hay que fijar cuáles pertenecen al sistema. La elección puede ser amplia o estrecha, pero debe mantenerse durante el intervalo. Una interacción entre miembros cuenta como interna; la misma fuerza pasa a ser externa si uno de los cuerpos queda fuera. La cancelación interna es una consecuencia de la tercera ley dentro del modelo elegido.[3]

Definición 14.4 — Momento total de un sistema material finito. Un sistema formado por una lista fija de n partículas de masas constantes $m_i > 0$ tiene masa total $M = \sum_i m_i$ y momento total $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i\mathbf{v}_i$. Todas las velocidades se miden en el mismo marco inercial.

La palabra «material» significa aquí que seguimos los mismos miembros. No se sustituye una partícula por otra porque una atraviese una región del espacio. El sistema puede deformarse, separarse y cambiar su distribución; esas posibilidades no modifican la lista de masas que sumamos. Un conjunto definido por la materia que ocupa una caja fija puede tener entradas y salidas y necesitar otro balance.

Denotemos por $\mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}}$ la resultante sobre i debida a agentes fuera del sistema, y por $\mathbf{F}_{ij}$ la fuerza que j ejerce sobre i. El primer índice identifica al receptor. Supondremos interacciones internas por pares que cumplen $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ al mismo tiempo en este modelo newtoniano.

[3] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 3, §3.2, pp. 113–115; Morin, obra citada, cap. 5, §5.5.1, pp. 156–157. La suma se hace para una lista material fija y masas constantes; la distinción entre suma de fuerzas y suma de potencias enlaza con el capítulo 12.

Proposición 14.4 — Balance externo del momento total. Si cada miembro cumple Newton con las fuerzas anteriores, entonces

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}, \qquad \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}}, \qquad \mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\, dt.$$

Demostración. proposición 14.1 para cada partícula da $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ij}$. Sumamos las igualdades. La suma interna se agrupa como $\sum_{i<j}(\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{F}_{ji}) = 0$ por la tercera ley. La derivada de la suma finita es $\dot{\mathbf{P}}$ y permanece únicamente la resultante externa. Integrar en tiempo da la última identidad. □

No se ha supuesto que las fuerzas internas sean pequeñas ni que las partículas tengan velocidades iguales. Tampoco se ha exigido que las fuerzas de cada par estén sobre la línea que une sus posiciones. Para este balance de momento basta la igualdad y oposición vectorial declarada. Otras magnitudes, como el momento angular, pueden requerir propiedades adicionales, que se tratarán en el capítulo 15.

La cancelación de fuerzas no equivale a cancelación de trabajo. Para un par interno, la potencia conjunta es $\mathbf{F}_{ij}\cdot(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j)$, como se probó en el capítulo 12. Puede ser no nula aunque $\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{F}_{ji} = 0$. Un resorte entre masas puede modificar su energía cinética total mientras deja constante su momento total si no hay resultante externa. Los balances se complementan porque suman objetos distintos.

La tercera ley es una hipótesis del modelo de partículas e interacciones. Si una descripción omite un medio que transporta momento o no satisface la oposición instantánea por pares, no puede aplicarse esta prueba por costumbre. Habría que ampliar el sistema o escribir el término de balance que falta. Aquí trabajaremos con los modelos mecánicos elementales de Newton ya establecidos.

Principio metodológico 14.3 — Fijar miembros antes de cancelar fuerzas. Escribe la lista del sistema y separa sus interacciones internas de los agentes externos. Usa acción y reacción sobre receptores distintos para cancelar la suma de fuerzas. No deduzcas de esa cancelación un trabajo interno nulo ni conservación de cada momento individual.

Ejercicios. Ejercicio 14.5. Dos masas $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ y $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ se mueven en una línea con velocidades iniciales 2 y $-1\,\mathrm{m/s}$. Reciben fuerzas internas iguales y opuestas, y fuerzas externas constantes $4\,\mathrm{N}$ sobre la primera y $-1\,\mathrm{N}$ sobre la segunda durante $2\,\mathrm{s}$. Obtén el momento final total. ¿Quedan determinadas ambas velocidades finales?

Solución. El momento inicial es $1\cdot 2 + 3(-1) = -1\,\mathrm{kg\,m/s}$. La resultante externa es $3\,\mathrm{N}$ y su impulso $6\,\mathrm{N\,s}$, por lo que $P_b = 5\,\mathrm{kg\,m/s}$. Las velocidades finales sólo satisfacen $v_{1,b} + 3v_{2,b} = 5$. Sin información sobre las fuerzas internas y la evolución, esa igualdad no las determina por separado. Por ejemplo, $(5,0)$ y $(2,1)$ producen el mismo momento total, aunque corresponden a historias y energías distintas.

Ejercicio 14.6. Sobre dos partículas actúa únicamente un par interno $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{f}(t)$. Calcula sus cambios de momento en función del impulso del par y decide qué se conserva. Explica por qué no se ha probado conservación de energía cinética.

Solución. Si $\mathbf{J} = \int \mathbf{f}(t)dt$, entonces $\Delta\mathbf{p}_1 = \mathbf{J}$ y $\Delta\mathbf{p}_2 = -\mathbf{J}$. La suma da $\Delta\mathbf{P} = 0$ en cada intervalo, y proposición 14.4 mantiene $\mathbf{P}$ constante. Cada momento puede cambiar. La potencia total interna es $\mathbf{f}\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)$ y no tiene por qué anularse. La oposición de fuerzas controla el momento; no elimina por sí sola la variación cinética causada por una deformación o por movimiento relativo.

4. Conservación y componentes

Una resultante externa nula mantiene constante el momento total. Una resultante con una componente nula conserva sólo la componente correspondiente. Y un impulso total nulo entre dos instantes garantiza igualdad de los momentos extremos, sin afirmar que el momento se mantuvo constante entre ellos. Conviene separar esos tres enunciados antes de usar una ley de conservación.[4]

Proposición 14.5 — Conservación vectorial y por proyecciones fijas. Bajo las hipótesis de la proposición 14.4, si $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ en todo un intervalo, $\mathbf{P}$ es constante allí. Si una dirección fija $\mathbf{e}$ satisface $\mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{e} = 0$ en todo el intervalo, entonces $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}$ es constante aunque las otras componentes puedan cambiar.

Demostración. En el primer caso proposición 14.4 da $\dot{\mathbf{P}} = 0$ y su integración mantiene el valor inicial. En el segundo, por ser $\mathbf{e}$ constante, $d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{e})/dt = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{e} = 0$. Integrar da la conservación de la proyección. □

Ausencia de interacción externa es una condición suficiente, pero no necesaria: varias fuerzas externas pueden tener resultante cero. Un sistema que recibe peso y una reacción equilibrada puede conservar el momento en un régimen concreto aunque existan agentes externos. La prueba depende de la suma efectiva y del intervalo, no de la etiqueta «aislado» aplicada sin inspección de fuerzas.

Proposición 14.6 — Impulso nulo entre extremos frente a conservación durante un intervalo. La igualdad $\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\text{ext}} dt = 0$ implica $\mathbf{P}_b = \mathbf{P}_a$, pero no implica que $\mathbf{P}$ sea constante durante todo el intervalo.

Demostración. La primera afirmación es proposición 14.4. Para refutar la segunda basta una partícula que recibe en una línea $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, con $F_0 \neq 0$, $\omega > 0$, durante $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$. Su impulso total es cero, mientras proposición 14.1 da $p(t) = p_0 + (F_0/\omega)\sin(\omega t)$, que no es constante. La velocidad $p(t)/m$ y su integral definen una historia que cumple Newton. □

La conservación puede servir para calcular un retroceso sin conocer la duración ni la ley detallada de interacción interna. Sin embargo, las velocidades de entrada deben pertenecer al mismo marco. Un dato medido respecto de un dispositivo que retrocede no coincide automáticamente con la velocidad respecto del laboratorio. Esa diferencia altera la ecuación de momento aunque la conservación siga siendo correcta.

Elegir sólo el objeto expulsado hace externa la fuerza del dispositivo. Elegir objeto y dispositivo permite que esa interacción se cancele, pero obliga a incluir las masas y velocidades de ambos. Si el dispositivo está anclado al suelo, puede recibir un impulso externo del anclaje y el momento del conjunto objeto–dispositivo no tiene por qué conservarse. Ampliar el sistema no elimina de manera automática toda interacción exterior.

Principio metodológico 14.4 — Conservar sólo lo acreditado. Comprueba la resultante externa o su proyección durante el intervalo relevante. Si sólo conoces impulso nulo, limita la conclusión a los extremos. Convierte todos los datos de velocidad al mismo marco y verifica si apoyos o anclajes aportan impulso al sistema elegido.

Ejercicios. Ejercicio 14.7. Dos cuerpos de masas M y m están inicialmente en reposo sobre una guía horizontal fija lisa. Un mecanismo interno los separa. Al terminar, el cuerpo m tiene velocidad relativa al cuerpo M igual a $u > 0$ hacia la derecha. Calcula las velocidades de ambos respecto del laboratorio.

[4] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 3, §3.3, pp. 122–123; Morin, obra citada, cap. 5, §5.5.1, p. 157. Los ejemplos usan sistema material fijo y velocidades en un mismo marco; el dato relativo del retroceso se convierte explícitamente.

Solución. Las fuerzas externas no tienen componente horizontal, de modo que $MV+mv=0$. El dato relativo es $v-V=u$. Sustituir $v=V+u$ da $(M+m)V+mu=0$, por lo que $V=-mu/(M+m)$ y $v=Mu/(M+m)$. Usar $v=u$ como dato de laboratorio habría ignorado el retroceso. Las velocidades satisfacen ambas ecuaciones. El trabajo del mecanismo puede modificar la energía cinética total; la conservación horizontal de momento no afirma que ésta permanezca en cero.

Ejercicio 14.8. Un sistema material de masa total M recibe sólo peso uniforme y fuerzas internas que cumplen tercera ley, sin resistencia. Su momento inicial es $(P_{x,0}, P_{y,0})$ en el plano vertical. Obtén su momento en el tiempo e identifica las componentes conservadas.

Solución. La resultante externa es $(0,-Mg)$, de modo que $P_x(t)=P_{x,0}$ y $P_y(t)=P_{y,0}-Mgt$. Se conserva la componente horizontal y cambia la vertical. Que la resultante interna sea cero no elimina el peso. Este balance todavía no proporciona las posiciones de cada miembro ni su movimiento relativo. Tampoco basta conocer que la componente vertical vuelva a un valor anterior en alguna historia con otras fuerzas: eso sería una comparación entre extremos, no conservación acreditada durante todo el intervalo.

5. Centro de masa como promedio afín

La suma de momentos combina velocidades, pero todavía no identifica una posición colectiva. Para masas constantes, el mismo promedio que aparece en el momento total define un punto cuya derivada reproduce esa suma. Este punto es el centro de masa. Su construcción pertenece primero a la geometría: puede definirse para cualquier configuración, sin conocer las fuerzas ni afirmar que allí exista una partícula.[5]

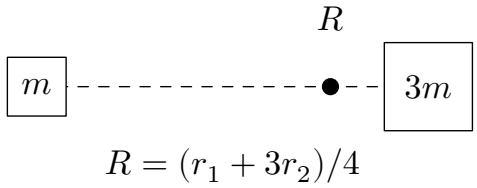


Figura 14.2. El centro de masa divide la separación en razón inversa a las masas. Con masas m y $3m$, se sitúa a un cuarto de la distancia desde la masa mayor. Véase §5.

Definición 14.5 — Centro de masa de un sistema material finito. Para las masas positivas constantes de la definición 14.4 y posiciones $\mathbf{r}_i$ medidas desde un mismo origen, se define

$$\mathbf{R}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i, \qquad M=\sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Los coeficientes m_i/M son positivos y suman uno. Por eso la fórmula representa un promedio de puntos y no una suma arbitraria de vectores. La dimensión de $\mathbf{R}$ es longitud. Multiplicar todas las masas por el mismo factor positivo no modifica el punto, aunque sí cambia la masa total y la respuesta dinámica a una fuerza dada. Dos configuraciones distintas pueden tener el mismo centro de masa; el promedio pierde información sobre su distribución interna.

[5] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 3, §3.2, pp. 116–118. Las propiedades afines, la agrupación y la cota convexa se demuestran aquí para un sistema material finito de masas positivas constantes.

Proposición 14.7 — Cambio de origen y agrupación. Si el origen se desplaza por un vector fijo $\mathbf{a}$, de modo que $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{a}$, entonces $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{a}$. Si el sistema se divide en grupos disjuntos de masas M_α y centros $\mathbf{R}_\alpha$, entonces $\mathbf{R} = \sum_\alpha M_\alpha \mathbf{R}_\alpha / M$.

Demostración. Sustituir el cambio de origen en la definición 14.5 da $\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{a})/M = \mathbf{R} - \mathbf{a}\sum_i m_i/M = \mathbf{R} - \mathbf{a}$. Para agrupar, la definición del centro de cada grupo da $M_\alpha \mathbf{R}_\alpha = \sum_{i\in\alpha} m_i \mathbf{r}_i$. Sumar sobre la partición cuenta cada miembro una vez y produce $M\mathbf{R}$. □

La primera identidad prueba que el centro es un punto geométrico consistente: cambiar el origen cambia su vector de posición exactamente como el de cualquier otro punto. La segunda permite sustituir un grupo por su masa concentrada en su centro para calcular el centro del conjunto. Esa sustitución preserva este promedio; no preserva automáticamente fuerzas, energía interna ni movimiento de los miembros.

Proposición 14.8 — Localización en el envolvente convexo. El centro de masa pertenece al envolvente convexo de las posiciones de los miembros. En particular, cada una de sus coordenadas está entre la menor y la mayor coordenada de esos miembros.

Demostración. El envolvente convexo es el conjunto de todas las combinaciones $\sum_i \lambda_i \mathbf{r}_i$ con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$. Definición 14.5 tiene esa forma con $\lambda_i = m_i/M$. Para una coordenada x, de $x_{\text{mín}} \leq x_i \leq x_{\text{máx}}$ se obtiene, multiplicando por esos pesos y sumando, $x_{\text{mín}} \leq R_x \leq x_{\text{máx}}$. Lo mismo vale para cualquier proyección fija. □

Pertenecer al envolvente convexo no significa pertenecer al material. Dos masas separadas tienen un centro en el segmento que las une, posiblemente en el vacío. Tampoco la simetría geométrica basta si las masas no respetan esa simetría. Una configuración y su distribución de masa invariantes bajo reflexión tienen un centro en el plano de reflexión: los términos de cada par se cancelan en la coordenada normal y los puntos del plano aportan cero allí.

Principio metodológico 14.5 — Calcular y controlar el promedio. Usa posiciones en un mismo sistema de coordenadas, conserva las masas como pesos y comprueba la suma de pesos. Agrupa sólo conjuntos disjuntos que cubran el sistema. Contrasta el resultado con cotas de coordenadas y simetrías de la distribución de masa; interpreta el punto sin suponer que contiene material.

Ejercicios. Ejercicio 14.9. Tres partículas de masas m, $2m$ y m ocupan $(0,0)$, $(3a,0)$ y $(0,2a)$, con $a > 0$. Calcula su centro y verifica el cambio a un origen situado en (a,a).

Solución. La masa total es $4m$ y $\mathbf{R} = (6ma, 2ma)/(4m) = (3a/2, a/2)$. Las nuevas posiciones son $(-a,-a)$, $(2a,-a)$ y $(-a,a)$. Su promedio ponderado es $(3a/2, a/2) - (a,a) = (a/2, -a/2)$, como predice proposición 14.7. En las coordenadas originales el resultado cae dentro de los intervalos $[0,3a]$ y $[0,2a]$. Más precisamente, sus pesos $1/4, 1/2, 1/4$ lo sitúan dentro del triángulo de los tres puntos. El promedio simple de los tres vértices daría otro punto porque ignoraría la masa doble.

Ejercicio 14.10. Un grupo A de masa $3m$ tiene centro en $x_A = -2a$ y un grupo B de masa m tiene centro en $x_B = 6a$. Encuentra el centro del conjunto. ¿Obliga el resultado a que algún miembro esté allí?

Solución. proposición 14.7 da $R_x = [3m(-2a) + m(6a)]/(4m) = 0$. El centro está entre los centros de los grupos y más cerca del más pesado: sus distancias son $2a$ y $6a$. No exige que exista material en $x = 0$. Por ejemplo, si cada grupo se representa por una partícula situada en su centro, ambas están fuera del origen y éste sigue siendo el centro del conjunto. La información tampoco determina el tamaño ni la distribución interna de los grupos. Concentrarlos en sus centros es suficiente para este cálculo, pero no convierte al conjunto en una sola partícula en todos los aspectos.

6. Dinámica del centro de masa

El centro de masa se definió sin dinámica. Ahora su utilidad se obtiene al diferenciar el promedio: como las masas y la lista de miembros son constantes, las derivadas pasan a las posiciones. El resultado conecta la suma de Newton con una ecuación para un solo punto. Esa ecuación gobierna el movimiento colectivo y deja pendiente el movimiento de cada miembro alrededor de ese punto.[6]

Proposición 14.9 — Ecuación del centro de masa. Para el sistema de las definiciones 14.4–14.5, en el marco inercial de la proposición 14.4 y bajo su hipótesis de cancelación interna,

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}, \qquad M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}.$$

Demostración. Diferenciar $M\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$ da $M\dot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{P}$. Otra derivada y proposición 14.4 dan $M\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$. La constancia de las masas y de la pertenencia al sistema justifica ambas derivadas sin términos adicionales. □

Si la resultante externa se conoce como función del tiempo, la ecuación puede integrarse con $\mathbf{R}(t_0)$ y $\dot{\mathbf{R}}(t_0)$. En cambio, una identidad para el centro no es necesariamente una ecuación cerrada para él. La suma externa puede depender de las posiciones individuales. En ese caso conocer $\mathbf{R}$ no basta para evaluarla; pueden requerirse variables internas y sus propias ecuaciones.

Un caso que sí cierra es un campo gravitatorio uniforme. Cada miembro recibe $m_i\mathbf{g}$, con el mismo vector $\mathbf{g}$, y la suma vale $M\mathbf{g}$. Si no hay otras fuerzas externas, $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{g}$. Fragmentar internamente el sistema puede cambiar por completo la disposición de sus partes, pero no esta trayectoria colectiva. El argumento presupone que las partes siguen en el sistema, conserva la masa total y omite de manera declarada resistencia e impulsos externos asociados a la fragmentación.

En un campo no uniforme, $\sum_i m_i \mathbf{g}(\mathbf{r}_i)$ no es en general $M\mathbf{g}(\mathbf{R})$. Hay una excepción útil: si $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{b} + A\mathbf{r}$, con matriz constante A, la suma es $M\mathbf{b} + AM\mathbf{R} = M\mathbf{g}(\mathbf{R})$. Fuera de esa forma, reemplazar todas las posiciones por el centro exige una aproximación cuyo error depende del tamaño y de la variación del campo. La ecuación exacta de la proposición 14.9 no otorga por sí sola esa aproximación.

Principio metodológico 14.6 — Separar identidad colectiva y cierre dinámico. Deriva primero la resultante externa del sistema material. Comprueba después si puede expresarse con el centro y datos conocidos. Usa la ecuación colectiva para su trayectoria, sin atribuirle posiciones relativas ni energía interna. En un campo uniforme puedes factorizar la masa; en uno variable debes justificar cualquier sustitución por el valor en el centro.

Ejercicios. Ejercicio 14.11. Un sistema de masa M tiene centro inicial $\mathbf{R}_0$ y velocidad colectiva inicial $\mathbf{V}_0$. Durante $0 \le t \le T$ recibe una resultante externa constante $\mathbf{F}_0$. Obtén su centro y momento. ¿Qué información falta para reconstruir sus miembros?

Solución. Integrar proposición 14.9 da $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{F}_0 t/M$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{F}_0 t^2/(2M)$ y $\mathbf{P} = M\mathbf{V}_0 + \mathbf{F}_0 t$. Los cambios tienen las dimensiones de velocidad, longitud y momento respectivas. Para posiciones individuales hacen falta datos iniciales relativos y leyes de interacción, además de la distribución de fuerzas externas entre miembros. Distintas evoluciones internas pueden compartir esta trayectoria del centro. Si la fuerza sólo es constante durante el intervalo indicado, las fórmulas no se prolongan fuera de él sin especificar el régimen siguiente.

Ejercicio 14.12. Dos masas iguales m están instantáneamente en una línea en $x_1 = R - a$ y $x_2 = R + a$. Cada una recibe una fuerza externa $F(x) = -kx^3$, con $k > 0$. Calcula la aceleración

[6] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 3, §3.2, pp. 116–118; Morin, obra citada, cap. 5, §5.6.1, pp. 161–162. El cierre en campos uniformes o afines y el contraejemplo cúbico se desarrollan explícitamente a partir de la suma de fuerzas.

del centro y compárala con la de una partícula de masa $2m$ sometida a la fuerza total modelada como $-2kR^3$.

Solución. La resultante exacta es $-k[(R-a)^3+(R+a)^3] = -2kR^3 - 6kRa^2$. Por proposición 14.9, $\ddot{R} = -(k/m)(R^3+3Ra^2)$. El modelo concentrado daría $\ddot{R} = -(k/m)R^3$ y perdería el término dependiente de la separación. Coinciden si $a = 0$ o $R = 0$ en ese instante. La coincidencia instantánea en $R = 0$ no prueba equivalencia de historias completas. Si a cambia durante el movimiento, también cambia el término adicional y la ecuación de R requiere conocer esa evolución. Aquí k tiene unidades fuerza/longitud cúbica, por lo que ambos términos de aceleración son dimensionalmente consistentes.

El impulso externo puede escribirse también como $M\Delta\dot{\mathbf{R}}$. Esto permite medir un cambio colectivo sin seguir cada intercambio interno, pero no localiza el centro durante el contacto a partir del impulso total solamente. Para la posición se necesita la historia temporal de su velocidad, igual que en la partícula de §2. La reducción colectiva mantiene esa distinción entre balance de extremos y trayectoria.

7. Marco del centro de masa y energía cinética

El centro reúne el movimiento colectivo. Para estudiar qué queda al retirarlo, escribimos $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ y $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$. Estas velocidades relativas satisfacen $\sum_i m_i\mathbf{u}_i = \mathbf{P} - M\mathbf{V} = 0$ por la proposición 14.9. La igualdad es instantánea y algebraica; no requiere que el centro se mueva uniformemente. Su interpretación como cambio entre marcos inerciales sí requiere una condición adicional.[7]

Definición 14.6 — Coordenadas y marco del centro de masa. Las coordenadas centradas son $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ y sus velocidades $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{u}_i$, usando ejes paralelos y sin rotación respecto del laboratorio. Si $\mathbf{V}$ es constante, este cambio define un marco inercial del centro de masa. Si $\mathbf{V}$ varía, define coordenadas en traslación acelerada y no un segundo marco inercial.

En las coordenadas centradas se cumple $\sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i = 0$. Las posiciones y velocidades relativas no son variables independientes arbitrarias: tienen estas restricciones ponderadas. Si el centro acelera, Newton para cada miembro se escribe $m_i\ddot{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{R}}$. El término adicional no es una nueva interacción entre miembros, sino la corrección debida al movimiento del origen. Mantener ejes paralelos evita aquí términos asociados a rotación.

Proposición 14.10 — Transformación galileana del momento. Entre dos marcos inerciales de ejes paralelos, uno con velocidad constante $\mathbf{U}$ respecto del otro, $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{U}$ y $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - M\mathbf{U}$. En un instante dado, la elección $\mathbf{U} = \mathbf{P}/M$ hace $\mathbf{P}' = 0$ en ese instante. Si $\mathbf{P}$ es constante, esa elección lo mantiene cero durante el intervalo.

Demostración. Sumar $m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{U})$ da $\mathbf{P} - M\mathbf{U}$. Como $M > 0$, el valor indicado anula la suma. Si $\mathbf{P}$ cambia mientras $\mathbf{U}$ sigue constante, la anulación no se conserva; si $\mathbf{P}$ permanece constante, sí. Proposición 14.9 identifica $\mathbf{P}/M$ con la velocidad del centro. □

Proposición 14.11 — Separación de la energía cinética. Para las mismas masas y velocidades,

$$K = \sum_i \frac{1}{2}m_i|\mathbf{v}_i|^2 = \frac{1}{2}M|\mathbf{V}|^2 + K_{\mathrm{rel}}, \qquad K_{\mathrm{rel}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i|\mathbf{u}_i|^2 \geq 0.$$

Demostración. Sustituir $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{u}_i$ en cada cuadrado da una suma colectiva $M|\mathbf{V}|^2/2$, la suma relativa y el término cruzado $\mathbf{V}\cdot\sum_i m_i\mathbf{u}_i$. Este último es cero por la proposición 14.9 y la

[7] Morin, obra citada, cap. 5, §§5.6.1–5.6.2, pp. 161–163. Se explicita la diferencia entre un cambio galileano de velocidad constante y coordenadas centradas aceleradas; la identidad cinética se prueba sin confundir ambos casos.

definición de $\mathbf{u}_i$. La positividad de las masas da la desigualdad. La prueba vale en cada instante aunque $\mathbf{V}$ varíe. □

El término colectivo es $|\mathbf{P}|^2/(2M)$. Por ello, con masa y momento total fijados, $K \geq |\mathbf{P}|^2/(2M)$, con igualdad exactamente cuando todas las velocidades coinciden con $\mathbf{V}$. El momento fija una cota inferior, no toda la energía cinética. Las partes pueden moverse una respecto de otra y elevar K_{rel} sin cambiar la suma de momentos.

La cantidad K_{rel} es invariante bajo cambios galileanos: tanto $\mathbf{v}_i$ como $\mathbf{V}$ pierden el mismo $\mathbf{U}$, de modo que $\mathbf{u}_i$ no cambia. La energía total transforma como $K' = K - \mathbf{U}\cdot\mathbf{P} + M|\mathbf{U}|^2/2$, al expandir $|\mathbf{v}_i - \mathbf{U}|^2$. En general, K no es invariante. Nada de esto afirma conservación de K_{rel}: interacciones internas pueden convertir otras formas de energía en movimiento relativo o hacer la conversión inversa.

Principio metodológico 14.7 — Retirar la traslación con hipótesis visibles. Calcula $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ y comprueba la suma relativa nula. Separa la energía mediante proposición 14.11 antes de comparar historias. Declara si el origen del centro acelera; usa Newton ordinario en ese marco sólo si es inercial, o incorpora la corrección de aceleración. La identidad cinética sigue siendo válida en ambos casos.

Ejercicios. Ejercicio 14.13. Dos partículas de masas m y $3m$ tienen velocidades colineales $4u$ y 0, con $u > 0$. Calcula momento, velocidad del centro y los dos términos cinéticos. Comprueba el resultado en un marco que se mueve con velocidad u.

Solución. $M = 4m$, $P = 4mu$ y $V = u$. Las velocidades relativas son $3u$ y $-u$, cuya suma ponderada es $3mu - 3mu = 0$. La energía del laboratorio es $8mu^2$; la colectiva vale $2mu^2$ y la relativa $[9mu^2 + 3mu^2]/2 = 6mu^2$. En el marco de velocidad u, las velocidades son precisamente $3u$ y $-u$, el momento es cero y la energía es $6mu^2$. Si las fuerzas posteriores cambian P, este marco fijo deja de seguir al centro; el cálculo corresponde al instante dado y no implica conservación futura.

Ejercicio 14.14. Un sistema de masas positivas tiene momento total $\mathbf{P}_0$. Determina el menor valor posible de su energía cinética y caracteriza todas las velocidades que lo realizan. ¿Puede un sistema de momento cero tener energía cinética positiva?

Solución. proposición 14.11 da $K \geq |\mathbf{P}_0|^2/(2M)$. La igualdad exige que cada término positivo $m_i|\mathbf{u}_i|^2/2$ sea cero, luego todas las velocidades son $\mathbf{P}_0/M$. Esas velocidades cumplen la restricción de momento y realizan la cota, por lo que el mínimo existe. Con momento cero, dos masas iguales con velocidades opuestas no nulas tienen $P = 0$ y energía positiva $m|\mathbf{v}|^2$. Su centro está en reposo mientras hay movimiento relativo. La minimización es sobre velocidades compatibles con el momento; no incluye restricciones adicionales que podrían impedir esas velocidades en un modelo concreto.

8. Dos partículas y movimiento relativo

Para dos miembros, una posición colectiva y una separación contienen toda la información posicional. La transformación permite conservar el balance del conjunto mientras se estudia la interacción en una ecuación relativa. La masa que aparece en esta segunda ecuación se obtiene al restar aceleraciones, no al retirar físicamente una parte de la masa total.[8]

[8]Desarrollo original por reconstrucción afín, Newton y proposición 14.11. La separación cinética emplea el marco conceptual consultado en Morin, cap. 5, §§5.6.1–5.6.2, pp. 161–163; las ecuaciones con fuerzas externas se deducen aquí sin suponer colisión ni conservación cinética.

Definición 14.7 — Coordenada relativa de dos partículas. Para dos masas positivas constantes m_1, m_2, con $M = m_1 + m_2$, fijamos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Su derivada es $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. Esta orientación se mantiene en fuerzas, reconstrucción y condiciones iniciales.

Definición 14.8 — Masa reducida. La masa reducida de ese par es $\mu = m_1 m_2/M$, positiva y con dimensión de masa. Equivalentemente, $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$.

Sea $\mathbf{f}$ la fuerza interna sobre el miembro 1 debida al 2, y $-\mathbf{f}$ la fuerza sobre el 2. Sean $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ las fuerzas externas respectivas. No se supone aquí que $\mathbf{f}$ sea central, conservativa ni independiente de las velocidades. Se necesita tercera ley en la forma declarada y un marco inercial común.

Proposición 14.12 — Reconstrucción y ecuación relativa. Con las convenciones anteriores,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r},$$

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \qquad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} + \frac{m_2}{M}\mathbf{F}_1 - \frac{m_1}{M}\mathbf{F}_2,$$

$$K = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2.$$

Demostración. Resolver $M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ da las dos posiciones. Proposición 14.9 da la ecuación colectiva. Newton individual da $\ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{f})/m_1 - (\mathbf{F}_2 - \mathbf{f})/m_2$. Multiplicar por μ y usar $\mu/m_1 = m_2/M$, $\mu/m_2 = m_1/M$ y $\mu(1/m_1 + 1/m_2) = 1$ produce la ecuación relativa. Finalmente, derivar las posiciones da $\mathbf{u}_1 = (m_2/M)\dot{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{u}_2 = -(m_1/M)\dot{\mathbf{r}}$. Sustituirlas en la proposición 14.11 produce un coeficiente $[m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2]/M^2 = \mu$ para el cuadrado relativo. □

Sin fuerzas externas, el centro se mueve uniformemente y el movimiento relativo satisface $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$. Esto reduce la interacción a una ecuación, pero todavía necesita una ley para $\mathbf{f}$ y condiciones iniciales. Si la fuerza depende de $\mathbf{R}$ o de variables adicionales, la reducción algebraica sigue válida sin garantizar desacoplamiento. La sencillez de las coordenadas no sustituye el cierre físico.

Un campo uniforme común $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{g}$ acelera el centro con $\mathbf{g}$ y desaparece de la ecuación relativa: los dos términos externos son $m_1 m_2\mathbf{g}/M$ y su opuesto. Por tanto, las partes pueden cambiar su movimiento interno bajo $\mathbf{f}$ mientras el conjunto cae. En campos variables puede quedar una diferencia de aceleraciones externas. No basta que ambas fuerzas sean «gravitatorias» para cancelarlas en la ecuación relativa.

La masa reducida es menor que cada masa individual. Para masas iguales vale $m/2$; si m_2 crece sin límite con m_1 fijo, μ tiende a m_1. Ese límite explica por qué una partícula frente a un cuerpo mucho más pesado puede tratarse aproximadamente con un centro casi fijo. La aproximación necesita controlar además el impulso recibido por el cuerpo pesado y el intervalo considerado. Una masa finita grande no impone velocidad exactamente cero.

Principio metodológico 14.8 — Resolver colectivo y relativo antes de reconstruir. Congela la orientación de $\mathbf{r}$ y el significado de la fuerza $\mathbf{f}$. Escribe las ecuaciones de la proposición 14.12, examina sus dependencias y transforma también los datos iniciales. Reconstruye cada posición y velocidad al final. Usa M en el movimiento colectivo y μ en el relativo; verifica que las energías sumen la cinética original.

Ejercicios. Ejercicio 14.15. Dos masas iguales m reciben sólo una interacción interna $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$, con $k > 0$. Al inicio su centro está en $\mathbf{R}_0$ con velocidad $\mathbf{V}_0$, y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$. Obtén las posiciones en el tiempo y verifica su energía cinética relativa.

Solución. Aquí $\mu = m/2$, $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ y $\ddot{\mathbf{r}} = -(2k/m)\mathbf{r}$. Con $\omega = \sqrt{2k/m}$, la función $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0\cos(\omega t)$ satisface la ecuación y ambos datos. Entonces $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{r}_0\cos(\omega t)/2$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t - \mathbf{r}_0\cos(\omega t)/2$. Sus velocidades relativas son opuestas, cada una de módulo $|\dot{\mathbf{r}}|/2$, y su energía relativa suma $m|\dot{\mathbf{r}}|^2/4 = \mu|\dot{\mathbf{r}}|^2/2$. También $K_{\mathrm{rel}} + k|\mathbf{r}|^2/2 = k|\mathbf{r}_0|^2/2$, por sustitución de seno y coseno. La frecuencia se verifica aquí como solución de una ecuación concreta; el tratamiento sistemático de oscilaciones queda para el capítulo 23.

Ejercicio 14.16. Dos partículas de masas m y $3m$ reciben sólo fuerzas internas opuestas durante un intervalo. Sus velocidades iniciales en una línea son $2u$ y 0. El impulso interno sobre la primera es $J = mu$ hacia la derecha. Calcula las velocidades finales mediante el cambio relativo y comprueba el balance de momento y la variación cinética.

Solución. $M = 4m$, $\mu = 3m/4$, $V = P/M = u/2$ y $\dot{r}_i = 2u$. Integrar la ecuación relativa da $\mu\Delta\dot{r} = J$, luego $\dot{r}_f = 2u + 4u/3 = 10u/3$. Reconstruir produce $v_{1,f} = V + (3/4)\dot{r}_f = 3u$ y $v_{2,f} = V - (1/4)\dot{r}_f = -u/3$. El momento final es $3mu - mu = 2mu$, igual al inicial. La cinética inicial vale $2mu^2$ y la final $9mu^2/2 + mu^2/6 = 14mu^2/3$; aumenta en $8mu^2/3$. El mismo cambio sale de $\mu[(10u/3)^2 - (2u)^2]/2$. La interacción suministra energía al movimiento relativo; momento conservado no obliga a cinética conservada. El dato de impulso no determina una ley temporal única ni las posiciones finales.

Las secciones siguientes usan estas herramientas para colisiones: decidir el sistema, controlar impulsos externos y declarar qué información adicional aporta el modelo de interacción. El balance de momento por sí solo deja indeterminadas muchas velocidades finales. Energía cinética, unión o restitución serán hipótesis distintas, cada una con su alcance, y no consecuencias automáticas de tercera ley.

9. Modelos de colisión y aislamiento impulsivo

Una colisión se describe comparando estados anteriores y posteriores a una interacción. No exige suponer que el contacto dura exactamente cero: elegimos un intervalo que contiene la interacción relevante y declaramos qué fuerzas actúan allí. Las velocidades de entrada y salida son datos de sus extremos, medidos en un mismo marco inercial. Si la interacción sigue almacenando energía en el estado final, tampoco puede identificarse automáticamente el cambio cinético con una pérdida definitiva.[9]

Definición 14.9 — Modelo de colisión de dos miembros. Consideraremos dos masas positivas constantes m_1, m_2, conservadas como miembros del sistema durante el intervalo $[t_a, t_b]$. Escribiremos $\mathbf{v}_{1,a}, \mathbf{v}_{2,a}$ para las velocidades iniciales y $\mathbf{v}_{1,b}, \mathbf{v}_{2,b}$ para las finales; $M = m_1 + m_2$, $\mu = m_1 m_2/M$ y $\mathbf{g}_a = \mathbf{v}_{1,a} - \mathbf{v}_{2,a}$, $\mathbf{g}_b = \mathbf{v}_{1,b} - \mathbf{v}_{2,b}$. La interacción interna cumple tercera ley. El impulso externo total es $\mathbf{J}_{\mathrm{ext}}$.

En este modelo, $\mathbf{P}_b = \mathbf{P}_a + \mathbf{J}_{\mathrm{ext}}$ por la proposición 14.4. Una interacción interna muy intensa no cancela el impulso de un apoyo, del peso o de un agente adicional. Su corta duración puede volver pequeño alguno de esos impulsos, pero la escala pertinente es su integral temporal y la precisión requerida. Para conservar una componente basta controlar su impulso externo, aunque otras componentes reciban impulsos grandes.

Proposición 14.13 — Control del balance impulsivo externo. Si $|\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t)| \le B$ durante una colisión de duración τ, entonces $|\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a| \le B\tau$ y $|\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a| \le B\tau/M$. Una resultante externa

[9] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 3, §3.4, pp. 130–132, y cap. 4, §4.14, pp. 187–189; Morin, obra citada, cap. 5, §§5.5.1 y 5.7.1, pp. 156–157 y 164–165. Las cotas se aplican al balance colectivo y la transformación cinética se deduce en el texto para masa material constante.

nula en todo el intervalo conserva el momento durante él; un impulso externo nulo sólo acredita la igualdad entre extremos.

Demostración. proposición 14.4 expresa la diferencia de momentos como la integral de la resultante. La desigualdad integral de la proposición 14.3 da $|\mathbf{J}_{\text{ext}}| \le B\tau$. Dividir por M y usar proposición 14.9 da la cota colectiva. La última distinción es proposiciones 14.5–14.6. □

Esta cota controla el momento total y la velocidad del centro. No controla por sí sola el error de cada velocidad final al reemplazar un modelo forzado por otro aislado: la interacción relativa puede cambiar y requerir un análisis adicional. Tampoco asegura una pequeña variación relativa de momento si el valor con que se compara es cero o muy pequeño. Puede formularse una tolerancia absoluta ε_P y exigir $B\tau \le \varepsilon_P$, evitando esa división.

Proposición 14.14 — Cambio cinético entre marcos y papel del impulso. Bajo un cambio galileano de velocidad constante $\mathbf{U}$, el mismo par de estados satisface

$$\Delta K' = \Delta K - \mathbf{U} \cdot \mathbf{J}_{\text{ext}}.$$

Si el impulso externo total es cero, la variación cinética entre esos extremos es igual en ambos marcos.

Demostración. La transformación obtenida en §7 es $K' = K - \mathbf{U} \cdot \mathbf{P} + M|\mathbf{U}|^2/2$. Restar sus valores final e inicial cancela el último término, pues M es constante. Proposición 14.4 identifica $\Delta\mathbf{P}$ con $\mathbf{J}_{\text{ext}}$. □

La identidad permite comparar pérdidas cinéticas en marcos distintos cuando el momento del sistema se conserva entre extremos. Si el sistema recibe impulso externo, esa comparación necesita la corrección indicada. Por ejemplo, una pared fija puede cambiar el momento de una pelota: si elegimos sólo la pelota, el impulso de la pared es externo y no se cumplen las hipótesis del par aislado. Elegir pelota y pared cambia las masas y los datos que deben incluirse; idealizar la pared como fija es una aproximación diferente.

Principio metodológico 14.9 — Declarar el intervalo y el aislamiento impulsivo. Identifica miembros, marco y estados extremos. Calcula o acota los impulsos externos, por componente si procede. Escribe el balance exacto antes de omitir términos y fija una tolerancia. Añade por separado la ley de interacción que decidirá las velocidades relativas.

Ejercicios. Ejercicio 14.17. Durante un contacto de $0,010\,\text{s}$, un sistema material de masa $2\,\text{kg}$ recibe una resultante externa cuyo módulo no excede $20\,\text{N}$. ¿Qué error absoluto máximo introduce imponer igualdad de momentos extremos? ¿Y tratar la velocidad del centro como constante entre extremos?

Solución. proposición 14.13 da $|\Delta\mathbf{P}| \le 0,20\,\text{N s}$ y $|\Delta\mathbf{V}| \le 0,10\,\text{m/s}$. Son cotas del cambio que se omite en cada balance, no errores relativos ni garantías para las velocidades individuales. Si se exige un error de momento inferior a $0,05\,\text{N s}$, la información suministrada no basta para justificar la omisión: la cota supera la tolerancia, aunque el impulso real podría ser menor por cancelación temporal. Hace falta conocer mejor la resultante o elegir otra aproximación.

Ejercicio 14.18. Una partícula de masa m llega a una pared fija con velocidad $u > 0$ y sale con $-u$. Calcula su impulso y cambio cinético en el laboratorio. Calcula luego el cambio cinético en un marco de velocidad U hacia la derecha.

Solución. Para la partícula sola, $J = -2mu$ y $\Delta K = 0$. En el otro marco las velocidades son $u - U$ y $-u - U$, por lo que $\Delta K' = m[(-u-U)^2 - (u-U)^2]/2 = 2muU$. Proposición 14.14 da lo mismo: $0 - U(-2mu)$. La igualdad cinética del laboratorio no se transporta como igualdad cinética de la partícula a todos los marcos porque ésta recibe impulso externo. En el nuevo marco la pared

se mueve y puede transferir trabajo. No hay contradicción entre los observadores ni conservación de momento de la pelota sola.

10. Colisiones elásticas en una dimensión

En una línea, conservar momento ofrece una ecuación para dos velocidades finales. Una segunda condición puede obtenerse si el modelo afirma igualdad de la energía cinética entre los estados elegidos. Esa condición no proviene de tercera ley: debe justificarse mediante la interacción y sus estados o adoptarse explícitamente como idealización de la colisión.[10]

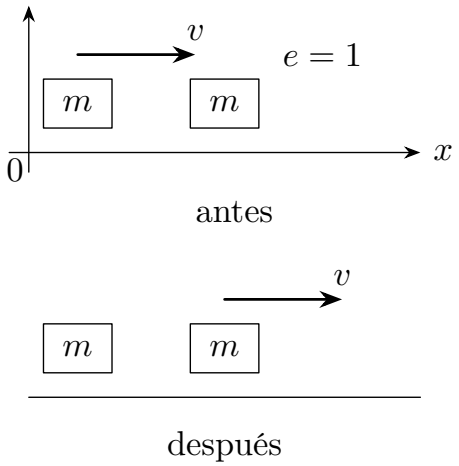


Figura 14.3. En una colisión elástica frontal de dos masas iguales, la masa incidente se detiene y la inicialmente quieta adquiere su velocidad. Se conservan momento y energía cinética; las viñetas comparan velocidades, con separaciones esquemáticas, sin resolver la fuerza de contacto. Véase §10.

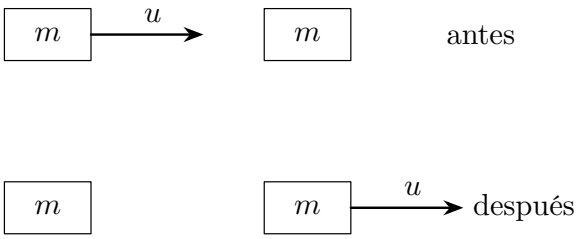


Figura 14.4. En un choque elástico unidimensional de masas iguales, con la segunda inicialmente en reposo, las velocidades se intercambian. Se conservan momento lineal y energía cinética. Véase §10.

Definición 14.10 — Colisión elástica en el modelo de dos partículas. Una colisión es elástica entre los extremos elegidos si $K_b = K_a$, donde K es la suma de las energías cinéticas traslacionales de los dos miembros. En esta sección suponemos además $J_{\text{ext}} = 0$ y movimiento colineal. Usamos velocidades con signo $v_{1,a}, v_{2,a}, v_{1,b}, v_{2,b}$, y $g = v_1 - v_2$.

Una interacción conservativa puede convertir cinética en potencial durante el acercamiento y devolverla durante la separación. Para deducir $K_b = K_a$ a partir de conservación mecánica debe

[10]Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.14, pp. 188–191; Morin, obra citada, cap. 5, §5.7.1, pp. 164–165. La prueba utiliza la energía relativa y conserva explícitamente la rama trivial, sin dividir por cambios de velocidad posiblemente nulos.

verificarse que la energía potencial interna tiene el mismo valor en los extremos y que no hay otros trabajos o transferencias. Conservación mecánica durante todo el proceso no significa cinética constante durante la compresión. Además, cuerpos extensos pueden retener vibración o rotación; aquí sus grados internos no se incluyen en las dos energías traslacionales.

Proposición 14.15 — Ramas permitidas por momento y elasticidad. Para el par colineal con impulso externo nulo, $K_b = K_a$ equivale a $g_b^2 = g_a^2$. Las velocidades finales admiten la rama $g_b = g_a$, que reproduce las iniciales, y la rama $g_b = -g_a$. Para un encuentro con acercamiento no nulo y separación posterior, esta última es la rama de colisión.

Demostración. El momento conservado mantiene $V = P/M$ igual en ambos extremos. Proposición 14.12 expresa $K = MV^2/2 + \mu g^2/2$, con $\mu > 0$. Por tanto, igualdad de energías equivale a igualdad de cuadrados relativos. En números reales, $(g_b - g_a)(g_b + g_a) = 0$. Si $g_b = g_a$, las fórmulas $v_1 = V + (m_2/M)g$, $v_2 = V - (m_1/M)g$ reproducen ambas velocidades. Si el miembro 1 está a la izquierda del 2 antes del encuentro, acercamiento significa $g_a > 0$ y separación posterior significa $g_b < 0$, lo que selecciona $g_b = -g_a$. Con el orden opuesto se invierten ambos signos y la misma selección vale. □

El caso $g_a = 0$ tiene ambas ramas coincidentes y no describe un acercamiento relativo. Los balances tampoco prueban que dos cuerpos lleguen a encontrarse: sus posiciones iniciales y la interacción determinan si el proceso ocurre. La rama trivial puede describir ausencia de encuentro; otras dinámicas también pueden devolver las velocidades iniciales. Seleccionar la rama requiere el modelo geométrico y temporal del choque, además de las ecuaciones de conservación.

Proposición 14.16 — Velocidades finales del choque elástico colineal. Para la rama de acercamiento y separación de la proposición 14.15,

$$v_{1,b} = \frac{m_1 - m_2}{M} v_{1,a} + \frac{2m_2}{M} v_{2,a}, \qquad v_{2,b} = \frac{2m_1}{M} v_{1,a} + \frac{m_2 - m_1}{M} v_{2,a}.$$

Demostración. Con $V = (m_1 v_{1,a} + m_2 v_{2,a})/M$ y $g_b = -(v_{1,a} - v_{2,a})$, la reconstrucción de la proposición 14.12 da $v_{1,b} = V - (m_2/M)(v_{1,a} - v_{2,a})$ y $v_{2,b} = V + (m_1/M)(v_{1,a} - v_{2,a})$. Agrupar coeficientes produce las fórmulas. La reconstrucción garantiza el momento inicial y proposición 14.15 garantiza la energía. □

Para masas iguales se intercambian las velocidades. Eso no exige que se intercambien las posiciones o la identidad de los miembros. Para un blanco inicialmente en reposo, la primera velocidad final cambia de signo si el blanco es más pesado que el incidente; es cero para masas iguales y conserva signo si el blanco es más ligero. Estas conclusiones usan velocidades con signo, no módulos introducidos antes de resolver.

Principio metodológico 14.10 — Resolver sin dividir por una diferencia que puede anularse. Conserva momento y separa la energía relativa. Factoriza la igualdad de cuadrados, conserva las dos ramas y selecciona la física mediante acercamiento y separación. Usa signos hasta el final y comprueba el resultado en ambos balances. La elasticidad es una hipótesis adicional del modelo.

Ejercicios. Ejercicio 14.19. Una masa $2m$, con velocidad $3u$ hacia la derecha, alcanza a una masa m con velocidad u en la misma dirección. El choque es elástico y colineal, sin impulso externo. Calcula las velocidades finales y verifica la separación.

Solución. $V = (6mu + mu)/(3m) = 7u/3$ y $g_a = 2u$. La rama física da $g_b = -2u$. Por proposición 14.16, $v_{1,b} = 5u/3$ y $v_{2,b} = 11u/3$. El momento final es $2m(5u/3) + m(11u/3) = 7mu$. La cinética inicial es $[2m(3u)^2 + mu^2]/2 = 19mu^2/2$ y la final $[2m(5u/3)^2 + m(11u/3)^2]/2 = 19mu^2/2$. El

miembro 2 queda más rápido y se aleja del primero, que estaba detrás. Ambos siguen hacia la derecha; separación relativa no significa velocidades absolutas opuestas.

Ejercicio 14.20. Una partícula de masa m y velocidad $u > 0$ choca elásticamente en una línea con una masa $9m$ inicialmente en reposo. Calcula las velocidades y la fracción de cinética inicial transferida al blanco.

Solución. proposición 14.16 da $v_{1,b} = -4u/5$ y $v_{2,b} = u/5$. La energía del blanco es $9m(u/5)^2/2$, y al dividir por $mu^2/2$ se obtiene $9/25$. La partícula incidente conserva la fracción $16/25$, con velocidad invertida. Las fracciones suman uno. El blanco pesado retrocede con una velocidad positiva finita: no es exactamente una pared fija. En el límite de masa del blanco creciente, su velocidad tiende a cero y la del incidente a $-u$, manteniendo el balance del sistema material para cada masa finita.

Ejercicio 14.21. Dos masas iguales tienen velocidades iniciales $2u$ y $-u$, con la primera a la izquierda y $u > 0$. Resuelve sólo los balances de momento y energía. Identifica luego la rama que describe una colisión con separación posterior.

Solución. $V = u/2$, $g_a = 3u$ y la igualdad cinética exige $g_b = \pm 3u$. Para el signo positivo, reconstruir da $(v_{1,b}, v_{2,b}) = (2u, -u)$, exactamente los datos iniciales. Para el negativo, da $(-u, 2u)$, intercambio de velocidades. La primera mantiene acercamiento y no describe el estado de salida de este choque; la segunda separa los miembros. Ambas satisfacen los balances. El hecho de que una solución conserve las cantidades requeridas es necesario, pero no suficiente para identificarla con la historia física declarada.

11. Unión y colisiones inelásticas

Conservar momento no obliga a conservar energía cinética. Si los dos miembros terminan con la misma velocidad, el balance de momento basta para determinarla, mientras la separación cinética muestra cuánto movimiento relativo ha desaparecido. Se trata de una condición final del modelo, distinta de la elasticidad y también distinta de conservar la energía total con todos sus modos internos.[11]

Definición 14.11 — Unión traslacional y variación cinética. En el modelo de la definición 14.9, una unión traslacional impone $\mathbf{v}_{1,b} = \mathbf{v}_{2,b}$. Una colisión es inelástica entre los extremos elegidos si $K_b \neq K_a$. Denotaremos $Q = K_a - K_b$ a la disminución cinética algebraica: $Q > 0$ significa disminución y $Q < 0$ aumento. Cuando se usa el nombre «perfectamente inelástica» para una unión, se entenderá este modelo de velocidades finales comunes.

Para cuerpos extensos, que se unan no significa que todas sus partes tengan una misma velocidad: un conjunto adherido puede rotar o vibrar. Definición 14.11 se limita al modelo traslacional de dos miembros sin esos grados adicionales. Su condición también puede cumplirse instantáneamente durante una compresión sin que haya unión permanente. Para describir adhesión posterior hace falta afirmar que los miembros permanecen juntos; la igualdad de velocidades en un solo instante no lo demuestra.

Proposición 14.17 — Velocidad común y disminución cinética de una unión aislada. Si el impulso externo total es cero y los miembros terminan con una velocidad común, entonces

$$\mathbf{v}_{1,b} = \mathbf{v}_{2,b} = \mathbf{V}_a, \qquad Q = \frac{1}{2}\mu|\mathbf{g}_a|^2.$$

[11] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.14, pp. 188–189; Morin, obra citada, cap. 5, §5.8, pp. 167–168. La disminución se expresa mediante energía relativa y se distingue de una atribución automática a calor; la unión se limita al modelo traslacional declarado.

Demostración. La velocidad común $\mathbf{w}$ produce momento final $M\mathbf{w}$. Conservarlo da $\mathbf{w} = \mathbf{P}_a/M = \mathbf{V}_a$. La energía colectiva es igual en ambos extremos y la energía relativa final es cero. Restar las expresiones de la proposición 14.12 deja $Q = \mu|\mathbf{g}_a|^2/2$. □

En el conjunto de estados de velocidad con el mismo momento, éste realiza la menor energía cinética posible por la proposición 14.11. Por eso la unión traslacional elimina toda la energía cinética relativa disponible, aunque no elimina la energía colectiva medida en el laboratorio. En un marco que se mueve con el centro, la cinética final del modelo es cero. Conservar momento es compatible con esa diferencia entre observadores, y proposición 14.14 garantiza que ambos calculan el mismo Q para el par de estados aislado.

Proposición 14.18 — Cambio cinético de un par con momento conservado. Para cualquier estado final del mismo par con $\mathbf{J}_{\text{ext}} = 0$,

$$Q = \frac{1}{2}\mu(|\mathbf{g}_a|^2 - |\mathbf{g}_b|^2).$$

Por tanto, momento conservado permite tanto disminución como aumento cinético; el signo lo decide el cambio del movimiento relativo.

Demostración. El momento conservado mantiene $\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a$. Restar las energías de la proposición 14.12 cancela el término colectivo y da la fórmula. Si el módulo relativo disminuye, Q es positivo; si aumenta, es negativo; si se mantiene, es cero. □

Cuando $Q > 0$, el balance traslacional no decide qué parte pasó a energía interna, deformación, sonido u otros modos. Llamarlo todo «calor» sin un modelo adicional sería atribuir un destino no establecido. Si el sistema completo está aislado energéticamente, la disminución cinética se compensa en sus otras formas de energía. Si hay transferencias con el exterior, deben incluirse en el balance total. Tampoco una interacción que libera energía interna contradice momento conservado cuando produce $Q < 0$.

Principio metodológico 14.11 — Separar la captura de la evolución posterior. En una unión, usa primero impulso y momento durante el contacto. Calcula la cinética que queda y la variación relativa. Para la etapa posterior aplica su propio balance de fuerzas o energía con nuevos datos iniciales. No prolongues conservación de momento a un intervalo donde aparecen fuerzas externas, ni conserves cinética durante una captura que impone velocidad común.

Ejercicios. Ejercicio 14.22. Una masa m con velocidad $u > 0$ se une a una masa $4m$ inicialmente en reposo sobre una guía horizontal lisa. El impulso externo horizontal es cero durante la captura. Calcula la velocidad común, la cinética final y la disminución cinética.

Solución. El momento horizontal inicial es mu, así que $w = u/5$. La energía final es $5m(u/5)^2/2 = mu^2/10$, mientras la inicial es $mu^2/2$. Entonces $Q = 2mu^2/5$, el 80 % de la inicial. La masa reducida es $4m/5$ y proposición 14.17 da también $Q = \mu u^2/2 = 2mu^2/5$. La energía colectiva restante no se ha perdido. Si se conservara indebidamente la cinética de captura, se obtendría un módulo $u/\sqrt{5}$, incompatible con el momento. El destino de Q necesita información sobre la unión.

Ejercicio 14.23. Una masa m llega horizontalmente con velocidad u a un bloque de masa M inicialmente en reposo y queda adherida. El bloque cuelga de una suspensión ideal y está en el punto más bajo. Durante el contacto breve se desprecia el impulso horizontal externo; después el conjunto sube sin resistencia hasta que su centro ha ganado altura h. Obtén u en función de h y explica qué conservación corresponde a cada etapa.

Solución. Durante la captura, el momento horizontal da $(M+m)w = mu$. No se conserva la cinética: la disminución es $mMu^2/[2(M+m)]$. En la subida posterior, bajo la idealización de un conjunto que se mueve como una sola masa, la suspensión no realiza trabajo y $\frac{1}{2}(M+m)w^2 = (M+m)gh$. Así $w = \sqrt{2gh}$ y $u = (M+m)\sqrt{2gh}/m$. El impulso horizontal despreciado sólo se justifica para el intervalo breve junto al punto más bajo; durante la subida la suspensión puede tener componente horizontal y no se usa conservación de momento. La energía conservada en la subida no puede aplicarse retrospectivamente como cinética conservada durante la captura. Si el conjunto retiene movimiento interno o rotación relevante, el modelo requiere términos adicionales.

12. Restitución y colisiones vectoriales

Entre el choque elástico y la unión puede introducirse una regla para la velocidad relativa de salida. En una línea esa regla cierra el balance de momento. En varias dimensiones debe señalar además qué componente modifica y qué ocurre con las demás. El coeficiente de restitución describe una relación entre estados extremos; no reconstruye la fuerza de contacto ni su duración.[12]

Definición 14.12 — Restitución relativa normal. Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario orientado, durante un impacto idealizado, del miembro 2 al miembro 1. Para una velocidad relativa incidente con $g_{n,a} = \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{n} < 0$, se define el coeficiente e por $g_{n,b} = -e g_{n,a}$. En el modelo pasivo usual se adopta $0 \le e \le 1$. En una línea con el miembro 1 a la izquierda del 2, esto equivale a $g_b = -e g_a$ con la convención de la definición 14.7.

La normal se trata como fija durante el impulso del modelo. Se necesita la geometría de contacto para conocerla. Si cambia apreciablemente, una sola regla escalar no sustituye la integración del contacto real. Para cuerpos con rotación, la velocidad relativa de sus puntos de contacto puede diferir de la de sus centros; las fórmulas siguientes corresponden a partículas o miembros traslacionales sin esa contribución. El rango pasivo es una hipótesis: liberación de energía interna puede producir valores efectivos mayores que uno.

Proposición 14.19 — Restitución colineal con momento conservado. Si $J_{\text{ext}} = 0$ y $g_b = -e g_a$, entonces

$$v_{1,b} = V - e\frac{m_2}{M} g_a, \qquad v_{2,b} = V + e\frac{m_1}{M} g_a, \qquad Q = \frac{1}{2}\mu(1-e^2)g_a^2.$$

Demostración. El momento fija V en ambos extremos. Sustituir $g_b = -e g_a$ en la reconstrucción de la proposición 14.12 da las velocidades. Proposición 14.18 da $Q = \mu(g_a^2 - e^2 g_a^2)/2$. □

Para $e = 1$ se obtiene la rama elástica de separación. Para $e = 0$ las velocidades finales colineales coinciden; la regla por sí sola no afirma adhesión permanente. Si $e > 1$, la cinética aumenta y hace falta una fuente de energía compatible con el modelo. En todos los casos el momento puede conservarse. Un único valor de e medido en un encuentro no acredita que sea constante para otros materiales, velocidades o geometrías.

Proposición 14.20 — Impulso normal sin fricción y pérdida cinética. Supongamos impulso externo nulo, un único impulso interno $j\mathbf{n}$ sobre el miembro 1 y $-j\mathbf{n}$ sobre el 2, normal fija y restitución de la definición 14.12. Entonces

[12] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 4, §4.14, pp. 190–194; Morin, obra citada, cap. 5, §5.7.2, pp. 166–167. Los pasajes fundamentan la descripción vectorial, la libertad direccional y la separación en el centro de masa. La regla de restitución normal se declara como modelo adicional y sus fórmulas se deducen aquí por impulso; no se atribuye a esas fuentes una ley universal de contacto.

$$j=-\mu(1+e)g_{n,a},\qquad \mathbf{g}_b=\mathbf{g}_a-(1+e)g_{n,a}\mathbf{n},\qquad Q=\frac{1}{2}\mu(1-e^2)g_{n,a}^2.$$

La componente tangencial relativa no cambia.

Demostración. Los impulsos individuales dan $\Delta\mathbf{v}_1 = j\mathbf{n}/m_1$ y $\Delta\mathbf{v}_2 = -j\mathbf{n}/m_2$. Restarlos produce $\Delta\mathbf{g} = (j/\mu)\mathbf{n}$. Proyectar y exigir $g_{n,b} = -eg_{n,a}$ da $j/\mu = -(1+e)g_{n,a}$. Sustituir da el vector final. Su parte tangencial coincide con la inicial, mientras la normal cambia de $g_{n,a}$ a $-eg_{n,a}$. Por ortogonalidad, $|\mathbf{g}_a|^2 - |\mathbf{g}_b|^2 = (1-e^2)g_{n,a}^2$, y proposición 14.18 da la última fórmula. □

Si $g_{n,a} < 0$ y $e \geq 0$, $j \geq 0$: el impulso sobre el miembro 1 apunta alejándolo del 2, como corresponde a un contacto repulsivo. Para $e = 0$ desaparece sólo la velocidad relativa normal; puede sobrevivir deslizamiento tangencial. Por ello no se deduce unión vectorial ni desaparición de toda la energía relativa. Si hay impulso tangencial por fricción, hace falta otra ley y proposición 14.20 deja de ser el modelo completo.

Sin normal conocida, momento y elasticidad tampoco determinan por sí solos las direcciones finales. En dos dimensiones hay cuatro componentes finales y sólo tres ecuaciones escalares independientes de esos balances, en el caso genérico. Puede especificarse una dirección o resolver la interacción. El centro de masa conserva la magnitud relativa en un choque elástico, pero la orientación de salida queda pendiente.

Proposición 14.21 — Ortogonalidad para masas iguales con blanco en reposo. En una colisión elástica de dos masas iguales, con impulso externo nulo y velocidad inicial del segundo miembro cero, $\mathbf{v}_{1,b} \cdot \mathbf{v}_{2,b} = 0$. Si ambas velocidades finales son no nulas, sus direcciones son perpendiculares.

Demostración. El momento da $\mathbf{v}_{1,a} = \mathbf{v}_{1,b} + \mathbf{v}_{2,b}$. Tomar el cuadrado produce $|\mathbf{v}_{1,a}|^2 = |\mathbf{v}_{1,b}|^2 + |\mathbf{v}_{2,b}|^2 + 2\mathbf{v}_{1,b} \cdot \mathbf{v}_{2,b}$. La elasticidad identifica el primer término con la suma de los dos cuadrados finales, así que el producto es cero. Si una velocidad final es cero, sigue valiendo el producto nulo, pero su dirección no está definida. □

Principio metodológico 14.12 — Declarar qué cierra cada componente. Usa restitución para la componente normal indicada y una hipótesis separada para la tangencial. Comprueba el signo repulsivo del impulso y la separación final. Con impulso externo nulo, reconstruye desde el centro; sin geometría o datos suficientes, conserva explícitamente la indeterminación direccional.

Ejercicios. Ejercicio 14.24. Una masa m llega con velocidad $4u$ a una masa $3m$ en reposo. El impacto colineal tiene $e = 1/2$ y no recibe impulso externo. Calcula las velocidades finales y Q.

Solución. $V = u$, $g_a = 4u$, $\mu = 3m/4$. Proposición 14.19 da $v_{1,b} = u - (1/2)(3/4)(4u) = -u/2$ y $v_{2,b} = u + (1/2)(1/4)(4u) = 3u/2$. Se verifica $g_b = -2u$ y momento final $-mu/2 + 9mu/2 = 4mu$. La cinética inicial es $8mu^2$; la final es $mu^2/8 + 27mu^2/8 = 7mu^2/2$. Así $Q = 9mu^2/2$, igual a $\mu(1-1/4)(4u)^2/2$. La disminución es el 56,25 % de la cinética inicial, no el 75 %: este último porcentaje corresponde a la cinética relativa.

Ejercicio 14.25. Dos masas iguales m tienen $\mathbf{v}_{1,a} = (-2u, u)$, $\mathbf{v}_{2,a} = (0,0)$ y normal fija $\mathbf{n} = (1,0)$. El impulso es sólo normal y $e = 0$. Obtén las velocidades finales y decide si hay unión traslacional.

Solución. $g_{n,a} = -2u$, $\mu = m/2$, de modo que $j = mu$. El primer miembro gana $(u,0)$ y el segundo pierde $(u,0)$: $\mathbf{v}_{1,b} = (-u,u)$ y $\mathbf{v}_{2,b} = (-u,0)$. Su diferencia final es $(0,u)$, tangencial y no nula. No hay unión traslacional. Proposición 14.20 da $Q = mu^2$; directamente $K_a = 5mu^2/2$ y $K_b = 3mu^2/2$. La cinética tangencial relativa permanece. Una restitución normal nula no autoriza poner todas las velocidades finales iguales.

Ejercicio 14.26. Dos masas iguales en un plano tienen velocidades iniciales $(u, 0)$ y cero. Se sabe que el choque es elástico y de impulso externo nulo. Exhibe dos pares finales distintos compatibles con esos balances y comprueba proposición 14.21.

Solución. Un par es $\mathbf{v}_{1,b} = 0$, $\mathbf{v}_{2,b} = (u, 0)$: conserva momento y cinética, pero no define dirección para el primer miembro. Otro es $\mathbf{v}_{1,b} = (u/2, u/2)$, $\mathbf{v}_{2,b} = (u/2, -u/2)$. Suman $(u, 0)$ y sus cuadrados suman $u^2/2 + u^2/2 = u^2$. Su producto escalar es $u^2/4 - u^2/4 = 0$. Ambos estados son compatibles, por lo que esos balances no eligen la dirección. El segundo también puede realizarse en el modelo normal elástico con $\mathbf{n} = (-1, 1)/\sqrt{2}$: proposición 14.20 da el cambio $(-u/2, u/2)$ del primer miembro. La geometría del encuentro distingue ambos casos.

13. Sistemas abiertos y transferencia de masa

Proposición 14.4 suma Newton para una lista fija de miembros. Un cuerpo que incorpora o expulsa materia no conserva esa lista. La derivada de su momento puede calcularse, pero ya no coincide por sí sola con la fuerza externa: la materia que cruza lleva momento. Para obtener el balance elegimos, durante un intervalo pequeño, un conjunto material que incluye el cuerpo y las parcelas transferidas. Sólo después pasamos a la descripción abierta.[13]

Definición 14.13 — Modelo concentrado de transferencia. El cuerpo retenido tiene masa $m(t) > 0$ y una velocidad traslacional común $\mathbf{v}(t)$ en un marco inercial. Una entrada incorpora masa a tasa $q_{\mathrm{in}} \geq 0$, con velocidad $\mathbf{w}_{\mathrm{in}}$ inmediatamente antes de transferirse; una salida retira masa a tasa $q_{\mathrm{out}} \geq 0$, con velocidad $\mathbf{w}_{\mathrm{out}}$ al salir. Las tasas son masas por tiempo que cruzan la frontera elegida, no derivadas de masas de parcelas individuales. Se supone $\dot{m} = q_{\mathrm{in}} - q_{\mathrm{out}}$.

Todas las velocidades de la definición 14.13 se miden respecto del mismo laboratorio inercial. Las tasas se refieren a la frontera del cuerpo, que puede moverse. En el modelo elemental, la incorporación o expulsión se resuelve en un intervalo pequeño sin almacenamiento intermedio de masa o momento que tenga que describirse aparte. Las fuerzas aplicadas por otros agentes aportan una resultante $\mathbf{F}$; el intercambio entre el cuerpo y las parcelas durante la transferencia queda dentro del conjunto material usado para el balance. No se cuenta de nuevo esa interacción como una fuerza adicional sobre dicho conjunto.

Proposición 14.22 — Balance de momento con flujo. Bajo definición 14.13, con tasas y velocidades finitas y regularidad suficiente para el límite de primer orden,

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + q_{\mathrm{in}}\mathbf{w}_{\mathrm{in}} - q_{\mathrm{out}}\mathbf{w}_{\mathrm{out}},$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + q_{\mathrm{in}}(\mathbf{w}_{\mathrm{in}} - \mathbf{v}) - q_{\mathrm{out}}(\mathbf{w}_{\mathrm{out}} - \mathbf{v}).$$

Demostración. Durante $dt > 0$, elegimos el conjunto material formado por el cuerpo inicial y la parcela que entrará. Su momento inicial es $m\mathbf{v} + q_{\mathrm{in}}dt\,\mathbf{w}_{\mathrm{in}} + o(dt)$. Al final el conjunto se divide en el cuerpo retenido y la parcela expulsada. Su momento es $(m + \dot{m}dt)(\mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}dt) + q_{\mathrm{out}}dt\,\mathbf{w}_{\mathrm{out}} + o(dt)$. La fuerza aplicada entrega impulso $\mathbf{F}dt + o(dt)$. Restar los momentos, dividir por dt y pasar al límite da $m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} = \mathbf{F} + q_{\mathrm{in}}\mathbf{w}_{\mathrm{in}} - q_{\mathrm{out}}\mathbf{w}_{\mathrm{out}}$. Usar la tasa de masa de la definición 14.13 produce la segunda forma. Los productos de incrementos desaparecen por ser de orden superior. □

[13] Kleppner–Kolenkow, obra citada, cap. 3, §3.5, pp. 133–139; Morin, obra citada, cap. 5, §5.5.2, pp. 159–160. Se usa un conjunto material durante la transferencia y velocidades de un marco inercial. Las tasas se definen positivas y el escape del cohete tiene velocidad relativa $-c$, evitando mezclar convenciones de signo.

La primera ecuación registra el momento que permanece dentro y el que cruza. La segunda destaca velocidades relativas a la materia retenida. Ambas son equivalentes, pero ninguna permite ignorar la velocidad de entrada o salida. Si se toma $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$ sin flujo, se está usando el balance de otro sistema. No es una corrección de Newton para una partícula individual de masa cambiante: es un balance de pertenencia variable deducido con parcelas materiales de masa constante.

Con varias entradas o salidas se suman sus términos. Para un flujo con distribución de velocidades, el momento transportado requiere su promedio ponderado por la tasa de masa. Un cuerpo extendido con movimiento interno exige también una descripción más amplia que una única $\mathbf{v}$. Presiones, fuerzas de superficies y almacenamiento interno deben incorporarse cuando sean relevantes; el modelo concentrado no es una fórmula universal para toda corriente de fluido.

Las dos ecuaciones son compatibles con un cambio galileano. En la primera, $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ cambia el lado izquierdo en $-\dot{m}\mathbf{U}$; el flujo cambia en $-(q_{\text{in}} - q_{\text{out}})\mathbf{U}$, igual por la definición 14.13. En la segunda las diferencias de velocidades ya son invariantes y la aceleración no cambia. La constancia de m que exigía proposición 14.14 falta aquí: las comparaciones cinéticas de sistemas abiertos necesitan incluir el flujo energético y no se deducen de aquella fórmula para un par material fijo.

Proposición 14.23 — Cohete ideal en una línea. Un cuerpo sin entrada expulsa masa a tasa $q > 0$, con velocidad relativa de salida $-c$, donde $c > 0$ es constante. Si no hay otras fuerzas aplicadas y $m > 0$, entonces

$$m\dot{v} = qc = -c\dot{m}, \qquad v_b - v_a = c \ln \frac{m_a}{m_b}.$$

Demostración. La salida tiene velocidad de laboratorio $w_{\text{out}} = v - c$ y $\dot{m} = -q$. Proposición 14.22 da $m\dot{v} = -q[(v - c) - v] = qc = -c\dot{m}$. Dividir por $m > 0$ e integrar produce $\int dv = -c \int dm/m = c \ln(m_a/m_b)$. □

El aumento de velocidad no depende de la tasa temporal para esta idealización sin fuerza externa y con c constante. El momento del cohete solo sí cambia; se conserva el del conjunto material que incluye todo el gas eyectado si está aislado. La energía para acelerar las partes procede del mecanismo de expulsión y no se impone conservación de cinética del cohete. Añadir una «fuerza del chorro» a la derecha de la proposición 14.22 cuando ya se incluyó su velocidad de salida contaría dos veces el mismo intercambio. Puede usarse una descripción por fuerza efectiva en lugar del flujo, siempre que se deduzca coherentemente y se evite esa duplicación.

Si la masa sale con la misma velocidad del cuerpo, $\mathbf{w}_{\text{out}} = \mathbf{v}$, no produce aceleración por ese flujo en el modelo. El momento retenido disminuye porque contiene menos masa, aunque la velocidad permanezca constante. Esta situación se diferencia de recibir materia en reposo respecto del laboratorio: la incorporación obliga a cambiar su momento y puede reducir la velocidad del cuerpo si no hay fuerza aplicada.

Principio metodológico 14.13 — Seguir la materia que cruza. Declara la frontera, las tasas positivas de entrada y salida y sus velocidades en un mismo marco. Construye un conjunto material para el intervalo pequeño y deriva el flujo antes de simplificar. Distingue masa retenida de masa total del conjunto ampliado. No combines flujo y una fuerza efectiva que represente otra vez la misma transferencia.

Ejercicios. Ejercicio 14.27. Un carro de masa inicial m_0 se mueve horizontalmente con velocidad v_0. Incorpora materia a tasa constante $q > 0$, con velocidad horizontal de entrada w constante. No hay fuerza aplicada horizontal y toda la materia capturada acaba con la velocidad del carro. Obtén $v(t)$ y determina qué momento se conserva si $w = 0$.

Solución. $m = m_0 + qt$ y proposición 14.22 da $d(mv)/dt = qw$. Integrar produce $mv = m_0 v_0 + qwt$ y $v(t) = (m_0 v_0 + qwt)/(m_0 + qt)$. También $m\dot{v} = q(w - v)$, por lo que el carro tiende hacia w mientras aumenta su masa. Si $w = 0$, el momento horizontal de la materia retenida es $m_0 v_0$, constante en este caso particular de entrada con momento horizontal nulo. Esa coincidencia no valida ignorar el flujo en general: para $w \neq 0$ el momento retenido varía. Conservar cinética daría otra historia incorrecta para una captura. Las fuerzas verticales que sostienen el carro quedan fuera de este balance horizontal; q se ha dado como tasa real de incorporación en su frontera móvil.

Ejercicio 14.28. Un cohete ideal asciende en un campo uniforme de aceleración $-g$, sin resistencia. Parte con masa m_0 y velocidad v_0, expulsa a tasa constante $q > 0$ y rapidez relativa $c > 0$ hacia abajo. La masa seca es $m_d > 0$. Obtén su velocidad durante la combustión y compara dos duraciones con igual masa inicial y final y el mismo c.

Solución. La fuerza aplicada es $-mg$ y $m = m_0 - qt$. Proposición 14.22 da $\dot{v} = cq/(m_0 - qt) - g$. Integrar produce $v(t) = v_0 + c\ln[m_0/(m_0 - qt)] - gt$, para $0 \le t \le (m_0 - m_d)/q$, suponiendo que sigue vigente el modelo de ascenso y expulsión. Para iguales masas extremas, $\Delta v = c\ln(m_0/m_b) - gT$: la duración mayor deja menor velocidad final por el término gravitatorio, aunque la contribución de expulsión sea la misma. Después de agotar el combustible, $q = 0$ y la ecuación cambia. No se prolonga el logaritmo hasta masa cero ni se infiere de este modelo una tasa físicamente ilimitada de combustión. Si hay apoyo del suelo antes del despegue, su fuerza debe incluirse durante esa etapa.

14. Síntesis del método

El balance de momento compara una suma vectorial y un impulso externo. El centro de masa convierte esa suma en una velocidad colectiva. La energía cinética añade información sobre el movimiento relativo, pero su cambio requiere conocer el modelo de interacción y las transferencias energéticas. En una colisión, estos tres elementos se combinan sin intercambiar sus hipótesis; en un sistema abierto se añade el momento transportado por la materia.[14]

Proposición 14.24 — Separación del cambio cinético con impulso externo. Para el par material de la definición 14.9, sin exigir que el impulso externo se anule, sea $\overline{\mathbf{V}} = (\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b)/2$. Entonces

$$\Delta K = \overline{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{J}_{\text{ext}} + \frac{1}{2}\mu(|\mathbf{g}_b|^2 - |\mathbf{g}_a|^2).$$

Demostración. proposición 14.12 da $\Delta K = M(|\mathbf{V}_b|^2 - |\mathbf{V}_a|^2)/2 + \mu(|\mathbf{g}_b|^2 - |\mathbf{g}_a|^2)/2$. La diferencia de cuadrados colectivos es $(\mathbf{V}_b + \mathbf{V}_a)\cdot(\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a)$. Por proposiciones 14.4–14.9, $M(\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a) = \mathbf{J}_{\text{ext}}$. Sustituir produce el primer término indicado. □

La proposición es una identidad entre estados. El producto de la velocidad media de los extremos y el impulso no representa en general el trabajo físico de las fuerzas externas sobre sus puntos de aplicación. Sí representa exactamente el cambio de la energía cinética colectiva. Para masa constante, integrar $\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}$ también da ese cambio, pero el trabajo externo real puede incluir movimiento de los miembros respecto del centro. El balance de trabajo del capítulo 12 conserva esa información adicional.

Esta distinción impide deducir que «impulso externo nulo» significa «trabajo externo nulo». Un par puede recibir fuerzas externas opuestas que mantengan su centro mientras cambian la separación

[14] Síntesis de las demostraciones del capítulo, con bases consultadas en Kleppner–Kolenkow, cap. 3, §§3.2–3.5, y cap. 4, §4.14; Morin, cap. 5, §§5.5–5.8. Proposición 14.24 se deduce localmente de la proposición 14.4, proposición 14.9 y proposición 14.12; su término colectivo se distingue explícitamente del trabajo externo real sobre los miembros.

y la energía relativa. También fuerzas internas opuestas pueden modificar esa energía sin modificar el momento total. La resultante y la potencia son sumas distintas: una suma de fuerzas cero no obliga a que sus productos con velocidades diferentes sumen cero.

El recorrido de resolución puede organizarse según lo que se necesita determinar:

Pregunta	Balance o información necesaria	Límite de la conclusión
Cambio de momento total	Impulso externo sobre un sistema material fijo	No fija velocidades relativas
Trayectoria del centro	Resultante externa, posición y velocidad colectivas iniciales	Necesita cierre de la resultante
Velocidades finales de un par	Momento y ley relativa de la interacción	Balances solos pueden dejar ramas o direcciones
Cambio de cinética	Movimiento colectivo y relativo, o trabajo y energía	Momento conservado no conserva cinética
Movimiento con entrada o salida	Tasas y velocidades de transferencia, fuerzas aplicadas	La lista material retenida cambia

En todos los casos los datos iniciales deben pertenecer al mismo marco. La velocidad de expulsión respecto de un dispositivo o la velocidad relativa de separación de dos miembros son diferencias de velocidades, no velocidades de laboratorio. Convertirlas antes de resolver evita una inconsistencia que puede pasar inadvertida en un cálculo dimensionalmente correcto. También debe conservarse la orientación elegida de cada coordenada relativa.

Principio metodológico 14.14 — Cerrar sólo con información acreditada. Define primero sistema, marco, intervalo y datos. Escribe el balance de momento con todos los impulsos o flujos relevantes. Decide después qué ecuación determina el movimiento relativo: fuerza, elasticidad, unión, restitución o datos medidos. Comprueba signos, unidades, estados extremos y energía, y conserva explícitas las variables que siguen indeterminadas. Separa etapas si cambian fuerzas, pertenencia material o modelo de contacto.

Ejercicios. Ejercicio 14.29. Dos masas m y $2m$ tienen velocidades colineales iniciales $3u$ y cero, y finales cero y u, con $u > 0$. Calcula el impulso externo requerido por esos datos y separa el cambio cinético mediante proposición 14.24. ¿Son compatibles con un choque aislado?

Solución. $P_a = 3mu$, $P_b = 2mu$ y por tanto $J_{\text{ext}} = -mu$. No son compatibles con impulso externo nulo. Las velocidades colectivas son $V_a = u$, $V_b = 2u/3$, así que $\overline{V}J = (5u/6)(-mu) = -5mu^2/6$. La masa reducida es $2m/3$, $g_a = 3u$ y $g_b = -u$, por lo que el término relativo es $(m/3)(u^2 - 9u^2) = -8mu^2/3$. Suman $-7mu^2/2$, igual a $K_b - K_a = mu^2 - 9mu^2/2$. El cociente de rapidez relativa de salida y entrada es $1/3$, pero no permite aplicar proposición 14.19: sus fórmulas también exigían momento conservado. El impulso total conocido tampoco dice cómo se distribuyó entre los miembros ni cuál fue la fuerza interna.

Ejercicio 14.30. Dos masas m y $2m$, inicialmente en reposo en una línea, reciben fuerzas externas constantes $F_1 = f > 0$ y $F_2 = -f$ durante un tiempo T. No interactúan internamente en ese intervalo. Calcula las velocidades finales, el centro y la energía. Determina si el producto de la proposición 14.24 puede identificarse aquí con el trabajo externo total.

Solución. Newton da $v_{1,b} = fT/m$ y $v_{2,b} = -fT/(2m)$. La resultante externa es cero durante todo el intervalo, así que $P = 0$ y el centro permanece en su posición inicial. La energía final es

$f^2T^2/(2m) + f^2T^2/(4m) = 3f^2T^2/(4m)$, positiva. Toda es relativa: $\mu = 2m/3$ y $g_b = 3fT/(2m)$ producen $\mu g_b^2/2 = 3f^2T^2/(4m)$. Los desplazamientos son $fT^2/(2m)$ y $-fT^2/(4m)$, de modo que el trabajo externo total es $f[fT^2/(2m)] + (-f)[-fT^2/(4m)] = 3f^2T^2/(4m)$. En proposición 14.24 el término colectivo vale cero porque $J_{\text{ext}} = 0$; por ello no coincide con ese trabajo externo positivo. El ejemplo conserva momento y modifica cinética mediante agentes externos que actúan a velocidades distintas.

La reducción al centro de masa conserva la información de traslación, y la reducción de dos partículas conserva además la coordenada relativa necesaria para reconstruirlas. Cuando se estudien momentos angulares y cuerpos rígidos habrá que describir otras partes del movimiento. El balance lineal seguirá siendo válido bajo sus hipótesis, pero no reemplazará las ecuaciones que gobiernen esas variables.

Capítulo 15

Momento angular y torque

Una fuerza aplicada en el centro de una puerta y la misma fuerza aplicada junto al picaporte producen movimientos diferentes. El balance de momento lineal conserva la magnitud y la dirección de la fuerza, pero pierde su lugar de aplicación. Esa información vuelve a entrar al calcular el momento de la fuerza respecto de las bisagras. Con el movimiento ocurre algo parecido: conocer el momento total de dos partículas no permite saber si pasan una junto a otra o se alejan por una misma recta. Sus posiciones también cuentan.

El capítulo anterior reunió las velocidades en una suma ponderada por las masas. Aquí reuniremos posición y momento en un producto vectorial. Conviene empezar con partículas: así podremos ver qué propiedades proceden de la definición, cuáles necesitan las leyes de Newton y cuáles exigen hipótesis adicionales sobre las interacciones. Trabajaremos en el espacio euclídeo tridimensional, con orientación y marco inercial elegidos, masas positivas constantes y un conjunto material fijo de partículas. Las coordenadas cartesianas usadas para derivar vectores tendrán ejes fijos. Las fuerzas y trayectorias se supondrán suficientemente regulares para las derivaciones e integraciones indicadas.

1. Qué información conserva el momento angular

Imaginemos una partícula que cruza una mesa de izquierda a derecha con velocidad constante. Tomamos un punto de referencia en la mesa. Si la trayectoria pasa por ese punto, el movimiento es enteramente radial en cada instante distinto del cruce. Si pasa a cierta distancia, la dirección que une el punto con la partícula va girando. En ambos casos el momento lineal puede ser el mismo; cambia la relación entre posición y movimiento.

Definición 15.1 — Momento angular de una partícula. Sean $\mathbf{r}$ su posición, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ su momento lineal y $\mathbf{R}_A$ la posición de un punto de referencia A. Escribimos $\boldsymbol{\rho}_A = \mathbf{r} - \mathbf{R}_A$ y definimos

$$\mathbf{L}_A = \boldsymbol{\rho}_A \times \mathbf{p}.$$

En esta definición la velocidad de $\mathbf{p}$ se mide en el marco inercial elegido, incluso cuando A se mueve. La elección se mantendrá durante todo el capítulo. El producto vectorial se toma en el orden posición por momento. En una base ortonormal positivamente orientada, su expresión es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x).$$

Por eso intercambiar los factores cambia el signo. El vector obtenido es perpendicular a ambos; su magnitud es $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$, con $0 \le \theta \le \pi$. Para fijar su sentido puede usarse la regla de la mano derecha. En un movimiento contenido en el plano xy, con A en ese plano, la componente relevante es $L_{A,z} = m[(x - X_A)v_y - (y - Y_A)v_x]$.

Si $\boldsymbol{\rho}_A \neq 0$, descomponemos el momento en una parte paralela a $\boldsymbol{\rho}_A$ y otra perpendicular. La primera desaparece del producto. Así, una partícula que se acerca al punto de referencia por una

recta puede tener rapidez grande y momento angular cero. También una partícula que se mueve por una recta que no pasa por A puede tener momento angular no nulo.

Proposición 15.1 — Brazo geométrico del momento. Si $\mathbf{p} \neq 0$ y b es la distancia de A a la recta que pasa por la partícula en dirección $\mathbf{p}$, entonces $|\mathbf{L}_A| = b|\mathbf{p}|$.

Demostración. Si $\boldsymbol{\rho}_A = 0$, la recta pasa por A y ambos miembros son cero. En otro caso, sea θ el ángulo entre $\boldsymbol{\rho}_A$ y $\mathbf{p}$. La proyección perpendicular de $\boldsymbol{\rho}_A$ sobre el plano normal a $\mathbf{p}$ tiene longitud $|\boldsymbol{\rho}_A| \sin\theta = b$. Multiplicar por $|\mathbf{p}|$ da la magnitud del producto vectorial. □

La recta usada en la proposición 15.1 es instantánea. Sólo coincide con una trayectoria completa cuando ésta es rectilínea. En el caso $\mathbf{r} = (ut, b, 0)$, $\mathbf{p} = (mu, 0, 0)$, con $u > 0$, obtenemos $\mathbf{L}_O = -mbu\,\mathbf{e}_z$: la distancia a O cambia, aunque el brazo respecto de la dirección del movimiento permanece constante.

Principio metodológico 15.1. Al calcular momento angular, declara el punto, el marco de las velocidades y la orientación. Comprueba el signo con las componentes antes de interpretar el sentido geométrico.

Ejercicios. Ejercicio 15.1. Una partícula de masa 2 kg tiene posición $(3, 1, 0)$ m y velocidad $(0, 4, 0)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcula su momento angular respecto del origen y respecto de $A = (3, 0, 0)$ m.

Solución. El momento lineal es $(0, 8, 0)\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$. Respecto del origen, el producto da $\mathbf{L}_O = (0, 0, 24)\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$. Respecto de A, la posición relativa es $(0, 1, 0)$ m, paralela al momento, de modo que $\mathbf{L}_A = 0$. La recta instantánea del movimiento pasa por A; su distancia al origen es 3 m, lo que verifica $|\mathbf{L}_O| = 3 \cdot 8$.

Ejercicio 15.2. Para $\mathbf{r}(t) = (ut, b, 0)$, con $u > 0$ y $b \neq 0$, calcula la velocidad angular de la dirección de $\mathbf{r}$ alrededor del origen. ¿Es constante cuando lo es el momento angular?

Solución. Para una dirección planar, $\dot\theta = (x\dot y - y\dot x)/(x^2 + y^2)$. Sustituir produce $\dot\theta = -bu/(u^2t^2 + b^2)$. Su magnitud disminuye al alejarse del instante de mayor proximidad. En cambio, $L_z = -mbu$ es constante. La relación $L_z = m|\mathbf{r}|^2\dot\theta$ permite compatibilizar ambos resultados: el radio cambia. Momento angular constante no determina velocidad angular constante.

2. Torque y lugar de aplicación

Para abrir una puerta podemos aumentar la fuerza o alejarnos de las bisagras. También podemos cambiar la dirección del empuje. Empujar hacia la bisagra aprovecha poco la fuerza para girar; empujar perpendicularmente a la puerta aprovecha todo su brazo. El producto vectorial reúne esas variaciones.

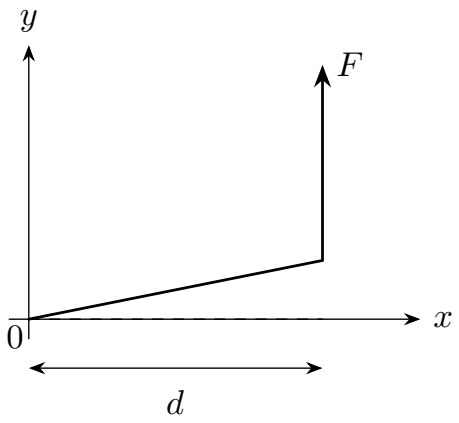


Figura 15.1. La fuerza vertical tiene torque $\tau_z = dF$ respecto del origen. El brazo d es la distancia perpendicular a su línea de acción, no la distancia desde el origen hasta el punto de aplicación. Véase §2.

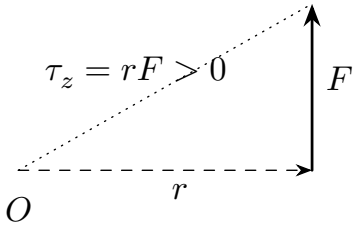


Figura 15.2. Una fuerza hacia arriba aplicada a la derecha de O produce torque positivo, saliente del plano. El vector de posición y la fuerza cumplen $\tau_O = r \times F$. Véase §2.

Definición 15.2 — Torque de una fuerza. Si $\mathbf{F}$ actúa en la posición $\mathbf{r}$, su torque o momento respecto de A es

$$\boldsymbol{\tau}_A = (\mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{F}.$$

Para varias fuerzas aplicadas en posiciones distintas, el torque total es la suma de sus momentos respectivos. La resultante de las fuerzas se obtiene sumando los vectores fuerza; el torque requiere además las posiciones de aplicación.

El brazo de una fuerza es la distancia perpendicular desde el punto de referencia a su línea de acción. Con esa definición, el argumento de la proposición 15.1 da $|\boldsymbol{\tau}_A| = b_F|\mathbf{F}|$. El máximo para radio y fuerza de magnitudes fijadas se obtiene cuando son perpendiculares. Si A está en la línea de acción, el torque es cero aunque la fuerza sea grande.

Proposición 15.2 — Desplazamiento sobre la línea de acción. Una fuerza dada tiene el mismo torque respecto de cualquier A si su posición de aplicación se sustituye por $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{F}$, donde $\lambda\mathbf{F}$ tiene unidades de longitud.

Demostración. La diferencia entre los torques es $(\lambda\mathbf{F}) \times \mathbf{F} = 0$. □

La proposición conserva una suma geométrica. Desplazar físicamente una fuerza puede cambiar deformaciones, contactos y la distribución de tensiones. Para un sistema de partículas tampoco autoriza a reasignar la fuerza de una partícula a otra conservando sus ecuaciones individuales.

Las dimensiones ayudan a leer los balances:

$$[\mathbf{L}] = \mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}, \qquad [\boldsymbol{\tau}] = \mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-2}.$$

En SI corresponden a $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ y $\mathrm{N\,m}$. Torque y energía comparten dimensiones. Su función física es distinta: la energía es un escalar y el torque es un vector axial asociado a un punto. Al informar torque escribiremos N m para mantener visible esa interpretación.

Principio metodológico 15.2. Calcula los torques fuerza por fuerza. Sustituir un conjunto por su resultante aplicada en un lugar arbitrario pierde información sobre el giro.

Ejercicios. Ejercicio 15.3. Una fuerza $(0, f, 0)$ actúa en $(a, b, 0)$, con $a, f > 0$. Calcula el torque respecto del origen y explica qué ocurre al cambiar b.

Solución. El producto da $(0, 0, af)$. La línea de acción es la vertical $x = a$, cuya distancia al origen es a. Cambiar b desplaza la fuerza por esa misma línea y conserva el torque. Cambiar a altera el brazo; cambiar el signo de f invierte el torque.

Ejercicio 15.4. En $(a, 0, 0)$ actúa $(0, f, 0)$ y en $(-a, 0, 0)$ actúa $(0, -f, 0)$, con $a, f > 0$. Compara resultante y torque total.

Solución. La resultante es cero. Los torques son ambos $(0, 0, af)$, así que el total es $(0, 0, 2af)$. Las fuerzas pueden mantener constante el momento lineal total y modificar el momento angular. La cancelación vectorial de fuerzas deja sin cancelar sus momentos porque los puntos de aplicación son diferentes.

3. El balance para una partícula

Ya tenemos dos definiciones. La ley de Newton permite conectarlas. Para derivar respecto del tiempo hay que controlar qué hace el punto de referencia: el vector que une dos puntos cambia por el movimiento de ambos.

Proposición 15.3 — Balance respecto de un punto fijo. Si A permanece fijo en el marco inercial y la partícula satisface $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, entonces

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \boldsymbol{\tau}_A.$$

Demostración. El producto vectorial es bilineal, por lo que satisface la regla de derivación del producto. Como $\dot{\boldsymbol{\rho}}_A = \mathbf{v}$,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \boldsymbol{\rho}_A \times \dot{\mathbf{p}}.$$

El primer término es cero por paralelismo y el segundo es $\boldsymbol{\rho}_A \times \mathbf{F}$. □

La demostración explica el papel de cada supuesto. La definición de $\mathbf{L}_A$ es una elección de magnitud; $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ es la ecuación dinámica del modelo newtoniano; la regla del producto y la cancelación son pasos matemáticos. El resultado hereda el régimen de validez del modelo y de las fuerzas incluidas.[1]

La cancelación $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ depende de que el momento sea paralelo a la velocidad. Aquí se usa el momento mecánico newtoniano de una partícula de masa constante. No hemos introducido otras nociones de momento.

[1] MIT OpenCourseWare, *Classical Mechanics*, 8.01SC, capítulo 19, §§19.2–19.3: definiciones y balance para una partícula. Consulta: 14 de octubre de 2026. https://ocw.mit.edu/courses/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/mit8_01scs22_chapter19.pdf. Las pruebas y ejercicios de este texto se desarrollan localmente.

Proposición 15.4 — Balance con punto móvil. Si A tiene posición diferenciable $\mathbf{R}_A(t)$ y velocidad $\mathbf{V}_A$, pero $\mathbf{p}$ sigue siendo el momento medido en el mismo marco inercial, entonces

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \boldsymbol{\tau}_A - \mathbf{V}_A \times \mathbf{p}.$$

Demostración. Ahora $\dot{\boldsymbol{\rho}}_A = \mathbf{v} - \mathbf{V}_A$. Al derivar definición 15.1 se obtiene $(\mathbf{v}-\mathbf{V}_A)\times\mathbf{p} + \boldsymbol{\rho}_A \times \mathbf{F}$. El término $\mathbf{v}\times\mathbf{p}$ vuelve a ser cero; el restante es el término de transporte indicado. □

Que el torque sea cero respecto de un punto móvil no basta para conservar $\mathbf{L}_A$. El término adicional responde al cambio geométrico de referencia; no representa una fuerza nueva sobre la partícula. Más adelante distinguiremos esta construcción de calcular un momento con velocidades relativas.

Principio metodológico 15.3. Antes de usar $\dot{\mathbf{L}}_A = \boldsymbol{\tau}_A$, comprueba que A está fijo o demuestra que el término de transporte se anula.

Ejercicios. Ejercicio 15.5. Una partícula libre tiene $\mathbf{r} = (ut, b, 0)$ y $\mathbf{p} = (mu, 0, 0)$. El punto A se mueve según $\mathbf{R}_A = (0, wt, 0)$. Calcula $\mathbf{L}_A$ y verifica proposición 15.4.

Solución. La posición relativa es $(ut, b-wt, 0)$, por lo que $\mathbf{L}_A = (0, 0, -mu(b-wt))$. Su derivada es $(0, 0, muw)$. La fuerza y el torque son cero. Sin embargo, $-\mathbf{V}_A \times \mathbf{p} = -(0, w, 0) \times (mu, 0, 0) = (0, 0, muw)$, exactamente la derivada calculada. El cambio de $\mathbf{L}_A$ procede del movimiento de A.

Ejercicio 15.6. Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio $a > 0$ centrada en un punto fijo, con ángulo $\theta(t)$ dos veces diferenciable. Obtén el momento angular y el torque requerido, incluyendo aceleración radial y tangencial.

Solución. Con $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ y $\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$, se tiene $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_r$, $\mathbf{v} = a\dot\theta\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{a} = -a\dot\theta^2\mathbf{e}_r + a\ddot\theta\mathbf{e}_\theta$. Newton exige $\mathbf{F} = -ma\dot\theta^2\mathbf{e}_r + ma\ddot\theta\mathbf{e}_\theta$. Entonces $\mathbf{L}_O = ma^2\dot\theta\mathbf{e}_z$ y $\boldsymbol{\tau}_O = ma^2\ddot\theta\mathbf{e}_z$. La fuerza radial mantiene la curvatura y tiene torque cero; la tangencial cambia el momento angular. Derivar la expresión de $\mathbf{L}_O$ verifica el balance.

4. Cambiar el punto de referencia

La dependencia respecto de un punto puede parecer incómoda, pero tiene una regla simple. Conviene conocerla para escoger una referencia que elimine torques desconocidos o haga transparente una conservación.

Definición 15.3 — Momento angular de un sistema. Para N partículas de masas constantes, con momentos $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i$, definimos

$$\mathbf{L}_A = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{p}_i, \qquad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i.$$

Proposición 15.5 — Traslación del punto de referencia. Sean A y B dos puntos, fijos o móviles, y $\mathbf{d} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$. En cada instante,

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A - \mathbf{d} \times \mathbf{P}.$$

Demostración. Para cada partícula, $\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_B = (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_A) - \mathbf{d}$. Distribuimos el producto y sumamos. Como $\mathbf{d}$ es común a todos los términos, la diferencia es $-\mathbf{d} \times \sum_i \mathbf{p}_i$. □

En particular, si $\mathbf{P} = 0$, el momento angular total es independiente del punto de referencia en ese instante. Si $\mathbf{P} \neq 0$, desplazar el punto paralelamente a $\mathbf{P}$ también conserva el valor. Para una partícula con momento no nulo, hay una recta entera de puntos que dan el mismo momento angular.

La suma de fuerzas tiene una transformación análoga. Para fuerzas $\mathbf{F}_j$ aplicadas en $\mathbf{r}_j$, escribamos $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum_j \mathbf{F}_j$.

Proposición 15.6 — Traslación del torque total. El torque de ese conjunto satisface

$$\boldsymbol{\tau}_B = \boldsymbol{\tau}_A - \mathbf{d} \times \mathbf{F}_{\text{tot}}.$$

Demostración. Sustituimos $\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_B = (\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_A) - \mathbf{d}$ en la suma de torques. La bilinealidad da la fórmula. □

Una pareja de fuerzas opuestas cuya resultante sea cero tiene por ello torque independiente del punto: se llama *par de fuerzas*. Ejercicio 15.4 es un ejemplo. Para comprender la diferencia, pensemos en una sola fuerza. Su torque puede anularse escogiendo un punto en su línea de acción. Un par con torque no nulo conserva ese torque cualquiera que sea el punto elegido.

Estas reglas también conectan los balances. Si A y B son fijos y $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\text{tot}}$, derivar proposición 15.5 produce $\dot{\mathbf{L}}_B = \dot{\mathbf{L}}_A - \mathbf{d} \times \mathbf{F}_{\text{tot}}$. La transformación del torque de la proposición 15.6 es exactamente la que permite mantener la ecuación dinámica.

Principio metodológico 15.4. Elige el punto para simplificar torques, pero conserva esa elección en todo el balance. Compara cantidades referidas a puntos distintos mediante proposición 15.5.

Ejercicios. Ejercicio 15.7. Dos partículas ocupan $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$ y tienen momentos $(0, p, 0)$ y $(0, -p, 0)$, con $a, p > 0$. Calcula el momento angular total y decide si puede anularse cambiando el punto.

Solución. Cada producto aporta $(0, 0, ap)$; la suma es $(0, 0, 2ap)$. Como $\mathbf{P} = 0$, proposición 15.5 muestra que ningún cambio de punto altera ese valor. Tener momento total cero permite movimiento interno y momento angular total no nulo.

Ejercicio 15.8. En cierto instante, $\mathbf{P} = (p, 0, 0)$ y $\mathbf{L}_O = (0, 0, \ell)$, con $p \neq 0$. Determina todos los puntos B para los cuales $\mathbf{L}_B = 0$.

Solución. Sea $\mathbf{R}_B = (X, Y, Z)$. Entonces $\mathbf{R}_B \times \mathbf{P} = (0, Zp, -Yp)$ y $\mathbf{L}_B = (0, -Zp, \ell + Yp)$. La anulación exige $Z = 0$ y $Y = -\ell/p$, mientras X queda libre. Los puntos forman una recta paralela al momento total. El signo de Y se obtiene del orden del producto, no de una distancia sin orientación.

5. Fuerzas internas: qué debe cancelarse

Al sumar las ecuaciones de Newton en el capítulo anterior, dos fuerzas internas iguales y opuestas desaparecían. Para el momento angular la suma conserva además los lugares donde actúan. Esta diferencia obliga a revisar la hipótesis de interacción.

Sea $\mathbf{F}_{ij}$ la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i. La ecuación de cada miembro es

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}.$$

Definición 15.4 — Torques externo e interno. Respecto de un mismo punto A, definimos

$$\boldsymbol{\tau}_A^{\text{ext}} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}},$$

$$\boldsymbol{\tau}_A^{\text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Estas sumas corresponden a la partición material elegida. Una fuerza cambia de clasificación si ampliamos el sistema para incluir al agente que la ejerce.

Proposición 15.7 — Torque interno por pares. Si $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ para cada par, entonces

$$\boldsymbol{\tau}_A^{\mathrm{int}} = \sum_{i<j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Demostración. Agrupamos los dos términos de cada par no ordenado. Su suma es $(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{F}_{ij} + (\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_A) \times (-\mathbf{F}_{ij}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}$. Al sumar sobre $i < j$ se incluye cada par una vez. □

Definición 15.5 — Interacción central por pares. Una interacción es central si $\mathbf{F}_{ij}$ es paralela a $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, con fuerzas iguales y opuestas. Para coincidencias de posición, debe declararse una ley regular o excluirse la coincidencia del dominio; no se presupone que una ley singular esté definida allí.

Proposición 15.8 — Cancelación central. Las interacciones centrales por pares tienen torque interno total cero respecto de cualquier punto.

Demostración. En proposición 15.7 cada producto es cero por paralelismo. □

La igualdad de fuerzas opuestas basta para el momento lineal. Su alineación con la separación es una condición suficiente adicional para anular el torque de cada par. También puede haber cancelación global entre torques internos no nulos; proposición 15.8 no afirma que la centralidad sea necesaria en todos los sistemas.[2]

Podemos construir un modelo de dos partículas en $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$ con fuerzas internas $(0, f, 0)$ y $(0, -f, 0)$. Las fuerzas suman cero, pero su torque suma $2af\,\mathbf{e}_z$. Como sistema matemático, sus ecuaciones newtonianas están perfectamente especificadas en ese instante. Para interpretarlo como sistema físico aislado habría que explicar qué interacción produce esas fuerzas y dónde reside el momento angular que falta. Un dispositivo, un grado interno omitido o un campo puede invalidar la lista de partículas escogida como descripción completa del sistema.

Principio metodológico 15.5. Justifica la cancelación de torques internos mediante la geometría de las fuerzas o mediante un balance más completo. La sola etiqueta «interno» no cancela un momento.

Ejercicios. Ejercicio 15.9. Un resorte ideal une dos partículas y ejerce fuerzas iguales, opuestas y dirigidas a lo largo de su separación. ¿Puede cambiar el momento angular total por su acción interna? ¿Puede cambiar la energía cinética?

Solución. El resorte satisface definición 15.5, por lo que proposición 15.8 anula su torque interno. Su acción no cambia el momento angular total respecto de un punto fijo cuando no hay torque externo. La potencia interna, en cambio, es $\mathbf{F}_{12} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ y puede ser distinta de cero. Si cambia la longitud del resorte, puede intercambiar energía potencial elástica con energía cinética. El balance angular y el energético controlan sumas distintas.

Ejercicio 15.10. En el ejemplo de fuerzas internas transversales, demuestra que el torque interno es independiente del punto de referencia y explica por qué ello no lo hace nulo.

Solución. La resultante interna es cero. Proposición 15.6 implica que trasladar el punto no modifica su torque. También proposición 15.7 da directamente $(2a, 0, 0) \times (0, f, 0) = 2af\,\mathbf{e}_z$, sin

[2] El mismo capítulo, §19.5, se usa para contrastar el balance de un sistema. Aquí se conserva explícitamente el torque interno antes de imponer su cancelación, y se demuestra por pares la hipótesis suficiente de centralidad. La separación respecto del centro de masa y la reducción de dos partículas se deducen localmente de las definiciones y de las relaciones de *Física para matemáticos*, capítulo 14; el cierre y §14 de ese capítulo fueron consultados para fijar la continuidad. No se atribuye a una referencia externa ninguna hipótesis que se haya omitido en las pruebas.

referencia a A. Independencia del punto significa que todos los puntos dan ese mismo vector; su valor sigue siendo no nulo cuando $a, f \neq 0$.

6. Balance, conservación e impulso angular

Con las hipótesis ya separadas, el balance de un sistema puede escribirse sin omisiones.

Proposición 15.9 — Balance angular general del sistema. Para un punto móvil A, usando los momentos inerciales de la definición 15.3,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \boldsymbol{\tau}_A^{\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_A^{\text{int}} - \mathbf{V}_A \times \mathbf{P}.$$

Demostración. Aplicamos proposición 15.4 a cada partícula con su fuerza total y sumamos. Los torques se separan según la definición 15.4. La velocidad $\mathbf{V}_A$ es común, de modo que la suma de los términos de transporte es $-\mathbf{V}_A \times \sum_i \mathbf{p}_i$. □

Proposición 15.10 — Conservación respecto de un punto fijo. En un intervalo conectado, si A está fijo, el torque interno total se anula y $\boldsymbol{\tau}_A^{\text{ext}} = 0$, el vector $\mathbf{L}_A$ es constante. Si sólo se anula $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_A^{\text{ext}}$ para un vector fijo $\mathbf{n}$, se conserva la componente $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_A$.

Demostración. Bajo las hipótesis, proposición 15.9 da $\dot{\mathbf{L}}_A = 0$, o bien $\frac{d}{dt}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_A) = 0$. Una función diferenciable con derivada cero en un intervalo es constante. □

Conservar una componente es útil cuando ciertas fuerzas desconocidas tienen torque perpendicular a una dirección fija. El resto del vector puede variar. Si la dirección $\mathbf{n}$ gira, aparece además $\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}_A$ al derivar la componente: también aquí la referencia debe controlarse.

Definición 15.6 — Impulso angular externo. Respecto de un punto fijo A y en el intervalo $[t_a, t_b]$, definimos

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_A^{\text{ext}} = \int_{t_a}^{t_b} \boldsymbol{\tau}_A^{\text{ext}}(t)\, dt.$$

Si el torque interno se anula, integrar proposición 15.9 produce

$$\mathbf{L}_A(t_b) - \mathbf{L}_A(t_a) = \boldsymbol{\mathcal{J}}_A^{\text{ext}}.$$

La conservación entre dos estados puede darse porque ese impulso es cero, aunque el torque haya sido distinto de cero durante parte del intervalo. Para afirmar conservación en todos los instantes se necesita la condición local de la proposición 15.10.

Una medición experimental puede reconstruir las posiciones y velocidades de las partículas y comparar la variación de la suma angular con el torque integrado. Si se omite una fuerza pequeña, su importancia se estima por su impulso angular, no sólo por su magnitud instantánea. Cuando $|\boldsymbol{\tau}_{\text{omitida}}| \leq T_{\text{máx}}$, la norma del impulso omitido está acotada por $T_{\text{máx}}(t_b - t_a)$. Para hablar de cambio relativo, la escala angular de comparación debe ser no nula y declararse.

Principio metodológico 15.6. Distingue conservación durante un intervalo, igualdad de valores extremos y conservación de una componente. Cada afirmación tiene una hipótesis propia.

Ejercicios. Ejercicio 15.11. Un sistema con torque interno nulo recibe, respecto de un punto fijo, $\boldsymbol{\tau}(t) = T_0 \sin(\omega t)\mathbf{e}_z$, con $\omega > 0$. Calcula $\mathbf{L}(t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$.

Solución. Integramos el balance desde cero: $\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}(0) + (T_0/\omega)[1 - \cos(\omega t)]\mathbf{e}_z$. Al final del período, $\mathbf{L}$ vuelve a su valor inicial. En el instante π/ω ha cambiado en $2T_0/\omega$ en la dirección z. El impulso angular del período es cero, pero el momento angular no fue constante.

Ejercicio 15.12. Sobre una partícula actúa únicamente un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$, con $g > 0$. Respecto de un origen fijo, decide qué componentes del momento angular se conservan.

Solución. Para $\mathbf{r} = (x, y, z)$, el torque es $(-mgy, mgx, 0)$. Por ello $\dot{L}_z = 0$ para cualquier trayectoria del modelo. Las otras componentes no se conservan en general. En un tiro con $x = ut$, $y = 0$, $z = h - gt^2/2$, se obtiene $L_y = mu(h + gt^2/2)$ y $\dot{L}_y = mgut$, de acuerdo con el torque. La conservación de L_z no impide el cambio del vector completo.

7. Separar traslación y movimiento interno

El centro de masa reúne la traslación del sistema. Para separar el momento angular ligado a esa traslación del momento angular interno hay que introducir posiciones y velocidades relativas al mismo centro.

Sean $M = \sum_i m_i$, $\mathbf{R} = M^{-1}\sum_i m_i\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$. Definimos $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ y $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$. Por construcción,

$$\sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i = 0, \qquad \sum_i m_i\mathbf{u}_i = 0, \qquad \mathbf{P} = M\mathbf{V}.$$

Definición 15.7 — Momento angular interno respecto del centro de masa.

$$\boldsymbol{\ell} = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i\mathbf{u}_i.$$

Esta magnitud conserva el movimiento relativo que desaparece de $\mathbf{P}$. Puede ser cero o no nula; un conjunto de partículas con $\boldsymbol{\ell} = 0$ tampoco tiene por qué estar quieto internamente.

Proposición 15.11 — Descomposición respecto de cualquier punto.

$$\mathbf{L}_A = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{P} + \boldsymbol{\ell}.$$

Demostración. Sustituimos $\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_A = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) + \boldsymbol{\rho}_i$ y $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{u}_i$ en la definición 15.3. Los términos cruzados contienen $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) \times \sum_i m_i\mathbf{u}_i$ y $(\sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i) \times \mathbf{V}$, ambos cero. Los restantes son $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) \times M\mathbf{V}$ y definición 15.7. □

Para A situado en el centro de masa, proposición 15.11 da $\mathbf{L}_R = \boldsymbol{\ell}$, aunque definición 15.3 usa velocidades inerciales y definición 15.7 velocidades relativas. La igualdad se debe a la suma ponderada de posiciones cero. No se puede trasladar sin justificación a un punto móvil arbitrario.

Proposición 15.12 — Balance en el centro de masa. Sin exigir que el centro esté fijo o tenga velocidad constante,

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_R^{\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_R^{\text{int}}.$$

Demostración. Por proposición 15.11, $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{L}_R$. Proposición 15.9 aplicado al punto $\mathbf{R}(t)$ da un transporte $-\mathbf{V} \times \mathbf{P}$. Como $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$, ese término es cero. □

El balance angular en el centro es válido incluso cuando el centro acelera. La derivación usa componentes referidas a ejes inerciales fijos. Si giráramos los ejes para seguir al sistema, la derivada de componentes necesitaría otro tratamiento.

Principio metodológico 15.7. Para separar traslación y movimiento interno, usa posiciones y velocidades relativas al centro de masa. Verifica ambas sumas ponderadas cero; ellas justifican la desaparición de los términos cruzados.

Ejercicios. Ejercicio 15.13. Dos partículas de igual masa m tienen posiciones $\mathbf{R} \pm a\mathbf{e}_x$ y velocidades $\mathbf{V} \pm u\mathbf{e}_y$, con $a, u > 0$. Calcula $\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\ell}$ y $\mathbf{L}_O$.

Solución. La suma de momentos da $\mathbf{P} = 2m\mathbf{V}$. Las posiciones relativas son $\pm a\mathbf{e}_x$ y las velocidades relativas $\pm u\mathbf{e}_y$. Ambos productos aportan $mau\mathbf{e}_z$, por lo que $\boldsymbol{\ell} = 2mau\mathbf{e}_z$. Proposición 15.11 da $\mathbf{L}_O = \mathbf{R} \times (2m\mathbf{V}) + 2mau\mathbf{e}_z$. La traslación cambia el primer término y deja separada la contribución interna en el instante descrito.

Ejercicio 15.14. Dos partículas iguales reciben la misma fuerza externa constante $\mathbf{f}$ cada una. Sus fuerzas internas son centrales. Demuestra que el centro puede acelerar mientras el momento angular interno se conserva.

Solución. La resultante externa es $2\mathbf{f}$, de modo que $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{f}/m$. Respecto del centro, las posiciones relativas son opuestas; el torque externo es $(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2) \times \mathbf{f} = 0$. El torque interno también es cero por la proposición 15.8. Proposición 15.12 implica $\dot{\boldsymbol{\ell}} = 0$. Se conserva la suma angular interna aunque la traslación colectiva cambie.

8. Dos partículas y el alcance del balance

La coordenada relativa del capítulo anterior permite escribir el momento angular interno de un par como si una sola masa describiera su separación. Esa reducción prepara el estudio de fuerzas centrales, pero todavía no determina una órbita.

Tomemos masas $m_1, m_2 > 0$, $M = m_1 + m_2$, masa reducida $\mu = m_1 m_2/M$ y coordenada orientada $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Su derivada es $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

Proposición 15.13 — Momento angular relativo de dos partículas.

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{q} \times \mu\dot{\mathbf{q}}.$$

Demostración. Las posiciones relativas al centro son $\boldsymbol{\rho}_1 = (m_2/M)\mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\rho}_2 = -(m_1/M)\mathbf{q}$. Sus velocidades relativas tienen los mismos coeficientes multiplicando $\dot{\mathbf{q}}$. En definición 15.7, el coeficiente total del producto es $m_1 m_2^2/M^2 + m_2 m_1^2/M^2 = m_1 m_2/M = \mu$. □

Si $\boldsymbol{\ell}$ es un vector constante no nulo, la separación permanece en el plano perpendicular a él. Es una consecuencia geométrica que conviene distinguir de determinar la trayectoria dentro del plano.

Proposición 15.14 — Plano relativo. Si $\boldsymbol{\ell} \neq 0$ es constante en un intervalo, $\mathbf{q}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ pertenecen al plano vectorial fijo perpendicular a $\boldsymbol{\ell}$.

Demostración. proposición 15.13 expresa $\boldsymbol{\ell}$ como un producto perpendicular a sus dos factores. Por tanto $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{q} = \boldsymbol{\ell} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ en cada instante. Al ser constante y no nulo, $\boldsymbol{\ell}$ define un único plano vectorial fijo. □

La separación nunca puede anularse en ese intervalo: si $\mathbf{q} = 0$ y las velocidades son finitas, proposición 15.13 daría $\boldsymbol{\ell} = 0$. Cuando $\boldsymbol{\ell} = 0$, no se obtiene un plano privilegiado. Bajo hipótesis adicionales sobre una fuerza central regular puede estudiarse el movimiento radial; el mero valor cero del producto no resuelve por sí solo todo el problema dinámico.

Para un par aislado con interacciones centrales, el centro se traslada uniformemente y el momento angular relativo se conserva. Para conocer cuánto cambia la separación necesitamos además la ley de fuerza y los datos iniciales. Incluso fijar un momento angular no nulo deja libre la componente radial de la velocidad en un estado de separación dada. Esa libertad afecta la energía y la trayectoria.

Principio metodológico 15.8. Usa una conservación para reducir las incógnitas. Comprueba después qué ecuaciones y datos siguen haciendo falta para reconstruir el movimiento.

Ejercicios. Ejercicio 15.15. Sean $m_1 = m$ y $m_2 = 3m$. En cierto instante, $\mathbf{q} = a\mathbf{e}_x$ y $\dot{\mathbf{q}} = w\mathbf{e}_x + u\mathbf{e}_y$, con $a > 0$. Calcula el momento angular interno y la energía cinética relativa. ¿El primero determina la segunda?

Solución. La masa reducida es $\mu = 3m/4$, de modo que $\boldsymbol{\ell} = (3mau/4)\mathbf{e}_z$. La energía cinética relativa es $K_{\mathrm{rel}} = \mu(w^2 + u^2)/2 = 3m(w^2 + u^2)/8$. El momento angular determina u cuando m y a están dados, pero deja libre w. Dos estados con el mismo momento angular pueden tener energías diferentes por su movimiento radial.

Ejercicio 15.16. Un par de partículas tiene momento angular interno constante no nulo. Su centro se mueve según $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t$. Demuestra que cada partícula permanece en un plano móvil paralelo al plano relativo. Determina cuándo ese plano es fijo en el laboratorio.

Solución. Sea $\mathbf{n} = \boldsymbol{\ell}/|\boldsymbol{\ell}|$. Por proposición 15.14, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0$. Las fórmulas de la prueba de la proposición 15.13 dan $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = 0$ para ambos miembros. Su plano común es, en cada instante, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{R}(t)) = 0$. La orientación es constante, pero su distancia orientada al origen cambia como $\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_0 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})t$. Es fijo en el laboratorio exactamente cuando $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$. La planaridad del movimiento relativo no garantiza que las trayectorias absolutas estén en un plano fijo.

9. Leer un movimiento en coordenadas polares

Un momento angular constante puede acompañar una velocidad angular variable. El ejemplo rectilíneo de §1 ya lo mostró. Para comprender la relación conviene separar dos cambios que se mezclan en las coordenadas cartesianas: la distancia al punto de referencia y la dirección desde la que se ve la partícula.

Elegimos un origen fijo O en un plano fijo del marco inercial y ejes cartesianos ortonormales orientados. Mientras la partícula no pase por O, podemos escribir su posición mediante una distancia $\rho > 0$ y un ángulo θ:

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \qquad \mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0).$$

El ángulo se toma en radianes y aumenta en sentido antihorario respecto de la normal $\mathbf{e}_z$. En una trayectoria continua que evita el origen, se puede seguir una elección continua de θ a lo largo de un intervalo, aunque dé más de una vuelta. La representación por un ángulo dentro de $[0, 2\pi)$ necesitaría saltos artificiales; esa discontinuidad de representación no pertenece al movimiento.

Definición 15.8 — Componentes polares. Para un vector planar $\mathbf{w}$, sus componentes radial y tangencial son $w_r = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r$ y $w_\theta = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_\theta$. Los vectores de esta base dependen de la posición angular y, por tanto, del tiempo.

Proposición 15.15 — Velocidad y aceleración polares. Si ρ y θ son dos veces diferenciables y $\rho > 0$, entonces

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\,\mathbf{e}_r + \rho\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta.$$

Demostración. Derivar las expresiones trigonométricas da $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$. La primera derivación de $\rho\mathbf{e}_r$ produce la fórmula de velocidad. Al derivarla otra vez, los términos radiales son $\ddot{\rho}\mathbf{e}_r - \rho\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r$ y los tangenciales son $\dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta$. Reunirlos da la aceleración. $\square$

El término $-\rho\dot{\theta}^2$ aparece porque la dirección radial gira. También $2\dot{\rho}\dot{\theta}$ registra el cambio simultáneo del radio y de la dirección. Omitir la derivación de la base eliminaría ambos términos y alteraría las ecuaciones físicas.

Proposición 15.16 — Balance planar en forma polar. Para una partícula de masa constante,

$$L_z = m\rho^2\dot\theta, \qquad \tau_z = \rho F_\theta, \qquad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\theta) = \rho F_\theta.$$

Demostración. En definición 15.1, el producto de $\rho\mathbf{e}_r$ con $m\dot\rho\mathbf{e}_r$ es cero, y $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z$ da el primer resultado. Descomponer $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta$ produce el segundo. Proposición 15.3 da el tercero. También se obtiene multiplicando por ρ la ecuación tangencial de Newton deducida de la proposición 15.15. □

Cuando $F_\theta = 0$, el producto $\rho^2\dot\theta$ es constante. Si el radio disminuye, la magnitud de $\dot\theta$ crece para un momento angular no nulo. Esta conclusión no requiere que el movimiento sea circular. En un movimiento circular de radio fijo, en cambio, la relación se reduce a $L_z = m\rho^2\dot\theta$ con coeficiente constante.

Una fuerza radial puede hacer que ρ cambie y, con ello, que cambie $\dot\theta$. Su torque sigue siendo cero. El torque controla la derivada del momento angular; usarlo directamente como medida del cambio de velocidad angular sólo es válido cuando se han controlado los otros factores.[3]

Principio metodológico 15.9. Al derivar en coordenadas polares, deriva también la base. Mantén separadas la rapidez tangencial $\rho|\dot\theta|$, la velocidad angular y el momento angular.

Ejercicios. Ejercicio 15.17. Una partícula conserva $L_z \neq 0$. En dos instantes, sus distancias al origen son a y $2a$, con $a > 0$. Compara sus velocidades angulares y sus rapideces tangenciales. ¿Puede compararse su rapidez total con esos datos?

Solución. proposición 15.16 da $\dot\theta_b = \dot\theta_a/4$. La velocidad tangencial orientada es $v_\theta = L_z/(m\rho)$, de modo que $v_{\theta,b} = v_{\theta,a}/2$. Los signos se mantienen porque L_z es fijo y los radios son positivos. La rapidez total satisface $|\mathbf{v}|^2 = \dot\rho^2 + v_\theta^2$. Las velocidades radiales de ambos estados no están dadas, por lo que la razón de las rapideces totales queda indeterminada.

Ejercicio 15.18. En un intervalo con $\rho > 0$, se prescribe $\rho(t) = a + ct$ y $\theta(t) = \omega t$, con $a > 0$ y $\omega \neq 0$. Calcula la fuerza necesaria y decide cuándo puede ser puramente radial.

Solución. Las derivadas son $\dot\rho = c$, $\ddot\rho = 0$, $\dot\theta = \omega$ y $\ddot\theta = 0$. Proposición 15.15 y Newton dan $F_r = -m(a+ct)\omega^2$ y $F_\theta = 2mc\omega$. El torque es $2mc\omega(a+ct)$, igual a la derivada de $m(a+ct)^2\omega$. Dado que $\omega \neq 0$, la fuerza es puramente radial exactamente cuando $c = 0$. Un radio que cambia linealmente y una velocidad angular no nula constante requieren fuerza tangencial.

10. El área que barre una dirección

La relación $\rho^2\dot\theta =$ constante tiene una lectura geométrica: el segmento que une el origen con la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales. Podemos obtenerla sin conocer la forma de la trayectoria.

[3]MIT OpenCourseWare, *Classical Mechanics*, 8.01SC, capítulo 25, §25.3, relación entre momento angular y movimiento polar. https://ocw.mit.edu/courses/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/mit8_01scs22_chapter25new.pdf. La derivación de velocidad y aceleración, el converso planar, los balances con potencial temporal y las cotas impulsivas se demuestran en este capítulo.

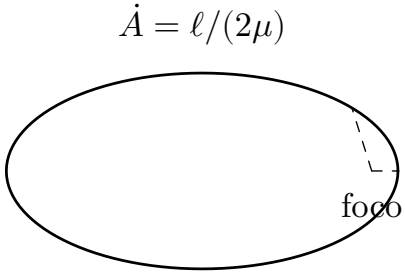


Figura 15.3. La tasa de área barrida por el vector relativo es $\dot{A} = \ell/(2\mu)$. Si el torque respecto del centro es nulo, esa tasa firmada es constante. Véase §10.

Para un pequeño cambio de ángulo, el área de un sector circular de radio ρ es $\rho^2\, d\theta/2$. Si el radio cambia durante el movimiento, usamos esa relación local e integramos. La orientación cuenta: un giro antihorario contribuye con signo positivo; uno horario, con signo negativo.

Definición 15.9 — Área barrida orientada. Para una trayectoria planar diferenciable respecto de un origen fijo,

$$\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t_a) = \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t} (x\dot{y} - y\dot{x})\, ds.$$

La fórmula cartesiana sigue teniendo sentido en un paso por el origen. Cuando hay coordenadas polares regulares, el integrando es $\rho^2\dot{\theta}$. La derivada $\dot{\mathcal{A}}$ se llama velocidad areolar orientada.

Proposición 15.17 — Relación entre área y momento angular.

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{L_z}{2m}.$$

Si L_z es constante, para cualesquiera t_a, t_b del intervalo,

$$\mathcal{A}(t_b) - \mathcal{A}(t_a) = \frac{L_z}{2m}(t_b - t_a).$$

Demostración. El teorema fundamental del cálculo aplicado a definición 15.9 da $\dot{\mathcal{A}} = (x\dot{y} - y\dot{x})/2$. La expresión cartesiana de la definición 15.1 identifica ese numerador con L_z/m. Integrar cuando L_z es constante da la segunda fórmula. □

Para un momento no nulo constante, el sentido del giro tampoco puede cambiar mientras $\rho > 0$: proposición 15.16 fija el signo de $\dot{\theta}$. La magnitud de la velocidad areolar es constante. Si la trayectoria se cruza o recorre varias veces una región, definición 15.9 contabiliza las áreas barridas con orientación y multiplicidad. No mide necesariamente el área del conjunto de puntos visitado una sola vez.

Proposición 15.18 — Converso planar local. Para una partícula de masa constante, trayectoria dos veces diferenciable, $\rho > 0$ y fuerza total planar que satisface Newton, una velocidad areolar orientada constante implica fuerza total radial respecto del origen.

Demostración. proposición 15.17 da L_z constante, de modo que $\tau_z = 0$ por la proposición 15.3. Proposición 15.16 da $\rho F_\theta = 0$. Como $\rho > 0$, resulta $F_\theta = 0$. En el plano, la fuerza queda paralela a $\mathbf{e}_r$. □

La conclusión se refiere a la fuerza total y a ese punto fijo. No identifica la ley de magnitud de la fuerza ni cada contribución individual. Tampoco prueba una ley gravitatoria inversa del cuadrado.

En tres dimensiones, conservar sólo una velocidad areolar proyectada fija una componente del torque; el converso requiere la hipótesis planar que se declaró.

La ley de áreas aparecerá de nuevo al estudiar las órbitas de Kepler. Aquí tenemos su estructura mecánica: el balance angular relaciona geometría y fuerza. La identificación de una órbita concreta exigirá otras ecuaciones y datos.

Principio metodológico 15.10. Precisa el origen y la orientación del área. Una regularidad areolar permite inferir torque bajo hipótesis dinámicas; la forma de la fuerza requiere información adicional.

Ejercicios. Ejercicio 15.19. Una partícula de masa $3\,\mathrm{kg}$ tiene momento angular constante $L_z = -12\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$. Calcula el área orientada barrida en $5\,\mathrm{s}$ y explica el signo.

Solución. proposición 15.17 da $\dot{\mathcal{A}} = -12/(2\cdot 3) = -2\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$. En cinco segundos la contribución orientada es $-10\,\mathrm{m^2}$. El signo indica giro horario en la orientación elegida. La magnitud barrida, contada con multiplicidad si hubiera vueltas repetidas, es $10\,\mathrm{m^2}$.

Ejercicio 15.20. Se observa un movimiento planar regular que evita el origen y tiene velocidad areolar constante. Alguien concluye que la fuerza total es gravitatoria, con magnitud proporcional a $1/\rho^2$. Evalúa la conclusión.

Solución. Si aceptamos masa constante y Newton, proposición 15.18 permite concluir que la fuerza total es radial. La ley de magnitud no queda determinada por esa observación. Un contraejemplo es una partícula libre en $\mathbf{r} = (ut, b, 0)$ con $b \neq 0$: la fuerza es cero y $x\dot{y} - y\dot{x} = -bu$ es constante. Otro es una órbita circular bajo una fuerza elástica $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, con $k = m\omega^2 > 0$: su área crece a razón constante y la ley elástica tiene magnitud $k\rho$. El dato areolar no distingue esas leyes.

11. Fuerza radial, torque y energía

La conservación angular responde a la dirección de la fuerza respecto de un punto. La energía requiere conocer además su trabajo. Una fuerza radial tiene torque cero, pero puede realizar trabajo cuando cambia el radio.

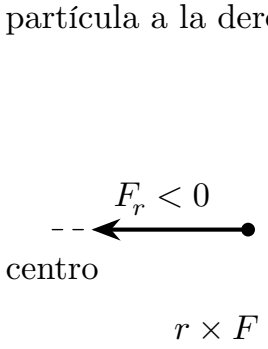


Figura 15.4. Una fuerza radial tiene torque nulo respecto del centro porque es paralela a r. Puede cambiar la rapidez radial aunque conserve el momento angular. Véase §11.

Proposición 15.19 — Potencia en el movimiento planar. Para una partícula sometida a fuerza total $\mathbf{F}$,

$$\frac{dK}{dt} = F_r\dot{\rho} + F_\theta\rho\dot{\theta} = F_r\dot{\rho} + \tau_z\dot{\theta}.$$

Demostración. El teorema de la energía cinética del capítulo capítulo 12 da $\dot{K} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Proposición 15.15 descompone la velocidad en una base ortonormal. El producto escalar es $F_r\dot{\rho} + F_\theta\rho\dot{\theta}$. Por proposición 15.16, $\rho F_\theta = \tau_z$. □

Por tanto, $\tau_z = 0$ elimina la potencia tangencial, pero deja el término $F_r\dot{\rho}$. Una fuerza atractiva puede aumentar la energía cinética mientras la partícula se acerca al origen y disminuirla mientras se aleja. El momento angular permanece constante en ambos procesos.

Para un movimiento circular de radio fijo, $\dot{\rho} = 0$ y proposición 15.19 se reduce a $\dot{K} = \tau_z\dot{\theta}$. Esta relación ayuda a interpretar el trabajo de una fuerza tangencial. Al dejar libre el radio hay que recuperar el término radial.

Definición 15.10 — Potencial radial, posiblemente dependiente del tiempo. Una función diferenciable $U(\rho, t)$ representa una fuerza radial cuando $F_r = -\partial_\rho U$ y $F_\theta = 0$. La presencia de t permite describir un agente que cambia la interacción; no se presupone conservación de energía mecánica.

Proposición 15.20 — Balance energético con potencial radial. Si la fuerza total está dada por la definición 15.10,

$$\frac{d}{dt}(K + U) = \partial_t U, \qquad \frac{dL_z}{dt} = 0.$$

En particular, cuando U es independiente del tiempo, $K + U$ se conserva.

Demostración. proposición 15.19 da $\dot{K} = -(\partial_\rho U)\dot{\rho}$. La regla de la cadena da $\dot{U} = (\partial_\rho U)\dot{\rho} + \partial_t U$. Los términos radiales se cancelan al sumar. La conservación angular procede de $F_\theta = 0$ y proposición 15.16. □

Proposición 15.20 permite conservar momento angular mientras cambia la energía mecánica. Por ejemplo, para un resorte cuya rigidez varía según una función prescrita $k(t) > 0$, el modelo $\mathbf{F} = -k(t)\mathbf{r}$ tiene $U = k(t)\rho^2/2$. El agente que modifica la rigidez aporta o extrae energía; el balance angular sigue teniendo torque cero respecto del centro de la fuerza.

Agregar a U una función arbitraria $c(t)$ conserva la fuerza, pero modifica tanto $K + U$ como el término $\partial_t U$ en la misma cantidad derivada. Por eso, al interpretar un intercambio energético mediante un potencial dependiente del tiempo, debe mantenerse declarada la convención del potencial y el modelo del agente. Para el potencial autónomo, agregar una constante sólo cambia el cero de energía.

Principio metodológico 15.11. Controla torque y potencia por separado. La fuerza radial conserva momento angular; la conservación de energía mecánica necesita además un balance energético que incluya las dependencias temporales y los agentes relevantes.

Ejercicios. Ejercicio 15.21. Una partícula está sometida únicamente a $\mathbf{F} = -k(t)\mathbf{r}$, con $k(t) > 0$ diferenciable. Decide qué se conserva respecto del origen y calcula la tasa de cambio de $E = K + k(t)\rho^2/2$.

Solución. La fuerza es radial y su producto con $\mathbf{r}$ es cero, por lo que el momento angular se conserva. El potencial elegido es $U = k(t)\rho^2/2$, y proposición 15.20 da $\dot{E} = \dot{k}(t)\rho^2/2$. Si la rigidez aumenta, esa energía mecánica crece; si disminuye, decrece, salvo en instantes con $\rho = 0$. La variación pertenece al modelo de interacción regulada por un agente externo. Un torque cero no obliga a que ese agente realice trabajo cero.

Ejercicio 15.22. En cierto instante, $\rho = 2\,\mathrm{m}$, $\dot{\rho} = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\dot{\theta} = 1\,\mathrm{s^{-1}}$, $F_r = -5\,\mathrm{N}$ y $F_\theta = 4\,\mathrm{N}$. Calcula torque y potencia. ¿Qué parte de la potencia proviene del cambio radial?

Solución. El torque es $\tau_z = \rho F_\theta = 8\,\mathrm{N\,m}$. La potencia tangencial es $\tau_z\dot\theta = 8\,\mathrm{W}$. La radial es $F_r\dot\rho = (-5)(-3) = 15\,\mathrm{W}$, positiva porque fuerza y velocidad radial apuntan hacia adentro. La potencia total es 23 W. Identificar toda la potencia con $\tau_z\dot\theta$ omitiría 15 W.

12. Impulsos y posición durante el contacto

Una fuerza muy intensa durante un tiempo breve puede producir un cambio importante de momento. El balance angular sigue siendo una integral de torque. Para reducirla al producto de una posición por un impulso necesitamos controlar cuánto se movió el punto de aplicación.

Tomemos una partícula y un origen fijo O. Para la fuerza total durante $[t_a, t_b]$, los balances exactos son

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{J} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(t)\,dt, \qquad \Delta\mathbf{L}_O = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t)\,dt.$$

El segundo se obtiene integrando proposición 15.3. La posición dentro de la integral es la posición durante la acción de la fuerza. Sustituirla por una posición representativa produce, en general, una aproximación.

Definición 15.11 — Impulso de magnitud acumulada. Para una fuerza integrable, definimos

$$J_{\mathrm{abs}} = \int_{t_a}^{t_b} |\mathbf{F}(t)|\,dt.$$

Siempre $|\mathbf{J}| \le J_{\mathrm{abs}}$. La desigualdad puede ser estricta si la fuerza cambia de dirección y sus contribuciones al impulso vectorial se cancelan.

Proposición 15.21 — Cota de la aproximación de posición fija. Si $|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_*| \le \varepsilon$ durante el contacto, entonces

$$|\Delta\mathbf{L}_O - \mathbf{r}_*\times\mathbf{J}| \le \varepsilon J_{\mathrm{abs}}.$$

Demostración. Restar $\mathbf{r}_*\times\int\mathbf{F}\,dt$ del balance exacto deja $\int(\mathbf{r}-\mathbf{r}_*)\times\mathbf{F}\,dt$. La desigualdad triangular para integrales y $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ dan una cota $\int\varepsilon|\mathbf{F}|\,dt = \varepsilon J_{\mathrm{abs}}$. □

La duración pequeña no garantiza por sí sola que ε sea pequeño: también cuenta la rapidez durante el intervalo. Si ésta está acotada por $v_{\mathrm{máx}}$ y elegimos $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(t_a)$, entonces $\varepsilon \le v_{\mathrm{máx}}(t_b - t_a)$. La cota angular queda expresada con datos de movimiento y de fuerza.

La cota es absoluta. Para estimar un error relativo hay que dividir por una escala angular no nula. Si $\mathbf{r}_*\times\mathbf{J} = 0$, esa cantidad no sirve como denominador. Tampoco se puede sustituir J_{abs} por $|\mathbf{J}|$ en la proposición 15.21: una fuerza puede acumular impulsos grandes de sentidos opuestos y dejar un impulso total pequeño.

Proposición 15.22 — Impulso y cambio del momento angular interno de un par. En el modelo de un impulso instantáneo a posiciones fijas $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, si los cambios de momento son $\Delta\mathbf{p}_1 = \mathbf{j}$ y $\Delta\mathbf{p}_2 = -\mathbf{j}$, entonces $\Delta\mathbf{P} = 0$ y

$$\Delta\boldsymbol{\ell} = \mathbf{q}\times\mathbf{j}, \qquad \mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Si $\mathbf{j}$ es paralela a $\mathbf{q}$, el momento angular interno se conserva.

Demostración. Las posiciones y el centro $\mathbf{R}$ no cambian durante el salto idealizado. Como $\Delta\mathbf{P} = 0$, proposición 15.11 implica que $\Delta\boldsymbol{\ell} = \Delta\mathbf{L}_A$ para cualquier punto de posición fija durante el salto. Definición 15.3 da $\Delta\mathbf{L}_A = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{j} - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{j} = \mathbf{q} \times \mathbf{j}$. □

Para un contacto de duración finita, la afirmación exacta se formula mediante los torques internos durante el contacto. Si las fuerzas del par son centrales en cada instante, proposición 15.8 conserva el momento angular total sin necesidad de congelar posiciones. La aproximación instantánea resulta útil para conectar estados, pero debe conservar esas condiciones de interacción.

Ni proposición 15.21 ni proposición 15.22 suministran una ley de restitución o el reparto de energía. Si el contacto tiene fricción y los objetos pueden girar internamente, un modelo que sólo conserva sus centros como partículas puede perder una parte del momento angular. El estudio de cuerpos rígidos añadirá esa información.

Principio metodológico 15.12. En un balance impulsivo, declara si las posiciones son exactas, congeladas por idealización o aproximadas con una cota. Usa magnitudes acumuladas para controlar errores cuando hay cancelaciones.

Ejercicios. Ejercicio 15.23. En un modelo de impulso instantáneo, una partícula está en $(a, b, 0)$ y recibe $\mathbf{J} = (0, j, 0)$. Calcula los cambios de momento angular respecto de O y de $B = (a, 0, 0)$.

Solución. Con posiciones fijas, $\Delta\mathbf{L}_O = (a, b, 0) \times (0, j, 0) = aj\,\mathbf{e}_z$. Respecto de B, la posición relativa es $(0, b, 0)$ y el cambio angular es cero. El impulso pasa por la línea que contiene a B. Proposición 15.5 también lo verifica: $\Delta\mathbf{L}_B = \Delta\mathbf{L}_O - \mathbf{R}_B \times \Delta\mathbf{p} = aj\mathbf{e}_z - aj\mathbf{e}_z = 0$.

Ejercicio 15.24. Durante un contacto, el punto de aplicación se desplaza como máximo 2 mm respecto de la posición elegida y $J_{\text{abs}} = 30\,\text{N s}$. Estima el error angular absoluto. Si el producto aproximado tiene magnitud $0,01\,\text{kg m}^2\,\text{s}^{-1}$, ¿la cota garantiza un error pequeño respecto de ese valor?

Solución. proposición 15.21 da $\varepsilon J_{\text{abs}} = 0,002 \cdot 30 = 0,06\,\text{kg m}^2\,\text{s}^{-1}$. La cota es seis veces la magnitud aproximada. Por ello no garantiza una precisión relativa pequeña. El desplazamiento en milímetros puede ser pequeño en una descripción espacial y, aun así, insuficiente para un balance angular cuyo resultado es cercano a cero.

Ejercicio 15.25. Dos partículas en separación $\mathbf{q} = a\mathbf{e}_x$ reciben impulsos internos $\mathbf{j} = j\mathbf{e}_y$ y $-\mathbf{j}$, con $a, j > 0$. Calcula los cambios de momento total y de momento angular interno. Explica qué cambiaría si los impulsos fueran radiales.

Solución. Los impulsos opuestos dan $\Delta\mathbf{P} = 0$. Proposición 15.22 da $\Delta\boldsymbol{\ell} = aj\mathbf{e}_z$, no nulo. Si $\mathbf{j}$ fuese paralelo a $\mathbf{q}$, el producto sería cero y ambos momentos se conservarían. El modelo transversal de dos partículas requiere, para describir un sistema físico completo, identificar el agente o grado omitido que intercambia momento angular. La oposición de impulsos controla la suma lineal, pero su geometría controla la angular.

Ejercicio 15.26. Una partícula parte del origen con velocidad $(u, 0, 0)$ y recibe una fuerza constante $(0, f, 0)$ durante $0 \le t \le T$, con $m, u, f, T > 0$. Calcula exactamente el cambio angular respecto del origen y compáralo con congelar el punto de aplicación en la posición inicial.

Solución. Newton da $\mathbf{v}(t) = (u, ft/m, 0)$ y $\mathbf{r}(t) = (ut, ft^2/(2m), 0)$. El torque es $\boldsymbol{\tau}_O(t) = uft\,\mathbf{e}_z$. Su integral vale $ufT^2\mathbf{e}_z/2$. El momento angular inicial es cero; el final, calculado directamente, es $muT(fT/m) - m[fT^2/(2m)]u = ufT^2/2$, en la componente z. Congelar $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(0) = 0$ daría $\mathbf{r}_* \times \mathbf{J} = 0$ y perdería todo ese cambio. Para u, f fijados el error absoluto tiende a cero como T^2, aunque su proporción respecto del cambio verdadero siga siendo uno. La validez de una aproximación depende de qué escala se quiere resolver.

13. Reconstruir y poner a prueba una inferencia

Los balances se vuelven más útiles cuando se utilizan para comprobar una descripción concreta. Si conocemos una trayectoria, podemos reconstruir la fuerza exigida por Newton y contrastar su torque con la variación angular. Ese procedimiento también revela lo que una observación incompleta deja indeterminado.

En un movimiento planar regular, medir $\rho(t)$ y $\theta(t)$ permite calcular ambas componentes de la fuerza por la proposición 15.15. Medir únicamente la velocidad areolar determina L_z y su derivada, pero deja sin fijar la aceleración radial. Por ejemplo, una misma constante $L_z \neq 0$ es compatible con radios que aumentan, disminuyen o permanecen constantes, si la fuerza radial se ajusta al movimiento correspondiente.

Proposición 15.23 — Reconstrucción planar. Sean $\rho(t) > 0$ y $\theta(t)$ dos veces diferenciables. La única fuerza total compatible con la trayectoria prescrita en el modelo newtoniano de masa m es

$$F_r = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2), \qquad F_\theta = m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}).$$

Si $m\rho^2\dot{\theta} = L$ constante, entonces

$$F_\theta = 0, \qquad F_r = m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3}.$$

Demostración. Newton y proposición 15.15 dan las primeras expresiones y su unicidad para una trayectoria dada. Derivar $m\rho^2\dot{\theta} = L$ produce $2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0$ al dividir por $m\rho > 0$. La fuerza tangencial se anula. Sustituir $\dot{\theta} = L/(m\rho^2)$ en la componente radial da la segunda fórmula. □

Esta reconstrucción describe la fuerza sobre la trayectoria. Para identificar un campo en una región del espacio hace falta más información: otras trayectorias, un modelo funcional o una hipótesis física contrastable. Una ley que coincide con los datos recorridos puede diferir de otra en los lugares que no se visitaron. Del mismo modo, la precisión de una aceleración reconstruida depende de la calidad de las derivadas estimadas; diferenciar datos ruidosos exige un tratamiento de incertidumbre.

En un problema directo se da la fuerza y se busca el movimiento. En uno inverso se da el movimiento y se busca la fuerza compatible. Confundirlos puede producir una deducción circular: escoger una ley, ajustar sus parámetros con la trayectoria y presentar después esa misma trayectoria como verificación independiente.

Principio metodológico 15.13. Al inferir una fuerza, separa los datos medidos, las derivadas estimadas y el modelo dinámico. Distingue conocer la fuerza sobre una trayectoria de conocer su ley en todo un dominio.

Ejercicios. Ejercicio 15.27. Se prescribe, para $t \geq 0$, $\rho(t) = ae^{\gamma t}$ y un momento angular constante $L_z = L \neq 0$, con $a, \gamma > 0$. Obtén $\theta(t)$ a partir de $\theta(0) = 0$ y reconstruye la fuerza total. Decide si esa fuerza es atractiva en todos los instantes.

Solución. proposición 15.16 da $\dot{\theta} = Le^{-2\gamma t}/(ma^2)$. Integrar produce $\theta(t) = L[1-e^{-2\gamma t}]/(2m\gamma a^2)$. La aceleración radial de la distancia es $\ddot{\rho} = \gamma^2\rho$, y proposición 15.23 da $F_r = m\gamma^2\rho - L^2/(m\rho^3)$, con $F_\theta = 0$. La fuerza es atractiva cuando $m^2\gamma^2\rho^4 < L^2$, nula en la igualdad y repulsiva cuando la desigualdad se invierte. Como ρ crece sin cota, termina siendo repulsiva. Es radial durante todo el movimiento y conserva L, aunque su sentido cambie. La posición angular tiende a un valor finito porque la velocidad angular decrece exponencialmente.

Ejercicio 15.28. Dos partículas de masa m ocupan inicialmente $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{r}_2 = -a\mathbf{e}_x$, con velocidades $\mathbf{v}_1 = u\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{v}_2 = -u\mathbf{e}_y$, donde $a, u > 0$. No tienen interacción interna y reciben fuerzas externas constantes $\mathbf{F}_1 = f\mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_2 = -f\mathbf{e}_y$, con $f > 0$, durante un tiempo T. Calcula el movimiento del centro, el momento angular total respecto de él y la variación de energía cinética.

Solución. La resultante externa es cero y el momento inicial total también. El centro permanece en el origen. Las posiciones son $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{e}_x + [ut + ft^2/(2m)]\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$; las velocidades son $\mathbf{v}_1 = (u + ft/m)\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$. Cada producto angular aporta $ma(u + ft/m)\mathbf{e}_z$, por lo que $\boldsymbol{\ell}(t) = 2ma(u + ft/m)\mathbf{e}_z$ y $\Delta\boldsymbol{\ell} = 2afT\mathbf{e}_z$. Los torques externos suman $2af\mathbf{e}_z$, lo que verifica el balance. La energía cinética total pasa de mu^2 a $m(u + fT/m)^2$, con cambio $2ufT + f^2T^2/m$. Las fuerzas realizan trabajo positivo sobre partículas que se mueven en sentidos opuestos. Un centro inmóvil y momento lineal conservado coexisten con cambios angulares y energéticos.

14. Elegir el balance que responde al problema

La descripción angular empieza por un punto de referencia. Una vez fijado, las posiciones y momentos dan una cantidad que podemos calcular en cada estado. La ecuación dinámica relaciona su cambio con los torques y, cuando el punto se mueve, con el término de transporte. El centro de masa ofrece una elección particularmente fértil porque separa la traslación colectiva del movimiento interno y cancela ese transporte para masas constantes.

Esta separación también ayuda a decidir qué se quiere determinar. El torque total informa sobre la variación angular; la resultante informa sobre el momento lineal; la potencia informa sobre la energía cinética. Una de esas sumas puede anularse mientras las otras permanecen distintas de cero. Los ejercicios del capítulo permiten comprobarlo con trayectorias, fuerzas e impulsos explícitos.

Proposición 15.24 — Conservación en dos referencias fijas. Sea un sistema material fijo con resultante y torque internos totales nulos. Sean A, B fijos en el marco inercial y $\mathbf{d} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$. Si $\boldsymbol{\tau}_A^{\text{ext}} = 0$ durante un intervalo, entonces $\mathbf{L}_A$ se conserva y $\mathbf{L}_B$ se conserva exactamente cuando

$$\mathbf{d} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$$

en todos los instantes del intervalo, donde $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ es la resultante externa.

Demostración. proposición 15.10 da conservación de $\mathbf{L}_A$. La resultante interna nula y Newton dan el balance lineal $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$. Al derivar proposición 15.5 para puntos fijos,

$$\dot{\mathbf{L}}_B = -\mathbf{d} \times \mathbf{F}^{\text{ext}}.$$

Su anulación durante todo el intervalo es equivalente a que $\mathbf{L}_B$ sea constante. □

Para proposición 15.24 se requiere el balance lineal indicado además de la cancelación del torque interno. En los sistemas con fuerzas internas iguales, opuestas y centrales ambos están justificados. Si sólo se sabe que el torque interno total es cero, esa información aislada no garantiza resultante interna cero; el balance lineal debe comprobarse por separado.

Una partícula bajo una fuerza radial respecto de A conserva su momento angular respecto de A. Si B está fuera de la línea instantánea de la fuerza, su torque respecto de B puede ser no nulo. En cambio, para un sistema sin resultante externa y sin torque externo, la conservación angular se mantiene en cualquier referencia fija. El alcance de la conservación depende del sistema y de sus agentes, además de la geometría.

Al resolver un problema pueden organizarse las comprobaciones así:

Lo que se busca	Información necesaria	Comprobación decisiva
Momento angular en un estado	Posiciones, momentos y punto	Orden del producto, signo y unidades
Cambio angular durante una interacción	Torques, intervalo y movimiento del punto	Torque interno y transporte
Conservación de una componente	Dirección fija y componente de torque	Derivar la componente correcta
Movimiento interno del sistema	Centro de masa y velocidades relativas	Sumas ponderadas y fuerzas internas
Cambio angular impulsivo	Impulsos y posiciones durante el contacto	Cota de la posición congelada
Trayectoria planar completa	Ley de fuerza y datos iniciales	Ecuación radial además del balance angular

Principio metodológico 15.14. Define sistema, marco, punto e intervalo; calcula torques e identifica qué cancela. Usa la conservación que efectivamente se deduce, conserva las incógnitas que siguen libres y verifica el resultado mediante energía, unidades y casos límite cuando aporten información.

Ejercicios. Ejercicio 15.29. Una partícula libre tiene posición $\mathbf{r}(t) = ut\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$, con $u, b > 0$. Compara sus momentos angulares respecto del origen fijo y del punto móvil $\mathbf{R}_A(t) = wt\mathbf{e}_y$, con $w > 0$. Un estudiante usa torque cero para afirmar conservación respecto de ambos. Repara su argumento.

Solución. Respecto del origen, $\mathbf{L}_O = -mbu\mathbf{e}_z$ es constante. Respecto del punto móvil, $\mathbf{L}_A = -mu(b-wt)\mathbf{e}_z$, que cambia a razón $muw\mathbf{e}_z$. El torque es cero en ambas referencias porque la fuerza es cero. La ecuación apropiada para el punto móvil es proposición 15.4: $-\mathbf{V}_A \times \mathbf{p} = -(w\mathbf{e}_y) \times (mu\mathbf{e}_x) = muw\mathbf{e}_z$. El argumento del estudiante necesita la hipótesis de punto fijo o transporte nulo; sólo la cumple el origen.

Ejercicio 15.30. En un experimento idealizado, el centro de masa de un conjunto fijo de partículas permanece en reposo y su momento angular interno es constante durante cierto intervalo. ¿Puede concluirse que no hay fuerzas externas, que la energía cinética es constante o que los miembros están en reposo? Justifica cada respuesta.

Solución. Un centro en reposo implica $\mathbf{P} = 0$ y, si las fuerzas internas suman cero, resultante externa cero. No exige que cada fuerza externa sea cero. Para verlo, tomemos dos masas iguales en posiciones opuestas respecto del origen, inicialmente en reposo, sometidas a fuerzas externas iguales y opuestas dirigidas a lo largo de esa misma recta. Con fuerza constante $\pm f\mathbf{e}_x$, sus posiciones siguen siendo opuestas y sus velocidades son $\pm(ft/m)\mathbf{e}_x$. El centro queda inmóvil, y cada momento angular respecto de él es cero porque posición y velocidad son colineales. Sin embargo, ambas partículas se mueven y la energía cinética total crece como f^2t^2/m. Así, los datos colectivos no prueban ausencia de fuerzas, conservación cinética ni reposo de los miembros. Para obtener esas conclusiones harían falta otras hipótesis.

El momento angular ofrece una reducción poderosa cuando la interacción tiene la geometría adecuada. En el problema de dos cuerpos, la masa reducida y la conservación angular permitirán

organizar el movimiento orbital; la gravitación determinará una ley concreta de fuerza. Para cuerpos extensos habrá que recuperar la distribución de masa y los grados internos de rotación. Las cantidades construidas aquí seguirán siendo el punto de partida de esos desarrollos.

Capítulo 16

Gravitación newtoniana

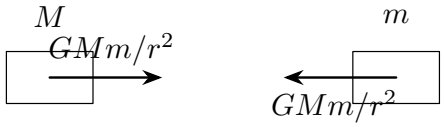
Una piedra que cae cerca de la superficie y una luna que se mantiene alrededor de un planeta plantean problemas distintos de movimiento. En ambos casos necesitamos identificar una fuerza, pero las escalas espaciales son muy diferentes. La aproximación de una aceleración vertical constante sirve para una caída corta; no puede describir por sí sola cómo cambia la dirección de la atracción a lo largo de una trayectoria extensa.

La ley newtoniana propone una interacción entre masas cuya dirección sigue su separación y cuya magnitud disminuye con el cuadrado de la distancia. De esa propuesta se obtienen un campo, un potencial y balances energéticos que permiten pasar de una distribución de materia a predicciones de fuerza y movimiento. También surgen preguntas que la fórmula de dos partículas deja abiertas: cuándo un cuerpo extenso equivale a una masa puntual, qué significa mantener fija una fuente y qué información puede recuperarse midiendo su campo.

Trabajaremos en un marco inercial, con masas positivas constantes, velocidades no relativistas y un régimen donde la descripción gravitatoria newtoniana sea adecuada. Las fuentes puntuales se distinguen de las distribuciones extensas; las coincidencias con una fuente puntual se excluyen del dominio. Los resultados exactos que se demuestren se entienden dentro del modelo. Las fuerzas de contacto, el rozamiento, la rotación del laboratorio o la modificación de la distribución de masa se incluirán cuando formen parte del problema.

1. Una ley entre masas

Si dejamos caer dos cuerpos de masas distintas desde una misma altura, la fuerza gravitatoria puede ser diferente aunque sus aceleraciones sean iguales. La diferencia se comprende al usar Newton: una fuerza proporcional a la masa acelera una inercia proporcional a esa misma masa. La igualdad de aceleraciones presupone, además, que los cuerpos comparados se encuentran en el mismo campo y que las otras fuerzas se han controlado.



fuerzas opuestas; aceleraciones distintas si $M \neq m$

Figura 16.1. Las dos fuerzas gravitatorias son opuestas y tienen módulo GMm/r^2. Dividir cada fuerza por la masa del cuerpo correspondiente da las dos aceleraciones. Véase §1.

Definición 16.1 — Separación orientada. Para partículas situadas en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, escribimos $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $q = |\mathbf{q}| > 0$ y $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$. El vector $\hat{\mathbf{q}}$ apunta desde la partícula 2 hacia la 1.

Ley física 16.1 — Gravitación newtoniana entre partículas. Adoptamos para la fuerza que 2 ejerce sobre 1,

$$\mathbf{F}_{12} = -Gm_1m_2\frac{\mathbf{q}}{q^3} = -\frac{Gm_1m_2}{q^2}\hat{\mathbf{q}}, \qquad G > 0.$$

Es una ley física empírica del modelo, no una consecuencia de las definiciones de fuerza o masa. El signo negativo expresa atracción: la fuerza sobre 1 apunta hacia 2. Para un sistema de varias partículas adoptaremos también la suma de interacciones por pares.[1]

Usamos una misma masa en el momento lineal $m\mathbf{v}$ y en la ley gravitatoria. Si se distinguieran masa inercial m_{i} y masa gravitatoria pasiva m_{g}, la aceleración en un campo dado sería $(m_{\mathrm{g}}/m_{\mathrm{i}})\mathbf{g}$. La universalidad de la caída requiere un mismo cociente para los cuerpos comparados. La convención usual incorpora ese cociente común en la definición de las masas y de G. La cancelación algebraica que sigue utiliza esa identificación física.

Proposición 16.1 — Aceleraciones del par. Si las únicas fuerzas son las de L01,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2\frac{\mathbf{q}}{q^3}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1\frac{\mathbf{q}}{q^3}.$$

Las magnitudes de las aceleraciones están en razón $|\ddot{\mathbf{r}}_1|/|\ddot{\mathbf{r}}_2| = m_2/m_1$.

Demostración. Dividimos la fuerza sobre cada partícula por su masa inercial, que es la usada en L01. Intercambiar los índices invierte $\mathbf{q}$. Las magnitudes son Gm_2/q^2 y Gm_1/q^2, respectivamente. □

La aceleración de 1 no contiene su propia masa, pero la de 2 sí cambia si modificamos m_1. Por eso comparar trayectorias completas de cuerpos de masas distintas exige decidir si la fuente responde al movimiento. El modelo de fuente fija y la aproximación de partícula de prueba se examinarán en §8.

Principio metodológico 16.1. Distingue ley de interacción, ecuación dinámica y consecuencia calculada. Al cancelar una masa, conserva visibles las hipótesis que permiten usarla en ambos lugares.

Ejercicios. Ejercicio 16.1. Dos partículas de masas m y $4m$ están separadas por una distancia $d > 0$ y sólo interactúan gravitatoriamente. Compara sus fuerzas y aceleraciones.

Solución. Ambas fuerzas tienen magnitud $4Gm^2/d^2$ y sentidos opuestos. La masa m tiene aceleración de magnitud $4Gm/d^2$; la masa $4m$, de magnitud Gm/d^2. La menor acelera cuatro veces más. Fuerzas iguales en magnitud no implican aceleraciones iguales cuando las inercias son distintas.

Ejercicio 16.2. En un modelo alternativo, dos cuerpos de igual masa inercial tienen cocientes $m_{\mathrm{g}}/m_{\mathrm{i}} = 1$ y $1+\eta$, con $\eta > -1$. En un campo gravitatorio $\mathbf{g}$ idéntico, calcula la diferencia de aceleraciones cuando no hay otras fuerzas.

Solución. Sus aceleraciones son $\mathbf{a}_1 = \mathbf{g}$ y $\mathbf{a}_2 = (1+\eta)\mathbf{g}$. La diferencia es $\eta\mathbf{g}$. La igualdad se recupera para $\eta = 0$. Esta comparación prueba qué premisa se necesita para la caída universal; no se deduce de la sola proporcionalidad gravitatoria ni de Newton sin la relación entre ambas masas.

---

[1] MIT OpenCourseWare, *Classical Mechanics*, 8.01SC, capítulo 9, §9.2.1, ley de gravitación entre partículas. https://ocw.mit.edu/courses/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/mit8_01scs22_chapter9.pdf.

2. Dirección, unidades y escala

La forma vectorial de la ley elimina una ambigüedad frecuente. Si escribimos sólo Gm_1m_2/q^2, tenemos la magnitud positiva de la fuerza. Para obtener sus componentes hay que multiplicar por una dirección y fijar el sentido atractivo.

Proposición 16.2 — Oposición y centralidad. Las fuerzas de L01 satisfacen $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ y $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = 0$. Por ello su resultante interna y su torque interno total se anulan.

Demostración. Al intercambiar los índices, el producto de masas y la distancia permanecen iguales y la separación cambia de signo. La fuerza es un múltiplo de la separación, cuyo producto vectorial consigo misma es cero. La agrupación por pares del capítulo capítulo 15 convierte ese producto en el torque interno del par. □

Esta propiedad permite aplicar los balances lineal y angular de los capítulos anteriores. Su conservación para un sistema concreto todavía requiere controlar los agentes externos.

Proposición 16.3 — Dimensiones y cambio de escala. La constante gravitatoria tiene dimensiones

$$[G] = \mathsf{L}^3\mathsf{M}^{-1}\mathsf{T}^{-2}.$$

Si ambas masas se multiplican por factores $\alpha, \beta > 0$ y la distancia por $\lambda > 0$, la magnitud de la fuerza se multiplica por $\alpha\beta/\lambda^2$.

Demostración. Despejar G de $F = Gm_1m_2/q^2$ da $[G] = [F]\mathsf{L}^2/\mathsf{M}^2$. Como $[F] = \mathsf{MLT}^{-2}$, resulta la dimensión indicada. La segunda afirmación se obtiene sustituyendo las masas y la distancia modificadas en la misma ley. □

En SI puede escribirse $\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ o $\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$. Para cálculos pedagógicos usaremos $G \simeq 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. El valor recomendado por CODATA 2022, consultado en NIST, es $6,67430(15) \times 10^{-11}$ en esas unidades; el paréntesis expresa incertidumbre estándar en las últimas cifras. G se determina experimentalmente.[2]

Una fuerza entre masas ordinarias puede ser muy pequeña comparada con las fuerzas de contacto del laboratorio. Esa comparación depende de las masas y de las separaciones, no del número de G aislado de sus unidades. Una estimación de orden de magnitud permite decidir qué efectos del entorno podrían ocultar la interacción buscada.

La singularidad cuando $q \to 0$ exige otro cuidado: dos objetos extensos no continúan siendo partículas puntuales cuando sus tamaños importan para la geometría. Antes de extrapolar una fuerza divergente habría que revisar ese modelo y las interacciones que aparecen en el contacto.

Principio metodológico 16.2. Empieza por estimar la escala de la fuerza y de la aceleración. Comprueba unidades, distancia entre los puntos adecuados y tamaño de los cuerpos antes de aplicar la ley puntual.

Ejercicios. Ejercicio 16.3. Dos masas puntuales de $1\,\mathrm{kg}$ se encuentran a $0,10\,\mathrm{m}$. Estima su fuerza gravitatoria. Después duplica ambas masas y triplica la distancia.

Solución. Con el valor redondeado de G, la fuerza inicial es $6,67 \times 10^{-11}/0,10^2 = 6,67 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}$. Los cambios multiplican la fuerza por $2 \cdot 2/3^2 = 4/9$, por lo que la nueva magnitud es aproximadamente $2,96 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}$. Aunque aumenta cada masa, el crecimiento de la distancia domina esta comparación.

[2] NIST, *CODATA 2022 — Newtonian constant of gravitation*: valor $G = 6,67430(15) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg=. Consulta: 14 de octubre de 2026. Para los ejercicios numéricos se declara el valor redondeado utilizado.

Ejercicio 16.4. La partícula 1 está en $(0,0,0)$ y la 2 en $(3a,4a,0)$, con $a>0$. Expresa la fuerza sobre 1 en componentes.

Solución. La separación definida en la definición 16.1 es $\mathbf{q}=(-3a,-4a,0)$ y $q=5a$. Por L01, $\mathbf{F}_{12}=Gm_1m_2(3,4,0)/(125a^2)$. Su magnitud es $Gm_1m_2/(25a^2)$ y sus componentes son positivas: apunta desde 1 hacia 2. El factor 125 procede del cubo de la distancia en la expresión que multiplica al vector separación, no de una ley inversa del cubo para la magnitud.

3. De una fuerza a un campo

Para estudiar el movimiento de distintas partículas alrededor de una misma distribución de masa, resulta cómodo separar lo que pertenece a la fuente de lo que pertenece a la partícula atraída. La fuerza contiene ambas masas; dividir por la masa de prueba deja una función del lugar.

Definición 16.2 — Campo gravitatorio de una fuente puntual. Una masa M situada en $\mathbf{R}$ produce, para $\mathbf{x}\neq\mathbf{R}$,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=-GM\frac{\mathbf{x}-\mathbf{R}}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|^3}.$$

Una partícula de masa m situada en $\mathbf{x}$ recibe fuerza $m\mathbf{g}(\mathbf{x})$. El campo tiene unidades de aceleración. Si esa es la única fuerza, la aceleración de la partícula coincide con el campo.

La última condición importa. Una masa sostenida por una mesa puede tener aceleración cero mientras el campo gravitatorio local es no nulo. La fuerza de apoyo completa la suma de fuerzas. Medir peso con un soporte y medir aceleración en caída libre son procedimientos distintos que necesitan modelos de medición distintos.

Proposición 16.4 — Campo central y comparación radial. Para una fuente puntual fija, el campo es radial hacia la fuente y su magnitud a distancia $r>0$ es GM/r^2. Entre dos distancias $r_a,r_b>0$,

$$\frac{|\mathbf{g}(r_b)|}{|\mathbf{g}(r_a)|}=\left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2.$$

Demostración. El vector $\mathbf{x}-\mathbf{R}$ tiene magnitud r. Definición 16.2 divide esa magnitud por r^3 y añade el sentido negativo. Dividir las magnitudes de los dos campos produce la razón. □

El campo describe una asignación espacial, no una trayectoria. Para determinar una trayectoria necesitamos además posición y velocidad iniciales y la ecuación $\ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Si hay otras fuerzas, éstas deben añadirse.

Conocer una trayectoria en un solo lugar tampoco permite conocer de inmediato todo el campo. El capítulo anterior mostró que reconstruir una fuerza sobre una trayectoria es una inferencia más limitada que identificarla en una región.

Principio metodológico 16.3. Al usar $\mathbf{g}$ como aceleración, verifica que se han excluido o incluido las otras fuerzas. Al usarlo como campo, conserva la posición de sus fuentes y su dominio.

Ejercicios. Ejercicio 16.5. En un modelo de fuente puntual fija, el campo tiene magnitud g_a a distancia a. Determina la magnitud a $3a$ y la fuerza sobre una masa m allí.

Solución. proposición 16.4 da $g(3a)=g_a/9$. La fuerza tiene magnitud $mg_a/9$ y apunta hacia la fuente. La masa m cambia la fuerza, pero no el campo prescrito ni la aceleración en caída libre.

Ejercicio 16.6. Una partícula permanece en reposo sobre un soporte en un campo vertical $\mathbf{g}=-g_0\mathbf{e}_z$, con $g_0>0$. ¿Es correcto inferir $\mathbf{g}=0$ a partir de su aceleración cero?

Solución. Newton exige $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$, donde $\mathbf{N}$ es la fuerza de apoyo. Con $\mathbf{a} = 0$, resulta $\mathbf{N} = mg_0\mathbf{e}_z$. La aceleración cero informa sobre la resultante de todas las fuerzas. El campo gravitatorio se mantiene no nulo. La conclusión errónea omite el soporte.

4. Superposición y cancelación

Con dos fuentes hay que sumar dos vectores. Una masa puede atraer hacia la izquierda y otra hacia la derecha; las magnitudes por separado no dicen cuál será el movimiento resultante. En una configuración con simetría pueden desaparecer ciertas componentes y reforzarse otras.

Definición 16.3 — Campo de fuentes puntuales. Para masas $M_j > 0$ situadas en $\mathbf{R}_j$, $j = 1, \dots, n$, adoptamos

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\sum_{j=1}^{n} M_j \frac{\mathbf{x} - \mathbf{R}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|^3}.$$

Se excluyen las posiciones de las fuentes. La superposición es una hipótesis del modelo de interacción por pares; las cancelaciones que siguen son consecuencias matemáticas de esa hipótesis.

Proposición 16.5 — Dos fuentes iguales. Dos masas M en $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$, con $a > 0$, producen en $(0, y, 0)$

$$\mathbf{g}(0, y, 0) = -\frac{2GMy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{e}_y.$$

Demostración. Las separaciones respecto de las fuentes son $(-a, y, 0)$ y $(a, y, 0)$, de igual longitud. Sus componentes x se cancelan al sumar y las componentes y se añaden. □

En el origen el campo es cero. Si la partícula comienza allí en reposo y las fuentes se mantienen fijas, esa es una solución de equilibrio. Sin embargo, el equilibrio puede responder de forma distinta a perturbaciones en direcciones diferentes. Un pequeño desplazamiento sobre el eje y produce fuerza hacia el origen; sobre el eje x, entre las fuentes, la masa más cercana atrae con mayor intensidad y la fuerza apunta hacia afuera del origen. Esta diferencia reaparecerá al estudiar variaciones espaciales.

Proposición 16.6 — Punto de campo nulo entre dos fuentes. Para masas $M_1, M_2 > 0$ situadas en $x = 0$ y $x = d > 0$, hay un único punto de campo nulo en el intervalo $0 < x < d$:

$$x_* = \frac{d\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}}.$$

Demostración. Entre las fuentes las atracciones son opuestas. La condición es $GM_1/x^2 = GM_2/(d - x)^2$. Como ambas distancias son positivas, tomar raíces da $\sqrt{M_1}(d - x) = \sqrt{M_2}x$. Esta ecuación lineal tiene la solución indicada, que pertenece al intervalo. □

El campo nulo no convierte ese punto en un lugar donde todas las contribuciones desaparecen. Sólo su suma vectorial se anula. Una medición local de aceleración cero en caída libre puede indicar una cancelación, y no ausencia de fuentes.

Principio metodológico 16.4. Suma componentes con sus signos antes de tomar magnitudes. Un punto donde el campo es cero exige estudiar el entorno para decidir estabilidad o identificar fuentes.

Ejercicios. Ejercicio 16.7. Dos fuentes fijas tienen masas M y $9M$ y están separadas por d. Encuentra el punto de campo nulo entre ellas y calcula la magnitud de cada contribución allí.

Solución. proposición 16.6 da $x_* = d/(1+3) = d/4$ desde la fuente de masa M. Las distancias son $d/4$ y $3d/4$. Cada contribución tiene magnitud $GM/(d/4)^2 = 16GM/d^2$, y la segunda da $9GM/(3d/4)^2 = 16GM/d^2$. Se anulan por tener sentidos opuestos. El punto está más cerca de la fuente menor.

Ejercicio 16.8. Para las fuentes de la proposición 16.5, determina el comportamiento del campo ante un pequeño desplazamiento desde el origen sobre cada uno de los ejes x, y, z. Decide si el equilibrio es estable para perturbaciones espaciales libres.

Solución. Sobre y, la fórmula de la proposición 16.5 da un campo opuesto al desplazamiento. Sobre z sucede lo mismo por simetría. Sobre x, con $|x| < a$, la componente es $g_x = GM[(a-x)^{-2} - (a+x)^{-2}]$, del mismo signo que x. Su derivada en cero es $4GM/a^3 > 0$, mientras las derivadas transversales son $-2GM/a^3$. La dinámica linealizada sobre x es $\ddot{x} = (4GM/a^3)x$, que tiene una solución creciente exponencialmente. Además, para $0 < x < a$ la aceleración exacta es positiva: una partícula liberada ligeramente a la derecha se aleja y atraviesa una distancia fija pequeña del origen. El equilibrio es inestable en el espacio, aunque tenga respuesta restauradora transversal.

5. Potencial: guardar el trabajo en una función

Una fuerza puede cambiar de dirección a lo largo del camino. Integrar sus componentes para cada desplazamiento es posible, pero un campo conservativo permite organizar el cálculo de otra manera: asociamos a cada posición una función cuya diferencia determina el trabajo. El capítulo capítulo 13 construyó esa relación; para la gravitación podemos obtener la función explícitamente.

Definición 16.4 — Potencial gravitatorio puntual. Para una masa M en $\mathbf{R}$, definimos fuera de la fuente

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|}.$$

Elegimos cero en el límite de distancia infinita. El potencial tiene unidades $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$, equivalentes a energía por unidad de masa. Una masa de prueba m tiene energía potencial $U = m\Phi$ en ese campo prescrito.

El signo negativo expresa el cero elegido y la atracción. Acercarse a la fuente disminuye el potencial; alejarse lo aumenta hacia cero. Agregar una constante a Φ cambia sus valores absolutos y conserva tanto el campo como el trabajo entre posiciones.

Proposición 16.7 — Campo como gradiente negativo. Fuera de la fuente,

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi.$$

Demostración. Sea $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{R}$ y $r = |\mathbf{s}|$. En coordenadas cartesianas, $\partial_{x_k} r = s_k/r$. La regla de la cadena da $\partial_{x_k}(1/r) = -s_k/r^3$, y por tanto $\partial_{x_k}\Phi = GMs_k/r^3$. Reunir las tres componentes produce $\nabla\Phi = GM\mathbf{s}/r^3$. Su negativo es definición 16.2. □

El gradiente indica cómo cambia una función al desplazar la posición. La igualdad de la proposición 16.7 permite leer la fuerza a partir de la pendiente del potencial. Aquí existe un potencial global en todo el dominio que excluye la fuente; no necesitamos inferir su existencia sólo a partir de un criterio local de derivadas cruzadas.

Proposición 16.8 — Potencial por superposición. Para un número finito de fuentes,

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G\sum_j \frac{M_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}_j|}$$

satisface $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ y tiende a cero cuando $|\mathbf{x}| \to \infty$.

Demostración. La derivación de una suma finita es la suma de las derivadas. Aplicar proposición 16.7 a cada término produce definición 16.3. Para fuentes en posiciones finitas, todas las distancias a ellas tienden a infinito cuando lo hace $|\mathbf{x}|$; cada término del potencial tiende a cero. □

Los potenciales se suman como escalares y los campos como vectores. Esta diferencia permite tener campo cero con potencial distinto de cero. En el punto medio de dos masas iguales, las derivadas pueden cancelarse aunque ambas contribuciones al potencial sean negativas.

Principio metodológico 16.5. Distingue potencial y energía potencial, declara el cero y comprueba la fuerza mediante el gradiente. Un valor de potencial cero no es una condición de campo cero.

Ejercicios. Ejercicio 16.9. Dos masas M están en $\pm a\mathbf{e}_x$. Calcula Φ y $\mathbf{g}$ en el origen. Explica por qué sus valores no contradicen la relación $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$.

Solución. Cada fuente aporta $-GM/a$ al potencial, así que $\Phi(0) = -2GM/a$. El campo es cero por cancelación vectorial. La relación con el gradiente se refiere a las pendientes de Φ, no a su valor. Una función puede tener valor no nulo en un punto crítico.

Ejercicio 16.10. Una masa m se desplaza entre distancias r_a y $r_b > r_a$ de una fuente fija M. Calcula $\Delta\Phi$ y ΔU. ¿Qué cambia si se agrega a Φ una constante C?

Solución. $\Delta\Phi = GM(1/r_a - 1/r_b) > 0$ y $\Delta U = mGM(1/r_a - 1/r_b)$. La constante aparece en ambos extremos y se cancela. Modifica U en mC, pero conserva la diferencia y el campo. Las unidades de C deben ser las del potencial, no las de energía.

6. Trabajo y energía en un campo fijo

Si las fuentes permanecen fijas, su potencial no depende explícitamente del tiempo. Una partícula puede recorrer un camino curvo, acercarse y volver a alejarse; la diferencia de potencial continúa determinando el trabajo gravitatorio.

Proposición 16.9 — Trabajo y conservación en un campo estático. Para una trayectoria diferenciable que evita las fuentes fijas,

$$W_{\mathrm{g}} = m[\Phi(\mathbf{x}_a) - \Phi(\mathbf{x}_b)].$$

Si la gravitación es la única fuerza, $E = m|\mathbf{v}|^2/2 + m\Phi$ se conserva. Con una fuerza adicional $\mathbf{F}_{\mathrm{otra}}$, $\dot{E} = \mathbf{F}_{\mathrm{otra}} \cdot \mathbf{v}$.

Demostración. proposición 16.8 y la regla de la cadena dan $m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{x}} = -m\, d\Phi(\mathbf{x}(t))/dt$. Integrar produce el trabajo. Newton da $\dot{K} = (m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\mathrm{otra}}) \cdot \mathbf{v}$. Sumar $m\dot{\Phi}$ cancela la potencia gravitatoria y deja la indicada. □

El potencial no reemplaza el cálculo de fuerzas cuando se necesita conocer una dirección, un contacto o una aceleración. Resuelve otro aspecto del problema: la relación entre posiciones y energías.

Como primera aplicación, consideremos una partícula que sale radialmente hacia afuera de una fuente puntual fija. No hay momento angular y no necesitamos clasificar órbitas para analizar el alcance energético.

Proposición 16.10 — Umbral de escape radial. En el campo de una fuente puntual fija M, una partícula parte a distancia $r_0 > 0$ con rapidez radial saliente $v_0 > 0$, sin otras fuerzas. Puede alcanzar distancias arbitrariamente grandes exactamente cuando

$$v_0 \geq v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}.$$

Demostración. Por proposición 16.9, la energía por unidad de masa es $\epsilon = v_0^2/2 - GM/r_0$. En la rama saliente,

$$\dot{r}^2 = 2\epsilon + \frac{2GM}{r}.$$

Si $\epsilon < 0$, el miembro derecho se anula en un radio finito $r_{\mathrm{máx}} = -GM/\epsilon$ y es negativo más allá: el movimiento no puede alcanzar radios mayores. Si $\epsilon \geq 0$, la rapidez es positiva en cada radio finito y el movimiento saliente no tiene punto de retorno. El tiempo para alcanzar cualquier radio finito $R > r_0$ es la integral finita $\int_{r_0}^{R} (2\epsilon + 2GM/r)^{-1/2}\, dr$. Por tanto se alcanzan radios arbitrarios. La condición $\epsilon \geq 0$ equivale al umbral indicado. □

En el caso límite, la rapidez tiende a cero cuando el radio tiende a infinito. No se alcanza el infinito en un tiempo finito: con $\epsilon = 0$, la integral temporal crece como $R^{3/2}$. Para $\epsilon > 0$, la rapidez tiende a $\sqrt{2\epsilon} > 0$. Estas son consecuencias del modelo de fuente fija; las pérdidas por rozamiento o el movimiento de la fuente requieren otros balances.

Principio metodológico 16.6. Al usar energía para delimitar un movimiento, controla la rama inicial y la admisibilidad de las posiciones. Una igualdad energética no garantiza por sí sola una trayectoria compatible con todas las restricciones.

Ejercicios. Ejercicio 16.11. Un agente eleva lentamente una masa m desde $r = a$ hasta $r = 2a$ en el campo de una fuente fija M. La rapidez inicial y final es la misma y no hay rozamiento. Calcula el trabajo del agente y el de la gravedad.

Solución. La energía cinética no cambia. El aumento potencial es $GMm(1/a - 1/(2a)) = GMm/(2a)$. Proposición 16.9 exige que el trabajo del agente sea ese valor positivo. El gravitatorio vale su negativo. Que la elevación sea lenta permite aproximar velocidades pequeñas, pero el resultado entre extremos iguales no necesita velocidad cero en todo el recorrido.

Ejercicio 16.12. Una partícula se lanza radialmente hacia afuera con $v_0 = v_{\mathrm{esc}}/2$. Calcula su radio máximo en el modelo de la proposición 16.10.

Solución. Como $v_{\mathrm{esc}}^2 = 2GM/r_0$, tenemos $v_0^2 = GM/(2r_0)$ y $\epsilon = GM/(4r_0) - GM/r_0 = -3GM/(4r_0)$. En el retorno, la rapidez es cero y $r_{\mathrm{máx}} = -GM/\epsilon = 4r_0/3$. La velocidad es la mitad del umbral, pero la energía cinética es la cuarta parte de la necesaria para escapar. Confundir escalas lineales de rapidez con escalas energéticas cambiaría el resultado.

7. Un sistema gravitatorio: energía sin contar dos veces

Cuando las fuentes también se mueven, ya no podemos tratar a todas como un campo fijo externo. La energía pertenece al sistema de partículas y a sus interacciones. Cada par aporta una sola energía potencial compartida.

Definición 16.5 — Energía potencial de un sistema de partículas. Para un número finito de masas con posiciones distintas, definimos

$$U(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_N) = -G\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}.$$

Cada par no ordenado se cuenta una vez. Si Φ_i es el potencial que las otras partículas producen en la posición de i, entonces $U = \frac{1}{2}\sum_i m_i\Phi_i$. No se incluye el potencial de una partícula sobre sí misma.

Proposición 16.11 — Fuerza del sistema a partir de su potencial.

$$-\nabla_{\mathbf{r}_i}U = -Gm_i\sum_{j\neq i} m_j\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3}.$$

Demostración. Los términos sin índice i tienen derivada cero respecto de $\mathbf{r}_i$. Cada término que contiene ese índice aporta, por la proposición 16.7, la fuerza del par con j. El orden $i<j$ sólo evita duplicaciones; no cambia la expresión simétrica de cada energía de par. □

Proposición 16.12 — Conservación energética del sistema aislado. Si las únicas fuerzas son las gravitatorias entre sus miembros, mientras la solución es regular y no hay coincidencias,

$$E = \sum_i \frac{1}{2}m_i|\mathbf{v}_i|^2 + U$$

es constante. Si se añaden fuerzas externas, $\dot{E} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}\cdot\mathbf{v}_i$.

Demostración. Derivar la energía cinética da $\dot{K} = \sum_i m_i\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{v}_i$. Newton separa las fuerzas internas de las externas. La regla de la cadena da $\dot{U} = \sum_i \nabla_{\mathbf{r}_i}U\cdot\mathbf{v}_i$. Proposición 16.11 cancela, miembro a miembro, la potencia gravitatoria de $\dot{K}$ con $\dot{U}$. Queda la potencia externa total. □

Proposición 16.13 — Balances lineal y angular. Para el mismo sistema aislado, el momento total $\mathbf{P}$ y el momento angular total respecto de cualquier punto fijo inercial se conservan.

Demostración. proposición 16.2 anula por pares la resultante y el torque internos. Al no haber fuerzas externas, los balances del capítulo 14 e capítulo 15 dan $\dot{\mathbf{P}} = 0$ y $\dot{\mathbf{L}}_A = 0$. □

La energía total puede conservarse mientras cada partícula cambia su energía cinética. La suma de fuerzas internas puede ser cero mientras su potencia total es distinta de cero, compensada por $\dot{U}$. Las tres conservaciones tienen hipótesis compatibles, pero contienen información diferente.

Principio metodológico 16.7. Para un sistema móvil, cuenta energías de pares una sola vez y conserva las velocidades de todos los miembros. Identifica qué agentes quedaron fuera antes de afirmar aislamiento.

Ejercicios. Ejercicio 16.13. Tres masas iguales m ocupan los vértices de un triángulo equilátero de lado $a>0$. Calcula su energía potencial y la suma $\sum_i m\Phi_i$.

Solución. Hay tres pares y cada uno aporta $-Gm^2/a$, así que $U = -3Gm^2/a$. En cada vértice las otras dos masas producen $\Phi_i = -2Gm/a$. La suma sobre los tres miembros es $-6Gm^2/a = 2U$. El factor de un medio de la definición 16.5 corrige el doble conteo. No hace falta atribuir una energía independiente completa a cada extremo de un mismo par.

Ejercicio 16.14. Dos masas m y $2m$, inicialmente en reposo y separadas por a, se acercan bajo su gravitación mutua. Mientras la separación vale $b<a$ y antes de una coincidencia, calcula sus rapideces mediante energía y momento lineal.

Solución. El momento total inicial es cero y se conserva. Las velocidades son opuestas y sus magnitudes cumplen $mv_1 = 2mv_2$, de modo que $v_1 = 2v_2$. La energía cinética ganada es $2Gm^2(1/b - 1/a)$. Por otro lado, $K = mv_1^2/2 + (2m)v_2^2/2 = 3mv_2^2$. Así, $v_2 = \sqrt{(2Gm/3)(1/b-1/a)}$ y $v_1 = 2v_2$.

La raíz positiva corresponde a rapideces; los vectores apuntan uno hacia el otro. El resultado incluye el movimiento de ambos cuerpos y no usa una fuente fija.

8. Qué se aproxima al fijar una fuente

La ley del par hace que ambos cuerpos se aceleren. En muchos problemas una masa es tan grande comparada con la otra que su movimiento adicional parece despreciable. Esa observación necesita convertirse en una comparación concreta: pequeño respecto de qué distancia y durante cuánto tiempo.

Definición 16.6 — Modelo de fuente fija y partícula de prueba. En el modelo de fuente fija, una distribución se prescribe inmóvil en el marco escogido y la partícula evoluciona en su campo. Una partícula de prueba aproxima un miembro cuya influencia sobre las fuentes se omite. Fijar una fuente puede representar una aproximación dinámica o un soporte externo que impide su movimiento; ambas interpretaciones tienen balances de sistema distintos.

Proposición 16.14 — Efecto del retroceso en la aceleración relativa. Para un par aislado de masas m y M, con $\mathbf{q} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$,

$$\ddot{\mathbf{q}} = -G(M+m)\frac{\mathbf{q}}{q^3}.$$

Sustituir $M + m$ por M cambia la magnitud de esa aceleración en una fracción $m/(M+m)$ respecto del valor exacto del par a igual separación.

Demostración. Restamos las dos ecuaciones de la proposición 16.1. La aceleración del miembro m es $-GM\mathbf{q}/q^3$ y la del miembro M es $Gm\mathbf{q}/q^3$. La diferencia produce el coeficiente $G(M+m)$. Dividir el cambio Gm/q^2 por el valor $G(M+m)/q^2$ da la fracción. □

La fracción controla una aceleración a igual estado, no automáticamente el error de una trayectoria completa. Las diferencias pueden acumularse y las separaciones de las dos soluciones pueden dejar de ser iguales. Cerca de una coincidencia, la sensibilidad al estado también cambia.

Proposición 16.15 — Cota del desplazamiento adicional de la fuente. Si el par permanece separado por $q(t) \geq d > 0$ durante $0 \leq t \leq T$, la posición de la fuente M difiere de su movimiento inercial libre inicial en una cantidad acotada por

$$|\mathbf{r}_M(t) - \mathbf{r}_M(0) - t\mathbf{v}_M(0)| \leq \frac{Gm}{2d^2}t^2.$$

Demostración. proposición 16.1 da $|\mathbf{a}_M| \leq Gm/d^2$. Integrar dos veces la aceleración produce $\mathbf{r}_M(t) - \mathbf{r}_M(0) - t\mathbf{v}_M(0) = \int_0^t (t-s)\mathbf{a}_M(s)\,ds$. La desigualdad triangular y $\int_0^t (t-s)\,ds = t^2/2$ dan la cota. □

Si la fuente parte en reposo, proposición 16.15 controla su distancia a la posición inicial. Si parte con velocidad no nula, el término lineal debe conservarse o eliminarse mediante un cambio de marco inercial. Una fuente inmóvil por un soporte recibe una fuerza externa que compensa la atracción: el par por sí solo deja de ser aislado.

Principio metodológico 16.8. Justifica una fuente fija mediante un soporte explícito o un control de retroceso, separación y tiempo. Una razón de masas pequeña no garantiza por sí sola precisión durante cualquier intervalo.

Ejercicios. Ejercicio 16.15. En un par aislado, $m = 0,01M$. Calcula la fracción de aceleración relativa omitida al usar el modelo de fuente fija a la misma separación. ¿Es exactamente 1 %?

Solución. proposición 16.14 da $m/(M+m) = 0,01/1,01 \simeq 0,00990099$, es decir, aproximadamente $0,9901\,\%$ respecto de la aceleración exacta. El $1\,\%$ resulta si se divide el cambio por el valor aproximado con coeficiente M. Las cifras dependen de qué magnitud se toma como referencia del error.

Ejercicio 16.16. Una fuente parte en reposo. Se sabe que la separación no baja de $d > 0$. Encuentra una condición suficiente sobre T para garantizar que su desplazamiento no supere ηd, con $\eta > 0$.

Solución. proposición 16.15 garantiza el objetivo si $GmT^2/(2d^2) \le \eta d$. Despejar da $T \le \sqrt{2\eta d^3/(Gm)}$. La dimensión del radicando es tiempo al cuadrado. Es una condición suficiente basada en la cota de separación; no afirma que el desplazamiento real alcance el máximo. Si la separación cae por debajo de d, la garantía deja de estar justificada.

9. Una cáscara esférica

Para aplicar la ley puntual a un planeta hay que justificar la sustitución de una distribución extensa por una masa en su centro. La simetría esférica hace posible esa equivalencia para puntos exteriores. En el interior de una cáscara uniforme ocurre algo más sorprendente: sus contribuciones al campo se cancelan en todos los puntos, no sólo en el centro.

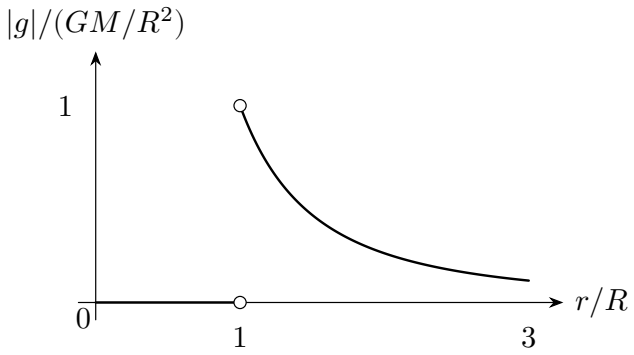


Figura 16.2. Una cáscara esférica homogénea infinitamente delgada produce campo nulo dentro y magnitud GM/r^2 fuera. La gráfica muestra los límites a cada lado; el campo sobre la superficie singular necesita una convención aparte. Véase §9.

Calcular directamente las fuerzas exige proyectar cada atracción. El potencial simplifica el problema porque suma escalares. Una vez obtenido, lo derivaremos para recuperar el campo.

Definición 16.7 — Cáscara esférica uniforme. Consideramos una superficie esférica ideal de radio $a > 0$, centrada en el origen y con masa M distribuida uniformemente. Su densidad superficial es $\sigma = M/(4\pi a^2)$. Las contribuciones de sus elementos de masa se suman por superposición; en el límite continuo, la suma se expresa mediante una integral.

Tomemos un punto de observación a distancia r del centro. Por simetría podemos situarlo sobre el eje vertical. Un anillo de la cáscara con ángulo polar θ tiene área $2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$ y masa

$$dm = \frac{M}{2}\sin\theta\, d\theta.$$

La fórmula del área se obtiene multiplicando la circunferencia del anillo, $2\pi a \sin\theta$, por el ancho meridiano $a\, d\theta$. Todos sus puntos están a la misma distancia del observador, $s = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}$, por la ley del coseno.

Proposición 16.16 — Potencial de una cáscara uniforme. Con cero en el infinito,

$$\Phi(r) = \begin{cases} -GM/a, & 0 \le r < a, \\ -GM/r, & r > a. \end{cases}$$

El potencial tiene un valor continuo $-GM/a$ en $r = a$.

Demostración. Para $r > 0$ y $r \neq a$, superponer los potenciales de los anillos da

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}}.$$

La sustitución $s = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}$ cumple $s\,ds = ra\sin\theta\,d\theta$. Los extremos son $|r - a|$ y $r + a$. Por tanto, $\Phi(r) = -\frac{GM}{2ra}\big[r + a - |r - a|\big]$.

Para $r < a$, el corchete vale $2r$; para $r > a$, vale $2a$. En el centro todos los elementos están a distancia a, por lo que $\Phi(0) = -GM/a$. En $r = a$, la integral impropia del potencial es finita y la misma sustitución da $-GM/a$, coincidiendo con los límites. □

Proposición 16.17 — Campo de la cáscara. Fuera de la superficie material ideal,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{x}| < a, \\ -GM\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3, & |\mathbf{x}| > a. \end{cases}$$

Demostración. En cualquier región separada de la superficie, el núcleo del potencial y sus derivadas son regulares y están acotados sobre la cáscara, por lo que puede derivarse la integral de superposición. En el interior, proposición 16.16 es constante y su gradiente es cero. En el exterior coincide con el potencial puntual, cuyo gradiente ya se calculó en la proposición 16.7. □

El campo tiene límites distintos a ambos lados de una cáscara infinitamente delgada. No asignaremos un valor sobre la propia capa a partir de una derivada que allí no existe. Un cuerpo con espesor requiere describir su densidad y evita identificar sin más ese salto con una superficie ideal.

La cancelación interior combina distancia y cantidad de masa en distintas direcciones. Las partes más cercanas atraen con mayor intensidad por unidad de masa, pero la geometría distribuye más masa en otras direcciones de una manera que compensa exactamente bajo la ley inversa del cuadrado. Proposición 16.16 demuestra esa compensación sin suponerla.[3]

Principio metodológico 16.9. Usa simetría para reducir una suma continua y especifica dónde el resultado es regular. La equivalencia con una fuente puntual es exterior; no describe el interior de la misma distribución.

Ejercicios. Ejercicio 16.17. Una partícula de prueba está en reposo fuera del centro, pero dentro de una cáscara uniforme fija. No recibe otras fuerzas. Describe su movimiento y su energía potencial.

Solución. proposición 16.17 da campo cero en todo el interior, por lo que su aceleración es cero. Como parte en reposo, permanece en su posición. La energía potencial, con cero en el infinito, es $U = -GMm/a$, no nula y constante. La ausencia de campo interior no exige potencial cero; exige que su gradiente sea cero.

Ejercicio 16.18. Dos cáscaras uniformes concéntricas tienen radios $a < b$ y masas M_1, M_2. Calcula campo y potencial para $a < r < b$.

[3] MIT OpenCourseWare, mismo capítulo 9, apéndice 9A, campo de una cáscara esférica y superposición de capas. La demostración de este capítulo integra primero el potencial mediante anillos y después calcula su gradiente.

Solución. La primera cáscara actúa como fuente puntual exterior y la segunda tiene campo interior cero. Así, $\mathbf{g} = -GM_1\mathbf{x}/r^3$. El potencial es la suma $\Phi = -GM_1/r - GM_2/b$. La segunda cáscara no modifica la aceleración en esa región, pero añade una constante al potencial con el cero global elegido. Cambiar esa masa modifica el potencial de referencia respecto del infinito.

10. Del conjunto de capas al interior de una esfera

Una distribución esférica puede construirse por capas concéntricas. Las capas interiores al punto de observación actúan como masas situadas en el centro; las exteriores tienen campo cero allí. El campo depende sólo de la masa encerrada, aunque el potencial recibe contribuciones de todas las capas.

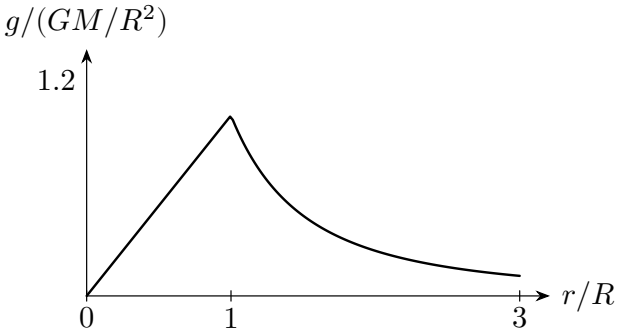


Figura 16.3. Para una esfera uniforme de radio R, el módulo normalizado es $g/(GM/R^2) = r/R$ dentro y $(R/r)^2$ fuera. El campo es continuo en la superficie y se anula en el centro. Véase §10.

Definición 16.8 — Densidad esférica y masa encerrada. Sea $\varrho(s) \geq 0$ una densidad volumétrica continua y acotada para $0 \leq s \leq R$, y cero fuera del cuerpo. La capa de radio s y espesor ds contiene $dM = 4\pi s^2 \varrho(s)\, ds$. Definimos

$$M(r) = 4\pi \int_0^{\mín(r,R)} \varrho(s) s^2 \, ds, \qquad M = M(R).$$

La densidad tiene unidades de masa por volumen. El modelo mantiene la distribución prescrita; su sostén o dinámica material constituye otra parte del problema.

Proposición 16.18 — Campo y potencial esféricos. Para $0 < r < R$,

$$\Phi(r) = -G\left[\frac{M(r)}{r} + 4\pi \int_r^R \varrho(s) s \, ds\right], \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\frac{M(r)}{r^3}\mathbf{x}.$$

Para $r \geq R$, el potencial y campo son los de una masa puntual total M, con continuidad en la superficie. En el centro, $\mathbf{g}(0) = 0$.

Demostración. Por proposición 16.16, cada capa con $s < r$ contribuye $-G\, dM/r$ y cada capa con $s > r$ contribuye $-G\, dM/s$. Integrar ambas partes da el potencial indicado. Al derivar, $M'(r) = 4\pi\varrho(r)r^2$ y

$$\Phi'(r) = -G\left[\frac{M'(r)}{r} - \frac{M(r)}{r^2} - 4\pi\varrho(r)r\right] = \frac{GM(r)}{r^2}.$$

Los términos de densidad se cancelan. El gradiente de una función radial es $\Phi'(r)\mathbf{x}/r$, dando el campo. En el exterior todas las capas son interiores al observador y suman el potencial puntual total. En $r = R$ las fórmulas coinciden. Como ϱ es acotada, $M(r) = O(r^3)$ cerca de cero, así que $|\mathbf{g}| = O(r)$ y el campo se prolonga continuamente por cero en el centro. □

Proposición 16.19 — Esfera homogénea. Para densidad constante y masa total M, en $0 \le r \le R$,

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{R^3}\mathbf{x}, \qquad \Phi(r) = -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2).$$

Demostración. La masa encerrada es $M(r) = Mr^3/R^3$. Proposición 16.18 da el campo lineal. Sustituir $\varrho = 3M/(4\pi R^3)$ en el potencial de la proposición 16.18 y calcular $\int_r^R s\,ds = (R^2 - r^2)/2$ da la expresión. □

Dentro de esta esfera la magnitud del campo aumenta con el radio; fuera disminuye como $1/r^2$. Una fórmula exterior aplicada sin distinción al interior predeciría una divergencia inexistente en el centro del modelo homogéneo.

El campo interno lineal produce una fuerza restauradora sobre una partícula que pudiera atravesar el material sin contacto. Para un planeta real no puede omitirse el medio atravesado. El modelo de un túnel sin resistencia o de una distribución transparente debe decirlo expresamente.

Principio metodológico 16.10. Decide si el punto es interior o exterior antes de usar la masa total como fuente puntual. En el interior, el campo controla la masa encerrada; el potencial también incluye las capas externas.

Ejercicios. Ejercicio 16.19. En una esfera homogénea, compara las magnitudes del campo en $r = R/2$, R y $2R$. Determina dónde alcanza su máximo.

Solución. proposición 16.19 da $g(R/2) = GM/(2R^2)$ y $g(R) = GM/R^2$. Fuera, $g(2R) = GM/(4R^2)$. La magnitud aumenta linealmente hasta la superficie y decrece después, así que su máximo es GM/R^2 en $r = R$. En particular, el punto interior $R/2$ y el exterior $2R$ no siguen una misma fórmula inversa del cuadrado con la masa total.

Ejercicio 16.20. En el modelo de una esfera homogénea fija y transparente, una partícula parte del centro y sólo recibe su gravitación. Encuentra la rapidez inicial mínima para alcanzar distancias arbitrariamente grandes.

Solución. El potencial central es $\Phi(0) = -3GM/(2R)$. Con cero en el infinito, la condición energética es $v_0^2/2 \ge 3GM/(2R)$, de modo que $v_{\mín} = \sqrt{3GM/R}$. La suficiencia se comprueba siguiendo la dirección de la velocidad inicial: el movimiento es radial, el potencial aumenta desde el centro hasta cero y para esa energía la rapidez no se anula a ningún radio finito. Fuera de la esfera se aplica el argumento de la proposición 16.10. La transparencia y ausencia de resistencia son hipótesis esenciales del ejemplo.

11. Cuándo sirve una gravedad uniforme

Cerca de la superficie de un cuerpo esférico, una distancia de unos metros puede ser pequeña comparada con el radio del cuerpo. El campo cambia poco en ese recorrido y el potencial admite una aproximación lineal. Esa es la conexión entre la ley de gravitación y la expresión mgh utilizada en problemas locales.

Tomemos un cuerpo esférico fijo de masa M y radio R. Para alturas $h \ge 0$ medidas radialmente desde la superficie, escribimos $g_0 = GM/R^2$ y $x = h/R$.

Proposición 16.20 — Control del cambio de magnitud del campo.

$$g(h) = \frac{g_0}{(1+x)^2}.$$

El error relativo de sustituir $g(h)$ por g_0, medido respecto del campo exacto, es $2x + x^2$. Para $x \geq 0$, $0 \leq g(h) - g_0(1-2x) \leq 3g_0x^2$.

Demostración. El resultado exterior de la proposición 16.18 da la primera fórmula. Dividir $g_0 - g(h)$ por $g(h)$ produce $(1+x)^2 - 1 = 2x + x^2$. Para la expansión, la función $f(x) = (1+x)^{-2}$ tiene $f(0) = 1$, $f'(0) = -2$ y $f''(x) = 6/(1+x)^4$. Taylor con resto de segundo orden, para $x \geq 0$, da un resto no negativo acotado por $3x^2$. □

Proposición 16.21 — Control de la energía mg_0h. El aumento exacto de energía potencial desde la superficie es

$$\Delta U = \frac{mg_0h}{1 + h/R}.$$

Para $h > 0$, usar mg_0h tiene error relativo h/R respecto del valor exacto y error absoluto

$$mg_0h - \Delta U = \frac{mg_0h^2}{R+h}.$$

Demostración. Restamos los potenciales exteriores: $\Delta U = GMm(1/R - 1/(R+h)) = GMmh/[R(R+h)]$. Sustituir $g_0 = GM/R^2$ da la fórmula. Restar y dividir por ΔU produce las dos expresiones de error. □

La aproximación vectorial exige además que la dirección del campo cambie poco. Un desplazamiento lateral de tamaño ℓ sobre una superficie esférica cambia la dirección radial en un ángulo de orden ℓ/R; para un arco de longitud ℓ, el ángulo central es exactamente ℓ/R. Por eso una caja de laboratorio pequeña admite una vertical común, mientras un trayecto que recorre una parte importante del cuerpo requiere actualizarla.

Tampoco se confunde este campo con la aceleración efectiva de un laboratorio que gira. Rotación, relieve y fuentes próximas pueden importar para una medición fina. El modelo esférico fijo permite aislar aquí el error debido a la altura y a la geometría.

Principio metodológico 16.11. Declara el parámetro pequeño y la magnitud cuyo error controlas. Para gravedad uniforme, comprueba tanto la variación de magnitud como la de dirección.

Ejercicios. Ejercicio 16.21. En un cuerpo esférico ideal, $h/R = 0,01$. Calcula los errores relativos de usar g_0 y mg_0h, ambos respecto de sus valores exactos.

Solución. proposición 16.20 da $2(0,01) + 0,01^2 = 0,0201$, o $2,01\,\%$, para el campo. Proposición 16.21 da $0,01$, o $1\,\%$, para el aumento energético. Los errores no son iguales porque una magnitud es local y la otra integra el campo a lo largo del ascenso.

Ejercicio 16.22. Exige que el error relativo de usar g_0 no supere una tolerancia $\delta > 0$ para alturas entre cero y H. Encuentra una condición exacta sobre H/R.

Solución. El error $2x + x^2$ crece para $x \geq 0$, por lo que basta controlar el extremo $x = H/R$. La desigualdad equivale a $(1 + H/R)^2 \leq 1 + \delta$. Así, $H/R \leq \sqrt{1+\delta} - 1$. Para tolerancias pequeñas, el extremo es aproximadamente $\delta/2$, pero la expresión con raíz conserva el control exacto del modelo.

12. La variación espacial que produce mareas

Dos partículas cercanas pueden caer casi juntas y, sin embargo, cambiar su separación. La aceleración común no modifica directamente esa separación; la diferencia entre los campos que reciben sí lo hace. Esta variación espacial es la base del efecto de marea en un modelo gravitatorio.

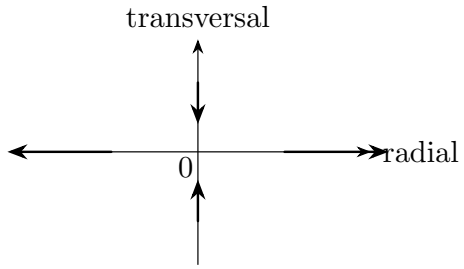


Figura 16.4. En la aproximación lineal alrededor de una separación radial R, la aceleración relativa estira en dirección radial y comprime en dirección transversal. Se ha restado la aceleración del centro. Véase §12.

Definición 16.9 — Diferencia de campo y aproximación lineal. Para posiciones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}+\boldsymbol{\delta}$, definimos $\Delta\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\delta}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Si el campo es diferenciable, su primer cambio se escribe $\Delta\mathbf{g} = D\mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta} + o(|\boldsymbol{\delta}|)$. El símbolo $D\mathbf{g}(\mathbf{x})$ representa la aplicación lineal de las derivadas espaciales. El resto dividido por $|\boldsymbol{\delta}|$ tiende a cero al hacer pequeño el desplazamiento.

Proposición 16.22 — Variación del campo puntual. Para una fuente en el origen, $r = |\mathbf{x}| > 0$ y $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$,

$$D\mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta} = \frac{GM}{r^3}\left[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\delta}\right].$$

Un desplazamiento radial recibe factor $2GM/r^3$ y uno perpendicular recibe factor $-GM/r^3$.

Demostración. Derivamos $\mathbf{g} = -GM\mathbf{x}r^{-3}$ en la dirección $\boldsymbol{\delta}$. El cambio de $\mathbf{x}$ aporta $-GM\boldsymbol{\delta}/r^3$, y el de r^{-3} es $-3r^{-5}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\delta})$, que al multiplicarse por $-GM\mathbf{x}$ aporta el segundo término positivo. Escribir $\mathbf{x} = r\mathbf{n}$ da la fórmula. Si $\boldsymbol{\delta}$ es radial, $3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\delta} = 2\boldsymbol{\delta}$. Si es perpendicular, el producto escalar es cero. □

El signo radial describe estiramiento relativo: la partícula situada algo más lejos recibe una atracción menos intensa y se separa de la que está más cerca. Las dos direcciones transversales tienen respuesta de compresión. Los factores $2, -1, -1$ suman cero en esta región sin masa puntual; no debemos extrapolar esa propiedad al interior de una distribución material.

Proposición 16.23 — Aceleración relativa de partículas de prueba. Para dos partículas sin interacción mutua ni otras fuerzas, en un campo prescrito,

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \Delta\mathbf{g}.$$

En un campo espacialmente uniforme, $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = 0$, incluso cuando ese campo uniforme cambia con el tiempo.

Demostración. Restamos las ecuaciones $\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, t)$ y $\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, t)$, con $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Si el campo no depende de la posición, ambas aceleraciones son iguales y se cancelan. □

Esta comparación se realiza con ejes inerciales. Elegir un origen que acompaña la caída puede eliminar la aceleración común, pero no elimina la diferencia espacial. Si las partículas se atraen entre sí o pertenecen a un cuerpo conectado, hay que añadir esas fuerzas al balance relativo.

La aproximación lineal de la proposición 16.22 tiene sentido para separaciones pequeñas respecto de la distancia a la fuente. Cerca de la propia fuente, el coeficiente crece y el mismo tamaño absoluto de separación deja de ser pequeño. Hablar de mareas «débiles» exige comparar la aceleración diferencial con una escala pertinente del problema, como las fuerzas internas que sostienen un objeto.

Principio metodológico 16.12. Para un efecto de marea, calcula una diferencia de campos, no sólo la intensidad local. Controla la separación respecto de la escala de variación y las interacciones entre los cuerpos comparados.

Ejercicios. Ejercicio 16.23. Dos partículas de prueba están sobre la misma dirección radial a distancias r y $r+h$, con $h>0$. Obtén la diferencia exacta de campo y su primer término para h/r pequeño.

Solución. Ambas aceleraciones apuntan hacia el origen. La segunda menos la primera es $\Delta\mathbf{g} = GM[r^{-2}-(r+h)^{-2}]\mathbf{n}$, positiva hacia afuera. Usar $(1+h/r)^{-2} = 1-2h/r+O(h^2/r^2)$ da $\Delta\mathbf{g} = (2GMh/r^3)\mathbf{n}+O(GMh^2/r^4)$. Coincide con la proposición 16.22 para $\boldsymbol{\delta} = h\mathbf{n}$. El signo indica que la partícula exterior cae menos intensamente hacia el centro.

Ejercicio 16.24. Dos modelos puntuales colocan fuentes sobre la misma dirección desde un observador. En el primero la masa es M y la distancia d; en el segundo la masa es $4M$ y la distancia $2d$. Compara campo y cambio radial lineal por unidad de separación en el observador.

Solución. Las intensidades son GM/d^2 y $4GM/(2d)^2$, iguales; las direcciones también coinciden. El coeficiente radial de la proposición 16.22 es $2GM/d^3$ en el primero y $2G(4M)/(2d)^3 = GM/d^3$ en el segundo. La variación radial del segundo es la mitad. Una misma aceleración local puede acompañar efectos diferenciales distintos.

Ejercicio 16.25. Dentro de una esfera homogénea fija, dos partículas de prueba tienen separación $\boldsymbol{\delta}$ y no interactúan entre sí. Obtén la aceleración relativa mientras ambas siguen dentro. Compara con el campo puntual exterior.

Solución. proposición 16.19 es lineal: $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -GM\mathbf{x}/R^3$. Restar sus valores da exactamente $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = -(GM/R^3)\boldsymbol{\delta}$. Todas las direcciones tienen respuesta restauradora; no aparece el factor radial positivo del campo puntual exterior. El resultado es exacto dentro del modelo y mientras ambas posiciones pertenecen al interior. La distribución de masa local cambia la estructura del gradiente.

13. Qué puede inferirse de una medición

Medir un campo y despejar una masa parece inmediato. El resultado sólo tiene ese significado si la geometría y las otras fuentes están suficientemente controladas. Para un observador exterior a una distribución esférica, el campo determina su masa total; dentro determina la masa encerrada.

Proposición 16.24 — Masa inferida en el modelo esférico. Si se conoce la distancia $r>0$ al centro y la magnitud del campo de una distribución esférica aislada en la medición, entonces

$$M(r) = \frac{g(r)r^2}{G}.$$

En el exterior, $M(r)$ es la masa total. Para pequeñas variaciones de los parámetros, $\frac{dM}{M} = \frac{dg}{g}+2\frac{dr}{r}-\frac{dG}{G}$.

Demostración. proposición 16.18 da $g(r) = GM(r)/r^2$, que se despeja. La derivada logarítmica de $M = gr^2/G$, para valores positivos, produce la segunda igualdad. □

La fórmula diferencial controla la sensibilidad de primer orden; no es una garantía exacta para errores grandes ni una regla estadística sin hipótesis sobre las incertidumbres. Para obtener una cota con errores relativos acotados puede evaluarse directamente el producto gr^2/G en los extremos permitidos.

La dirección también es información. Una aceleración que no apunta hacia el centro propuesto puede revelar otra fuente, una distribución no esférica, un marco acelerado o una fuerza omitida. Despejar una masa usando sólo su magnitud puede ocultar esa inconsistencia.

Otra limitación es la falta de unicidad de la distribución interior. Todas las densidades esféricas con la misma masa total producen el mismo campo exterior. Una medición exterior muy precisa puede determinar la masa sin revelar cómo se distribuye radialmente. Resolver esa segunda pregunta necesita observaciones adicionales y otro modelo.

Principio metodológico 16.13. Formula la inferencia como una consecuencia de datos y geometría declarados. Comprueba la dirección, las fuentes omitidas y la sensibilidad antes de identificar el parámetro obtenido con una propiedad del cuerpo.

Ejercicios. Ejercicio 16.26. Un cuerpo esférico ideal produce un campo exterior de magnitud $5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ a distancia $2,0\times10^6$ m de su centro. Estima su masa con $G = 6,67\times10^{-11}$ en SI. Los datos pertenecen a un modelo hipotético.

Solución. proposición 16.24 da $M = 5(2,0\times10^6)^2/(6,67\times10^{-11}) \simeq 3,0\times10^{23}\,\mathrm{kg}$. El radio usado es la distancia al centro, no la altura sobre una superficie. La unidad resulta $(\mathrm{m\,s^{-2}})\mathrm{m}^2/(\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}) = \mathrm{kg}$. Sin simetría esférica y control de otras fuentes, ese despeje no identificaría por sí solo la masa total.

Ejercicio 16.27. Se mide $g(a) = 8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ y $g(2a) = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ en la misma dirección radial, en dos puntos exteriores. ¿Los datos distinguen una fuente puntual de una esfera homogénea o una cáscara de radio menor que a, todas con la misma masa?

Solución. La razón $2/8 = 1/4$ coincide con la ley exterior inversa del cuadrado. Proposiciones 16.17–16.19 muestran que las tres distribuciones tienen exactamente el mismo campo en esos puntos si su masa total coincide y el radio de las extensas es menor que a. Tampoco medir todos los puntos exteriores distinguiría esos tres modelos por su campo exterior. Los datos son compatibles con ellos y no identifican la distribución interna.

Ejercicio 16.28. Una inferencia usa $M = gr^2/G$. Supón que G se toma fijo y que g y r pueden variar, cada uno, hasta un 1 % respecto de sus valores nominales, de forma independiente en el sentido de cotas permitidas. Encuentra los factores máximo y mínimo de la masa inferida.

Solución. El máximo se obtiene tomando ambos datos altos y el mínimo ambos bajos, pues el producto es creciente en g y r positivos. Los factores son $(1,01)^3 = 1,030301$ y $(0,99)^3 = 0,970299$. Por tanto las desviaciones son $+3,0301\,\%$ y $-2,9701\,\%$. La sensibilidad diferencial sugiere una cota cercana a 3 %, mientras el producto exacto conserva la asimetría. Las cotas permitidas no se convierten sin más en desviaciones estándar.

14. Conectar la distribución con el movimiento

La ley puntual, la superposición y la simetría permiten avanzar desde una distribución de masa hasta un campo. El potencial añade una vía de cálculo de trabajo y energía. Para una distribución esférica, el exterior se reduce a una masa central; dentro, la masa encerrada y las capas externas

cumplen funciones diferentes. Esa distinción delimita qué puede aprenderse de una observación y qué se necesita para predecir un movimiento.

Proposición 16.25 — Indistinguibilidad gravitatoria exterior esférica. Dos distribuciones esféricas de densidad del tipo definición 16.8, con el mismo centro y masa total, producen el mismo campo y el mismo potencial con cero en el infinito en toda región exterior a ambas. Una partícula de prueba con los mismos datos iniciales tiene el mismo movimiento en ambos modelos mientras permanezca en esa región.

Demostración. proposición 16.18 da para ambas $\Phi = -GM/r$ y $\mathbf{g} = -GM\mathbf{x}/r^3$ en el exterior común. Las ecuaciones y los datos iniciales son idénticos. Para justificar la unicidad, reunamos posición y velocidad en $Y = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, que satisface $\dot{Y} = (\mathbf{v}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = F(Y)$. En una vecindad pequeña alejada del centro, las derivadas de F están acotadas, de modo que $|F(Y) - F(Z)| \leq K|Y - Z|$ para alguna constante K y una norma fijada. Si dos soluciones parten del mismo estado y permanecen allí durante un intervalo de longitud Δt, integrar su diferencia da $S \leq K\Delta t\, S$, donde S es el máximo de su diferencia en ese intervalo. Elegir $K\Delta t < 1$ obliga a $S = 0$. Repetir esta comparación desde cada estado común prolonga la igualdad mientras ambas soluciones permanezcan en la región exterior. □

La conclusión no se extiende automáticamente a un paso por el interior. Tampoco a efectos sobre las fuentes si dejamos de tratarlas como distribuciones prescritas. La información sobre el régimen y la respuesta de los cuerpos sigue siendo parte del modelo.

Para cerrar un cálculo conviene identificar qué clase de resultado se obtuvo:

Resultado	Hipótesis decisiva	Información que queda fuera
Fuerza puntual	Separación no nula y modelo de partículas	Tamaño y distribución interna
Campo superpuesto	Interacciones aditivas	Respuesta de fuentes omitida si se prescriben
Energía de una partícula	Campo estático y otras potencias controladas	Energía de fuentes móviles
Energía de un sistema	Pares contados una vez y trabajo externo	Procesos de contacto o cambios del sistema
Campo exterior esférico	Simetría esférica y observador exterior	Perfil radial de densidad
Gravedad uniforme	Alturas y distancias laterales pequeñas	Variación espacial y mareas

Principio metodológico 16.14. Declara distribución, sistema, marco y pregunta; calcula campo o potencial según lo necesario; controla aproximaciones y conserva la información que los datos no determinan. Comprueba el resultado contra direcciones, unidades, energía y límites del modelo.

Ejercicios. Ejercicio 16.29. Compara una esfera homogénea y una cáscara uniforme con la misma masa M y radio R, ambas fijas y transparentes. En cada modelo, una partícula parte del reposo a distancia $2R$ y cae radialmente. Calcula su rapidez al llegar a la superficie y al pasar por el centro. Se omiten contacto y resistencia; en la cáscara no se añade un impulso al cruzar la superficie ideal.

Solución. Ambas tienen potencial inicial $-GM/(2R)$ por unidad de masa y potencial superficial $-GM/R$. Por conservación energética, la rapidez superficial cumple $v_R^2 = GM/R$ en ambos modelos. En la esfera, $\Phi(0) = -3GM/(2R)$, por lo que $v_{\text{centro}}^2 = 2[-GM/(2R) + 3GM/(2R)] = 2GM/R$. En la cáscara, el potencial interior es $-GM/R$ y el campo interior cero. Tras entrar, la partícula continúa con velocidad constante hasta el centro, con $v_{\text{centro}}^2 = GM/R$. La rapidez permanece continua al cruzar una fuerza con salto finito sin impulso añadido. Los movimientos exteriores son iguales, mientras el recorrido interior discrimina las distribuciones.

Ejercicio 16.30. Cuatro fuentes puntuales de masa M se mantienen fijas en $\pm a\mathbf{e}_x$ y $\pm a\mathbf{e}_y$. Una partícula de prueba parte del origen con velocidad $v_0\mathbf{e}_z$, $v_0 > 0$. Calcula el potencial y campo sobre ese eje, el umbral de escape por él y la altura máxima cuando $v_0^2 = 4GM/a$. Explica por qué el campo nulo en el origen no basta para decidir el escape.

Solución. Las cuatro distancias son $\sqrt{a^2 + z^2}$ y las componentes transversales de los campos se cancelan. Así, $\Phi(z) = -4GM/\sqrt{a^2 + z^2}$ y $\mathbf{g}(z) = -4GMz(a^2 + z^2)^{-3/2}\mathbf{e}_z$. La simetría y los datos iniciales mantienen el movimiento sobre el eje, que no contiene fuentes. La energía por unidad de masa es $\epsilon = v_0^2/2 - 4GM/a$. El potencial crece estrictamente desde $-4GM/a$ hasta cero para $z > 0$. Si $\epsilon \geq 0$, la rama saliente alcanza cualquier altura finita; si $\epsilon < 0$, tiene un punto de retorno. El umbral es $v_{\text{esc}} = \sqrt{8GM/a}$. Para el valor dado, $\epsilon = -2GM/a$; en el punto máximo la rapidez es cero, y $-4GM/\sqrt{a^2 + z_{\text{máx}}^2} = -2GM/a$. Por tanto $\sqrt{a^2 + z_{\text{máx}}^2} = 2a$ y $z_{\text{máx}} = \sqrt{3}\,a$. El campo inicial es cero, pero el potencial inicial es negativo y cambia al alejarse. Una medición de aceleración en un punto no determina el trabajo necesario para llegar a regiones lejanas. Los soportes que fijan las fuentes son parte del entorno del modelo; el conjunto libre de cinco partículas tendría otra dinámica.

La gravitación proporciona ahora una fuerza concreta para los balances construidos en los capítulos anteriores. El siguiente capítulo reunirá el movimiento del centro de masa, la coordenada relativa, la masa reducida y la conservación angular para estudiar el problema de dos cuerpos. Allí la fuerza radial y la energía permitirán avanzar desde estas leyes hasta la geometría orbital.

Capítulo 17

Problema de dos cuerpos y fuerzas centrales

Dos cuerpos que se atraen se mueven ambos. Describir uno como si el otro estuviera inmóvil puede ser una aproximación útil, pero el problema exacto permite una simplificación distinta: separar la traslación conjunta del cambio de su separación. El centro de masa conserva la primera información; una coordenada relativa conserva la segunda. Si conocemos ambos movimientos, podemos reconstruir las dos trayectorias originales.

La geometría de una fuerza central añade una conservación angular. Cuando la fuerza procede además de un potencial independiente del tiempo, la energía permite reducir el cambio de distancia a un problema de una sola variable. Esa reducción deja visible un potencial efectivo que organiza radios permitidos, puntos de retorno y movimientos circulares. Todavía hace falta recuperar el ángulo para conocer la trayectoria y recuperar el tiempo para conocer cómo se recorre.

Trabajaremos con masas positivas constantes en un marco inercial y con separaciones $r > 0$. Las leyes de fuerza se supondrán suficientemente regulares en cada intervalo considerado para las derivaciones y la unicidad local de las soluciones. El problema principal será un par aislado con fuerzas internas iguales y opuestas, dirigidas a lo largo de su separación. Se declararán aparte las fuerzas externas, la dependencia temporal de la interacción y los casos con momento angular cero. El estudio sistemático de las órbitas gravitatorias de Kepler seguirá en el capítulo próximo.

1. Separar dos movimientos sin perder las partículas

Si ambos cuerpos reciben velocidades iniciales, parte de ellas puede describir una traslación común. El resto corresponde al movimiento de uno respecto del otro. La transformación que hace esta separación debe permitir volver a los datos originales.

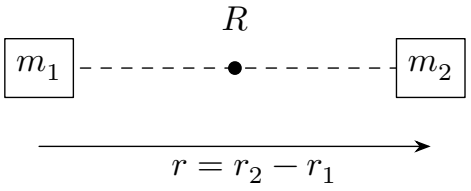


Figura 17.1. El movimiento se reconstruye a partir de R y r: $r_1 = R - (m_2/M)r$ y $r_2 = R + (m_1/M)r$, con $M = m_1 + m_2$. El esquema muestra el caso de masas iguales. Véase §1.

Definición 17.1 — Coordenadas del par. Sean

$$M = m_1 + m_2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \qquad \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}, \qquad \mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Escribimos $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$, $r = |\mathbf{q}| > 0$ y $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}}$. La masa reducida satisface $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$. La coordenada $\mathbf{q}$ apunta desde el cuerpo 2 hacia el 1.

Proposición 17.1 — Reconstrucción del par.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{q}, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{q}.$$

Las velocidades obedecen las mismas fórmulas con $\mathbf{R}, \mathbf{q}$ sustituidas por $\mathbf{V}, \mathbf{w}$.

Demostración. De $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{q}$ y $M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2$ obtenemos $M\mathbf{R} = M\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{q}$. Despejar $\mathbf{r}_2$ y luego sumar $\mathbf{q}$ produce ambas relaciones. Las masas son constantes, de modo que derivar da las velocidades. □

Proposición 17.2 — Energía cinética separada.

$$K = \frac{1}{2}M|\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\mathbf{w}|^2.$$

Demostración. Sustituimos las velocidades de la proposición 17.1 en $K = m_1|\mathbf{v}_1|^2/2 + m_2|\mathbf{v}_2|^2/2$. Los productos cruzados se cancelan porque sus coeficientes son m_1m_2/M y $-m_2m_1/M$. El coeficiente de $|\mathbf{V}|^2/2$ es M, y el de $|\mathbf{w}|^2/2$ es $m_1(m_2/M)^2 + m_2(m_1/M)^2 = m_1m_2/M = \mu$. □

La masa reducida no añade una tercera partícula al sistema. Es el coeficiente que permite expresar la inercia del movimiento relativo. Su posición matemática es la separación entre las partículas, que puede ser mayor que la distancia de cualquiera de ellas al centro.

Principio metodológico 17.1. Conserva la orientación de la coordenada relativa y comprueba que la transformación pueda invertirse. La reducción sirve cuando permite reconstruir las cantidades físicas originales.

Ejercicios. Ejercicio 17.1. Para masas $m_1 = m$ y $m_2 = 3m$, calcula μ y las posiciones relativas al centro cuando $\mathbf{q} = a\mathbf{e}_x$.

Solución. $M = 4m$ y $\mu = 3m/4$. Proposición 17.1 da $\mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = (3a/4)\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = -(a/4)\mathbf{e}_x$. La menor masa está tres veces más lejos del centro; la separación entre ambas sigue siendo a.

Ejercicio 17.2. Dos masas iguales m tienen velocidades $\mathbf{v}_1 = 2u\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{v}_2 = 0$. Separa su energía cinética en colectiva y relativa.

Solución. $\mathbf{V} = u\mathbf{e}_x$, $\mathbf{w} = 2u\mathbf{e}_x$, $M = 2m$ y $\mu = m/2$. La energía colectiva es mu^2 y la relativa $(m/4)(4u^2) = mu^2$. Suman $2mu^2$, igual al cálculo directo $m(2u)^2/2$. El movimiento del centro no absorbe toda la energía, aunque ambas velocidades sean colineales.

2. La ecuación que gobierna la separación

Para dos masas aisladas, las fuerzas internas se cancelan en la ecuación del centro y se suman, con sus pesos inerciales, en la ecuación relativa. Aquí se ve por qué aparece precisamente μ.

Definición 17.2 — Fuerza central del par. Escribimos la fuerza sobre el cuerpo 1 como $\mathbf{F}_{12} = f(r)\mathbf{q}/r$, y la del cuerpo 2 como su opuesta. La función f es una fuerza radial con signo: $f < 0$ indica atracción y $f > 0$ repulsión. Su dependencia sólo de r se adopta para el problema autónomo principal.

Proposición 17.3 — Reducción dinámica exacta. Para el par aislado,

$$M\ddot{\mathbf{R}} = 0, \qquad \mu\ddot{\mathbf{q}} = f(r)\frac{\mathbf{q}}{r}.$$

Con fuerzas externas $\mathbf{F}_1^{\text{ext}}, \mathbf{F}_2^{\text{ext}}$, se añaden respectivamente su suma y el término

$$\mu\left(\frac{\mathbf{F}_1^{\text{ext}}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{\text{ext}}}{m_2}\right)$$

a los miembros derechos.

Demostración. Sumamos las dos ecuaciones de Newton para obtener $M\ddot{\mathbf{R}}$. Las fuerzas internas opuestas desaparecen. Para la separación, restamos las aceleraciones: el coeficiente de la fuerza interna es $1/m_1 + 1/m_2 = 1/\mu$. Multiplicar por μ da la ecuación y el término externo indicado. □

Proposición 17.4 — Campo externo uniforme común. Si cada cuerpo recibe una fuerza externa $m_i\mathbf{g}(t)$ con la misma aceleración espacialmente uniforme, el centro satisface $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{g}(t)$ y la ecuación relativa conserva su forma aislada.

Demostración. La suma externa es $M\mathbf{g}(t)$. En el término diferencial de la proposición 17.3 aparecen $\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t) = 0$. □

Un campo externo no uniforme deja, en cambio, la diferencia de aceleraciones estudiada como efecto de marea en el capítulo 16. El movimiento del centro y el relativo pueden volver a acoplarse porque la fuerza diferencial depende de las posiciones reconstruidas.

Para la gravitación newtoniana, $f(r) = -Gm_1m_2/r^2$. La ecuación relativa es entonces $\ddot{\mathbf{q}} = -G(m_1+m_2)\mathbf{q}/r^3$. El producto de masas pertenece a la fuerza; la suma de masas aparece al dividir por μ. Confundir esos coeficientes cambia la escala temporal.[1]

Principio metodológico 17.2. Reduce las ecuaciones antes de omitir un movimiento. Para agentes externos, compara las aceleraciones que producen en cada cuerpo; una resultante pequeña no garantiza una fuerza diferencial pequeña.

Ejercicios. Ejercicio 17.3. Un par tiene masas m y $2m$ y gravitación mutua. Escribe la ecuación relativa y compárala con fijar la masa $2m$.

Solución. La reducción exacta da $\ddot{\mathbf{q}} = -3Gm\,\mathbf{q}/r^3$. Fijar la masa $2m$ daría coeficiente $2Gm$. A igual separación, la aproximación omite un tercio de la aceleración relativa exacta. La masa mayor no es suficientemente dominante para justificar una pequeña corrección sólo por la razón de masas.

Ejercicio 17.4. Dos masas iguales reciben fuerzas externas $\mathbf{F}_1^{\text{ext}} = \mathbf{F}$ y $\mathbf{F}_2^{\text{ext}} = -\mathbf{F}$. Calcula su efecto sobre el centro y sobre la ecuación relativa.

Solución. La resultante externa es cero, por lo que el centro no recibe aceleración adicional. Con $\mu = m/2$, el término diferencial es $(m/2)[\mathbf{F}/m - (-\mathbf{F})/m] = \mathbf{F}$. La ecuación relativa adquiere esa fuerza adicional. El ejemplo mantiene la traslación colectiva y modifica el movimiento interno.

3. Conservaciones y plano de movimiento

El centro aislado se mueve uniformemente, de modo que sus datos iniciales quedan resueltos. La pregunta restante es cómo cambia $\mathbf{q}$. La fuerza central conserva su momento angular; un potencial autónomo conserva también su energía relativa.

Definición 17.3 — Potencial y magnitudes relativas. Para f continuo en un intervalo de radios, elegimos una primitiva U tal que $U'(r) = -f(r)$ y definimos

$$\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mu\dot{\mathbf{q}}, \qquad E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{q}}|^2 + U(r).$$

Aquí U es energía del par. Para gravitación, $U = -Gm_1m_2/r$ con cero en el infinito; no se trata del potencial por unidad de masa Φ del capítulo 16.

[1] MIT OpenCourseWare, *Classical Mechanics*, 8.01SC, capítulo 25, §25.2.1, reducción del problema gravitatorio de dos cuerpos. https://ocw.mit.edu/courses/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/mit8_01scs22_chapter25new.pdf. La reducción general y sus términos externos se demuestran aquí a partir de Newton.

Proposición 17.5 — Conservación angular y plano relativo. La fuerza central conserva $\mathbf{L}$. Si $\mathbf{L} \neq 0$, la trayectoria relativa queda en el plano fijo perpendicular a él y no pasa por $\mathbf{q} = 0$ mientras el modelo sea regular.

Demostración. Derivar definición 17.3 da $\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{q}} \times \mu\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \mu\ddot{\mathbf{q}} = 0$. Ambos términos se anulan: el primero por paralelismo y el segundo por centralidad. El producto vectorial hace que $\mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$ sean perpendiculares a $\mathbf{L}$. Si éste es no nulo y constante, define un plano fijo. Una coincidencia con velocidad finita daría $\mathbf{L} = 0$, contradiciendo la hipótesis. □

Proposición 17.6 — Conservación energética relativa. Para la fuerza autónoma de la definición 17.2 y el potencial de la definición 17.3, E es constante.

Demostración. Como $r > 0$, $\dot{r} = \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}/r$. La ecuación relativa da $d(\mu|\dot{\mathbf{q}}|^2/2)/dt = f(r)\dot{r}$. La regla de la cadena da $\dot{U} = U'(r)\dot{r} = -f(r)\dot{r}$, que cancela el primer término. □

La existencia de una primitiva sobre un intervalo radial permite construir este potencial para una fuerza central que sólo depende de r. Una fuerza central dependiente del tiempo todavía conserva $\mathbf{L}$, pero puede cambiar la energía; esa distinción ya apareció en el capítulo 15.

En el plano orientado por $\mathbf{L}$ elegiremos $L = |\mathbf{L}| > 0$. La velocidad areolar relativa es $L/(2\mu)$. El área pertenece al vector separación: no se identifica sin un factor geométrico con el área de la trayectoria de cada cuerpo alrededor del centro.

Principio metodológico 17.3. Identifica qué depende de la centralidad y qué depende además de la autonomía del potencial. Mantén separadas energía relativa, energía total y potencial por unidad de masa.

Ejercicios. Ejercicio 17.5. Para una interacción $\mathbf{F}_{12} = -k(t)\mathbf{q}$, con $k(t) > 0$ diferenciable, decide qué se conserva y calcula la derivada de $E = \mu|\dot{\mathbf{q}}|^2/2 + k(t)r^2/2$.

Solución. La fuerza sigue siendo central, así que $\mathbf{L}$ se conserva. Derivar la energía da $\dot{E} = \dot{k}(t)r^2/2$, pues la potencia interna y la derivada espacial del potencial se cancelan. Si k cambia, la energía relativa indicada no se conserva en general.

Ejercicio 17.6. Un par tiene momento angular relativo constante $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_z$, con $L > 0$. Su centro se mueve como $\mathbf{R} = \mathbf{V}t$. ¿Las trayectorias absolutas permanecen necesariamente en un plano fijo perpendicular a $\mathbf{e}_z$?

Solución. proposición 17.5 da $q_z = 0$. Proposición 17.1 implica que ambos cuerpos tienen coordenada vertical $r_{i,z} = V_z t$. Si $V_z \neq 0$, su plano común se traslada verticalmente; las trayectorias no quedan en un plano fijo perpendicular a $\mathbf{e}_z$. Si $V_z = 0$, sí permanecen en ese plano fijo. La conservación angular relativa fija una orientación, mientras el centro controla la traslación.

4. Qué deben contener los datos iniciales

Los números E y L restringen el movimiento, pero no sustituyen el estado inicial completo. La misma energía puede describir una partícula que se acerca o se aleja a una distancia dada. La magnitud angular tampoco fija la orientación del plano ni la dirección inicial dentro de él.

Para $\mathbf{L} \neq 0$, elegimos una base ortonormal fija en su plano, con orientación tal que $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$ apunte como $\mathbf{L}$. Entonces $\mathbf{q} = r\mathbf{e}_r$ y $\dot{\mathbf{q}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$. Las fórmulas polares se construyeron en el capítulo 15.

Proposición 17.7 — Estado polar e invariantes. En el plano orientado,

$$L = \mu r^2\dot{\theta}, \qquad E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

A un radio inicial dado y con $L > 0$, la componente tangencial está fijada por $v_\theta = L/(\mu r)$, pero el signo de $\dot r$ necesita un dato adicional cuando $\dot r \neq 0$.

Demostración. El producto $\mathbf{q} \times \mu\dot{\mathbf{q}}$ elimina la componente radial y deja $\mu r^2\dot\theta$ en la normal elegida. La ortonormalidad da $|\dot{\mathbf{q}}|^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2$. Sustituir la expresión angular en la energía da la fórmula. Despejar $\dot r^2$ sólo determina una magnitud; no distingue las dos ramas de signo. □

Para reconstruir el sistema se dan $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$, o un conjunto equivalente de datos. La elección del plano y el ángulo inicial guardan información que desaparece al calcular invariantes escalares. Cerca de un punto de retorno radial, el signo de la aceleración permite decidir cómo continúa una solución que tiene $\dot r = 0$.

Si fijamos una orientación planar distinta, la componente angular puede ser negativa. No cambia el problema físico: cambia la convención del ángulo. En adelante usaremos la orientación con $L > 0$ para simplificar las cuadraturas.

Principio metodológico 17.4. Conserva los datos de orientación, fase y rama radial al pasar del estado a los invariantes. Una reducción debe indicar qué información se eliminó y cómo recuperarla.

Ejercicios. Ejercicio 17.7. En un potencial central dado, compara los estados $\mathbf{q}_0 = a\mathbf{e}_x$, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \pm w\mathbf{e}_x + u\mathbf{e}_y$, con $a, u, w > 0$. Calcula sus invariantes.

Solución. Ambos tienen $\mathbf{L} = \mu a u\, \mathbf{e}_z$ y $E = \mu(w^2 + u^2)/2 + U(a)$. El primer estado con signo positivo se aleja inicialmente y el de signo negativo se acerca. La igualdad de invariantes no distingue esas ramas ni sus historias temporales desde el estado dado.

Ejercicio 17.8. Una solución tiene radio $r(t)$, ángulo $\theta(t)$ y centro $\mathbf{R}(t)$. Determina qué datos cambian al rotar todo el movimiento relativo un ángulo fijo α en su plano.

Solución. El nuevo ángulo es $\theta + \alpha$, mientras r, $\dot r$ y $\dot\theta$ no cambian. Por proposición 17.7, E y L son iguales. Las posiciones y velocidades relativas se rotan y proposición 17.1 reconstruye otras posiciones absolutas respecto del mismo centro. La rotación no modifica las ecuaciones de fuerza central, pero sí la orientación de la trayectoria en el espacio.

5. El potencial efectivo

La conservación angular permite reemplazar la velocidad angular por $L/(\mu r^2)$. Al hacerlo, una parte de la energía cinética queda expresada como función del radio. Reunirla con el potencial físico produce una descripción unidimensional del cambio de distancia.

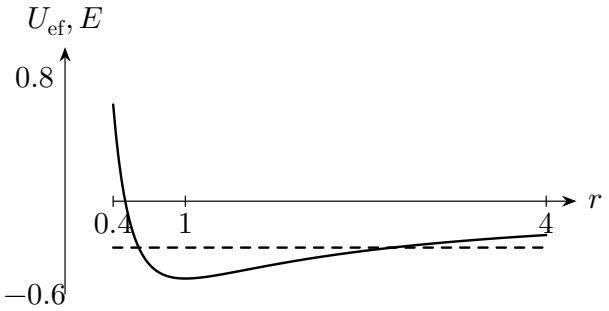


Figura 17.2. En el ejemplo reducido $U_{ef} = 1/(2r^2) - 1/r$, el mínimo está en $r = 1$. El nivel $E = -0{,}3$ corta la curva en dos radios de retorno y deja un intervalo accesible entre ellos. Véase §5.

Definición 17.4 — Potencial efectivo a momento angular fijado.

$$W_L(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

Se estudia para una masa reducida y un valor de L dados. El segundo término procede de la energía cinética tangencial eliminada mediante la conservación, no de una interacción nueva entre los cuerpos.

Proposición 17.8 — Ecuación radial efectiva.

$$\mu\ddot{r} = -W_L'(r) = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

Demostración. La componente radial de $\mu\ddot{\mathbf{q}} = f(r)\mathbf{e}_r$ es $\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r)$, según la aceleración polar del capítulo 15. Sustituir $\dot{\theta} = L/(\mu r^2)$ da $\mu\ddot{r} = f(r) + L^2/(\mu r^3)$. Derivar definición 17.4 y usar $U' = -f$ identifica ese miembro con $-W_L'$. □

El término positivo se denomina término centrífugo de la reducción radial. La aceleración radial de la coordenada r incluye el cambio de dirección de la velocidad; no es la componente radial de $\ddot{\mathbf{q}}$ por sí sola. Por eso la ecuación conserva una contribución geométrica aun cuando la única fuerza física sea atractiva.

Proposición 17.9 — Regiones radialmente admisibles. En una solución con energía E,

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - W_L(r) \geq 0.$$

La trayectoria radial no puede entrar en un intervalo donde $W_L(r) > E$. Si el conjunto admisible tiene componentes separadas por intervalos prohibidos, la solución continua queda en la componente compatible con sus datos iniciales.

Demostración. La igualdad procede de la proposición 17.7. Su miembro izquierdo es no negativo. Una posición con $W_L > E$ exigiría una velocidad real de cuadrado negativo. La continuidad impide cruzar de una componente a otra a través de un intervalo de posiciones imposibles. □

La gráfica de W_L organiza posibilidades sin resolver todo el movimiento. Una intersección con el nivel E indica velocidad radial cero, pero todavía hay que examinar la derivada del potencial y el tiempo necesario para llegar. Además, cada valor distinto de L produce un potencial efectivo distinto: comparar curvas sin mantener fijo ese parámetro mezcla problemas diferentes.[2]

Principio metodológico 17.5. Interpreta el término efectivo como resultado de una reducción. Usa $E - W_L$ para controlar radios y conserva la ecuación radial para decidir la continuación del movimiento.

Ejercicios. Ejercicio 17.9. Para $U(r) = -\alpha/r$, con $\alpha > 0$ y $L > 0$, encuentra el radio donde W_L tiene un punto crítico y su valor allí.

Solución. $W_L' = \alpha/r^2 - L^2/(\mu r^3)$, así que el único punto crítico es $r_c = L^2/(\mu\alpha)$. Allí $W_L(r_c) = -\mu\alpha^2/(2L^2)$. La segunda derivada es $-2\alpha/r^3 + 3L^2/(\mu r^4)$ y vale $\alpha/r_c^3 > 0$. Es un mínimo. Ese radio será el candidato circular estudiado en §8.

Ejercicio 17.10. En el mismo potencial, con $E < 0$, despeja los radios donde $\dot{r} = 0$ y determina la condición de existencia.

Solución. Multiplicar $E = -\alpha/r + L^2/(2\mu r^2)$ por r^2 da $Er^2 + \alpha r - L^2/(2\mu) = 0$. El discriminante es $\alpha^2 + 2EL^2/\mu$. Hay raíces reales cuando $E \geq -\mu\alpha^2/(2L^2)$. Si la desigualdad es estricta y $E < 0$,

[2]El mismo capítulo, §§25.3–25.4, energía y potencial efectivo. Las condiciones sobre raíces, tiempos de llegada, singularidades y estabilidad del presente capítulo se explicitan y prueban localmente.

ambas raíces son positivas: su suma es $-\alpha/E > 0$ y su producto $-L^2/(2\mu E) > 0$. Los radios admisibles quedan entre ellas. En la igualdad las raíces coinciden en el mínimo y la energía obliga a radio constante. Si la energía es menor que el mínimo, no existe estado con ese E, L.

6. Cuadraturas y puntos de retorno

Cuando conocemos E y L, el cambio de radio puede expresarse por una integral. La integración necesita escoger una rama: la partícula puede atravesar el mismo radio durante la aproximación y durante el alejamiento.

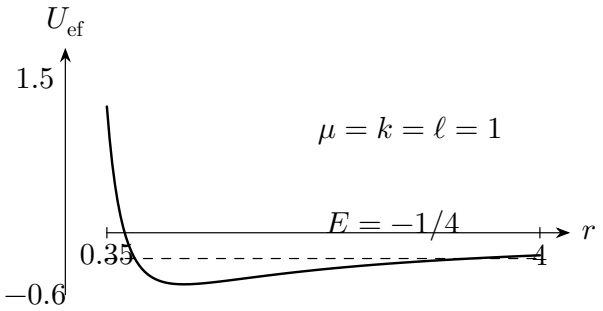


Figura 17.3. En el modelo $U_{ef} = 1/(2r^2) - 1/r$, una energía $E = -1/4$ admite movimiento entre dos radios $r = 2 \pm \sqrt{2}$. La velocidad radial se anula allí; la componente angular puede permanecer distinta de cero. Véase §6.

Definición 17.5 — Cuadratura radial. En un tramo donde $\dot r$ no se anula, sea $\sigma = \operatorname{sign}(\dot r)$. Las expresiones integrales que reconstruyen tiempo y ángulo a partir del radio se llaman cuadraturas.

Proposición 17.10 — Tiempo y ángulo sobre una rama. Si $E - W_L(r) > 0$ en el tramo y $L > 0$,

$$t - t_0 = \sigma \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{\sqrt{E - W_L(s)}},$$

$$\theta - \theta_0 = \sigma \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{s^2 \sqrt{E - W_L(s)}}.$$

Demostración. proposición 17.9 da $\dot r = \sigma\sqrt{2(E - W_L)/\mu}$. Invertir esta relación produce dt/dr y la primera integral. Multiplicar por $\dot\theta = L/(\mu r^2)$ da $d\theta/dr$ y la segunda. □

Para una rama entrante, la integral desde r_0 a un radio menor es negativa y $\sigma = -1$ hace positivo el tiempo transcurrido. El ángulo sigue creciendo bajo la orientación con $L > 0$. Cambiar la rama en un retorno requiere cambiar σ; una única raíz cuadrada con signo fijo no describe toda la trayectoria.

Proposición 17.11 — Raíz simple y aproximación asintótica. Sea $r_* > 0$ con $W_L(r_*) = E$. Si $W_L'(r_*) \neq 0$, una rama admisible que llega desde radios próximos alcanza ese radio en tiempo finito y tiene allí aceleración radial no nula $-W_L'(r_*)/\mu$. Si $W_L'(r_*) = 0$ y $W_L''(r_*) < 0$, una rama no circular que se aproxima a él con esa energía tarda tiempo infinito en alcanzarlo, suponiendo W_L dos veces continuamente diferenciable cerca del punto.

Demostración. Para una raíz simple, $E - W_L(r) = -W_L'(r_*)(r - r_*) + o(|r - r_*|)$. En el lado admisible es comparable a una constante positiva por $|r - r_*|$. La integral temporal se comporta como $\int ds/\sqrt{|s - r_*|}$, finita. Proposición 17.8 da aceleración no nula y determina el cambio de

rama. En el máximo no degenerado, Taylor da $E - W_L(r) = -(W_L''(r_*)/2)(r - r_*)^2 + o((r - r_*)^2)$. La integral temporal se comporta como $\int ds/|s - r_*|$, que diverge. □

Una tangencia al nivel de energía puede representar una órbita circular o una aproximación asintótica a ella. En un mínimo con energía exactamente mínima, no hay una rama cercana admisible: el estado es circular. Los puntos degenerados requieren examinar términos superiores; el dibujo de una tangencia no decide todos esos casos.

Principio metodológico 17.6. En un extremo radial, revisa el orden de la raíz y la integral temporal. Separa retorno, radio circular y aproximación asintótica.

Ejercicios. Ejercicio 17.11. Cerca de un extremo admisible, $E - W_L(r)$ es comparable a $C|r - r_*|^p$, con $C > 0$ y $p > 0$. Determina para qué valores de p el tiempo local de llegada es finito.

Solución. proposición 17.10 reduce la pregunta a la convergencia de $\int_0^\varepsilon s^{-p/2}\, ds$. Esta integral es finita cuando $-p/2 > -1$, es decir, $p < 2$. Para $p = 2$ diverge logarítmicamente; para $p > 2$ también diverge. La comparación debe darse en el lado admisible. El criterio concierne al tiempo, no por sí solo al tipo de continuación después de llegar.

Ejercicio 17.12. Un estado tiene $\dot r = 0$ y $W_L'(r_*) > 0$. ¿El radio comienza a aumentar o a disminuir? ¿Es un extremo interior o exterior de la región permitida local?

Solución. proposición 17.8 da $\ddot r = -W_L'(r_*)/\mu < 0$, de modo que el radio empieza a disminuir. Para $r < r_*$ próximo, $W_L(r) < W_L(r_*) = E$ y hay estados permitidos; para $r > r_*$ próximo no los hay. Es un extremo exterior local, de radio máximo. La aceleración permite escoger la rama después del instante de velocidad radial cero.

7. Momento angular cero y coincidencias

La reducción planar con un ángulo creciente utiliza $L > 0$. Si el momento angular es cero, la coordenada angular deja de ser una buena variable para reconstruir la trayectoria. El movimiento puede ser radial, pero la coincidencia de los cuerpos requiere un análisis separado.

Proposición 17.12 — Dirección constante con momento angular cero. En un intervalo donde $r > 0$ y $\mathbf{L} = 0$, la dirección $\mathbf{n} = \mathbf{q}/r$ es constante. El movimiento relativo sigue una recta radial y satisface $\mu\ddot r = f(r)$.

Demostración. $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = 0$ implica $\dot{\mathbf{q}} = \dot r\, \mathbf{n}$. Al derivar $\mathbf{n}$, se obtiene $\dot{\mathbf{n}} = (\dot{\mathbf{q}} - \dot r\, \mathbf{n})/r = 0$. Entonces $\ddot{\mathbf{q}} = \ddot r\, \mathbf{n}$ y la ecuación relativa se reduce a la indicada. □

La dirección es constante en cada intervalo que evita $r = 0$. Si se alcanza una coincidencia, no puede usarse allí $\mathbf{q}/r$. Cuando la fuerza es singular, el modelo tampoco determina una continuación atravesando ese punto. Una interacción regular definida en todo el espacio podría permitir otro tratamiento, pero eso añade una ley en el origen.

Proposición 17.13 — Barrera angular suficiente. Si $L > 0$ y $W_L(r) \to +\infty$ cuando $r \to 0$, ninguna solución con energía finita puede alcanzar radios arbitrariamente pequeños. Esto ocurre, en particular, cuando $U(r) = o(r^{-2})$ cerca de cero.

Demostración. Para una energía fija E, existe $\varepsilon > 0$ tal que $W_L(r) > E$ cuando $0 < r < \varepsilon$. Proposición 17.9 prohíbe esos radios. Si $U = o(r^{-2})$, entonces $r^2 W_L(r) = r^2 U(r) + L^2/(2\mu)$ tiende al segundo término positivo, de modo que $W_L \to +\infty$. □

La gravitación $U = -\alpha/r$ satisface esa condición. Una singularidad atractiva más intensa puede vencer la barrera: con $U = -\beta/r^4$, el potencial efectivo tiende a $-\infty$. Por eso momento angular no nulo no es una garantía universal de ausencia de colapso en toda ley central singular. Proposición 17.5 excluye una coincidencia regular con velocidad finita; una solución singular puede terminar con velocidad sin cota.

Principio metodológico 17.7. Trata $L = 0$ por separado y examina el potencial cerca de las singularidades. No continúes una solución más allá del dominio de su fuerza sin declarar una extensión del modelo.

Ejercicios. Ejercicio 17.13. En $U = -\alpha/r$, con $\alpha > 0$, una solución radial tiene $L = 0$ y $E = 0$ y se mueve hacia el centro. Determina si la coincidencia ocurre en tiempo finito.

Solución. La energía da $\dot r = -\sqrt{2\alpha/(\mu r)}$. El tiempo desde r_0 hasta cero es $\sqrt{\mu/(2\alpha)}\int_0^{r_0}\sqrt{r}\,dr = (2/3)\sqrt{\mu/(2\alpha)}\,r_0^{3/2}$, finito. La rapidez diverge al acercarse al centro. El resultado determina el fin del intervalo regular; no justifica continuar la solución a través de la fuerza singular.

Ejercicio 17.14. Para $U = -\beta/r^4$, con $\beta > 0$ y $L > 0$, estudia una rama entrante suficientemente próxima a cero y de energía finita. ¿Existe necesariamente una barrera angular? ¿Es finito el tiempo restante hasta la singularidad?

Solución. $W_L = L^2/(2\mu r^2) - \beta/r^4 \to -\infty$, así que no hay barrera en radios suficientemente pequeños. Allí la rapidez radial tiene comportamiento $|\dot r| \sim \sqrt{2\beta/\mu}\,r^{-2}$. La integral temporal restante es comparable a $\sqrt{\mu/(2\beta)}\int_0^{\varepsilon} r^2\,dr$, finita. Para radios pequeños, $W_L'(r) > 0$ y la aceleración radial es hacia adentro, compatible con la rama que colapsa. El ejemplo no afirma que toda condición inicial llegue a esa región, sino que una solución entrante allí puede terminar singularmente pese a $L > 0$.

8. Órbitas circulares y estabilidad radial

Un radio constante exige que la atracción física sostenga la aceleración centrípeta correspondiente al momento angular. En la descripción efectiva, esa misma condición se convierte en un punto crítico de W_L.

Proposición 17.14 — Condición circular. Para $L > 0$, hay un movimiento circular de radio $r_c > 0$ si

$$W_L'(r_c) = 0, \quad \text{equivalentemente} \quad L^2 = \mu r_c^3 U'(r_c).$$

Su velocidad angular y energía relativa son

$$\Omega = \frac{L}{\mu r_c^2}, \qquad E_c = U(r_c) + \frac{1}{2} r_c U'(r_c).$$

Demostración. Un radio constante tiene $\dot r = \ddot r = 0$. Proposición 17.8 exige $W_L'(r_c) = 0$, que al derivar definición 17.4 produce la equivalencia. Con ese radio y $\dot\theta = \Omega$, la ecuación tangencial se cumple y la radial reproduce la condición centrípeta, dando una solución circular. Proposición 17.7 da su energía. □

En particular, $U'(r_c) > 0$ es necesario: la fuerza física debe ser atractiva en ese radio. El punto crítico representa un equilibrio de la variable radial, mientras el vector separación continúa girando.

Proposición 17.15 — Estabilidad radial a L fijado. Si W_L es dos veces continuamente diferenciable y $W_L''(r_c) > 0$, el equilibrio radial $(r_c, 0)$ es estable a momento angular fijado. Su linealización es

$$\ddot\eta + \frac{W_L''(r_c)}{\mu}\eta = 0, \qquad \eta = r - r_c.$$

Si $W_L''(r_c) < 0$, el equilibrio radial es inestable.

Demostración. Con derivada segunda positiva, Taylor proporciona un mínimo estricto y una barrera de energía en los extremos de cualquier intervalo suficientemente pequeño alrededor de r_c. Estados iniciales con energía suficientemente próxima a $W_L(r_c)$ no pueden cruzar esa barrera por la proposición 17.9. Además, dentro de ese intervalo, $\mu\dot{r}^2/2 = E - W_L(r) \le E - W_L(r_c)$, lo que controla también la velocidad radial. Esto prueba estabilidad en el plano radial de estados. Expandir $W_L'(r_c+\eta) = W_L''(r_c)\eta + o(\eta)$ da la linealización. Con derivada segunda negativa, el punto es un máximo estricto: para $\eta > 0$ pequeño, $-W_L'(r_c+\eta) > 0$. Un estado liberado ligeramente a la derecha acelera hacia radios mayores y abandona una vecindad fija pequeña. □

La estabilidad radial no afirma que una trayectoria perturbada mantenga la misma fase angular que la circular. Una pequeña diferencia de radio puede modificar la frecuencia y acumular una diferencia de ángulo. Tampoco el signo de W_L'' decide los casos degenerados con derivada segunda cero.

Principio metodológico 17.8. Al afirmar estabilidad, especifica la variable y qué parámetros permanecen fijos. Un radio estable no implica sincronización angular de todas las trayectorias próximas.

Ejercicios. Ejercicio 17.15. Para $U = -\alpha/r$, encuentra Ω y la frecuencia radial lineal de la órbita circular del ejercicio 17.9.

Solución. La condición circular da $L^2 = \mu\alpha r_c$. Por tanto $\Omega^2 = L^2/(\mu^2 r_c^4) = \alpha/(\mu r_c^3)$. Como $W_L''(r_c) = \alpha/r_c^3$, la frecuencia radial lineal satisface $\kappa^2 = W_L''/\mu = \alpha/(\mu r_c^3) = \Omega^2$. La igualdad se obtuvo para perturbaciones radiales pequeñas; el estudio completo del caso gravitatorio vendrá en el capítulo 18.

Ejercicio 17.16. Para $U = kr^2/2$, con $k > 0$, determina el radio circular y el signo de la estabilidad radial.

Solución. $W_L' = kr - L^2/(\mu r^3) = 0$ da $r_c^4 = L^2/(\mu k)$. La derivada segunda es $k + 3L^2/(\mu r^4)$ y en el radio circular vale $4k > 0$. El equilibrio radial es estable y su frecuencia lineal es $2\sqrt{k/\mu}$. La velocidad angular circular satisface $\Omega^2 = k/\mu$.

9. Dos frecuencias próximas a una órbita circular

Una perturbación radial pequeña de una órbita circular estable hace que el radio oscile. Mientras tanto, el ángulo continúa aumentando. Comparar la frecuencia radial con la angular permite anticipar cuánto gira la dirección entre dos radios mínimos sucesivos.

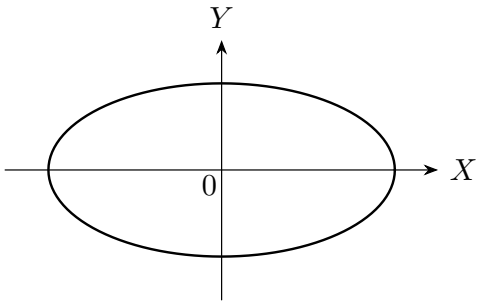


Figura 17.4. Para el oscilador central isotrópico, $x = 2\cos u$, $y = \sin u$ forma una elipse centrada en el origen de fuerza. Un período radial corresponde a medio período orbital. Véase §9.

Definición 17.6 — Frecuencias locales. Para una órbita circular radialmente estable de radio r_c, definimos $\Omega = L/(\mu r_c^2)$ y $\kappa = \sqrt{W_L''(r_c)/\mu}$. La primera es la velocidad angular de la órbita circular; la segunda es la frecuencia del problema radial linealizado.

Proposición 17.16 — Frecuencias en función del potencial.

$$\Omega^2 = \frac{U'(r_c)}{\mu r_c}, \qquad \kappa^2 = \frac{1}{\mu}\left[U''(r_c) + \frac{3U'(r_c)}{r_c}\right].$$

En la aproximación de amplitud radial pequeña, el ángulo entre dos mínimos radiales sucesivos tiende a $2\pi\Omega/\kappa$ cuando la amplitud tiende a cero.

Demostración. proposición 17.14 da $L^2 = \mu r_c^3 U'(r_c)$, que al sustituirse en Ω^2 produce la primera fórmula. Derivar dos veces definición 17.4 da $W_L'' = U'' + 3L^2/(\mu r^4)$; evaluar en r_c da la segunda. Para justificar el límite del período de las oscilaciones reales, sea $a = W_L''(r_c) > 0$ y definamos localmente $z = \operatorname{sign}(r - r_c)\sqrt{2[W_L(r) - W_L(r_c)]/a}$. Taylor implica que esta coordenada es invertible cerca del mínimo y que $dr/dz \to 1$ al acercarse a cero. Con $A = \sqrt{2[E - W_L(r_c)]/a}$, el tiempo de un ciclo es $2\sqrt{\mu/a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(dr/dz)(A\sin\psi)\,d\psi$, usando $z = A\sin\psi$ en la cuadratura radial. Al tender A a cero, la derivada converge uniformemente a uno y el período tiende a $2\pi/\kappa$. Además, $\dot\theta = L/[\mu(r_c + \eta)^2]$ converge uniformemente a Ω durante esos ciclos. Integrar da el límite angular indicado. □

La razón puede cambiar cuando aumenta la amplitud porque el movimiento radial deja de ser sinusoidal y la velocidad angular varía con el radio. Una razón racional en el límite circular no prueba cierre exacto para todas las órbitas próximas.

Proposición 17.17 — Fuerza atractiva de potencia. Para $f(r) = -cr^p$, con $c > 0$ y p real, una órbita circular tiene

$$L^2 = \mu c r_c^{p+3}, \qquad \Omega^2 = \frac{c}{\mu} r_c^{p-1}, \qquad \kappa^2 = (p+3)\Omega^2.$$

Es radialmente estable con mínimo no degenerado cuando $p > -3$, e inestable cuando $p < -3$. Para $p = -3$ el criterio cuadrático es degenerado.

Demostración. $U' = cr^p$ y $U'' = cpr^{p-1}$. Sustituir en la proposición 17.14 y proposición 17.16 da las expresiones. Puesto que $\Omega^2 > 0$, el signo de $W_L'' = \mu\kappa^2$ es el de $p + 3$. Para $p = -3$, la condición circular exige $L^2 = \mu c$ y no selecciona un radio; el caso debe analizarse con la ecuación exacta. □

La fuerza inversa del cuadrado corresponde a $p = -2$ y da $\kappa = \Omega$. La fuerza elástica corresponde a $p = 1$ y da $\kappa = 2\Omega$. Estas comparaciones permiten formular una pregunta geométrica que se resolverá mediante el ángulo integrado, no sólo mediante la forma de una oscilación local.

Principio metodológico 17.9. Distingue frecuencias de la órbita circular, frecuencias linealizadas y períodos de una órbita finita. Indica el límite en que se usa una aproximación.

Ejercicios. Ejercicio 17.17. Para $f = -c/r$, con $c > 0$, calcula la razón κ/Ω y el ángulo límite entre mínimos radiales. ¿Ese dato prueba cierre de todas las órbitas próximas?

Solución. Aquí $p = -1$, de modo que $\kappa/\Omega = \sqrt{2}$ y el ángulo límite es $2\pi/\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi$. La razón angular respecto de 2π es irracional en el límite. El dato describe perturbaciones infinitesimales; por sí solo no determina el ángulo exacto para cada amplitud finita ni permite clasificar todas esas trayectorias.

Ejercicio 17.18. Para $f = -c/r^4$, con $c > 0$, existe un radio circular compatible con un $L > 0$ dado. Encuéntralo y estudia su estabilidad radial.

Solución. $p = -4$, así que la condición es $L^2 = \mu c/r_c$ y $r_c = \mu c/L^2$. Proposición 17.17 da $\kappa^2 = -\Omega^2 < 0$. El punto crítico es un máximo efectivo y la linealización radial tiene soluciones exponenciales, no oscilatorias. Proposición 17.15 muestra además la inestabilidad mediante el sentido de la aceleración al alejarse del radio crítico.

10. Un ciclo radial no siempre cierra la trayectoria

Si el radio oscila entre un mínimo y un máximo, vuelve al mismo valor periódicamente. La posición vectorial sólo vuelve a un estado anterior cuando también se repite la orientación angular. Esas dos periodicidades pueden encajar o quedar desfasadas.

Definición 17.7 — Ángulo por ciclo radial. Para una órbita no circular cuyo radio recorre repetidamente un intervalo $r_- < r_+$, llamamos $\Delta\theta_{\mathrm{rad}}$ al ángulo acumulado desde un mínimo radial hasta el siguiente. Esta convención incluye el viaje de ida y vuelta. El ángulo entre un mínimo y el máximo siguiente es la mitad bajo las hipótesis autónomas siguientes.

Proposición 17.18 — Integral angular y criterio de cierre. Supongamos $L > 0$, dos extremos positivos simples r_-, r_+ con $E - W_L = 0$, y $E - W_L > 0$ entre ellos, sin singularidades en el intervalo. Entonces

$$T_r = \sqrt{2\mu}\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{E - W_L(r)}},$$

$$\Delta\theta_{\mathrm{rad}} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}L\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - W_L(r)}}.$$

El estado relativo completo se repite después de un número entero de ciclos radiales exactamente cuando $\Delta\theta_{\mathrm{rad}}/(2\pi)$ es racional.

Demostración. proposición 17.10 da el tiempo y ángulo del tramo saliente. El entrante recorre los mismos radios con la misma rapidez radial en magnitud y añade los mismos valores positivos. Multiplicar por dos da las fórmulas, cuyas integrales convergen por la proposición 17.11. Al volver a un mínimo, el radio y la velocidad radial se repiten; la velocidad angular también, porque depende sólo de ese radio y L. El estado vectorial se repite si el ángulo acumulado tras n ciclos es $2\pi k$ para enteros $n > 0, k$. Esa ecuación equivale a una razón racional. □

Si la razón es p/q en términos irreducibles positivos, el estado se repite tras q ciclos radiales y el ángulo acumulado es $2\pi p$. Un cruce de la trayectoria en un punto no basta: puede ocurrir con otra velocidad. Para el criterio de cierre usamos el estado, no sólo un dibujo de posiciones.

Cuando la razón es irracional, las direcciones de los mínimos nunca se repiten exactamente. La trayectoria permanece en el anillo radial permitido, pero sigue recorriendo orientaciones diferentes. No necesitamos afirmar aquí cómo cubre ese anillo ni resolver el teorema global que clasifica todas las fuerzas con órbitas cerradas.

Principio metodológico 17.10. Compara período radial y avance angular para decidir cierre. Especifica si se repite una posición, una dirección de extremo o el estado completo.

Ejercicios. Ejercicio 17.19. Una órbita tiene $\Delta\theta_{\mathrm{rad}} = 3\pi/2$. Determina cuántos ciclos radiales necesita para repetir el estado y cuántas vueltas angulares habrá dado.

Solución. La razón es $(3\pi/2)/(2\pi) = 3/4$. Tras cuatro ciclos se acumulan 6π, equivalentes a tres vueltas completas. Ningún número menor positivo de ciclos produce un múltiplo de 2π, porque 3 y 4 son coprimos.

Ejercicio 17.20. El radio de una órbita vuelve a su mínimo cada tiempo T_r, pero la orientación del mínimo avanza $2\pi\sqrt{2}$ por ciclo. ¿Es periódica la coordenada radial? ¿Se repite el estado relativo?

Solución. La coordenada radial y su velocidad son periódicas con período T_r. Para repetir el estado haría falta $n\sqrt{2} = k$ con enteros $n > 0, k$, imposible. Las velocidades angulares en los mínimos tienen igual magnitud, pero sus direcciones espaciales se rotan. La periodicidad de una variable reducida no implica periodicidad del sistema completo.

11. La trayectoria como función del ángulo

El tiempo es la variable natural de Newton. Para estudiar la forma de una órbita con $L > 0$, el ángulo resulta útil porque aumenta estrictamente y permite describir r como función de θ. Usar el radio inverso simplifica la aceleración radial.

Definición 17.8 — Radio inverso orbital. En un tramo regular con $L > 0$, definimos $u(\theta) = 1/r(\theta) > 0$. Las primas en esta sección indican derivación respecto de θ; los puntos siguen indicando derivación respecto del tiempo.

Proposición 17.19 — Ecuación de Binet. La ecuación central equivale, sobre el tramo, a

$$u'' + u = -\frac{\mu}{L^2 u^2} f(1/u).$$

Además,

$$\dot r = -\frac{L}{\mu} u', \qquad E = \frac{L^2}{2\mu}\big[(u')^2 + u^2\big] + U(1/u).$$

Demostración. La conservación angular da $\dot\theta = Lu^2/\mu$. Como $r = 1/u$, $\dot r = (-u'/u^2)(Lu^2/\mu) = -Lu'/\mu$. Otra derivación produce $\ddot r = -(L^2/\mu^2)u^2u''$, y $r\dot\theta^2 = (L^2/\mu^2)u^3$. La ecuación radial física $\mu(\ddot r - r\dot\theta^2) = f(r)$ da Binet. Sustituir las componentes radial y tangencial de la velocidad en la energía da la última expresión. □

Proposición 17.20 — Recuperación temporal desde Binet. Si una función $u > 0$ suficientemente regular satisface proposición 17.19 para un $L > 0$ fijado, el tiempo se recupera por

$$t - t_0 = \frac{\mu}{L}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\psi}{u(\psi)^2}.$$

En cualquier tramo donde esa integral define un tiempo finito e invertible, la trayectoria reconstruida satisface la ecuación central original.

Demostración. El integrando es positivo, por lo que el tiempo es estrictamente creciente. Su inversa cumple $\dot\theta = Lu^2/\mu$. Los cálculos de la proposición 17.19 se recorren en sentido inverso y producen la componente radial de Newton. La componente tangencial es cero porque $r^2\dot\theta = L/\mu$ es constante. □

Un cero de u corresponde a distancia infinita, y la integral temporal puede divergir allí. Un tramo con $u < 0$ no representa un radio positivo bajo esta definición. Resolver la ecuación escalar sin controlar ese dominio puede añadir segmentos matemáticos que no pertenecen a la trayectoria física.

Para la gravitación, $f = -\alpha/r^2$ y Binet se reduce a $u'' + u = \mu\alpha/L^2$. Esta ecuación lineal prepara el estudio de las cónicas, sus ramas y sus tiempos en el capítulo 18. Aquí importa reconocer por qué el cambio de variable simplifica la geometría.[3]

Principio metodológico 17.11. Al usar el ángulo como variable, exige momento angular no nulo y radio positivo. Recupera el tiempo antes de interpretar cómo se recorre una solución orbital.

Ejercicios. Ejercicio 17.21. Supón que $u(\theta) = u_0[1 + e\cos\theta]$, con $u_0 > 0$ y $0 < e < 1$. Reconstruye la fuerza central compatible con esa curva para un $L > 0$ y masa reducida μ dados.

Solución. $u'' = -u_0 e\cos\theta$, por lo que $u'' + u = u_0$. Proposición 17.19 exige $f(1/u) = -(L^2/\mu)u_0u^2$. Como $u = 1/r$, la ley sobre los radios recorridos es $f(r) = -\alpha/r^2$, con $\alpha = L^2u_0/\mu$. La condición $e < 1$ mantiene $u > 0$ para todo ángulo. La reconstrucción identifica la fuerza en el intervalo radial visitado; extenderla fuera de él requiere adoptar la misma ley allí.

Ejercicio 17.22. Para una trayectoria circular, $u(\theta) = 1/r_c$, reconstruye mediante Binet el valor de la fuerza en ese radio. ¿Queda determinada su función completa?

Solución. $u' = u'' = 0$, de modo que $f(r_c) = -L^2/(\mu r_c^3)$. Es la condición centrípeta de la proposición 17.14. La observación de un único círculo determina ese valor de la fuerza para el L, μ dados, pero no sus valores en otros radios. Muchas leyes centrales diferentes pueden compartir ese mismo movimiento circular.

12. Volver a las dos trayectorias

La solución relativa describe una separación. Para observar cada cuerpo, necesitamos aplicar proposición 17.1 y añadir el centro de masa. En el marco del centro, las dos trayectorias tienen la misma forma relativa escalada y sentidos opuestos.

Proposición 17.21 — Reparto del movimiento interno. Sean $\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = (m_2/M)\mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\rho}_2 = -(m_1/M)\mathbf{q}$. Sus momentos angulares internos y energías cinéticas relativas son

$$\boldsymbol{\ell}_1 = \frac{m_2}{M}\mathbf{L}, \qquad \boldsymbol{\ell}_2 = \frac{m_1}{M}\mathbf{L},$$

$$K_1^{\mathrm{int}} = \frac{m_2}{M}K_{\mathrm{rel}}, \qquad K_2^{\mathrm{int}} = \frac{m_1}{M}K_{\mathrm{rel}}, \quad K_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{q}}|^2.$$

Demostración. Para cada cuerpo, posición y velocidad relativas al centro tienen el mismo factor de escala, incluido el signo. El producto angular aporta $m_1(m_2/M)^2\,\mathbf{q}\times\dot{\mathbf{q}}$ en el primero. Dividir ese coeficiente por μ da m_2/M; el segundo da m_1/M. El mismo cálculo de coeficientes se aplica a las energías cinéticas. □

Los dos momentos angulares internos tienen igual sentido, aunque las posiciones y velocidades relativas de los cuerpos sean opuestas. Sus sumas recuperan $\mathbf{L}$ y K_{rel}.

Proposición 17.22 — Repetición relativa y traslación del centro. Si el estado relativo se repite tras un período $T > 0$ y el par es aislado, entonces

$$\mathbf{r}_i(t+T) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{V}_0T, \qquad \mathbf{v}_i(t+T) = \mathbf{v}_i(t).$$

En el marco del centro, las posiciones sí se repiten.

[3]MIT OpenCourseWare, *Dynamics*, 16.07, Lecture L16, *Central Force Motion: Orbits*. `https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/0bb19205a6316ba88f88284bf7257ec6_MIT16_07F09_Lec16.pdf`. Referencia de contraste para ecuación orbital y trayectoria; la derivación general de Binet y su reconstrucción temporal se ofrecen en el texto.

Demostración. proposición 17.3 da $\mathbf{R}(t+T) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{V}_0 T$ y velocidad colectiva constante. La repetición de $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ y proposición 17.1 producen ambas relaciones. Restar $\mathbf{R}$ elimina la traslación en las posiciones internas. □

El movimiento relativo puede ser periódico mientras el conjunto se traslada. Hablar de una órbita cerrada exige declarar el marco y el punto respecto del que se dibuja. El desplazamiento $\mathbf{V}_0 T$ no modifica la ley de interacción ni los invariantes internos.

Principio metodológico 17.12. Reconstruye las posiciones físicas antes de comparar con una observación. Distingue el radio relativo, los radios respecto del centro y las trayectorias en el laboratorio.

Ejercicios. Ejercicio 17.23. Para masas m y $3m$ y una solución relativa circular de radio a, determina los radios de los cuerpos respecto del centro, su razón de rapideces internas y su reparto de momento angular.

Solución. proposición 17.1 da radios $3a/4$ y $a/4$. Ambos tienen la misma velocidad angular, por lo que las rapideces internas están en razón $3:1$. Proposición 17.21 da momentos angulares $3\mathbf{L}/4$ y $\mathbf{L}/4$, del mismo sentido. La separación entre los cuerpos es a, no alguno de esos radios individuales.

Ejercicio 17.24. Un par tiene movimiento relativo periódico de período T y centro con velocidad $\mathbf{V}_0 \neq 0$. Compara el estado completo a los tiempos t y $t+T$ en el laboratorio.

Solución. Las velocidades de ambos cuerpos se repiten, y sus posiciones aumentan por el mismo vector $\mathbf{V}_0 T$. La separación y la velocidad relativa también se repiten. El estado absoluto de posiciones no es el mismo, aunque los datos internos sí lo sean. Un cambio al marco inercial que se mueve con $\mathbf{V}_0$ elimina ese desplazamiento.

13. Dos modelos que muestran el alcance de la reducción

El potencial efectivo permite estudiar muchas fuerzas centrales con una misma estructura. Dos ejemplos exactos ayudan a comprobar lo que esa estructura dice y lo que deja abierto. Una interacción elástica produce una trayectoria relativa cerrada; una atracción inversa del cubo puede cancelar exactamente el término angular y dejar un equilibrio radial degenerado.

Proposición 17.23 — Trayectoria elástica exacta. Para $\mathbf{F}_{12} = -k\mathbf{q}$, con $k > 0$ y $\omega = \sqrt{k/\mu}$, la función

$$\mathbf{q}(t) = A\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + B\sin(\omega t)\mathbf{e}_y, \qquad A \geq B > 0,$$

es una solución relativa. Tiene

$$L = \mu\omega AB, \qquad E = \frac{k}{2}(A^2 + B^2), \qquad r_- = B, \quad r_+ = A.$$

Si $A > B$, su período radial es π/ω y su avance angular por ciclo radial es π. Su estado vectorial se repite tras $2\pi/\omega$.

Demostración. Derivar dos veces da $\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2\mathbf{q}$, equivalente a proposición 17.3. El producto angular de posición y velocidad vale $\mu\omega AB\,\mathbf{e}_z$. La suma cinética y potencial simplifica a $k(A^2 + B^2)/2$. El radio cumple $r^2 = A^2\cos^2(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t)$, por lo que oscila entre B y A con período π/ω cuando son distintos. Tras ese tiempo, posición y velocidad relativas cambian ambas de signo; el ángulo, que aumenta continuamente porque $L > 0$, avanza π. Tras otro ciclo se repite el estado. □

La trayectoria es una elipse centrada en el origen relativo, según la ecuación $q_x^2/A^2 + q_y^2/B^2 = 1$. Esa geometría corresponde a la fuerza elástica. En la gravitación, el centro de fuerza tendrá otra

posición respecto de la cónica. El ejemplo permite comparar modelos sin atribuir a toda fuerza central una misma familia de órbitas.

Proposición 17.24 — Cancelación crítica inversa del cubo. Para $f(r) = -c/r^3$, $c > 0$, puede elegirse $U = -c/(2r^2)$. Cuando $L^2 = \mu c$,

$$W_L(r) = 0, \qquad r(t) = r_0 + bt$$

en cualquier intervalo donde el radio sea positivo. Si $b = 0$, cualquier $r_0 > 0$ da una órbita circular. Si $b \neq 0$,

$$\theta(t) - \theta_0 = \frac{L}{\mu b}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + bt}\right).$$

Demostración. La derivada de U es $c/r^3 = -f$. El coeficiente de $1/r^2$ en la definición 17.4 es $(L^2/\mu - c)/2$, que se anula en la condición crítica. Proposición 17.8 da $\ddot r = 0$ y la conservación angular da $\dot\theta = L/[\mu(r_0 + bt)^2]$. Integrar produce la fórmula para $b \neq 0$; para $b = 0$, la velocidad angular es constante $L/(\mu r_0^2)$. □

El potencial efectivo plano no forma una barrera que confine pequeñas velocidades radiales. Aunque una perturbación sólo de radio produzca otra órbita circular, una velocidad radial arbitrariamente pequeña puede acumular un cambio grande de radio con el tiempo. La degeneración requiere este examen exacto.

Principio metodológico 17.13. Comprueba una conclusión cualitativa con modelos exactos cuando sea posible. En los casos degenerados, sustituye el criterio cuadrático por la ecuación completa.

Ejercicios. Ejercicio 17.25. En proposición 17.23, toma $A = 2a$ y $B = a$. Calcula E, L, los radios extremos y verifica que ambos satisfacen $E = W_L(r)$.

Solución. $E = 5ka^2/2$ y $L = 2\mu\omega a^2$. Como $\mu\omega^2 = k$, se tiene $L^2/(2\mu) = 2ka^4$. Entonces $W_L(r) = kr^2/2 + 2ka^4/r^2$. En $r = a$, vale $ka^2/2 + 2ka^2 = 5ka^2/2$; en $r = 2a$, vale $2ka^2 + ka^2/2 = 5ka^2/2$. Entre ambos radios queda la oscilación radial de la solución. Su ángulo por ciclo es π, de modo que el estado se repite tras dos ciclos.

Ejercicio 17.26. Para las masas m y $3m$ y la solución elástica del ejercicio 17.25, con centro en reposo, escribe las trayectorias de cada cuerpo y sus semiejes.

Solución. La coordenada relativa es $\mathbf{q} = 2a\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + a\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$. Proposición 17.1 da $\boldsymbol{\rho}_1 = (3/4)\mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\rho}_2 = -(1/4)\mathbf{q}$. El primer cuerpo tiene semiejes $3a/2$ y $3a/4$; el segundo, $a/2$ y $a/4$. Ambos recorren elipses centradas en el centro de masa y comparten el período vectorial $2\pi/\omega$, con posiciones opuestas en cada instante. La masa reducida es $3m/4$, así que $\omega = \sqrt{4k/(3m)}$.

Ejercicio 17.27. En el caso crítico de la proposición 17.24, decide si el equilibrio radial $(r_0, 0)$ es estable a L fijado. Analiza también una pequeña velocidad radial inicial negativa.

Solución. Para cualquier $b > 0$, por pequeño que sea, $r = r_0 + bt$ abandona una vecindad radial fija de r_0 en tiempo finito. Los estados iniciales (r_0, b) pueden ser arbitrariamente próximos al equilibrio. Por eso no es estable en el espacio radial de estados. Con $b < 0$, la solución llega a $r = 0$ en tiempo $r_0/|b|$. La velocidad radial permanece constante, pero la tangencial $L/(\mu r)$ diverge y el ángulo de la proposición 17.24 diverge al acercarse a la coincidencia. El modelo termina en una singularidad, sin contradecir la exclusión de una coincidencia regular de la proposición 17.5.

Ejercicio 17.28. Añade a la ecuación relativa una fuerza viscosa $-\gamma\dot{\mathbf{q}}$, con $\gamma > 0$, manteniendo un potencial central autónomo. Calcula $\dot{\mathbf{L}}$ y $\dot E$. ¿Puede seguir usándose un único potencial efectivo W_L con L constante?

Solución. El producto angular da $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{q} \times [-\gamma \dot{\mathbf{q}}] = -(\gamma/\mu)\mathbf{L}$. La potencia adicional produce $\dot{E} = -\gamma |\dot{\mathbf{q}}|^2$. Por tanto el momento angular decrece como $\mathbf{L}(t) = e^{-\gamma t/\mu}\mathbf{L}(0)$ y la energía disminuye. La dirección angular se mantiene si el vector inicial es no nulo, pero su magnitud cambia. Se puede escribir instantáneamente el término $L(t)^2/(2\mu r^2)$, aunque ya no define el problema autónomo conservativo ni permite las cuadraturas de la proposición 17.10 con un E, L fijos. La fuerza central conservativa no cancela la pérdida viscosa.

14. Reconstrucción completa y paso al problema de Kepler

La reducción conduce desde dos ecuaciones vectoriales a un centro de masa, un radio y un ángulo. Cada paso conserva una parte de la información: el centro guarda la traslación, el momento angular fija el plano y la velocidad angular, la energía delimita radios y la ecuación radial decide ramas y extremos. Las fórmulas finales deben volver a satisfacer las ecuaciones originales.

Proposición 17.25 — Completitud de la reconstrucción a $L > 0$. Sea $r(t) > 0$ una solución de $\mu \ddot{r} = -W_L'(r)$ para un $L > 0$ y un potencial autónomo U dados. Definamos $\dot{\theta} = L/(\mu r^2)$, $\mathbf{q} = r(\cos\theta\, \mathbf{e}_x + \sin\theta\, \mathbf{e}_y)$ en un plano fijo y $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$. Entonces proposición 17.1 reconstruye una solución del par aislado con fuerza $\mathbf{F}_{12} = -U'(r)\mathbf{q}/r$.

Demostración. Derivar $r^2\dot{\theta} = L/\mu$ da $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$, que anula la componente tangencial de la aceleración relativa. La componente radial es $\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -U'(r)$ por la ecuación efectiva y la definición de $\dot{\theta}$. Por tanto $\mu\ddot{\mathbf{q}} = -U'(r)\mathbf{q}/r$. Como $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, proposición 17.1 da $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = (m_1 m_2/M)\ddot{\mathbf{q}} = \mu\ddot{\mathbf{q}}$ y $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mu\ddot{\mathbf{q}}$. Son precisamente las dos ecuaciones de Newton. □

La proposición evita tratar el potencial efectivo como un modelo independiente cuya relación con el sistema físico queda tácita. También muestra qué no puede omitirse: un ángulo inicial para orientar la trayectoria y los datos del centro para ubicarla.

El mismo método sirve para fuerzas atractivas o repulsivas, radios ligados o no ligados y trayectorias que no se cierran. Los casos singulares y degenerados tienen condiciones propias; sus límites se deben conservar al aplicar una técnica que en otros ejemplos es automática.

Etapa	Información que utiliza	Información que devuelve
Coordenadas del centro y relativas	Masas, posiciones y velocidades	Traslación y separación invertibles
Momento angular	Fuerza central y estado inicial	Plano y relación $r^2\dot{\theta}$
Energía relativa	Potencial autónomo	Radios permitidos y rapidez radial
Ecuación radial	W_L' y rama inicial	Retornos, círculos y continuación
Cuadratura o Binet	Dominio regular y L pertinente	Tiempo y forma orbital
Reconstrucción	Centro, plano, fase y movimiento relativo	Trayectorias y velocidades individuales

Principio metodológico 17.14. Conserva el estado necesario en cada reducción, separa los casos excluidos y verifica al final las ecuaciones físicas originales. Una trayectoria geométrica, una evolución temporal y un movimiento de dos cuerpos son resultados relacionados que requieren pasos distintos.

Ejercicios. Ejercicio 17.29. En el potencial $U = -\alpha/r$, un estado tiene $\mathbf{q}_0 = a\mathbf{e}_x$ y velocidad relativa inicial $\dot{\mathbf{q}}_0 = \sqrt{\alpha/(\mu a)}\,\mathbf{e}_y$. Determina si el movimiento es circular, su energía y velocidad angular. Para masas iguales m, calcula los radios y rapideces de cada cuerpo respecto del centro.

Solución. El estado tiene $\dot{r}_0 = 0$ y $L = \mu a\sqrt{\alpha/(\mu a)} = \sqrt{\mu\alpha a}$. La condición circular de la proposición 17.14 se cumple en $r_c = a$; la ecuación radial admite ese radio constante y la unicidad local de la dinámica regular identifica la solución con el movimiento circular de esos datos. La energía es $E = \alpha/(2a) - \alpha/a = -\alpha/(2a)$ y $\Omega = \sqrt{\alpha/(\mu a^3)}$. Para masas iguales, $\mu = m/2$, cada radio es $a/2$ y cada rapidez interna $(a/2)\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha/(\mu a)}$. El centro puede trasladarse uniformemente; las cifras anteriores se refieren a él.

Ejercicio 17.30. Una descripción de un par central autónomo ofrece sólo masas, E y $L > 0$ y afirma haber determinado las dos trayectorias absolutas. Identifica los datos que aún hacen falta y propone una comprobación de consistencia de la reconstrucción.

Solución. Primero debe conocerse la ley de interacción $U(r)$, pues los mismos números energéticos y angulares pueden corresponder a potenciales distintos. Con ella, hace falta seleccionar una componente admisible de $E - W_L \geq 0$, un radio inicial y una rama radial compatible, o un dato equivalente de fase. También se necesita la orientación del plano, la dirección angular inicial y los datos colectivos $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0$. En un extremo, la ecuación radial determina la continuación; en un círculo, la fase angular sigue siendo libre. Una vez construidos $r, \theta, \mathbf{R}$, proposición 17.1 da las posiciones. Diferenciarlas permite comprobar las velocidades y las dos ecuaciones de Newton según la proposición 17.25. Además, sus sumas deben producir $M\mathbf{R}$, $\mathbf{P} = M\mathbf{V}_0$, el momento angular interno dado y la energía relativa E. Esas verificaciones detectan pérdidas de factores de masa, signos o datos de orientación que los invariantes escalares por sí solos pueden ocultar.

En el problema gravitatorio, Binet se convierte en una ecuación lineal y el potencial efectivo tiene una forma que permite clasificar sus regiones de movimiento. El capítulo siguiente desarrollará esa especialización: cónicas, energía, momento angular, períodos y relación entre los movimientos de ambos cuerpos. La estructura necesaria ya está construida.

Capítulo 18

Órbitas de Kepler

Una fuerza central conserva el plano y el momento angular, pero no obliga a que la trayectoria sea una elipse ni a que se cierre. El capítulo anterior mostró qué condiciones organizan el movimiento radial y cómo recuperar el ángulo. La atracción gravitatoria inversa del cuadrado añade una estructura especial: su ecuación orbital se vuelve lineal y produce las cónicas de Kepler.

La forma de la curva es sólo una parte del problema. Una misma elipse se recorre lentamente lejos del centro de fuerza y más deprisa cerca de él. Para conocer la posición a un tiempo dado habrá que relacionar geometría, área y una variable angular adecuada. También debemos volver de la separación relativa a los movimientos de los dos cuerpos, conservando la suma de sus masas en la escala temporal.

Consideraremos dos masas puntuales positivas constantes que sólo se atraen gravitatoriamente en un marco inercial. El movimiento se estudia mientras su separación es positiva y dentro del régimen newtoniano. Si se representan cuerpos esféricos extensos por masas centrales, la trayectoria debe permanecer en la región exterior donde esa sustitución está justificada. El caso radial se separará de las cónicas no degeneradas; los agentes adicionales se introducirán explícitamente.

1. Parámetros del problema exacto

La masa reducida organiza la energía de la separación. La suma de masas organiza su aceleración. Es útil dar nombres distintos a esos dos parámetros para evitar un cambio de significado de un símbolo en mitad de un cálculo.

Definición 18.1 — Parámetros y magnitudes específicas. Con la notación del par del capítulo 17, definimos

$$M = m_1 + m_2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \qquad \gamma = GM, \qquad \alpha = G m_1 m_2 = \mu\gamma.$$

Para $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r = |\mathbf{q}| > 0$ y $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}}$, escribimos

$$\mathbf{h} = \mathbf{q} \times \mathbf{w}, \qquad h = |\mathbf{h}|, \qquad \epsilon = \frac{E}{\mu} = \frac{1}{2}|\mathbf{w}|^2 - \frac{\gamma}{r}.$$

$\mathbf{h}$ es momento angular por unidad de masa reducida y ϵ es energía relativa específica. Sus unidades son $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$; γ tiene unidades $\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$.

Proposición 18.1 — Dinámica kepleriana relativa.

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\gamma \frac{\mathbf{q}}{r^3}.$$

El centro de masa se traslada uniformemente y $\mathbf{h}, \epsilon$ se conservan.

Demostración. La reducción exacta del capítulo 17 da $\mu\ddot{\mathbf{q}} = -\alpha\mathbf{q}/r^3$. Dividir por μ produce la ecuación. La oposición de fuerzas anula la resultante sobre el centro; la centralidad conserva el

momento angular y el potencial autónomo $-\alpha/r$ conserva la energía. Dividir esos invariantes por la masa reducida constante da $\mathbf{h}, \epsilon$. □

El caso principal tendrá $h > 0$, de modo que el plano relativo está determinado y puede orientarse por $\mathbf{h}$. En él el ángulo crece con $\dot{\theta} = h/r^2$. El parámetro γ incluye ambas masas: sustituirlo por Gm_2 es una aproximación de fuente dominante, no el problema exacto.

Principio metodológico 18.1. Separa masa reducida, parámetro gravitatorio y cantidades específicas. Comprueba qué masa y qué radio intervienen antes de aplicar una fórmula orbital.

Ejercicios. Ejercicio 18.1. Para masas m y $4m$, determina μ, γ, α y expresa energía y momento angular relativos mediante $\epsilon, \mathbf{h}$.

Solución. $M = 5m$, $\mu = 4m/5$, $\gamma = 5Gm$ y $\alpha = 4Gm^2 = \mu\gamma$. La energía relativa es $E = (4m/5)\epsilon$ y el momento angular relativo $\mathbf{L} = (4m/5)\mathbf{h}$. El parámetro γ no es una masa ni tiene las unidades de μ.

Ejercicio 18.2. Dos pares tienen la misma suma de masas pero productos de masas distintos. Con idénticas posiciones y velocidades relativas iniciales, compara su movimiento relativo y su energía relativa.

Solución. La suma común produce el mismo γ y, por la proposición 18.1, la misma ecuación con los mismos datos. La unicidad local fuera de $r = 0$ identifica sus movimientos relativos. También comparten $\epsilon, \mathbf{h}$. Sin embargo, $\mu = m_1 m_2/M$ es diferente y por tanto sus energías $E = \mu\epsilon$ y momentos $\mathbf{L} = \mu\mathbf{h}$ pueden diferir. La reconstrucción de cada cuerpo utiliza además las razones de masas.

2. Una dirección conservada dentro del plano

El momento angular conserva la normal al plano. Para orientar la cónica dentro de él necesitamos otra información. La gravitación permite construir un vector constante que señala la dirección de máxima aproximación cuando la órbita no es circular.

Definición 18.2 — Vector de excentricidad.

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{h}}{\gamma} - \frac{\mathbf{q}}{r}, \qquad e = |\mathbf{e}|.$$

El vector es adimensional. En el caso $h > 0$, pertenece al plano orbital porque ambos términos son perpendiculares a $\mathbf{h}$.

Proposición 18.2 — Conservación de la excentricidad vectorial. En la dinámica de la proposición 18.1, $\dot{\mathbf{e}} = 0$.

Demostración. Como $\mathbf{h}$ es constante, $\dot{\mathbf{e}} = (\ddot{\mathbf{q}} \times \mathbf{h})/\gamma - d(\mathbf{q}/r)/dt$. Usamos el producto triple $\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{w}) = \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{w}) - r^2\mathbf{w}$. La ecuación de movimiento da

$$\frac{\ddot{\mathbf{q}} \times \mathbf{h}}{\gamma} = \frac{\mathbf{w}}{r} - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{w})}{r^3}.$$

Ese es exactamente el resultado de derivar $\mathbf{q}/r$. Los términos se cancelan. □

Proposición 18.3 — Excentricidad, energía y momento.

$$e^2 = 1 + \frac{2\epsilon h^2}{\gamma^2}.$$

Demostración. $\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{h}$, de modo que $|\mathbf{w}\times\mathbf{h}|^2 = |\mathbf{w}|^2h^2$. Además, $(\mathbf{w}\times\mathbf{h})\cdot(\mathbf{q}/r) = h^2/r$, por el producto triple y $h^2 = r^2|\mathbf{w}|^2-(\mathbf{q}\cdot\mathbf{w})^2$. Al expandir el cuadrado de la definición 18.2 resulta $e^2 = |\mathbf{w}|^2h^2/\gamma^2 + 1 - 2h^2/(\gamma r)$. Agrupar la energía específica produce la igualdad. □

La dirección de $\mathbf{e}$ desaparece como dato geométrico cuando $e = 0$: un círculo no tiene una dirección de periastro distinguida. También debe separarse $h = 0$, porque entonces definición 18.2 da $\mathbf{e} = -\mathbf{q}/r$ y $e = 1$ para cualquier energía radial. La clasificación por excentricidad que usaremos corresponde a $h > 0$.

Principio metodológico 18.2. Conserva el vector de excentricidad cuando haga falta orientar la órbita. Su magnitud clasifica formas; su dirección guarda información que la energía no contiene.

Ejercicios. Ejercicio 18.3. En un estado con $\mathbf{q} = r\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{w} = v\mathbf{e}_y$, $v > 0$, calcula $\mathbf{e}$. Determina qué ocurre si $v^2 = \gamma/r$.

Solución. $\mathbf{h} = rv\mathbf{e}_z$ y $\mathbf{w}\times\mathbf{h} = rv^2\mathbf{e}_x$. Por tanto $\mathbf{e} = (rv^2/\gamma - 1)\mathbf{e}_x$. Si $v^2 = \gamma/r$, el vector es cero y el estado es circular. Una rapidez tangencial mayor produce vector de excentricidad hacia $\mathbf{e}_x$; una menor lo orienta hacia $-\mathbf{e}_x$. Más adelante distinguiremos esos estados como periastro y apoastro cuando sean elípticos.

Ejercicio 18.4. Dos estados no circulares tienen el mismo ϵ, h pero vectores de excentricidad con direcciones distintas dentro de un mismo plano. ¿Describen necesariamente la misma cónica situada en el espacio?

Solución. proposición 18.3 fija la misma magnitud e, pero no su dirección. Los semiejes o parámetros de tamaño serán los mismos, mientras la línea de los extremos está rotada. Las cónicas pueden compartir forma y energía y tener orientaciones diferentes. Para identificar la curva situada en el espacio se necesita también $\mathbf{e}$ y la normal orbital.

3. La ecuación orbital

Tomar el producto escalar de $\mathbf{e}$ con la dirección radial permite leer directamente la distancia. La ecuación de Binet ofrece la misma conclusión desde la dinámica escalar. Ambas vías conservan una condición de dominio que será decisiva para las órbitas abiertas.

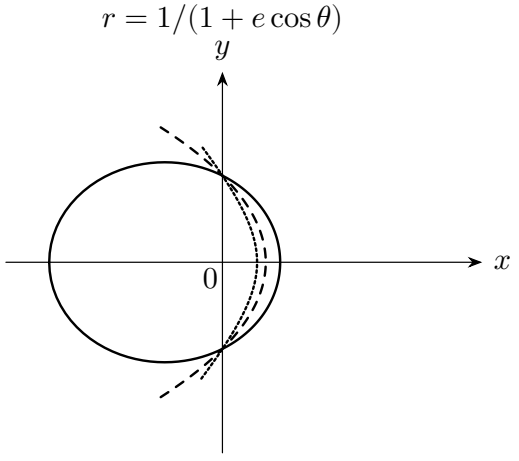


Figura 18.1. Con el mismo semilado recto $p = 1$, se comparan $e = 1/2$ (continua), $e = 1$ (discontinua) y $e = 3/2$ (punteada). Las ramas abiertas se muestran sólo dentro de un intervalo angular admisible. Véase §3.

Definición 18.3 — Parámetro orbital y anomalía verdadera. Para $h > 0$, definimos $p = h^2/\gamma > 0$. Cuando $e > 0$, llamamos anomalía verdadera θ al ángulo orientado desde $\mathbf{e}$ hasta $\mathbf{q}$ en el plano orbital. Si $e = 0$, escogemos una dirección de referencia arbitraria.

Proposición 18.4 — Ecuación polar de Kepler.

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \qquad 1 + e\cos\theta > 0.$$

Demostración. Con $\mathbf{n} = \mathbf{q}/r$, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = e\cos\theta$. La identidad usada en la proposición 18.3 da $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = h^2/(\gamma r) - 1 = p/r - 1$. Despejar produce la fórmula. La desigualdad es necesaria porque p, r son positivos. Desde Binet, $u = 1/r$ satisface $u'' + u = \gamma/h^2 = 1/p$; su solución real es $u = (1 + e\cos\theta)/p$ tras elegir la dirección de la amplitud. □

En coordenadas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ con el eje x hacia el periastro, la ecuación equivale a $r + ex = p$. Elevar al cuadrado da $(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx - p^2 = 0$. Para regresar de esa ecuación cartesiana a la polar hay que conservar $p - ex = r > 0$. En una hipérbola, la ecuación cuadrática completa incluye otra rama que no pertenece a la trayectoria atractiva con esta orientación.

La fórmula y proposición 18.3 anticipan la clasificación: $0 \le e < 1$ corresponde a energía negativa, $e = 1$ a energía cero y $e > 1$ a energía positiva. El caso circular $e = 0$ da $r = p$. No se ha clasificado todavía el movimiento radial, excluido por $h > 0$.[1]

Principio metodológico 18.3. Al pasar entre ecuaciones polares y cartesianas, conserva las condiciones de signo previas a elevar al cuadrado. Una curva algebraica puede contener más puntos que la órbita física.

Ejercicios. Ejercicio 18.5. Una órbita tiene $p = 3a$ y $e = 1/2$, con $a > 0$. Calcula las distancias para $\theta = 0, \pi/2, \pi$.

Solución. La fórmula da $r(0) = 3a/(3/2) = 2a$, $r(\pi/2) = 3a$ y $r(\pi) = 3a/(1/2) = 6a$. El primer valor es el mínimo y el último el máximo. El parámetro p es el radio en la dirección perpendicular al periastro, no el semieje mayor.

Ejercicio 18.6. Para $e = 2$, determina el intervalo angular conectado que contiene el periastro y satisface la condición física de la proposición 18.4.

Solución. Se exige $\cos\theta > -1/2$. El intervalo alrededor de cero es $-2\pi/3 < \theta < 2\pi/3$. En sus extremos el denominador tiende a cero positivo y el radio diverge. Los ángulos del resto de una vuelta darían radio negativo en la fórmula y no describen la rama física.

4. La elipse y sus focos

Para $0 \le e < 1$, completar el cuadrado convierte la ecuación orbital en la forma de una elipse. El centro de fuerza está en un foco; el centro geométrico se encuentra desplazado. Esa diferencia explica por qué la distancia al centro de fuerza varía durante la vuelta.

[1] MIT OpenCourseWare, *Classical Mechanics*, 8.01SC, capítulo 25, §§25.3.1–25.4 y apéndices geométricos: ecuación y clasificación orbital. https://ocw.mit.edu/courses/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/mit8_01scs22_chapter25new.pdf. La orientación mediante el vector de excentricidad y las condiciones de rama se prueban en el texto.

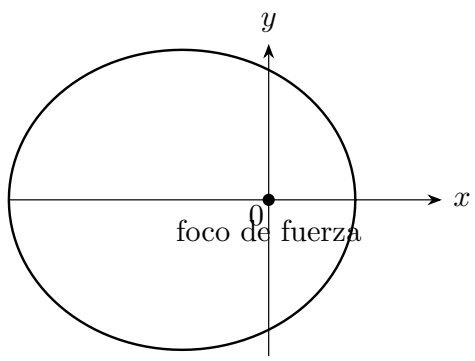


Figura 18.2. La órbita $x = 2\cos E - 1$, $y = \sqrt{3}\sin E$ tiene semiejes $2, \sqrt{3}$ y un foco en el origen. El centro geométrico está en $(-1, 0)$; no coincide con el centro de fuerza. Véase §4.

Definición 18.4 — Semiejes elípticos. Definimos

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \qquad b = a\sqrt{1-e^2}, \qquad 0 \le e < 1.$$

a es el semieje mayor y b el menor. El origen sigue estando en el foco de atracción.

Proposición 18.5 — Geometría de la elipse.

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

El centro es $(-ae, 0)$, los focos están en $(0, 0)$ y $(-2ae, 0)$, y las distancias extremas al origen son $r_{\mathrm{p}} = a(1-e)$ y $r_{\mathrm{a}} = a(1+e)$.

Demostración. En la ecuación cartesiana de §3, dividimos por $1 - e^2 > 0$ y completamos el cuadrado en x. Usando $p = a(1-e^2)$ obtenemos la forma indicada. La distancia focal de una elipse es $\sqrt{a^2 - b^2} = ae$, lo que sitúa los focos a ambos lados de su centro. Los extremos radiales también se obtienen en la proposición 18.4 con $\cos\theta = 1$ y -1, dando $p/(1+e) = a(1-e)$ y $p/(1-e) = a(1+e)$. □

Proposición 18.6 — Energía y semieje. Para una órbita elíptica,

$$\epsilon = -\frac{\gamma}{2a}, \qquad h^2 = \gamma a(1-e^2).$$

Demostración. La segunda igualdad es $h^2 = \gamma p$ con la definición 18.4. Proposición 18.3 da $2\epsilon h^2/\gamma^2 = e^2 - 1$. Sustituir $h^2 = \gamma a(1-e^2)$ y cancelar $1 - e^2 > 0$ produce la primera. □

La energía fija el semieje mayor, mientras el momento angular decide cuánto se aparta la elipse de un círculo de ese mismo tamaño energético. Al disminuir h con a fijo, e se acerca a uno y el periastro se aproxima a cero. Para objetos extensos, el contacto puede terminar el movimiento antes de alcanzar ese límite puntual.

La ley elíptica de Kepler aparece aquí como consecuencia del modelo de dos cuerpos para energía negativa y momento angular no nulo. No se extiende a todas las trayectorias gravitatorias ni a un sistema con otras fuerzas sin examinar sus efectos.

Principio metodológico 18.4. Diferencia foco, centro geométrico y centro de masa. Identifica qué tamaño fija la energía y qué deformación fija el momento angular.

Ejercicios. Ejercicio 18.7. Una elipse tiene distancias extremas $r_{\mathrm{p}} = 2d$ y $r_{\mathrm{a}} = 8d$. Encuentra a, e, p.

Solución. Sumarlas da $2a = 10d$, así que $a = 5d$. Su diferencia es $2ae = 6d$, por lo que $e = 3/5$. Entonces $p = a(1 - e^2) = 5d(1 - 9/25) = 16d/5$. La energía específica es $-\gamma/(10d)$ y $h^2 = 16\gamma d/5$. Esos valores reconstruyen ambos extremos mediante proposición 18.4.

Ejercicio 18.8. Dos elipses tienen el mismo γ, a y excentricidades 0 y $3/5$. Compara energía, momento angular y periastro.

Solución. Comparten $\epsilon = -\gamma/(2a)$. Sus momentos específicos son $\sqrt{\gamma a}$ y $\sqrt{\gamma a(1 - 9/25)} = (4/5)\sqrt{\gamma a}$. Los periastros son a y $2a/5$. La misma energía no fija ni el momento angular ni la máxima aproximación.

5. La parábola como umbral energético

Para energía específica cero y $h > 0$, proposición 18.3 da $e = 1$. La trayectoria tiene un radio mínimo y se extiende hasta distancias arbitrarias. La rapidez se aproxima a cero lejos del centro; ése es el umbral entre un movimiento ligado y uno que conserva rapidez positiva en el infinito.

Proposición 18.7 — Parábola física. Para $e = 1$,

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta}, \qquad -\pi < \theta < \pi,$$

y su ecuación cartesiana es $y^2 = p^2 - 2px$. El vértice y periastro están en $(p/2, 0)$, el foco en el origen y la directriz es $x = p$.

Demostración. La ecuación orbital exige denominador positivo, salvo en los extremos angulares. La ecuación cartesiana de §3 con $e = 1$ queda $y^2 + 2px - p^2 = 0$. Es la parábola $y^2 = -2p(x - p/2)$. Su distancia focal es $p/2$, dirigida hacia el lado negativo de x desde el vértice, de modo que el foco es cero y la directriz queda a igual distancia hacia el lado positivo, en $x = p$. En toda la parábola $x \le p/2$ y $p - x > 0$, así que se conserva la ecuación original $r = p - x$. □

La parábola no tiene apoastro: el radio crece sin cota al aproximarse el ángulo a cualquiera de los extremos. Para un movimiento con $h > 0$, la partícula llega desde lejos, pasa por el periastro y vuelve a alejarse. La descripción temporal confirmará que las distancias infinitas corresponden a tiempos infinitos.

Decir «energía cero» utiliza el cero de potencial en el infinito. Un cambio constante del potencial cambiaría el número de la energía, pero no la trayectoria. El criterio físico es que la energía cinética asintótica tienda a cero con esa convención.

Principio metodológico 18.5. En el caso parabólico, conserva el cero energético y el dominio angular. La excentricidad uno identifica esta cónica sólo bajo el supuesto no radial.

Ejercicios. Ejercicio 18.9. Una parábola tiene periastro $d > 0$. Encuentra p, h y la rapidez en el periastro.

Solución. proposición 18.7 da $p = 2d$. Entonces $h = \sqrt{\gamma p} = \sqrt{2\gamma d}$. En el periastro la velocidad radial es cero y la tangencial es $h/d = \sqrt{2\gamma/d}$. La energía específica es $v^2/2 - \gamma/d = 0$, coherente con el caso parabólico.

Ejercicio 18.10. Compara a distancia d la rapidez circular y la rapidez parabólica, ambas en el mismo problema gravitatorio relativo.

Solución. La circular cumple $v_c = \sqrt{\gamma/d}$ y la parabólica tiene $v_{\mathrm{p}} = \sqrt{2\gamma/d}$ por energía cero. La razón es $\sqrt{2}$. Para que un lanzamiento con esa rapidez tenga periastro en el punto considerado debe

ser tangencial; una velocidad con componente radial conserva la energía parabólica, pero cambia el momento angular y la posición del periastro.

6. La hipérbola y la rama que se recorre

Cuando $\epsilon > 0$ y $h > 0$, la excentricidad es mayor que uno. La trayectoria abierta conserva una rapidez asintótica positiva. Su ecuación cartesiana tiene dos ramas, pero sólo una satisface la relación polar con radio positivo y origen en el foco de atracción.

Definición 18.5 — Tamaño hiperbólico positivo. Para $e > 1$, definimos $A = p/(e^2-1) > 0$ y $B = A\sqrt{e^2-1}$. Usamos A positivo; algunas convenciones orbitales usan un semieje con signo $a = -A$. Aquí no cambiaremos entre ambas sin indicarlo.

Proposición 18.8 — Geometría y energía hiperbólicas.

$$\frac{(x-Ae)^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \qquad x \le A(e-1)$$

describe la rama física. Además,

$$r_{\mathrm{p}} = A(e-1), \qquad \epsilon = \frac{\gamma}{2A}, \qquad h^2 = \gamma A(e^2-1).$$

Demostración. Completar el cuadrado en la ecuación cartesiana de §3, ahora con $e^2-1 > 0$, da la hipérbola centrada en $(Ae, 0)$. Sus vértices son $A(e-1)$ y $A(e+1)$ sobre el eje x. La condición original $p - ex > 0$ admite la rama izquierda y excluye la derecha. Proposición 18.4 da $r_{\mathrm{p}} = p/(1+e) = A(e-1)$. La definición de p da el momento y proposición 18.3 produce $2\epsilon A/\gamma = 1$. □

Proposición 18.9 — Extremos angulares y rapidez lejana. La rama física tiene

$$-\theta_\infty < \theta < \theta_\infty, \qquad \theta_\infty = \arccos(-1/e).$$

Al alejarse por cualquiera de sus extremos, $r \to \infty$ y la rapidez relativa tiende a $v_\infty = \sqrt{2\epsilon} = \sqrt{\gamma/A}$.

Demostración. El denominador de la proposición 18.4 es positivo exactamente en el intervalo indicado alrededor del periastro. En sus extremos se anula y el radio diverge. La energía específica da $|\mathbf{w}|^2 = 2\epsilon + 2\gamma/r$, cuyo límite es $2\epsilon > 0$. □

La dirección del vector posición en el infinito y la dirección de la velocidad entrante no son la misma: la partícula entrante se acerca al foco mientras su radio disminuye. La saliente tiene radio creciente. Esta distinción será necesaria al estudiar el ángulo de dispersión en el capítulo 19.

Principio metodológico 18.6. Declara la convención del semieje hiperbólico y conserva la rama física. Distingue dirección de posición, dirección de velocidad y límite de rapidez.

Ejercicios. Ejercicio 18.11. Una hipérbola tiene $A = 2d$ y $e = 3/2$. Calcula $p, r_{\mathrm{p}}, \epsilon$ y h^2.

Solución. $p = A(e^2-1) = 2d(9/4-1) = 5d/2$. El periastro es $A(e-1) = d$. La energía específica es $\gamma/(4d)$ y $h^2 = 5\gamma d/2$. La rapidez asintótica satisface $v_\infty^2 = \gamma/(2d)$.

Ejercicio 18.12. Para $p = 3d$ y $e = 2$, determina el tamaño hiperbólico, periastro, ángulo extremo y rapidez asintótica.

Solución. $A = 3d/(4-1) = d$, $r_{\mathrm{p}} = d(2-1) = d$ y $\theta_\infty = \arccos(-1/2) = 2\pi/3$. La rapidez lejana es $\sqrt{\gamma/d}$. Esa rapidez no es la del periastro: allí el campo ha convertido energía potencial en cinética y $v_{\mathrm{p}}^2 = 2\epsilon + 2\gamma/d = 3\gamma/d$.

7. Rapidez, extremos y balance energético

La forma de la cónica permite reconocer posiciones; la energía permite calcular rapidez sin derivar toda la parametrización. El momento angular añade la componente tangencial y, con un signo de rama, completa la velocidad.

Proposición 18.10 — Relación de rapidez orbital. En cualquier solución regular,

$$|\mathbf{w}|^2 = 2\epsilon + \frac{2\gamma}{r}.$$

Para una elipse, una parábola y una hipérbola, respectivamente,

$$|\mathbf{w}|^2 = \gamma\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad \frac{2\gamma}{r}, \qquad \gamma\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{A}\right).$$

Demostración. Despejar la energía de la definición 18.1 da la primera igualdad. Sustituir las energías de la proposición 18.6, proposición 18.7 y proposición 18.8 produce las tres formas. □

Proposición 18.11 — Velocidades radial y tangencial. Con ángulo verdadero orientado y $h > 0$,

$$v_r = \dot r = \frac{\gamma}{h} e \sin\theta, \qquad v_\theta = r\dot\theta = \frac{\gamma}{h}(1 + e\cos\theta).$$

En los extremos radiales finitos, la rapidez es h/r.

Demostración. La conservación angular da $v_\theta = h/r$, y proposición 18.4 produce su expresión. Derivar $r = p/(1+e\cos\theta)$ respecto de θ y multiplicar por $\dot\theta = h/r^2$ da $\dot r = (h/p)e\sin\theta = (\gamma/h)e\sin\theta$. En un extremo radial $\dot r = 0$, dejando sólo la componente tangencial. □

En una elipse no circular, el periastro tiene la máxima rapidez y el apoastro la mínima. Proposición 18.10 muestra que la rapidez crece al disminuir el radio para energía fija. Proposición 18.11 explica también por qué un lanzamiento tangencial puede estar en un máximo o en un mínimo radial: importa si su rapidez es menor o mayor que la circular local.

La velocidad es un vector. Dos posiciones con la misma distancia pueden tener igual rapidez y componentes radiales opuestas. Una solución que sólo entrega el módulo no termina un problema de orientación o de encuentro entre cuerpos.

Principio metodológico 18.7. Usa energía para la rapidez y momento angular para la dirección tangencial. Conserva el signo radial y la orientación del plano para reconstruir el vector velocidad.

Ejercicios. Ejercicio 18.13. En una elipse, demuestra que $v_{\mathrm{p}}/v_{\mathrm{a}} = (1+e)/(1-e)$ y calcula la razón para $e = 3/5$.

Solución. En ambos extremos la velocidad es tangencial y vale h/r. Por tanto la razón de rapideces es $r_{\mathrm{a}}/r_{\mathrm{p}} = a(1+e)/[a(1-e)]$. Para $e = 3/5$ da $(8/5)/(2/5) = 4$. La razón energética no sería cuatro: las energías cinéticas específicas están en razón dieciséis.

Ejercicio 18.14. En una órbita con excentricidad $e > 0$, compara los vectores velocidad en las posiciones de anomalías θ y $-\theta$, usando sus bases radiales locales.

Solución. El coseno y el radio son iguales; la componente tangencial de la proposición 18.11 también es igual y positiva. La componente radial cambia de signo porque cambia el seno. En el lado con $\theta > 0$ y $\theta < \pi$ se aleja; en el opuesto se acerca. Las bases locales también cambian de orientación, de modo que no debe restarse sólo una pareja de números escalares para comparar los vectores en coordenadas fijas.

8. Área y período: las leyes de Kepler

La conservación angular implica una velocidad areolar constante. Para una elipse, dividir su área total por esa velocidad produce el período. Este paso reúne geometría y dinámica sin suponer movimiento angular uniforme.

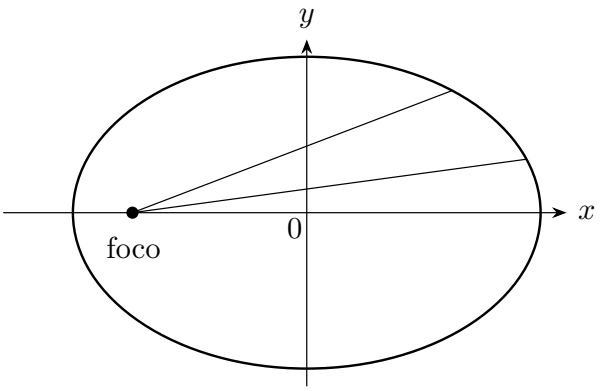


Figura 18.3. En una órbita kepleriana, el radio desde el foco gravitatorio barre áreas iguales en tiempos iguales. El foco no coincide con el centro geométrico de una elipse excéntrica. Los dos radios señalan un sector, sin asignarle aquí una duración numérica. Véase §8.

Proposición 18.12 — Ley de áreas del movimiento relativo. El área orientada barrida por $\mathbf{q}$ satisface

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{h}{2}.$$

En una órbita elíptica orientada, cada vuelta barre el área πab.

Demostración. La definición areolar del capítulo 15 da $\dot{\mathcal{A}} = (\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \cdot \hat{\mathbf{h}}/2 = h/2$. La elipse es una curva simple convexa y su foco está dentro de ella. Una vuelta recorre todos los rayos desde ese foco y barre exactamente la región elíptica, cuya área es πab. □

Proposición 18.13 — Período elíptico exacto del par.

$$T = \frac{2\pi ab}{h} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma}}, \qquad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}.$$

Demostración. proposición 18.12 da $T(\,h/2\,) = \pi ab$. Por definición 18.4 y proposición 18.6, $b = a\sqrt{1-e^2}$ y $h = \sqrt{\gamma a(1-e^2)}$. Sustituir cancela el factor de excentricidad y deja la segunda expresión. Elevar al cuadrado y usar definición 18.1 da la tercera. □

Para una masa central dominante y distintos cuerpos de masa despreciable frente a ella, la suma de masas es aproximadamente la misma y T^2/a^3 resulta aproximadamente común. En el problema exacto, la constante cambia si cambia esa suma. Además, a es el semieje de la separación relativa; para los semiejes de cada cuerpo respecto del centro habrá factores adicionales.

Las tres leyes quedan conectadas: energía negativa y $h > 0$ producen una elipse focal; centralidad conserva el área por tiempo; la geometría del área y la relación entre h y los semiejes producen el período. Cada conclusión conserva las hipótesis del modelo de dos cuerpos.[2]

[2]El mismo capítulo, §§25.5–25.6, reconstrucción de ambos cuerpos y leyes de Kepler. El semieje y período del capítulo propio se refieren al movimiento relativo exacto y mantienen la suma de masas.

Principio metodológico 18.8. En la tercera ley, declara qué semieje y qué suma de masas utilizas. No sustituyas área uniforme por velocidad angular uniforme.

Ejercicios. Ejercicio 18.15. Dos elipses del mismo par tienen semiejes mayores a y $4a$. Calcula la razón de períodos. Si comparten a pero tienen excentricidades distintas, ¿cambia el período?

Solución. proposición 18.13 da $T_2/T_1 = (4a/a)^{3/2} = 8$. Para el mismo a, γ, el período es igual con cualquier $0 \le e < 1$. La excentricidad cambia cómo se distribuye la rapidez durante la vuelta, pero no el tiempo total con ese semieje y esa masa total.

Ejercicio 18.16. Una elipse tiene $e = 1/2$. Compara las velocidades angulares en periastro y apoastro y explica por qué no contradice la velocidad areolar constante.

Solución. La velocidad angular es h/r^2. Los radios extremos están en razón $r_{\mathrm{a}}/r_{\mathrm{p}} = (1+e)/(1-e) = 3$. Por tanto $\dot\theta_{\mathrm{p}}/\dot\theta_{\mathrm{a}} = 9$. El producto $r^2\dot\theta = h$ permanece constante y da la misma área por tiempo; la dirección radial gira más deprisa donde el radio es menor.

9. Un ángulo que facilita el tiempo elíptico

La anomalía verdadera sitúa la partícula respecto del foco. Para calcular el tiempo conviene parametrizar la elipse desde su centro geométrico mediante un círculo auxiliar. El nuevo ángulo no es el ángulo físico de la dirección radial: es una coordenada que simplifica el área barrida.

Definición 18.6 — Anomalía excéntrica y movimiento medio. En una elipse, definimos la anomalía excéntrica u por

$$x = a(\cos u - e), \qquad y = b \sin u.$$

Se sigue una elección continua de u a lo largo del movimiento. Definimos también $n = \sqrt{\gamma/a^3} = 2\pi/T$ y la anomalía media $\mathcal{M} = n(t - \tau)$, donde τ es un paso por el periastro cuando $e > 0$.

Proposición 18.14 — Relaciones entre anomalías.

$$r = a(1 - e\cos u),$$

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin u}{1 - e\cos u}.$$

Demostración. Al calcular $x^2 + y^2$ con $b^2 = a^2(1-e^2)$, se obtiene $a^2(1 - e\cos u)^2$. Como $1 - e\cos u \ge 1 - e > 0$, la raíz positiva da el radio. Dividir x, y por r produce las relaciones angulares. □

Las dos funciones trigonométricas juntas conservan el cuadrante. Utilizar sólo una inversa de coseno perdería el signo de la componente vertical y confundiría aproximación con alejamiento. Para varias vueltas hay que conservar además el número de vueltas del ángulo continuo.

Proposición 18.15 — Ecuación temporal de Kepler.

$$\mathcal{M} = u - e\sin u, \qquad \frac{dt}{du} = \frac{1 - e\cos u}{n} > 0.$$

Demostración. Derivar la parametrización da $dx/du = -a\sin u$ y $dy/du = b\cos u$. El producto areolar es $x(dy/du) - y(dx/du) = ab(1 - e\cos u)$. Como $x\dot y - y\dot x = h$ y $h = abn$, resulta $dt/du = (1 - e\cos u)/n$. Integrar desde $u = 0$ en el periastro hasta el ángulo considerado da $n(t-\tau) = u - e\sin u$. □

La anomalía media aumenta uniformemente con el tiempo; las otras dos no lo hacen salvo en el círculo. Si $e = 0$, la ecuación se reduce a $\mathcal{M} = u$ y el origen de fase se elige arbitrariamente porque no hay un periastro privilegiado.

Para predecir una posición a tiempo dado, el orden es concreto: calcular $\mathcal{M}$, resolver la ecuación para u, obtener x, y y después reconstruir los cuerpos. El cálculo no requiere suponer que $\theta = nt$.[3]

Principio metodológico 18.9. Distingue anomalía verdadera, excéntrica y media. Conserva cuadrantes y vueltas al convertirlas.

Ejercicios. Ejercicio 18.17. En una elipse con $e = 1/2$, calcula posición, radio y anomalía media cuando $u = \pi/2$.

Solución. $x = -a/2$, $y = b = (\sqrt{3}/2)a$ y $r = a$. La anomalía verdadera cumple $\cos\theta = -1/2$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, así que $\theta = 2\pi/3$ en esa vuelta. La anomalía media es $\pi/2 - 1/2$, y el tiempo desde el periastro es $(\pi/2 - 1/2)/n$. Ninguno de los tres ángulos coincide aquí.

Ejercicio 18.18. Demuestra que una partícula elíptica tarda medio período en ir de periastro a apoastro, aunque su velocidad angular cambie.

Solución. En periastro $u = 0$ y en apoastro $u = \pi$. Proposición 18.15 da $\mathcal{M}(0) = 0$ y $\mathcal{M}(\pi) = \pi$, porque el seno se anula en ambos extremos. El tiempo es $\pi/n = T/2$. La igualdad procede de la ecuación temporal y de la simetría del recorrido, no de una velocidad angular constante.

10. Resolver la ecuación de Kepler con control del error

La función $u - e\sin u$ no se invierte en general mediante una combinación elemental de funciones. Podemos resolverla numéricamente y, además, controlar cuánto puede diferir la aproximación de la solución exacta. El control importa especialmente cuando la excentricidad se acerca a uno.

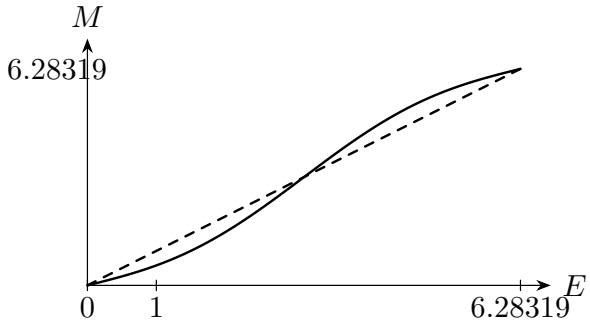


Figura 18.4. Para $e = 1/2$, $M = E - \frac{1}{2}\sin E$ es estrictamente creciente: $dM/dE \geq 1/2$. La recta discontinua $M = E$ permite ver la diferencia entre anomalía media y excéntrica. Véase §10.

Proposición 18.16 — Unicidad, intervalo y residuo. Para $0 \leq e < 1$ y cualquier $\mathcal{M}$ real, la ecuación $F(u) = u - e\sin u - \mathcal{M} = 0$ tiene una única solución u_*. Se cumple

$$\mathcal{M} - e \leq u_* \leq \mathcal{M} + e, \qquad |u - u_*| \leq \frac{|F(u)|}{1 - e}.$$

[3]MIT OpenCourseWare, *Astrodynamics*, 16.346, Lecture 3, *Barker's Equation & Kepler's Equation*, pp. 2–4 del archivo digital. https://ocw.mit.edu/courses/16-346-astrodynamics-fall-2008/379eae1a78cf9ad58247058dffbae3ac_lec_03.pdf. Parametrizaciones, relación temporal y resolución de la ecuación elíptica; las demostraciones y cotas se desarrollan aquí.

Demostración. $F'(u) = 1 - e\cos u \geq 1 - e > 0$, de modo que F es estrictamente creciente. Como el término seno está acotado, F tiende a los infinitos de signos correspondientes cuando u lo hace; continuidad y crecimiento dan existencia y unicidad. La ecuación $u_* = \mathcal{M} + e\sin u_*$ da el intervalo. El teorema del valor medio entre u y u_* da $|F(u)| \geq (1-e)|u - u_*|$. □

Para una bisección, los extremos del intervalo tienen residuos de signos opuestos o cero. Tras N divisiones, el intervalo tiene longitud $2e/2^N$ y su punto medio difiere de la raíz a lo sumo en $e/2^N$. Si $e = 0$, la raíz se conoce directamente.

Proposición 18.17 — Iteración por sustitución. Para $0 < e < 1$, la iteración

$$u_{k+1} = \mathcal{M} + e\sin u_k$$

con cualquier u_0 real converge a u_*. Tiene la cota

$$|u_N - u_*| \leq \frac{e^N}{1-e}|u_1 - u_0|.$$

Demostración. La desigualdad $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ da $|u_{k+1} - u_k| \leq e|u_k - u_{k-1}|$. Así, los incrementos están acotados por una sucesión geométrica. La suma de su cola desde el índice N es $e^N|u_1 - u_0|/(1-e)$, que tiende a cero. La sucesión es de Cauchy y converge en los reales. Pasar al límite en la fórmula continua da una raíz, que proposición 18.16 identifica de manera única. La misma cola da la cota. □

La convergencia puede ser lenta para e próximo a uno. El método de Newton usa $u_{k+1} = u_k - F(u_k)/(1 - e\cos u_k)$ y suele acelerar el cálculo cerca de la raíz, pero la positividad del denominador no prueba por sí sola convergencia desde cualquier inicio. Un intervalo de bisección permite conservar una garantía y usar Newton cuando su propuesta permanezca en él y resulte útil.

El residuo es fácil de calcular y puede certificarse antes de convertir u a posición. Por proposición 18.14, el desplazamiento entre posiciones de anomalías próximas está acotado por $a|\Delta u|$, porque la norma de la derivada de la parametrización no supera a. Así, el control angular proporciona una cota espacial.

Principio metodológico 18.10. Verifica una raíz mediante intervalo y residuo, no sólo mediante la diferencia entre iteraciones. Conserva una cota espacial si la pregunta exige precisión de posición.

Ejercicios. Ejercicio 18.19. Para $e = 0,5$, una aproximación tiene residuo de magnitud 10^{-6}. Acota su error en anomalía excéntrica y el error espacial si $a = 10^7$ m.

Solución. proposición 18.16 da $|u - u_*| \leq 10^{-6}/0,5 = 2 \times 10^{-6}$ radianes. La cota espacial es $a|u - u_*| \leq 20$ m. Es una garantía absoluta basada en el residuo; no significa que el error real alcance esos valores.

Ejercicio 18.20. Para $e = 0,9$, ¿cuántas divisiones de bisección bastan para garantizar error de punto medio menor que 10^{-4} radianes?

Solución. La cota es $0,9/2^N$. Se exige $2^N > 9000$. Como $2^{13} = 8192$ y $2^{14} = 16384$, catorce divisiones bastan. Con ellas, la cota es aproximadamente $5,49 \times 10^{-5}$. La garantía no depende de que la anomalía media esté cerca de cero.

11. Tiempo en las órbitas abiertas

En las trayectorias abiertas no existe un período de vuelta. Podemos medir el tiempo desde el periastro, con signo negativo para el tramo entrante y positivo para el saliente. Una variable

de semiángulo simplifica la parábola; una parametrización con funciones hiperbólicas simplifica la hipérbola.

Definición 18.7 — Parámetros temporales abiertos. Para la parábola, sea $D = \tan(\theta/2)$, con $-\pi < \theta < \pi$. Para la hipérbola, introducimos H mediante $x = A(e - \cosh H)$, $y = B \sinh H$. Las funciones se definen por $\cosh H = (e^H + e^{-H})/2$ y $\sinh H = (e^H - e^{-H})/2$. El periastro corresponde a $D = 0$ o $H = 0$.

Proposición 18.18 — Tiempo parabólico de Barker.

$$r = \frac{p}{2}(1 + D^2), \qquad t - \tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{\gamma}}\left(D + \frac{D^3}{3}\right).$$

Demostración. La identidad $1 + \cos\theta = 2/(1 + D^2)$ da el radio. También $d\theta/dD = 2/(1 + D^2)$ y el balance areolar da $dt/d\theta = r^2/h$. Usar $h = \sqrt{\gamma p}$ produce $dt/dD = (p^{3/2}/(2\sqrt{\gamma}))(1 + D^2)$. Integrar desde cero da la fórmula. □

El polinomio $D + D^3/3$ es estrictamente creciente, de modo que el tiempo identifica una única posición sobre la rama. Cuando D tiende a cualquiera de los infinitos, también lo hace el tiempo. La parábola alcanza distancias arbitrarias sin llegar al infinito en un tiempo finito.

Proposición 18.19 — Tiempo hiperbólico. Con $e > 1$ y la convención $A > 0$,

$$r = A(e \cosh H - 1), \qquad n_{\mathrm{h}} = \sqrt{\frac{\gamma}{A^3}},$$

$$n_{\mathrm{h}}(t - \tau) = e \sinh H - H.$$

Esta ecuación tiene una única solución real H para cada tiempo.

Demostración. Calcular $x^2 + y^2$ con $B^2 = A^2(e^2 - 1)$ da $A^2(e \cosh H - 1)^2$, cuyo factor es positivo. La parametrización pertenece a la rama física de la proposición 18.8 y cumple $r + ex = p$. El producto $x(dy/dH) - y(dx/dH)$ vale $AB(e \cosh H - 1)$. Como $h = ABn_{\mathrm{h}}$, el balance areolar da $dt/dH = (e \cosh H - 1)/n_{\mathrm{h}}$. Integrar desde el periastro produce la ecuación. Su miembro derecho tiene derivada $e \cosh H - 1 \geq e - 1 > 0$ y límites de signos opuestos infinitos; por tanto es invertible de manera única. □

La parametrización hiperbólica conserva automáticamente la rama de atracción. El tiempo puede resolverse por un intervalo y un residuo, usando ahora la cota inferior $e - 1$ de la derivada. Cerca del límite parabólico, esa cota empeora y conviene revisar la elección de parámetros y la escala del cálculo.

Principio metodológico 18.11. En órbitas abiertas, mide el tiempo desde un paso de referencia y conserva su signo. No sustituyas el parámetro elíptico por uno hiperbólico manteniendo las mismas fórmulas.

Ejercicios. Ejercicio 18.21. En una parábola, calcula el tiempo desde el periastro hasta $\theta = \pi/2$ y el radio allí.

Solución. $D = \tan(\pi/4) = 1$, de modo que $r = p$. Proposición 18.18 da $t - \tau = \frac{1}{2}\sqrt{p^3/\gamma}(1 + 1/3) = (2/3)\sqrt{p^3/\gamma}$. Para $\theta = -\pi/2$, el tiempo tiene igual magnitud y signo negativo. Los puntos están a la misma distancia, pero se recorren antes y después del periastro.

Ejercicio 18.22. En una hipérbola con $e = 2$, toma $H = \log 2$. Calcula r/A y $n_{\mathrm{h}}(t - \tau)$.

Solución. $\cosh(\log 2) = (2 + 1/2)/2 = 5/4$ y $\sinh(\log 2) = (2 - 1/2)/2 = 3/4$. Entonces $r/A = 2(5/4) - 1 = 3/2$ y $n_{\mathrm{h}}(t - \tau) = 2(3/4) - \log 2 = 3/2 - \log 2 > 0$. La parametrización da $x/A = 2 - 5/4 = 3/4$ y $y/A = \sqrt{3}(3/4)$, cuyas componentes tienen norma $3/2$, verificando el radio.

12. Los dos cuerpos y la tercera ley exacta

La cónica obtenida hasta aquí describe $\mathbf{q}$, la separación. En el marco del centro de masa, cada cuerpo recorre una cónica escalada, con el centro de masa en un foco. El cuerpo más masivo describe la trayectoria menor. Cuando una masa domina, su trayectoria se vuelve pequeña y aparece la aproximación usual de un centro de fuerza inmóvil.

Proposición 18.20 — Cónicas respecto del centro de masa. Sean $s_1 = m_2/M$ y $s_2 = m_1/M$. Las posiciones internas son $\boldsymbol{\rho}_1 = s_1\mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\rho}_2 = -s_2\mathbf{q}$. Ambas cónicas tienen la misma excentricidad que la relativa. Para una elipse, sus semiejes mayores son $a_1 = s_1 a$ y $a_2 = s_2 a$, sus períodos son iguales a T y sus velocidades areolares son $s_1^2 h/2$ y $s_2^2 h/2$.

Demostración. La reconstrucción del capítulo 17 da las posiciones. Multiplicar una cónica por un factor positivo conserva su excentricidad y escala todos sus tamaños por ese factor. El signo negativo añade una rotación de π en el plano, sin alterar forma ni tiempo. Los productos de posición y velocidad internas escalan por s_i^2, dando la velocidad areolar. La repetición temporal es la misma porque las posiciones son factores constantes de una misma función periódica $\mathbf{q}(t)$. □

Proposición 18.21 — Masas a partir de las dos elipses. Si se conocen los semiejes mayores reales a_1, a_2 respecto del centro y el período común,

$$M = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{GT^2}, \qquad m_1 = M\frac{a_2}{a_1 + a_2}, \qquad m_2 = M\frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Demostración. proposición 18.20 da $a_1 + a_2 = (s_1 + s_2)a = a$. Proposición 18.13 permite despejar M. La razón $a_1/a_2 = m_2/m_1$ y la suma de masas producen las dos expresiones individuales. □

Una imagen observada puede contener semiejes proyectados, no los tamaños reales del plano orbital. Inferir masas requiere recuperar la geometría y las unidades de distancia y tiempo. La fórmula no elimina esas dependencias observacionales.

La suma de masas también aparece en la formulación de Gauss al comienzo de la *Theoria motus*: al organizar los movimientos en cónicas, conserva la contribución del cuerpo atraído junto con la solar. Esa precisión explica por qué la constante temporal común para cuerpos de masa despreciable es una aproximación de una relación más general.[4]

Principio metodológico 18.12. Distingue semieje relativo y semiejes individuales, y separa tamaños reales de sus proyecciones. Usa el movimiento observado de ambos cuerpos cuando la masa central no pueda tratarse como inmóvil.

Ejercicios. Ejercicio 18.23. Un par de masas m y $3m$ tiene semieje relativo a. Calcula los semiejes individuales y muestra el error de usar a_1 en lugar de a al despejar la masa total con la tercera ley.

Solución. El cuerpo de masa m tiene $a_1 = 3a/4$ y el de masa $3m$ tiene $a_2 = a/4$. Si se introduce a_1 en la fórmula $M = 4\pi^2 a^3/(GT^2)$ sin cambiar nada más, se obtiene $M_{\mathrm{err}} = (3/4)^3 M = 27M/64$.

[4] Gauss, *Theoria motus*, §§1–2, pasaje de la traducción inglesa reproducido en la misma Lecture 3, pp. 5–6 del archivo digital. La referencia acompaña exclusivamente la presencia de la suma de masas en su formulación orbital.

La inferencia subestima la masa total. La ley usa la separación entre cuerpos, cuyo semieje es la suma de los individuales.

Ejercicio 18.24. En un sistema ideal se conocen $a_1 = 2d$, $a_2 = d$ y período T. Expresa las masas en términos de d, T, G.

Solución. El semieje relativo es $3d$ y $M = 4\pi^2(3d)^3/(GT^2) = 108\pi^2 d^3/(GT^2)$. Como $a_1/a_2 = 2 = m_2/m_1$, las masas son $m_1 = 36\pi^2 d^3/(GT^2)$ y $m_2 = 72\pi^2 d^3/(GT^2)$. El cuerpo que recorre la elipse mayor es el de masa menor.

13. Del estado inicial a la órbita, incluidos los casos radiales

La clasificación se vuelve operativa al calcular los invariantes desde una posición y velocidad iniciales. Antes de escoger una ecuación temporal conviene decidir si el estado es no radial, circular, ligado o abierto. Cada decisión necesita sus condiciones propias.

Proposición 18.22 — Reconstrucción de la orientación inicial. Para $r_0 > 0$, $h > 0$ y $e > 0$, los datos $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ determinan el plano y el periastro mediante $\mathbf{h}$ y $\mathbf{e}$. En esa base,

$$\cos\theta_0 = \frac{p/r_0 - 1}{e}, \qquad \sin\theta_0 = \frac{h\, v_{r,0}}{\gamma e}, \quad v_{r,0} = \frac{\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{w}_0}{r_0}.$$

Demostración. El plano es perpendicular a $\mathbf{h}$. Tomamos el eje x como $\mathbf{e}/e$ y el eje y como $\hat{\mathbf{h}} \times (\mathbf{e}/e)$. Proposición 18.4 da la expresión del coseno y proposición 18.11 la del seno. Ambas corresponden al mismo ángulo de la posición inicial en esa base y conservan su cuadrante. □

Después se transforma θ_0 al parámetro temporal de la cónica y se determina el instante τ del periastro. Para $e = 0$, los datos siguen determinando el círculo y el sentido de recorrido, pero el origen angular se elige libremente y se fija su fase desde el estado inicial.

Proposición 18.23 — El caso radial no se clasifica por e. Si $h = 0$ y $r > 0$, la dirección relativa es constante en cada intervalo regular, $e = 1$ cualquiera que sea ϵ y

$$\dot r^2 = 2\epsilon + \frac{2\gamma}{r}.$$

Con $\epsilon < 0$ existe un radio máximo $-\gamma/\epsilon$. Para una rama saliente con $\epsilon \geq 0$, el radio puede crecer sin cota. Una rama entrante alcanza la singularidad en tiempo finito.

Demostración. capítulo 17 mostró que $\mathbf{q}/r$ es constante cuando el momento angular es cero. Definición 18.2 da entonces $\mathbf{e} = -\mathbf{q}/r$, de magnitud uno. La energía da la ecuación radial. Si $\epsilon < 0$, su miembro derecho se anula en el radio indicado y sería negativo más allá. Si $\epsilon \geq 0$, es positivo para todo radio finito y una rama saliente no tiene retorno. Para una rama entrante, el tiempo hasta cero es $\int_0^{r_0} [2\epsilon + 2\gamma/r]^{-1/2}\, dr$, tomado sobre radios accesibles. Cerca de cero el integrando es comparable a $\sqrt{r/(2\gamma)}$, integrable. Si el estado parte de un radio máximo, el extremo inicial también es una raíz simple con tiempo finito. □

Una llegada a $r = 0$ no determina cómo continúan cuerpos puntuales cuya fuerza diverge. Si hay radios materiales, contacto o captura por otra interacción, el problema requiere cambiar de modelo antes de esa singularidad.

Principio metodológico 18.13. Clasifica primero el momento angular y después la energía y la excentricidad. Conserva cuadrantes y trata la coincidencia como límite del modelo, no como una continuación automática.

Ejercicios. Ejercicio 18.25. Una partícula relativa está en $r = d$ y su velocidad es puramente tangencial en el sentido positivo del plano, de magnitud v. Clasifica el punto inicial cuando $v^2 < \gamma/d$, $v^2 = \gamma/d$, $\gamma/d < v^2 < 2\gamma/d$, $v^2 = 2\gamma/d$ y $v^2 > 2\gamma/d$. Supón $v > 0$.

Solución. ejercicio 18.3 da $\mathbf{e} = (dv^2/\gamma - 1)\mathbf{e}_x$ y la energía es $\epsilon = v^2/2 - \gamma/d$. Para rapidez inferior a la circular, la energía es negativa y el vector de excentricidad apunta en sentido contrario a la posición: el estado es apoastro elíptico. En la igualdad circular, $e = 0$. Entre la circular y la parabólica, hay elipse y el punto es periastro. En $v^2 = 2\gamma/d$, la energía es cero y el punto es periastro parabólico. Por encima, hay hipérbola y periastro. Todas tienen velocidad radial inicial cero, pero su continuación depende de la rapidez tangencial.

Ejercicio 18.26. Un estado tiene velocidad estrictamente radial saliente y $\epsilon > 0$. Definición 18.2 produce $e = 1$. ¿Debe usarse la ecuación de Barker?

Solución. No: $h = 0$ y la ecuación orbital con $p = h^2/\gamma$ deja de describir una cónica no degenerada. El movimiento radial tiene rapidez asintótica $\sqrt{2\epsilon} > 0$, mientras la parábola no radial de Barker tiene energía cero y rapidez asintótica cero. Se usa la ecuación radial de la proposición 18.23 y su cuadratura temporal. La misma magnitud $e = 1$ no identifica el mismo problema cuando cambia la hipótesis angular.

14. Verificar una órbita y delimitar el modelo

El modelo de Kepler resuelve un sistema concreto: dos cuerpos con atracción newtoniana, sin otras fuerzas y sin coincidencias. Para compararlo con una observación o un cálculo numérico, podemos comprobar no sólo la posición, sino también los invariantes que deberían permanecer constantes. Una variación de ellos puede revelar un error numérico o una interacción omitida; distinguir ambos exige revisar el problema.

Definición 18.8 — Cónica osculante. En un estado no radial, llamamos cónica osculante a la órbita kepleriana que comparte esa posición y velocidad relativas para el parámetro γ elegido. En una evolución perturbada, sus parámetros pueden cambiar de un instante a otro. Es una descripción del estado instantáneo, no una afirmación de que toda la trayectoria siga una única cónica fija.

Proposición 18.24 — Variación de invariantes bajo una perturbación. Si

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\gamma\frac{\mathbf{q}}{r^3} + \mathbf{a}_{\mathrm{p}},$$

con γ constante, entonces

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{a}_{\mathrm{p}}, \qquad \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{q}\times\mathbf{a}_{\mathrm{p}},$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{a}_{\mathrm{p}}\times\mathbf{h} + \mathbf{w}\times(\mathbf{q}\times\mathbf{a}_{\mathrm{p}})}{\gamma}.$$

Demostración. Derivar la energía específica cancela la potencia de la aceleración gravitatoria con la derivada de $-\gamma/r$, dejando el primer resultado. Derivar $\mathbf{q}\times\mathbf{w}$ cancela el producto de $\mathbf{q}$ con la aceleración central y deja el torque específico indicado. En definición 18.2 se deriva ahora también $\mathbf{h}$: $\dot{\mathbf{e}} = (\ddot{\mathbf{q}}\times\mathbf{h} + \mathbf{w}\times\dot{\mathbf{h}})/\gamma - \dot{\mathbf{n}}$. La parte central se cancela con $\dot{\mathbf{n}}$ por el cálculo de la proposición 18.2; los términos restantes son los de la fórmula. □

Una perturbación radial tiene torque cero y conserva $\mathbf{h}$, pero puede modificar energía y excentricidad. Una perturbación perpendicular a la velocidad puede conservar instantáneamente la energía y cambiar el momento angular. La pequeñez de una aceleración tampoco garantiza una variación

despreciable durante cualquier tiempo: los efectos deben integrarse y compararse con una escala de interés.

Proposición 18.25 — Recuperación de la solución no radial. Dados un estado $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ con $r_0 > 0$, $h > 0$ y un $\gamma > 0$, los invariantes y las ecuaciones temporales del capítulo permiten reconstruir la solución relativa kepleriana regular. El centro y las masas permiten después reconstruir ambos cuerpos.

Demostración. definiciones 18.1–18.2 determinan $\epsilon, \mathbf{h}, \mathbf{e}$. Proposiciones 18.3–18.9 fijan la forma y el dominio de la cónica; proposición 18.22 fija su orientación y fase cuando $e > 0$. Para el círculo se toma la dirección inicial como referencia. Proposición 18.15, proposición 18.18 o proposición 18.19 recuperan el tiempo y la fase temporal correspondiente, con una inversión única por monotonicidad. La ecuación polar satisface Binet y el tiempo cumple $\dot{\theta} = h/r^2$, de modo que la reconstrucción del capítulo 17 verifica Newton. Los datos iniciales quedan reproducidos, incluido el signo radial. La unicidad local del campo regular fuera del centro identifica la trayectoria obtenida con la solución del estado dado. Finalmente, las fórmulas del centro y de la separación reconstruyen las posiciones y velocidades individuales. □

La comparación con datos necesita además unidades, marco, proyección observacional y fuerzas relevantes. Una órbita matemáticamente consistente puede no representar el sistema observado si esa conexión se omite.

Principio metodológico 18.14. Verifica posición, velocidad, dominios e invariantes; conserva la distinción entre error de cálculo y cambio del modelo. Para una predicción temporal, comprueba también la fase y la ecuación de tiempo.

Ejercicios. Ejercicio 18.27. Una perturbación relativa es radial, $\mathbf{a}_{\mathrm{p}} = a_r(t)\mathbf{q}/r$. Calcula $\dot{\epsilon}$ y $\dot{\mathbf{h}}$ y decide si la trayectoria sigue necesariamente una cónica kepleriana fija.

Solución. proposición 18.24 da $\dot{\mathbf{h}} = 0$ y $\dot{\epsilon} = a_r\dot{r}$. La energía puede cambiar cuando hay desplazamiento radial. Incluso si la potencia se anula en un instante de radio extremo, la perturbación modifica la aceleración y puede cambiar el vector de excentricidad durante la evolución. El momento angular conservado fija el plano y el área por tiempo, pero no prueba una cónica kepleriana fija.

Ejercicio 18.28. En un instante, una órbita recibe una aceleración perturbadora puramente tangencial $\mathbf{a}_{\mathrm{p}} = a_\theta \mathbf{e}_\theta$ en su plano. Calcula las tasas de cambio de energía específica y componente angular. Interpreta el signo de a_θ.

Solución. La velocidad tangencial es $v_\theta = h/r$, así que $\dot{\epsilon} = a_\theta h/r$. El torque específico es $\dot{h} = r a_\theta$ en la normal orientada. Un $a_\theta > 0$ aumenta ambas magnitudes instantáneamente; uno negativo las disminuye mientras $h > 0$. La relación $\dot{\epsilon} = (h/r^2)\dot{h} = \dot{\theta}\,\dot{h}$ corresponde aquí a la potencia tangencial. No incorpora una potencia radial si también existiera otra componente.

Ejercicio 18.29. Una elipse de un par tiene $r_{\mathrm{p}} = d$ y $r_{\mathrm{a}} = 3d$. Calcula a, e, p, ϵ, h, T y el tiempo desde el periastro hasta el punto superior de la parametrización excéntrica, $u = \pi/2$.

Solución. $a = (d + 3d)/2 = 2d$ y $e = (3d - d)/(3d + d) = 1/2$. Entonces $p = a(1 - e^2) = 3d/2$, $\epsilon = -\gamma/(4d)$, $h = \sqrt{3\gamma d/2}$ y $T = 2\pi\sqrt{8d^3/\gamma}$. El movimiento medio es $n = \sqrt{\gamma/(8d^3)}$. Proposición 18.15 da el tiempo pedido $(\pi/2 - 1/2)\sqrt{8d^3/\gamma}$. En ese punto $x = -d$, $y = \sqrt{3}\,d$ y $r = 2d$, coherentes con la parametrización. Su anomalía verdadera es $2\pi/3$, no $\pi/2$.

Ejercicio 18.30. Una solución numérica del par sin perturbaciones conserva muy bien ϵ y $h = |\mathbf{h}|$, pero cambia lentamente la dirección de $\mathbf{e}$. ¿Los dos primeros controles bastan para validar toda la órbita? Propón una revisión.

Solución. No bastan. Proposición 18.3 fija la magnitud de $\mathbf{e}$ a partir de ϵ, h, pero no controla su dirección. En la dinámica exacta también se conserva el vector de la proposición 18.2 y la normal $\mathbf{h}$. Una deriva de orientación puede aparecer aunque ciertos invariantes escalares permanezcan precisos. La revisión debe comparar los vectores $\mathbf{h}, \mathbf{e}$, comprobar la aceleración calculada, signos y unidades del campo, paso temporal y ecuación de tiempo. Si el modelo declarado es realmente el par aislado, una deriva numérica no debe interpretarse como precesión física. Si se incluyeron otras fuerzas, proposición 18.24 permite contrastar la variación con sus torques y potencias.

El problema de Kepler queda así resuelto en forma y tiempo, con sus hipótesis, dominios y datos de orientación. Las órbitas abiertas preparan el estudio de encuentros y dispersión: allí importarán la velocidad lejana, la máxima aproximación y el cambio de dirección entre entrada y salida.

Capítulo 19

Dispersión clásica y reducción efectiva

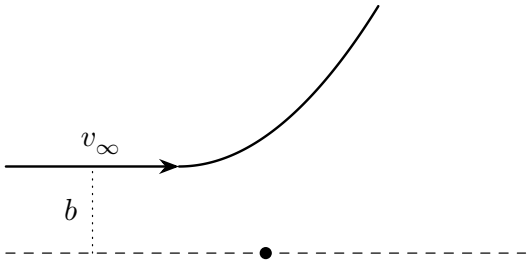
Una órbita abierta describe un encuentro: dos cuerpos se aproximan, interactúan y vuelven a separarse. Para comparar encuentros diferentes, necesitamos datos que puedan prepararse lejos de la interacción y resultados que puedan medirse después. La rapidez de entrada y el desplazamiento lateral de la aproximación fijan el estado relativo; el cambio de dirección de salida ofrece una primera medida del efecto de la fuerza.

El movimiento de una sola trayectoria todavía no responde cuántas partículas llegará a ver un detector. Un haz contiene muchos desplazamientos laterales distintos. La sección eficaz conecta esa distribución de preparaciones con una distribución de resultados. Su cálculo reúne dinámica, geometría y una transformación de variables cuya orientación y ramas deben controlarse.

Trabajaremos con interacciones centrales conservativas y un potencial de energía relativa $U(r)$ que tiende a cero en el infinito. Las masas son positivas constantes y la masa reducida es μ. Supondremos que existen velocidades asintóticas de entrada y salida cuando hablemos de dispersión. Los encuentros capturados, los contactos y las singularidades se tratarán por separado. La dinámica principal será clásica y no relativista; la relación posterior con dispersión cuántica conservará su propio régimen.

1. Preparar un encuentro y medir su resultado

Desde lejos, el encuentro puede caracterizarse por una rapidez relativa $v_\infty > 0$ y por cuánto se aparta la aproximación de una colisión frontal. El punto de referencia es el origen de la coordenada relativa, no necesariamente un cuerpo inmóvil en el laboratorio.



preparación lejana y desviación

Figura 19.1. El parámetro b es la separación perpendicular entre la recta asintótica incidente y el centro. La curva de salida es un esquema de desviación repulsiva; no pretende ser una solución cuantitativa. Véase §1.

Definición 19.1 — Datos asintóticos y parámetro de impacto. Para un encuentro relativo conservativo, sean $\mathbf{w}_-$ y $\mathbf{w}_+$ los límites de la velocidad antes y después, de magnitud v_∞. Definimos

$$E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 > 0, \qquad b = \frac{L}{\mu v_\infty} \geq 0,$$

donde $L = |\mathbf{q} \times \mu\dot{\mathbf{q}}|$. Cuando hay una línea asintótica entrante bien definida, b es su distancia perpendicular al origen. La definición mediante L evita exigir una aproximación temporal demasiado fuerte. En interacciones de largo alcance, la posición puede acumular una corrección longitudinal que crece lentamente, aunque la velocidad tenga límite y la trayectoria posea una dirección asintótica. No supondremos automáticamente $\mathbf{q}(t) = \mathbf{w}_- t + \mathbf{b} + o(1)$ en todos los potenciales.

Proposición 19.1 — Igualdad de rapideces asintóticas. Si el encuentro retorna al infinito bajo un potencial autónomo con $U(\infty) = 0$, sus rapideces relativas de entrada y salida son iguales.

Demostración. La energía conservada es $E = \mu|\mathbf{w}|^2/2 + U(r)$. En cada extremo con $r \to \infty$, el potencial tiende a cero y deja $E = \mu|\mathbf{w}_\pm|^2/2$. Ambas magnitudes son $\sqrt{2E/\mu}$. □

Definición 19.2 — Ángulo observado de dispersión.

$$\chi = \arccos\left(\frac{\mathbf{w}_- \cdot \mathbf{w}_+}{v_\infty^2}\right), \qquad 0 \leq \chi \leq \pi.$$

Es el ángulo entre velocidades, no entre los vectores posición lejanos. No conserva por sí solo el sentido lateral de la desviación ni el número de vueltas durante la interacción.

Principio metodológico 19.1. Declara qué velocidades son relativas y qué dirección mide el ángulo. Separa rapidez asintótica, parámetro de impacto y orientación lateral.

Ejercicios. Ejercicio 19.1. En un movimiento libre, $\mathbf{q}(t) = vt\,\mathbf{e}_x + b\,\mathbf{e}_y$, con $v, b > 0$. Calcula E, L y el ángulo de dispersión.

Solución. La velocidad es $v\mathbf{e}_x$ y $E = \mu v^2/2$. El momento angular es $-\mu bv\,\mathbf{e}_z$, así que su magnitud es $L = \mu bv$ y definición 19.1 recupera el parámetro b. La velocidad de salida coincide con la de entrada, por lo que $\chi = 0$. Los vectores posición al principio y al final apuntan en sentidos aproximadamente opuestos; usar su ángulo habría dado un resultado incorrecto.

Ejercicio 19.2. Un encuentro conserva E y termina con rapidez relativa de salida distinta de $\sqrt{2E/\mu}$ a un radio finito R. ¿Eso contradice proposición 19.1?

Solución. No necesariamente. A radio finito, $|\mathbf{w}(R)|^2 = 2[E - U(R)]/\mu$. Proposición 19.1 compara los límites donde U tiende a cero. Si el detector mide antes de que el potencial sea despreciable, hay que incluir esa diferencia. Una desigualdad entre las rapideces realmente asintóticas requeriría revisar conservación, potencial o canales de energía adicionales.

2. Reducción radial y ángulo de salida

El potencial efectivo del capítulo 17 permite encontrar hasta dónde se acerca una trayectoria entrante. Luego una integral angular determina cuánto gira el vector separación durante el encuentro.

Definición 19.3 — Función radial normalizada. Para $b > 0$,

$$Q(r) = 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}.$$

La ecuación energética da $\dot{r}^2 = v_\infty^2 Q(r)$. Llamamos $r_{\mín} > 0$ al primer radio de retorno accesible desde el infinito; bajo las hipótesis siguientes es la mayor raíz relevante que limita la componente exterior admisible.

Proposición 19.2 — Integral de medio encuentro. Supongamos una raíz simple $Q(r_{\mín}) = 0$, con $Q(r) > 0$ para todo $r > r_{\mín}$, y un potencial regular en ese intervalo que tiende a cero. El ángulo entre el periastro y cada dirección radial asintótica es

$$\Phi(b) = \int_{r_{\mín}}^{\infty} \frac{b\,dr}{r^2\sqrt{Q(r)}}.$$

El vector separación gira un ángulo total 2Φ.

Demostración. La velocidad angular positiva en el plano orientado es $\dot\theta = L/(\mu r^2) = bv_\infty/r^2$. Dividirla por la rapidez radial saliente $v_\infty\sqrt{Q}$ da el integrando. La fuerza autónoma conserva el mismo problema radial en entrada y salida, de modo que ambos tramos aportan igual ángulo. La raíz simple hace integrable el extremo inferior, como se mostró en el capítulo 17; en el infinito, $Q \to 1$ y el integrando es comparable a b/r^2. □

Proposición 19.3 — De giro radial a desviación. Definamos el ángulo de desviación con signo por la convención

$$\delta = \pi - 2\Phi.$$

El ángulo principal observado es $\chi = \arccos(\cos\delta)$. Cuando $-\pi \le \delta \le \pi$, se reduce a $\chi = |\delta|$.

Demostración. En la entrada lejana, la velocidad apunta en sentido opuesto al vector radial; en la salida, en el mismo sentido. Por tanto el cambio de dirección entre velocidades difiere en π del giro radial total. La convención indicada escoge su signo opuesto. El producto de las direcciones depende del coseno de esa diferencia y definición 19.2 da la expresión principal. En el intervalo de una desviación sin vueltas adicionales, el ángulo principal es el valor absoluto. □

Una desviación repulsiva simple tiene $\Phi < \pi/2$ y $\delta > 0$; una atractiva simple puede tener $\Phi > \pi/2$ y $\delta < 0$. Cuando hay giro adicional o acercamiento a una órbita inestable, el ángulo sin reducir puede salir de ese intervalo. El ángulo del detector sigue entre cero y π y pierde información de vueltas.

Principio metodológico 19.2. Selecciona la raíz accesible desde el infinito y conserva el ángulo con signo antes de reducirlo al ángulo observado. Las otras raíces pueden pertenecer a regiones que la trayectoria no visita.

Ejercicios. Ejercicio 19.3. Para $U = 0$ y $b > 0$, evalúa Φ y verifica el resultado libre.

Solución. La raíz exterior es $r_{\mín} = b$. La sustitución $s = b/r$ da $\Phi = \int_0^1 ds/\sqrt{1-s^2} = \pi/2$. Entonces $\delta = 0$ y $\chi = 0$. El radio mínimo es el parámetro de impacto sólo en este caso libre.

Ejercicio 19.4. Un cálculo produce $\Phi = 5\pi/4$. Encuentra δ y χ. ¿El detector conserva todo el giro calculado?

Solución. $\delta = \pi - 2(5\pi/4) = -3\pi/2$. El ángulo principal es $\arccos(\cos(-3\pi/2)) = \pi/2$. El giro radial total fue $5\pi/2$; el detector que sólo registra el ángulo entre velocidades entrega 90° y no distingue por sí mismo el giro adicional.

3. Controlar una integral con un extremo singular

El integrando de la proposición 19.2 diverge en el radio de retorno, aunque su integral sea finita. Esa diferencia importa para un cálculo numérico: evaluar directamente muy cerca de la raíz puede amplificar errores de redondeo o de localización.

Proposición 19.4 — Regularización de una raíz simple. Si $Q'(r_{\mín}) > 0$ y Q es diferenciable allí, la sustitución $r = r_{\mín} + s^2$ transforma la integral cercana en un integrando con límite finito

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{2bs}{(r_{\mín}+s^2)^2\sqrt{Q(r_{\mín}+s^2)}} = \frac{2b}{r_{\mín}^2\sqrt{Q'(r_{\mín})}}.$$

Demostración. Diferenciabilidad da $Q(r_{\mín}+s^2) = Q'(r_{\mín})s^2 + o(s^2)$. Para $s>0$, la raíz del denominador es $s\sqrt{Q'(r_{\mín})+o(1)}$. El factor s se cancela con el jacobiano $dr = 2s\,ds$, dejando el límite. □

Proposición 19.5 — Cota del tramo lejano. Si $Q(r) \geq c > 0$ para $r \geq R$, el ángulo omitido al truncar la integral allí satisface

$$0 \leq \int_R^\infty \frac{b\,dr}{r^2\sqrt{Q(r)}} \leq \frac{b}{R\sqrt{c}}.$$

Demostración. Sustituir la cota inferior de Q acota el integrando por $b/(r^2\sqrt{c})$. Su integral de R al infinito vale $b/(R\sqrt{c})$. □

Esta cota es para Φ; el correspondiente error en δ es como máximo el doble. Se suma al error de la raíz y de la integración. Si el retorno es doble o se acerca a serlo, proposición 19.4 deja de ofrecer un límite finito uniforme y pueden aparecer tiempos y ángulos muy grandes. En ese caso hay que revisar la estructura del potencial, no sólo aumentar una malla.

Principio metodológico 19.3. Separa error de localización del retorno, error de cuadratura y cola lejana. Usa una transformación que respete el orden de la raíz.

Ejercicios. Ejercicio 19.5. Una integración se corta en $R = 100b$ y se ha demostrado $Q \geq 1/2$ desde allí. Acota el error en Φ y en δ debido sólo al corte.

Solución. proposición 19.5 da error de Φ no mayor que $1/(100\sqrt{1/2}) = \sqrt{2}/100 \simeq 0,01414$ radianes. Para $\delta = \pi - 2\Phi$, la cota es aproximadamente $0,02828$ radianes. Es una cota absoluta de la cola; no incluye los otros errores del cálculo.

Ejercicio 19.6. Cerca de una raíz, $Q(r)$ se comporta como $C(r-r_*)^2$ en el lado exterior, con $C>0$. ¿La sustitución de la proposición 19.4 produce un extremo regular?

Solución. Con $r - r_* = s^2$, $\sqrt{Q}$ se comporta como $\sqrt{C}\,s^2$. El jacobiano sólo aporta $2s$, de modo que el integrando se comporta como una constante por $1/s$ y la integral diverge. La raíz doble puede representar aproximación asintótica con giro creciente. No es el mismo caso que una raíz simple de retorno.

4. La ley inversa del radio como ejemplo exacto

El potencial $U = \pm\kappa/r$, con $\kappa > 0$, ofrece un encuentro cuya desviación puede obtenerse sin integrar numéricamente. El signo positivo es repulsivo y el negativo atractivo. El caso atractivo incluye la gravitación del par con $\kappa = Gm_1m_2$; el repulsivo puede modelar una interacción electrostática entre cargas de igual signo.

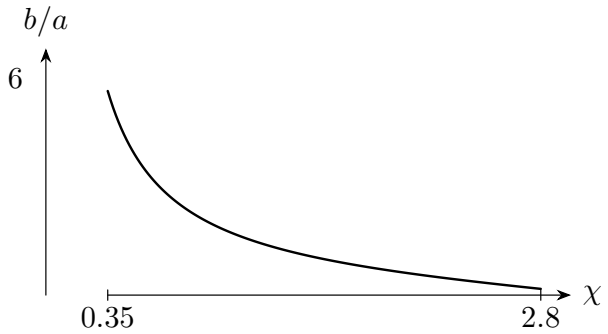


Figura 19.2. En dispersión por una fuerza inversa del cuadrado, $b = a\cot(\chi/2)$, con $a > 0$ fijado por el acoplamiento y la energía lejana. Los encuentros de mayor parámetro de impacto producen menor desviación, bajo las hipótesis de esa ley. Véase §4.

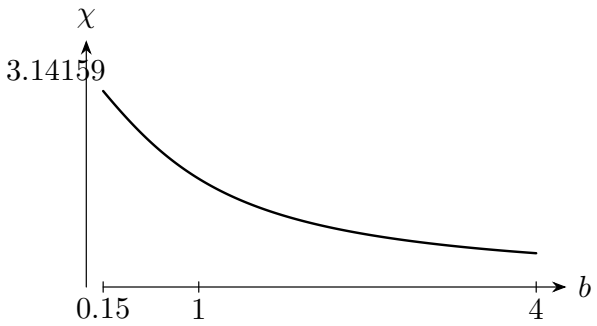


Figura 19.3. Para la dispersión coulombiana repulsiva, en unidades con $\kappa/(\mu v_\infty^2) = 1$, $\chi = 2\arctan(1/b)$. Los encuentros más lejanos se desvían menos. Véase §4.

Definición 19.4 — Longitud de interacción.

$$\ell = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} = \frac{\kappa}{2E} > 0.$$

Su comparación con b mide la intensidad de la desviación del encuentro.

Proposición 19.6 — Desviación inversa del radio. Para $b > 0$, ambos signos del potencial dan

$$\chi = 2\arctan\left(\frac{\ell}{b}\right), \qquad b = \ell\cot(\chi/2).$$

Con la convención de la proposición 19.3, $\delta = +\chi$ para repulsión y $\delta = -\chi$ para atracción.

Demostración. La órbita tiene excentricidad $e = \sqrt{1 + b^2/\ell^2} > 1$. Para atracción, la hipérbola del capítulo 18 tiene $\Phi = \arccos(-1/e)$. Para repulsión, Binet da $r = p/(e\cos\theta - 1)$, con $p = L^2/(\mu\kappa)$ y raíz angular lejana $\Phi = \arccos(1/e)$. La relación de e procede de energía y momento, o de sustituir la solución de Binet en la energía. Proposición 19.3 produce respectivamente desviaciones de magnitud $2\arcsin(1/e)$. Como $1/e = \ell/\sqrt{b^2 + \ell^2}$, ese ángulo es $2\arctan(\ell/b)$ para valores positivos. □

Proposición 19.7 — Cambio de momento relativo.

$$|\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{rel}}| = 2\mu v_\infty \sin(\chi/2) = \frac{2\mu v_\infty \ell}{\sqrt{b^2+\ell^2}}.$$

Demostración. Los momentos de entrada y salida tienen igual magnitud μv_∞ y forman ángulo χ. El cuadrado de su diferencia es $2\mu^2 v_\infty^2(1-\cos\chi) = 4\mu^2 v_\infty^2 \sin^2(\chi/2)$. La ley de la proposición 19.6 da la segunda expresión. □

Las magnitudes de desviación coinciden para ambas interacciones, pero los lados de salida son diferentes. Una distribución angular que no registre orientación respecto del desplazamiento lateral puede ocultar el signo de la fuerza. En adelante ese hecho reaparecerá al calcular secciones eficaces.[1]

Principio metodológico 19.4. Conserva el signo de la interacción y distingue desviación lateral de su magnitud. El mismo ángulo principal no prueba el mismo mecanismo físico.

Ejercicios. Ejercicio 19.7. Para un encuentro inverso del radio con $b = \ell$, calcula la desviación y el cambio de momento relativo.

Solución. $\chi = 2\arctan 1 = \pi/2$. Proposición 19.7 da $|\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{rel}}| = \sqrt{2}\,\mu v_\infty$. La desviación con signo es positiva en repulsión y negativa en atracción bajo la convención fijada.

Ejercicio 19.8. Mantén b, κ, μ y duplica v_∞. ¿La desviación se divide exactamente por cuatro?

Solución. La longitud ℓ se divide por cuatro y la nueva desviación es $\chi_{\mathrm{nueva}} = 2\arctan[\ell/(4b)]$. No es en general la cuarta parte de $2\arctan(\ell/b)$. La proporcionalidad aparece como aproximación cuando $\ell/b \ll 1$, porque entonces $\arctan x \simeq x$. El cambio de escala de la fuerza no debe confundirse con una linealidad exacta del ángulo.

5. Máxima aproximación y encuentro con una superficie

El parámetro de impacto se define lejos del encuentro. La fuerza puede acercar la trayectoria a la región central o alejarla de ella. Por eso no se identifica en general con la distancia mínima ni con la condición geométrica de contacto.

Proposición 19.8 — Radios mínimos inversos del radio. Para $b > 0$,

$$r_{\mathrm{mín}}^{\mathrm{rep}} = \ell + \sqrt{\ell^2+b^2}, \qquad r_{\mathrm{mín}}^{\mathrm{atr}} = -\ell + \sqrt{\ell^2+b^2}.$$

Demostración. En el retorno, $E = L^2/(2\mu r^2) \pm \kappa/r$. Usar $L = \mu v_\infty b$ y $E = \mu v_\infty^2/2$ da $r^2 \mp 2\ell r - b^2 = 0$. La raíz positiva es la indicada para cada signo. □

La repulsión aumenta la máxima distancia de acercamiento respecto de b, mientras la atracción la reduce. En el límite $b \to 0$, la repulsión tiene retorno radial en 2ℓ; la atracción puntual lleva hacia la singularidad. La fórmula angular del encuentro no debe convertir esa coincidencia singular en una dispersión saliente bien definida.

Proposición 19.9 — Condición para alcanzar un radio absorbente. Supongamos que una trayectoria que llega a $r = R > 0$ se absorbe o cambia de canal por un mecanismo declarado. Para el potencial atractivo $-\kappa/r$, los impactos que alcanzan ese radio cumplen

$$b^2 \le R^2 + 2\ell R.$$

[1] La derivación de la dispersión inversa del radio se desarrolla aquí a partir de la reducción de dos cuerpos y la ecuación de Binet del capítulo capítulo 18. Como contraste de convenciones físicas: MIT OpenCourseWare, *Introduction to Applied Nuclear Physics*, capítulo 8, apartado de dispersión de Rutherford, https://ocw.mit.edu/courses/22-02-introduction-to-applied-nuclear-physics-spring-2012/f06e26889dd2332f1664a2df42e00ed4_MIT22_02S12_lec_ch8.pdf . Se emplean en este capítulo la energía relativa y la medida geométrica ordinaria de ángulo sólido.

Para el repulsivo $+\kappa/r$, cumplen $b^2 \le R^2 - 2\ell R$, si el miembro derecho es no negativo; si es negativo, ninguno llega.

Demostración. Las expresiones de la proposición 19.8 son crecientes en b. Imponer $r_{\text{mín}} \le R$ y despejar produce cada desigualdad. Equivale a que el estado exterior alcance R con velocidad radial real, sin un retorno previo. El caso radial se interpreta directamente con la energía, no mediante un plano orbital indeterminado. □

La ley central conservativa, por sí sola, no captura una trayectoria que llega del infinito y vuelve a salir bajo sus hipótesis. Para llamar captura a alcanzar R hace falta el mecanismo que absorbe o disipa allí. En un encuentro de cuerpos extensos, R puede ser la suma de sus radios de contacto; la dinámica posterior pertenece a otro modelo.

Principio metodológico 19.5. Separa la aproximación determinada por la fuerza del mecanismo de contacto o captura. Declara el radio y el cambio de modelo al alcanzarlo.

Ejercicios. Ejercicio 19.9. Para $b = 2\ell$, compara los radios mínimos atractivo, repulsivo y libre.

Solución. Los valores son $(\sqrt{5}-1)\ell$, $(\sqrt{5}+1)\ell$ y 2ℓ. Aproximadamente son $1,236\ell$, $3,236\ell$ y 2ℓ. La misma preparación lejana puede alcanzar distancias centrales muy distintas bajo fuerzas de sentidos opuestos, aunque sus ángulos principales de dispersión coincidan en el ejemplo inverso del radio.

Ejercicio 19.10. Para una interacción atractiva con $\ell = R$, encuentra el radio máximo de impacto que alcanza la superficie R. Compara con el límite geométrico sin fuerza.

Solución. proposición 19.9 da $b_{\text{máx}} = \sqrt{R^2 + 2R^2} = \sqrt{3}\,R$. Sin interacción, sólo llegan los impactos con $b \le R$. La atracción enfoca también preparaciones que pasarían fuera de la superficie en un movimiento libre.

6. Sección eficaz como área de preparación

Un haz uniforme prepara distintos parámetros de impacto con una distribución proporcional al área transversal. La sección eficaz de un resultado cuenta cuánta área de esa preparación lo produce. No tiene por qué coincidir con el tamaño geométrico del objeto: una fuerza puede enfocar trayectorias o desviarlas antes del contacto.

$$d\sigma = 2\pi b\, db$$

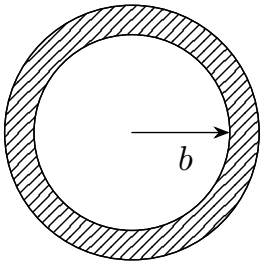


Figura 19.4. En una preparación axialmente simétrica, un anillo de radios $b, b + db$ tiene área diferencial $d\sigma = 2\pi b\, db$. Es un área del haz incidente, no una superficie de la trayectoria. Véase §6.

Definición 19.5 — Sección eficaz de un conjunto de resultados. Para un haz uniforme de rapidez fijada y una interacción dada, sea $\mathcal{B}$ el conjunto de vectores de impacto que producen el resultado seleccionado. Definimos

$$\sigma(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} d^2b.$$

Tiene unidades de área. Si la selección es simétrica alrededor del eje entrante y corresponde a impactos entre b_a y b_b, su sección es $\pi(b_b^2 - b_a^2)$. El elemento anular es $d\sigma = 2\pi b\, db$.

Proposición 19.10 — Flujo y tasa de eventos. Para un blanco aislado ideal y flujo incidente uniforme j de partículas por área y tiempo, la tasa esperada del resultado es $\dot{N} = j\sigma$. Si un haz finito uniforme de área A contiene íntegramente la región de impactos del resultado, la fracción de partículas que lo producen es σ/A.

Demostración. Un área transversal d^2b recibe $j\, d^2b$ partículas por tiempo. Integrar sobre la región seleccionada da $j\sigma$. El haz completo recibe jA, por lo que dividir ambas tasas produce la fracción. □

La hipótesis de inclusión importa. Para un haz estrecho que no cubre toda la región seleccionada, se integra sólo la intersección. Si el flujo varía con la posición, la tasa es $\int_{\mathcal{B}} j(\mathbf{b})\, d^2b$ y no un producto con un único valor arbitrario de flujo.

Proposición 19.9 y definición 19.5 dan, para una superficie absorbente en el campo atractivo, $\sigma_{\text{cap}} = \pi R^2(1 + 2\ell/R)$. El área excede πR^2 por enfoque. Para repulsión es $\pi\,\text{máx}(R^2 - 2\ell R, 0)$. Estas secciones pertenecen al canal de alcanzar la superficie, no al de salida elástica desde ella.

Principio metodológico 19.6. Define el resultado contado y la distribución de preparación. Convierte áreas en probabilidades sólo después de normalizar el haz pertinente.

Ejercicios. Ejercicio 19.11. Un haz uniforme de área $100\,\text{mm}^2$ cubre una región de impactos seleccionados de sección $5\,\text{mm}^2$. Calcula la fracción de eventos. ¿Qué cambia si esa región queda parcialmente fuera del haz?

Solución. Bajo inclusión completa, la fracción es $5/100 = 0,05$, un $5\,\%$. Si parte de la región queda fuera, el numerador es su área de intersección con el haz y la fracción disminuye. La sección propia de la interacción sigue siendo $5\,\text{mm}^2$; cambió la preparación experimental que la ilumina.

Ejercicio 19.12. En un modelo de blanco aislado, $j = 10^4\,\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ y la sección del resultado es $2 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$. Calcula la tasa y el número esperado durante $100\,\text{s}$.

Solución. La tasa es $j\sigma = 0,02\,\text{s}^{-1}$. Durante el intervalo, el número esperado es 2. Es una media del modelo de preparación, no la afirmación de que cada repetición del experimento arroje exactamente dos eventos.

7. La distribución angular y sus ramas

Para calcular cuántas partículas salen por un ángulo dado, transformamos el área de impactos en un área de direcciones. El ángulo sólido mide esa segunda área en la esfera unitaria.

Definición 19.6 — Ángulo sólido y sección diferencial. En coordenadas de dirección χ, φ,

$$d\Omega = \sin\chi\, d\chi\, d\varphi.$$

La sección diferencial $d\sigma/d\Omega$ se define de modo que $d\sigma = (d\sigma/d\Omega)\, d\Omega$. Usamos esta normalización estándar, sin un factor adicional 4π. Su unidad es área por estereorradián.

La fórmula del ángulo sólido procede de una franja sobre la esfera unitaria: el arco meridiano tiene longitud $d\chi$ y el arco paralelo $\sin\chi\, d\varphi$. La simetría central hace uniforme el azimut de salida para un haz sin preferencia azimutal.

Proposición 19.11 — Una rama angular regular. Si $b \mapsto \chi(b)$ es invertible y diferenciable en una rama con $0 < \chi < \pi$ y derivada no nula,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|.$$

Demostración. El anillo de impactos aporta $2\pi b\,|db|$. Las direcciones de salida en la franja aportan $2\pi\sin\chi\,|d\chi|$. Dividir y usar el cambio de variable da la expresión. El valor absoluto conserva el área cuando el ángulo decrece al aumentar el impacto. □

Proposición 19.12 — Suma de ramas. Si un mismo ángulo regular recibe contribuciones de varias ramas disjuntas de impacto, entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_j \frac{b_j(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{db_j}{d\chi}\right|.$$

Demostración. Cada rama representa una región distinta de preparación y aporta el área de la proposición 19.11. Las áreas de regiones disjuntas se suman, aunque sus direcciones de salida coincidan. □

En los ejes $\chi = 0, \pi$, o en puntos donde la derivada angular se anula, la fórmula requiere límites o una integración por intervalos. También puede existir una contribución concentrada exactamente en la dirección de entrada, como ocurre con impactos libres fuera de una interacción de alcance finito. Esa contribución no se representa mediante una densidad ordinaria finita.

Principio metodológico 19.7. Mantén valores absolutos, suma ramas y calcula intervalos finitos cerca de singularidades. Una densidad angular no reemplaza una medida concentrada en una dirección.

Ejercicios. Ejercicio 19.13. Una rama tiene $b(\chi) = \ell\cot(\chi/2)$. Calcula $db/d\chi$ y explica por qué no puede usarse su signo directamente como sección.

Solución. La derivada es $-(\ell/2)\csc^2(\chi/2)$, negativa. Un ángulo mayor corresponde a un impacto menor. El elemento de área debe ser no negativo; proposición 19.11 usa el valor absoluto. Sin él se obtendría una sección diferencial negativa, que no puede contar una región de preparación.

Ejercicio 19.14. En una franja angular interior, dos ramas disjuntas tienen $b_1 = a\chi$ y $b_2 = c + a\chi$, con $a, c > 0$. Calcula la sección diferencial de esa franja. La relación es un ejemplo local de cambio de variables, sin atribuirle una ley de fuerza específica.

Solución. Ambas derivadas tienen magnitud a. Proposición 19.12 da $d\sigma/d\Omega = [a(a\chi) + a(c + a\chi)]/\sin\chi = (ac + 2a^2\chi)/\sin\chi$. Las dos áreas suman, no se cancelan. Que las ramas sean disjuntas significa que los intervalos de impacto seleccionados no se superponen en el dominio local considerado.

8. Sección inversa del radio y resolución angular

La ley exacta de §4 permite calcular una distribución angular completa. El resultado muestra cómo un alcance largo afecta a los eventos de desviación pequeña.

Proposición 19.13 — Sección diferencial inversa del radio. Para $U = \pm\kappa/r$ sin canal absorbente y $0 < \chi < \pi$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\ell^2}{4\sin^4(\chi/2)} = \Big(\frac{\kappa}{4E}\Big)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)}.$$

Demostración. proposición 19.6 da $b = \ell\cot(\chi/2)$ y ejercicio 19.13 su derivada. Sustituir en la proposición 19.11 y usar $\sin\chi = 2\sin(\chi/2)\cos(\chi/2)$ cancela el coseno y deja $\ell^2/[4\sin^4(\chi/2)]$. Definición 19.4 da la segunda expresión. El posible caso puntual $b = 0$ no cambia una sección como área. □

En el modelo electrostático repulsivo, esta forma es la ley de Rutherford con el coeficiente de interacción pertinente. Aquí se ha derivado como una ley clásica de un potencial, con energía relativa y masa reducida explícitas. No se presupone que un blanco móvil pueda tratarse siempre como inmóvil.[2]

Proposición 19.14 — Sección por encima de un umbral angular. Para $0 < \chi_0 < \pi$,

$$\sigma(\chi \geq \chi_0) = \pi\ell^2\cot^2(\chi_0/2).$$

Tiende a infinito cuando $\chi_0 \to 0^+$.

Demostración. La ley de la proposición 19.6 es decreciente: la condición angular equivale al disco de impactos $b \leq \ell\cot(\chi_0/2)$. Su área da la expresión. Como $\cot(\chi_0/2) \sim 2/\chi_0$, el área crece como $4\pi\ell^2/\chi_0^2$. □

La divergencia significa que el modelo de alcance infinito desvía, aunque muy poco, preparaciones a impactos arbitrariamente grandes. Un detector con umbral positivo mide una sección finita. Una interacción apantallada o un haz finito exige otra selección de eventos y puede modificar el comportamiento frontal.

Principio metodológico 19.8. Declara la resolución angular y el canal antes de integrar una sección. Una divergencia frontal del modelo no implica un número infinito de eventos en un haz finito.

Ejercicios. Ejercicio 19.15. Encuentra la sección de eventos con $\chi \geq \pi/2$ en el potencial inverso del radio y compara con $\chi \geq \pi/3$.

Solución. Para el primer umbral, $\cot(\pi/4) = 1$ y la sección es $\pi\ell^2$. Para el segundo, $\cot(\pi/6) = \sqrt{3}$ y la sección es $3\pi\ell^2$. Bajar el umbral incluye más impactos lejanos.

Ejercicio 19.16. Mantén κ y el ángulo de observación, pero duplica la energía relativa E. Compara las secciones diferenciales.

Solución. proposición 19.13 es proporcional a E^{-2}, por lo que la nueva sección es la cuarta parte. Esta proporcionalidad es exacta en el modelo inverso del radio a ángulo fijo. No equivale a afirmar que el ángulo a impacto fijo dependa linealmente de la energía.

9. Una esfera que devuelve la partícula

Hasta ahora el acercamiento terminaba en un punto de retorno suave o en una superficie absorbente. Una superficie rígida plantea otra regla. Consideremos el movimiento relativo alrededor de una esfera impenetrable de radio a. Fuera de ella no hay fuerza; en el contacto la velocidad se

[2]MIT OpenCourseWare, *Experimental Physics I & II*, guía experimental de dispersión de Rutherford, https://ocw.mit.edu/courses/8-13-14-experimental-physics-i-ii-junior-lab-fall-2016-spring-2017/f83bb6ada6c56da065d372126fff731c_MIT8_13-14F16-S17exp15.pdf . Las demostraciones y ejercicios presentes son desarrollos propios; la referencia proporciona contexto experimental para distinguir ley angular, aceptación y cuenta.

refleja de manera especular. Este modelo describe una esfera fija o una interacción relativa elástica entre dos cuerpos cuyo radio de contacto es a.

Definición 19.7 — Reflexión especular. Si $\mathbf{n}$ es la normal exterior unitaria en el contacto, la regla es

$$\mathbf{w}_+ = \mathbf{w}_- - 2(\mathbf{w}_- \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Conserva la componente tangencial, invierte la normal y conserva la rapidez. La superficie suministra un impulso; la ecuación diferencial libre solo describe los tramos anterior y posterior.

Proposición 19.15 — Ley angular de la esfera rígida. Para $0 \le b \le a$, el ángulo de dispersión satisface

$$\chi = \pi - 2\arcsin(b/a), \qquad b = a\cos(\chi/2).$$

Demostración. Tomemos $\mathbf{w}_- = v_\infty \mathbf{e}_x$ y la recta incidente $y = b$. El contacto ocurre en $(-\sqrt{a^2-b^2}, b)$, de modo que $\mathbf{n} = (-\sqrt{1-b^2/a^2}, b/a)$. La regla de reflexión da $\mathbf{w}_- \cdot \mathbf{w}_+ / v_\infty^2 = 2b^2/a^2 - 1$. En el intervalo $0 \le b/a \le 1$, esta cantidad es $\cos(\pi - 2\arcsin(b/a))$. La definición del ángulo principal prueba ambas expresiones. El contacto rasante puede entenderse como límite; su conjunto tiene área nula. □

Proposición 19.16 — Sección diferencial constante. Para $0 < \chi < \pi$, la esfera rígida tiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}, \qquad \sigma_{\text{contacto}} = \pi a^2.$$

Demostración. Derivar $b = a\cos(\chi/2)$ da $|db/d\chi| = (a/2)\sin(\chi/2)$. Proposición 19.11 y la identidad del seno doble dan $a^2/4$. Su integral sobre la esfera de direcciones es $(a^2/4)4\pi = \pi a^2$, igual al área del disco de impactos que toca la superficie. □

Una densidad constante por unidad de ángulo sólido produce más eventos por unidad de χ cerca del ecuador angular, porque allí $2\pi \sin\chi$ es mayor. La palabra «uniforme» requiere especificar la medida. Para $b > a$ la dirección no cambia. Si un haz finito incluye esos impactos, el canal transmitido contiene una contribución concentrada en la dirección frontal. Esa contribución no se obtiene prolongando la densidad constante hasta describir todo el haz.

Principio metodológico 19.9. Una condición de contacto pertenece al modelo. Escríbela antes de calcular la trayectoria o la sección del canal que produce.

Ejercicios. Ejercicio 19.17. Calcula la fracción de contactos con $\chi \ge \pi/2$ para un haz uniforme.

Solución. La condición equivale a $b \le a/\sqrt{2}$. Su área es $\pi a^2/2$, y dividir por πa^2 da $1/2$. También se obtiene integrando la densidad constante sobre un hemisferio de direcciones, de área angular 2π.

Ejercicio 19.18. Un haz uniforme ocupa un disco de radio $B > a$. Describe la probabilidad de transmisión sin cambio de dirección y la densidad angular de los eventos reflejados.

Solución. El anillo $a < b \le B$ tiene probabilidad $1 - a^2/B^2$ y se concentra en la dirección incidente. Los contactos tienen probabilidad a^2/B^2. Su densidad de probabilidad por unidad de ángulo sólido es $a^2/(4\pi B^2)$; al integrarla se recupera a^2/B^2. Condicionada a que haya contacto, la densidad es $1/(4\pi)$. Las tres cantidades tienen normalizaciones distintas y responden a preguntas distintas.

10. Varias preparaciones, una dirección

La ley inversa del radio es monótona. Una interacción con zonas atractivas y repulsivas puede producir una función angular que primero crezca y después decrezca. Entonces una dirección recibe eventos procedentes de impactos distintos. Proposición 19.12 permite sumarlos cuando las ramas son regulares. Falta examinar el punto donde dejan de serlo.

Definición 19.8 — Punto crítico angular simple. Sea $\chi(b)$ una función de clase C^3 cerca de $b_c > 0$, con $0 < \chi_c = \chi(b_c) < \pi$. Llamaremos crítico simple al caso $\chi'(b_c) = 0$ y $\chi''(b_c) = c \neq 0$.

Proposición 19.17 — Concentración integrable cerca de un extremo angular. En el lado angular donde existen las dos ramas próximas a b_c, su contribución conjunta satisface

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{\sqrt{2}\, b_c}{\sin\chi_c \sqrt{|c|}} \frac{1}{\sqrt{|\chi - \chi_c|}}.$$

La sección de un intervalo angular finito alrededor de ese extremo es finita.

Demostración. Taylor da $\chi - \chi_c = (c/2)(b - b_c)^2 + O((b - b_c)^3)$. En el lado con $c(\chi - \chi_c) > 0$ hay dos soluciones locales, con $b - b_c \sim \pm\sqrt{2|\chi - \chi_c|/|c|}$. Además $\chi'(b) = c(b - b_c) + O((b - b_c)^2)$, de donde cada $|db/d\chi| \sim [2|c||\chi - \chi_c|]^{-1/2}$. Cada rama aporta $b_c/\sin\chi_c$ por ese factor; sumar las dos prueba el coeficiente. Para integrar en dirección se multiplica por $2\pi \sin\chi\, d\chi$. El seno permanece acotado y separado de cero localmente, y $\int_0^{\varepsilon} x^{-1/2} dx = 2\sqrt{\varepsilon}$. □

Esta concentración recibe habitualmente el nombre de arcoíris clásico. El término describe una acumulación de preparaciones en direcciones vecinas. La densidad ideal puede divergir mientras cada detector de apertura finita registra una cantidad finita. La proposición es local: otras ramas, si las hay, deben añadirse.

Hay otra singularidad distinta. Si la raíz radial accesible se vuelve doble, la integral de Φ puede crecer sin límite. Cerca de la raíz, un factor $Q(r) \sim C(r - r_c)^2$, con $C > 0$, produce una integral proporcional a $\int dr/|r - r_c|$. La trayectoria se demora cerca de una órbita circular inestable y puede dar muchas vueltas. El ángulo principal sigue perteneciendo a $[0, \pi]$, aunque $\pi - 2\Phi$ ya no esté entre $-\pi$ y π. La demora y las vueltas no establecen por sí solas captura; hay que examinar el canal y la continuación del movimiento.

Principio metodológico 19.10. Ante una densidad singular, vuelve al área de preparaciones y calcula un intervalo observable. Distingue un extremo de la función angular de una raíz múltiple en la dinámica radial.

Ejercicios. Ejercicio 19.19. Supón localmente $\chi = \chi_c + A(b - b_c)^2$, con $A > 0$. Calcula la sección del intervalo $\chi_c \le \chi \le \chi_c + \varepsilon$, contando ambas ramas y suponiendo $\sqrt{\varepsilon/A} < b_c$.

Solución. El conjunto de impactos es $b_c - d \le b \le b_c + d$, donde $d = \sqrt{\varepsilon/A}$. Su área es $\pi[(b_c + d)^2 - (b_c - d)^2] = 4\pi b_c \sqrt{\varepsilon/A}$. El crecimiento es proporcional a $\sqrt{\varepsilon}$. Derivar esta sección respecto del límite superior produce una densidad angular integrada en azimut proporcional a $\varepsilon^{-1/2}$, coherente con la proposición 19.17 porque $c = 2A$.

Ejercicio 19.20. Una trayectoria tiene $\Phi = 5\pi/3$. Calcula el ángulo observado y decide si puede usarse $\chi = |\pi - 2\Phi|$.

Solución. El giro firmado definido en §2 es $\delta = -7\pi/3$. Por tanto $\cos\delta = 1/2$ y $\chi = \arccos(1/2) = \pi/3$. El valor absoluto sería $7\pi/3$, fuera del intervalo de los ángulos principales. Para recuperar una dirección hay que conservar la periodicidad, además de la información dinámica sobre las vueltas.

11. Cuánto basta con integrar sobre una recta

Para impactos grandes, la interacción puede cambiar poco la velocidad. En ese régimen se intenta calcular el impulso sobre la trayectoria libre. La propuesta necesita una comprobación posterior: si la corrección resulta grande, la trayectoria usada para calcularla deja de ser una referencia adecuada.

Proposición 19.18 — Impulso transversal en la aproximación rectilínea. Sea una fuerza relativa central $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{q}/r$, donde $f > 0$ significa repulsión. Al sustituir $\mathbf{q}_0(t) = (v_\infty t, b, 0)$, con $b > 0$, el impulso transversal por unidad de masa reducida es

$$\Delta w_y^{(0)} = \frac{b}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sqrt{v_\infty^2 t^2 + b^2})}{\sqrt{v_\infty^2 t^2 + b^2}}\, dt,$$

si la integral converge. Para $f(r) = \pm\kappa/r^2$ vale $\Delta w_y^{(0)}/v_\infty = \pm 2\ell/b$.

Demostración. La componente transversal de $\mu\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}$ evaluada sobre $\mathbf{q}_0$ es $bf(r)/(\mu r)$. Integrar da la primera fórmula. Para la fuerza inversa del cuadrado, sustituir $u = v_\infty t/b$ deja $\pm\kappa/(\mu b v_\infty)\int_{-\infty}^{\infty}(1+u^2)^{-3/2}du$. Una primitiva es $u/\sqrt{1+u^2}$, cuyos límites difieren en dos. Dividir por v_∞ y usar la definición de ℓ prueba el resultado. □

Esta proposición calcula exactamente una integral sobre una recta elegida. La identificación de su resultado con la desviación real es una aproximación adicional. Para desviaciones pequeñas, el cambio transversal dividido por la rapidez coincide con el ángulo firmado al primer orden. En el ejemplo inverso del radio podemos contrastarlo con la respuesta exacta.

Proposición 19.19 — Error angular del primer término. Para $x = \ell/b \geq 0$, el ángulo exacto $\chi = 2\arctan x$ cumple

$$0 \leq 2x - \chi \leq \frac{2}{3}x^3.$$

Demostración. La diferencia es $2\int_0^x [1-(1+u^2)^{-1}]du = 2\int_0^x u^2/(1+u^2)du$. El integrando está entre cero y u^2. Integrar esas cotas prueba el enunciado. □

En particular, cuando x es pequeño, el error relativo respecto de la predicción $2x$ es a lo sumo $x^2/3$. Esa cota corresponde a este potencial y a esta fórmula angular; no proporciona automáticamente una cota de error para cualquier fuerza o para toda la trayectoria.

Principio metodológico 19.11. Expresa el parámetro pequeño como una razón adimensional y contrasta la aproximación con una cantidad observable. Indica qué error se ha acotado.

Ejercicios. Ejercicio 19.21. Si $b = 10\ell$, acota el error de la aproximación $\chi \approx 2\ell/b$.

Solución. Aquí $x = 0.1$. La predicción es 0.2 radianes y su exceso sobre el valor exacto está entre cero y $2(0.1)^3/3 = 1/1500$ radianes. Respecto de 0.2, el error es como máximo $1/300$, aproximadamente $0.33\,\%$.

Ejercicio 19.22. Evalúa el impulso rectilíneo para $f(r) = C/r^3$ y formula una condición de pequeña desviación.

Solución. proposición 19.18 da $\Delta w_y^{(0)} = Cb\mu^{-1}\int dt/(v_\infty^2 t^2 + b^2)^2$. Con $u = v_\infty t/b$, resulta $C/(\mu v_\infty b^2)\int du/(1+u^2)^2$. La sustitución $u = \tan s$ transforma la integral en $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 s\, ds = \pi/2$. Por tanto $\Delta w_y^{(0)}/v_\infty = \pi C/(2\mu v_\infty^2 b^2)$. Su magnitud debe ser mucho menor que uno. Es una comprobación necesaria para la aproximación propuesta; por sí sola no demuestra una estimación uniforme del error de trayectoria.

12. El detector vive en el laboratorio

La reducción radial usa la velocidad relativa. Un detector puede medir la velocidad de un solo cuerpo en un marco donde el otro estaba inicialmente en reposo. Traducir ambas descripciones es parte del problema físico.

Tomemos masas $m_1, m_2 > 0$, $M = m_1 + m_2$, proyectil incidente con velocidad $v\mathbf{e}_x$ y blanco inicialmente quieto. Supondremos un encuentro elástico, con energía potencial tendiendo al mismo valor cero antes y después. Entonces $\mathbf{V} = (m_1/M)v\mathbf{e}_x$, $\mathbf{w}_- = v\mathbf{e}_x$ y, eligiendo el lado positivo del plano de dispersión, $\mathbf{w}_+ = v(\cos\chi\mathbf{e}_x + \sin\chi\mathbf{e}_y)$.

Proposición 19.20 — Transformación cinemática al laboratorio. Las velocidades finales son

$$\mathbf{v}_{1+} = \frac{v}{M}[(m_1 + m_2\cos\chi)\mathbf{e}_x + m_2\sin\chi\mathbf{e}_y],$$

$$\mathbf{v}_{2+} = \frac{m_1 v}{M}[(1-\cos\chi)\mathbf{e}_x - \sin\chi\mathbf{e}_y].$$

Si la velocidad del proyectil no se anula, su ángulo de laboratorio es $\theta = \operatorname{atan2}(m_2\sin\chi, m_1 + m_2\cos\chi) \in [0,\pi]$.

Demostración. La descomposición de dos cuerpos es $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + (m_2/M)\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - (m_1/M)\mathbf{w}$. Sustituir $\mathbf{w}_+$ da las fórmulas. El ángulo se determina por ambas componentes, que es precisamente la información preservada por atan2. □

Proposición 19.21 — Reparto de energía y masas iguales. Respecto de la energía incidente $K_{\mathrm{in}} = m_1 v^2/2$, la energía final del blanco satisface

$$\frac{K_{2+}}{K_{\mathrm{in}}} = \frac{4m_1 m_2}{M^2}\sin^2(\chi/2).$$

Para $m_1 = m_2$ y $0 \le \chi < \pi$, se cumple $\theta = \chi/2$ y $|\mathbf{v}_{1+}| = v\cos(\chi/2)$. Si $\chi = \pi$, el proyectil queda quieto y su dirección final no está definida.

Demostración. La norma al cuadrado de la velocidad del blanco en la proposición 19.20 es $(m_1 v/M)^2[(1-\cos\chi)^2 + \sin^2\chi] = 4(m_1 v/M)^2\sin^2(\chi/2)$. Multiplicar por $m_2/2$ y dividir por K_{in} prueba la fracción. Para masas iguales, la velocidad del proyectil es $v\cos(\chi/2)[\cos(\chi/2)\mathbf{e}_x + \sin(\chi/2)\mathbf{e}_y]$. Sus consecuencias incluyen la excepción en $\chi = \pi$. □

Proposición 19.22 — Límite angular para un proyectil más pesado. Si $m_1 > m_2$, el ángulo de laboratorio alcanza un máximo

$$\theta_{\mathrm{máx}} = \arcsin(m_2/m_1).$$

Cada ángulo estrictamente entre cero y ese máximo proviene de dos ángulos relativos distintos.

Demostración. La componente longitudinal es siempre positiva. Derivar el ángulo de la proposición 19.20 da

$$\frac{d\theta}{d\chi} = \frac{m_2(m_1\cos\chi + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\cos\chi}.$$

El denominador es positivo y el numerador se anula una sola vez, en $\cos\chi = -m_2/m_1$. Antes es positivo y después negativo. La función comienza y termina en cero, así que cada valor interior tiene una preimagen en cada tramo monótono. Sustituir el coseno crítico en las componentes de la proposición 19.20 da $\sin\theta_{\mathrm{máx}} = m_2/m_1$. □

Si $m_1 < m_2$, el proyectil puede salir hacia atrás: en $\chi = \pi$ su componente longitudinal es negativa. Escribir solamente una tangente borraría esa información. También hay que transformar la medida angular cuando se transforma una sección. En una rama regular axial, $\sin\chi\, d\chi\, d\varphi$ pasa a $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$; las distintas preimágenes deben sumarse. La conservación de energía relativa no hace coincidir los ángulos de ambos marcos.

Principio metodológico 19.12. Identifica el cuerpo observado y el marco del detector. Transforma primero velocidades; después transforma ángulos y medidas, manteniendo las ramas.

Ejercicios. Ejercicio 19.23. Para masas iguales, expresa la sección diferencial de la esfera rígida en el laboratorio para el proyectil.

Solución. proposición 19.21 da $\chi = 2\theta$, con $0 < \theta < \pi/2$. El azimut se conserva y el cociente angular es $\sin(2\theta)2/\sin\theta = 4\cos\theta$. Multiplicar la densidad relativa $a^2/4$ da $d\sigma/d\Omega_{\mathrm{lab}} = a^2\cos\theta$. Su integral es $2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \pi a^2$. El evento extremo de proyectil quieto tiene área nula y no recibe una dirección artificial.

Ejercicio 19.24. Sea $m_1 = 3m_2$. Calcula el máximo ángulo del proyectil y la mayor fracción de energía transferible al blanco.

Solución. proposición 19.22 da $\theta_{\mathrm{máx}} = \arcsin(1/3)$, aproximadamente 19.47°. Proposición 19.21 da un coeficiente máximo $4(3)/(4^2) = 3/4$, alcanzado en $\chi = \pi$. En ese encuentro frontal el proyectil sigue hacia delante y el blanco recibe el 75 % de la energía incidente. El máximo de transferencia y el máximo angular corresponden a preparaciones diferentes.

13. De un área a una cuenta de eventos

Una sección es una propiedad del encuentro y del evento seleccionado. Una cuenta experimental combina esa sección con un flujo, una cantidad de centros y una respuesta instrumental. Mezclar esas cantidades dificulta comparar experimentos.

Proposición 19.23 — Cuenta con aceptación angular. Sean N centros independientes expuestos al mismo flujo uniforme j, sin atenuación ni encuentros múltiples relevantes. Sea $0 \le \eta(\Omega) \le 1$ la probabilidad de registrar un evento en la dirección Ω, y sea D la región angular aceptada. Si el canal tiene densidad angular, la tasa media registrada es

$$\dot N_{\mathrm{reg}} = jN \int_D \eta(\Omega) \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega.$$

Demostración. Para un centro, el área de preparaciones que llega a un elemento angular tiene medida $d\sigma$. El flujo produce tasa $j\, d\sigma$. Registrar cada evento con probabilidad η multiplica su tasa media por ese factor. Integrar sobre D y sumar las N contribuciones independientes da la expresión. Si existe una contribución concentrada, se integra respecto de la medida $d\sigma$ completa en lugar de usar solo su densidad. □

Un blanco de densidad superficial n_s se aproxima a ese régimen cuando la probabilidad de interacción pertinente es pequeña. La combinación $n_s\sigma$ es adimensional; exigir $n_s\sigma \ll 1$ sirve como criterio de dilución para un canal de sección finita. Con fuerzas de largo alcance hace falta especificar qué interacción cuenta y cómo se controla la acumulación de desviaciones pequeñas. Un umbral de detección no elimina automáticamente las otras interacciones del movimiento real.

La física cuántica retomará estas preguntas con otra descripción del estado incidente y de la amplitud de salida. La escala $\hbar/(\mu v_\infty)$ tiene dimensiones de longitud; compararla con las escalas espaciales de la interacción ayuda a plantear cuándo cabe esperar una descripción clásica. Esa comparación es orientativa y no constituye una garantía universal: la coherencia, las condiciones de

preparación y la resolución también importan. En el modelo clásico sumamos áreas de preparaciones disjuntas. Más adelante habrá que examinar cuándo las alternativas cuánticas exigen sumar amplitudes antes de obtener probabilidades. El presente capítulo proporciona las magnitudes geométricas con las que se hará esa comparación.

Principio metodológico 19.13. Separa sección, flujo y eficiencia. Expresa el dominio angular aceptado y las hipótesis de encuentro único antes de convertir una ley de dispersión en una cuenta.

Ejercicios. Ejercicio 19.25. Para una esfera rígida, un detector cubre $\chi_1 \le \chi \le \chi_2$, todo el azimut, y tiene eficiencia constante η_0. Calcula su tasa para N centros.

Solución. La integral angular es $(a^2/4)2\pi \int_{\chi_1}^{\chi_2} \sin\chi\, d\chi = (\pi a^2/2)(\cos\chi_1 - \cos\chi_2)$. Por tanto la tasa es $jN\eta_0(\pi a^2/2)(\cos\chi_1 - \cos\chi_2)$. Para el intervalo completo y eficiencia uno se recupera $jN\pi a^2$. La fórmula supone el marco relativo o un blanco fijo; para un detector de laboratorio con blanco móvil se requiere §12.

Ejercicio 19.26. Comprueba las dimensiones de la proposición 19.23 y determina qué producto puede medirse si solo se conoce la cuenta y la apertura, pero se desconocen j y N.

Solución. $d\Omega$ es adimensional, $d\sigma/d\Omega$ tiene dimensión de área, j de inversa de área y tiempo, y N, η son adimensionales. La tasa tiene dimensión T^{-1}. Si la forma angular de la sección es conocida salvo un coeficiente C, la cuenta determina jNC multiplicado por la aceptación y eficiencia conocidas. No determina separadamente C, j y N. Hace falta una calibración independiente para inferir una sección absoluta.

14. Qué puede recuperarse de la dispersión

Empezamos preparando una distancia transversal y terminamos midiendo una dirección. Entre ambas hay una dinámica radial, un cambio de variables y una selección instrumental. Se puede recorrer parte de ese camino en sentido inverso, siempre que la estructura de las ramas sea conocida.

Proposición 19.24 — Recuperación de una ley monótona desde su sección. Supongamos que $\chi(b)$ es estrictamente decreciente, que su imagen es $(0,\pi)$, que $b(\chi) \to 0$ cuando $\chi \to \pi$, y que hay una sola rama regular. Entonces

$$b(\chi)^2 = 2\int_{\chi}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(u)\sin u\, du.$$

Demostración. proposición 19.11 y $b' < 0$ dan $d\sigma/d\Omega = -bb'/\sin\chi$. Así $(b^2)' = -2(d\sigma/d\Omega)\sin\chi$. Integrar de χ a π y usar el límite nulo prueba la fórmula, también como integral impropia cuando sea necesario. □

Recuperar $b(\chi)$ no equivale todavía a recuperar un potencial único. Esa segunda pregunta requiere hipótesis sobre la interacción, datos de energía y un análisis inverso adicional. Si se suman varias ramas, la sección sola tampoco indica cuál contribución pertenece a cada una.

Proposición 19.25 — Intercambio de energía en un marco inercial general. En un encuentro elástico de dos cuerpos, sea $\Delta\mathbf{w} = \mathbf{w}_+ - \mathbf{w}_-$ y sea $\mathbf{V}$ la velocidad constante del centro de masas en el marco elegido. Entonces

$$\Delta K_1 = \mu\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{w}, \qquad \Delta K_2 = -\mu\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{w}.$$

Demostración. Escribamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + (m_2/M)\mathbf{w}$. Al restar las normas al cuadrado antes y después, el término $|\mathbf{V}|^2$ se cancela y el término proporcional a $|\mathbf{w}|^2$ también, porque el encuentro

es elástico. Queda $\Delta K_1 = m_1(m_2/M)\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{w} = \mu\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{w}$. La descomposición del segundo cuerpo cambia el signo del término cruzado y da la segunda igualdad. □

En el marco del centro de masas, $\mathbf{V} = 0$ y cada rapidez asintótica permanece igual. En otros marcos puede haber transferencia entre las energías cinéticas individuales. La suma se conserva en todos ellos. El mismo encuentro ofrece así un ángulo relativo útil para reducir la dinámica y unas energías de laboratorio útiles para describir lo que recibe cada cuerpo.

Principio metodológico 19.14. Al interpretar datos, explicita qué información se pierde en cada paso: orientación, número de vueltas, identidad de rama, eficiencia o marco. Una inversión solo puede recuperar lo que sus hipótesis vuelven identificable.

Problemas de integración. Ejercicio 19.27. Aplica proposición 19.24 a una sección constante $C > 0$ y determina la ley angular y el radio de contacto equivalente.

Solución. La integral da $b^2 = 2C(1+\cos\chi) = 4C\cos^2(\chi/2)$. Como $b \geq 0$, $b = 2\sqrt{C}\cos(\chi/2)$. Coincide con la esfera rígida de radio $a = 2\sqrt{C}$. La sección total es $4\pi C = \pi a^2$. Esto recupera una ley de preparación y salida dentro de las hipótesis de la proposición 19.24; no prueba que cualquier sistema con esa sección deba tener una superficie material rígida.

Ejercicio 19.28. Para atracción $U = -\kappa/r$ y superficie absorbente de radio R, calcula la sección de trayectorias que regresan al infinito con $\chi \geq \chi_0$, donde $0 < \chi_0 < \pi$. Define $B = \ell\cot(\chi_0/2)$ y $b_c = \sqrt{R^2 + 2\ell R}$.

Solución. La condición angular de las trayectorias conservativas es $b \leq B$. La superficie absorbe los impactos $b \leq b_c$, con la convención de incluir el contacto. Las trayectorias de regreso aceptadas forman $b_c < b \leq B$ si $B > b_c$. Por tanto $\sigma_{\text{regreso}} = \pi\,\mathrm{máx}(B^2 - b_c^2, 0)$. No se puede asignar la ley de salida de la hipérbola a una trayectoria truncada por absorción. Los extremos puntuales no alteran el área.

Ejercicio 19.29. Un blanco inicialmente quieto tiene masa $m_2 = 2m_1$. En un encuentro de ángulo relativo $\chi = 2\pi/3$, calcula ambas velocidades finales, el ángulo del proyectil y las fracciones de energía.

Solución. proposición 19.20 da $\mathbf{v}_{1+} = (v/\sqrt{3})\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{v}_{2+} = (v/2)\mathbf{e}_x - (v\sqrt{3}/6)\mathbf{e}_y$. El proyectil sale a $\theta = \pi/2$ y conserva la fracción $1/3$ de su energía inicial. La norma al cuadrado de la velocidad del blanco es $v^2/3$, pero su masa es doble; recibe la fracción $2/3$. El momento final es $m_1\mathbf{v}_{1+} + 2m_1\mathbf{v}_{2+} = m_1 v\mathbf{e}_x$, y ambas energías suman la incidente. Usar la energía relativa como si fuera toda la energía del laboratorio habría omitido el movimiento del centro de masas.

Ejercicio 19.30. Considera dos encuentros elásticos con el mismo $\Delta\mathbf{w}$ en marcos relacionados por una velocidad constante $\mathbf{u}$, de modo que $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{u}$. Determina el cambio de la transferencia cinética del primer cuerpo y relaciónalo con su cambio de momento.

Solución. proposición 19.25 da $\Delta K_1' = \Delta K_1 - \mu\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{w}$. La descomposición de velocidades implica $\Delta\mathbf{p}_1 = m_1(m_2/M)\Delta\mathbf{w} = \mu\Delta\mathbf{w}$. Por tanto $\Delta K_1' = \Delta K_1 - \mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{p}_1$. Para el segundo cuerpo el cambio es opuesto, porque $\Delta\mathbf{p}_2 = -\Delta\mathbf{p}_1$. La transferencia individual depende del marco; la conservación de la suma es consistente con esa transformación.

La preparación de un encuentro ha permitido enlazar conservación, reducción radial y geometría de medidas. Para pasar al siguiente capítulo cambiaremos una hipótesis que aquí sostuvo toda la descripción: el marco desde el que escribimos las ecuaciones. Un observador acelerado o en rotación introduce términos que deben derivarse de la transformación cinemática antes de interpretarse como fuerzas.

Capítulo 20

Movimiento en marcos no inerciales

Una pelota que rueda por el suelo de un tren parece cambiar de movimiento cuando el tren frena. Una persona sobre una plataforma giratoria ve curvarse una trayectoria que otro observador describe como recta. En ambos casos podemos registrar las posiciones con precisión, pero la segunda ley de Newton exige saber desde qué marco se han tomado las derivadas.

El problema tiene una entrada concreta: conocemos la posición del origen móvil y la orientación de sus ejes, y queremos escribir la ecuación que seguirá un cuerpo en esas coordenadas. Si diferenciamos correctamente la transformación, los términos adicionales aparecen con sus signos y sus coeficientes. Esa derivación permitirá decidir qué efectos proceden de una interacción y cuáles proceden del movimiento del marco.

Usaremos el tiempo común de la mecánica newtoniana, masas constantes positivas y coordenadas cartesianas ortonormales. El movimiento del marco se considera conocido. Cuando una guía o un motor sostengan ese movimiento, sus fuerzas y su potencia deberán incluirse en el problema físico. La descripción de un cuerpo rígido completo se desarrollará en el capítulo siguiente; aquí basta con seguir un origen y una base.

1. Dos orígenes que se separan

Imaginemos dos cámaras cuyos ejes permanecen paralelos. La primera usa un origen fijo en un marco inercial; la segunda se desplaza con el tren. Si la posición de su origen es $\mathbf{X}(t)$, ambas asignan a una partícula posiciones relacionadas por $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{r}(t)$. La resta de posiciones funciona aunque el tren acelere. La diferencia aparece al derivar.

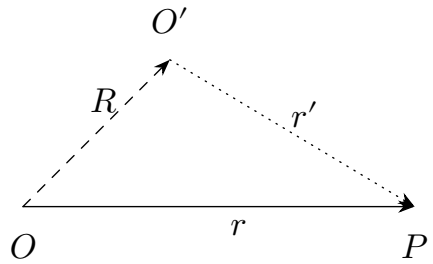


Figura 20.1. La identidad $r = R + r'$ separa la posición del origen móvil y la posición relativa. Con bases paralelas, dos derivadas dan $a = A + a'$. Véase §1.

Definición 20.1 — Marco de traslación. Un marco móvil sin rotación se especifica mediante un origen $\mathbf{X}(t)$ y unos ejes de orientación constante respecto del marco inercial. Su posición relativa es $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. En esta sección expresamos todos los vectores en la misma base fija.

Proposición 20.1 — Transformación de velocidad y aceleración por traslación. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{X}$ son de clase C^2, entonces

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{X}}, \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{X}}.$$

Demostración. Diferenciar $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ una vez da la primera igualdad y una segunda vez da la segunda. La orientación constante permite derivar componentes sin añadir derivadas de la base. □

Proposición 20.2 — Traslaciones que conservan la aceleración. En un intervalo conexo, las aceleraciones coinciden para toda trayectoria si y solo si $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_0 t$, con vectores constantes $\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0$.

Demostración. proposición 20.1 muestra que la coincidencia equivale a $\ddot{\mathbf{X}} = 0$. Integrar en el intervalo da una velocidad constante y después la expresión afín de $\mathbf{X}$. Recíprocamente, una expresión afín tiene segunda derivada nula. □

Así se recupera la familia de marcos inerciales ligados por traslaciones uniformes. La velocidad depende del marco incluso dentro de esa familia; la aceleración coincide. Si la fuerza se escribe originalmente como función de posición, velocidad y tiempo, hay que transformar también sus argumentos. Una resistencia debida al aire, por ejemplo, depende de la velocidad respecto del aire. Cambiar el origen no hace que el aire adopte automáticamente la velocidad del tren.

Principio metodológico 20.1. Escribe la transformación de posiciones y declara la base antes de derivar. La igualdad de aceleraciones requiere una hipótesis sobre el movimiento del marco.

Ejercicios. Ejercicio 20.1. Un tren tiene $X(t) = V_0 t + a t^2/2$ sobre un eje recto. Una partícula libre tiene $x(t) = x_0 + ut$. Encuentra su posición, velocidad y aceleración respecto del tren.

Solución. Restar las posiciones da $r = x_0 + (u - V_0)t - a t^2/2$. Por tanto $\dot r = u - V_0 - at$ y $\ddot r = -a$. La aceleración relativa se dirige contra la aceleración del tren. La fuerza física sobre la partícula sigue siendo cero en el modelo; la curvatura de $r(t)$ procede del origen elegido.

Ejercicio 20.2. Dos observadores en traslación uniforme comparan la distancia y la velocidad relativa de dos partículas. Determina qué cantidades coinciden.

Solución. Si $\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{X}$, entonces $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ y $\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2$. Coinciden el vector separación, su norma y la velocidad relativa. De hecho estas dos igualdades valen para cualquier traslación sin rotación, aunque las aceleraciones individuales cambien. El movimiento común del origen se cancela en las diferencias entre partículas.

2. Lo que mide una balanza acelerada

Una balanza mide la fuerza que sostiene a una persona. En un ascensor esa fuerza puede cambiar aunque la masa y el campo gravitatorio permanezcan prácticamente constantes. Para calcularla podemos trabajar en el edificio o en la cabina; ambas descripciones deben dar la misma lectura del instrumento.

Definición 20.2 — Término inercial de traslación. Para un origen de aceleración $\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{X}}$ y masa m, llamamos $\mathbf{F}_{\mathrm{tr}} = -m\mathbf{A}$ al término que acompaña a las fuerzas físicas cuando la segunda ley se escribe con la aceleración relativa.

Proposición 20.3 — Segunda ley en una cabina acelerada. Si en el marco inercial $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$, en el marco de la definición 20.1 se cumple

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\mathbf{A}.$$

Para una persona quieta respecto de una cabina vertical, con eje positivo hacia arriba y $\mathbf{A} = a\mathbf{e}_z$, la normal es $N = m(g + a)$ mientras el contacto pueda mantenerse.

Demostración. Sustituir proposición 20.1 en la segunda ley da la primera fórmula. En la cabina, la aceleración relativa vertical de la persona es cero. Las fuerzas físicas son $N\mathbf{e}_z - mg\mathbf{e}_z$, así que $0 = N - mg - ma$. Una superficie que solo empuja exige $N \geq 0$; si la expresión fuera negativa, la hipótesis de contacto quieto dejaría de ser válida. □

La normal puede ser mayor que mg al acelerar hacia arriba y menor al acelerar hacia abajo. Cuando $a = -g$, una cabina en caída libre no necesita ejercer normal para acompañar la caída de la persona. Este resultado se refiere al modelo de gravedad uniforme y a la fase en que no intervienen otras fuerzas.

Proposición 20.4 — Potencial de la traslación y su dependencia temporal. En ejes sin rotación, el término $-m\mathbf{A}(t)$ admite el potencial $U_{\mathrm{tr}}(\mathbf{r}, t) = m\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$. Si las fuerzas físicas derivan de un potencial relativo $U(\mathbf{r}, t)$, entonces

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + U + U_{\mathrm{tr}}\right] = \partial_t U + m\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}.$$

Demostración. El gradiente espacial de $m\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ es $m\mathbf{A}$. Multiplicar proposición 20.3 escalarmente por $\dot{\mathbf{r}}$ y usar $\mathbf{F} = -\nabla U$ da $\dot{K} = -\nabla U \cdot \dot{\mathbf{r}} - m\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}$. La regla de la cadena para ambos potenciales cancela esos términos y deja sus derivadas parciales temporales. □

La existencia de un potencial espacial no basta para conservar una energía: hace falta controlar su variación temporal. Además, un potencial estacionario del edificio puede volverse dependiente del tiempo al expresarse en coordenadas de la cabina. El potencial que aparece en la proposición 20.4 es el ya transformado.

Principio metodológico 20.2. Para un cuerpo apoyado, comprueba primero la condición de contacto. La lectura de una balanza es una fuerza de interacción, incluso cuando se calcula mediante una ecuación con términos inerciales.

Ejercicios. Ejercicio 20.3. Una cabina acelera hacia abajo con magnitud $g/4$. Calcula la lectura de la balanza para una masa m y decide qué sucede si la aceleración hacia abajo supera g.

Solución. Con el eje hacia arriba, $a = -g/4$, y proposición 20.3 da $N = 3mg/4$. Si $a < -g$, la fórmula de reposo relativo daría $N < 0$. El piso no puede tirar de la persona; sin una sujeción adicional, se pierde el contacto y debe resolverse el movimiento libre relativo en lugar de imponer $\ddot{r}_z = 0$.

Ejercicio 20.4. Un resorte horizontal de constante $k > 0$ está sujeto a una cabina que acelera con $A = a$ constante. Calcula la posición de equilibrio de una masa m y la energía relativa conservada.

Solución. Tomando $r = 0$ en la longitud natural, la ecuación es $m\ddot{r} = -kr - ma$. El equilibrio es $r_* = -ma/k$. El potencial efectivo $kr^2/2 + mar$ se escribe $k(r + ma/k)^2/2 - m^2a^2/(2k)$. Por proposición 20.4, $m\dot{r}^2/2 + kr^2/2 + mar$ es constante. La curvatura positiva muestra una fuerza restauradora alrededor de r_*; el desplazamiento opuesto a la aceleración tiene una interpretación directa en la cabina.

3. Acompañar la caída

Elegir un origen que caiga con un cuerpo elimina la aceleración común debida a un campo uniforme. Esa elección explica por qué objetos próximos pueden parecer flotar juntos. También permite precisar el límite del argumento: un campo que cambia con la posición produce diferencias de aceleración que ninguna traslación común elimina.

Proposición 20.5 — Campo relativo en un marco de caída libre. Si una partícula obedece $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ y un origen sin rotación obedece $\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t)$, entonces

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{X}+\mathbf{r},t) - \mathbf{g}(\mathbf{X},t).$$

Si el campo es espacialmente uniforme, la aceleración relativa es cero. Si es diferenciable espacialmente en $\mathbf{X}$, su término local principal es $D\mathbf{g}(\mathbf{X},t)\mathbf{r} + o(|\mathbf{r}|)$ a tiempo fijo.

Demostración. proposición 20.1 resta las aceleraciones de partícula y origen, lo que da la igualdad exacta. Un campo uniforme toma el mismo valor en ambas posiciones. En el caso diferenciable, la definición de derivada espacial da la expansión de la diferencia. □

Las diferencias descritas por el último término se llaman efectos de marea. El tensor derivada aparece aquí porque comparamos puntos próximos; no hace falta suponer que toda la región tenga un campo lineal. En un laboratorio pequeño y durante un intervalo adecuado, ignorar esas diferencias puede ser una aproximación útil. Extender esa aproximación a separaciones grandes exige otra justificación.

La ausencia de normal en caída libre tampoco significa que la fuerza gravitatoria haya desaparecido del marco inercial. Lo que se anula en el modelo uniforme es la aceleración de un objeto respecto de un origen que recibe la misma aceleración. Las condiciones de preparación siguen importando: dos objetos con velocidades relativas iniciales distintas no permanecerán uno junto al otro.

Principio metodológico 20.3. Al eliminar una aceleración común, conserva las diferencias espaciales del campo y las velocidades relativas iniciales. Una cancelación local no autoriza una equivalencia global de modelos.

Ejercicios. Ejercicio 20.5. Dos cuerpos caen en un campo uniforme. En un instante su separación es $\mathbf{r}_0$ y su velocidad relativa $\mathbf{u}_0$. Encuentra la separación posterior y la condición para que sea constante como vector.

Solución. proposición 20.5 da $\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Integrando con esos datos, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t$, si ese instante se llama cero. La separación vectorial es constante exactamente cuando $\mathbf{u}_0 = 0$. Compartir aceleración no obliga a compartir velocidad.

Ejercicio 20.6. En una dimensión, el campo es $g(x) = g_0 + \gamma x$. Encuentra la ecuación exacta de separación para un origen en caída libre y describe el caso $\gamma > 0$ con datos $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.

Solución. La diferencia $g(X+r) - g(X)$ es γr, de modo que $\ddot{r} = \gamma r$. Para $\gamma > 0$, la solución es $r(t) = r_0 \cosh(\sqrt{\gamma}t)$, como se comprueba derivando dos veces y evaluando los datos. El término común $g_0 + \gamma X$ desaparece; la separación crece por el gradiente del campo. Aquí γ tiene dimensión T^{-2}.

4. Seguir unos ejes que giran

En una plataforma giratoria, restar la posición del origen deja sin resolver la orientación de los ejes. Un vector puede conservar su dirección en el espacio y cambiar sus componentes sobre la plataforma. Necesitamos una escritura que separe ambos hechos sin presuponer un eje fijo de rotación.

Definición 20.3 — Matriz de orientación. Sea $R(t)$ una matriz real 3×3 de clase C^2 con $R^T R = I$ y $\det R = 1$. Sus columnas son los ejes móviles expresados en el marco inercial. Si $\mathbf{r}$ contiene componentes móviles, el vector físico correspondiente tiene componentes inerciales $R\mathbf{r}$. La posición completa es $\mathbf{x} = \mathbf{X} + R\mathbf{r}$.

Las condiciones de la definición 20.3 dicen que los ejes siguen siendo ortonormales y conservan la orientación. La notación $SO(3)$ reúne esas matrices, pero en este capítulo solo usaremos sus identidades elementales y sus derivadas. La descripción global de rotaciones se retomará con el cuerpo rígido.

Proposición 20.6 — La derivada de una orientación contiene una matriz antisimétrica. La matriz $W = R^T\dot{R}$ satisface $W^T = -W$ y $\dot{R} = RW$.

Demostración. Diferenciar $R^TR = I$ da $\dot{R}^TR + R^T\dot{R} = 0$. El primer término es W^T, así que $W^T + W = 0$. Multiplicar $W = R^T\dot{R}$ por R a la izquierda y usar $RR^T = I$ da $\dot{R} = RW$. □

Definición 20.4 — Velocidad angular en componentes móviles. El vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ se define mediante $W\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}$. Su vector en componentes inerciales es $\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$.

Proposición 20.7 — Existencia única de la velocidad angular. Toda matriz antisimétrica real 3×3 tiene exactamente la forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además $\dot{\boldsymbol{\omega}} = R\dot{\boldsymbol{\Omega}}$.

Demostración. La antisimetría fija la diagonal en cero y determina las entradas inferiores a partir de las superiores. Elegir $\Omega_1 = -W_{23}$, $\Omega_2 = W_{13}$ y $\Omega_3 = -W_{12}$ produce la matriz indicada, y multiplicarla por $\mathbf{u}$ da el producto vectorial. Esas tres entradas prueban unicidad. Finalmente, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{R}\boldsymbol{\Omega} + R\dot{\boldsymbol{\Omega}} = R(W\boldsymbol{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\Omega}})$. Como $W\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$, queda la igualdad. □

La última fórmula permite hablar de aceleración angular sin confundir derivadas de componentes en bases distintas. El vector velocidad angular no necesita tener dirección constante. Tampoco se define diferenciando tres ángulos arbitrarios como si cada derivada fuera una componente: esa identificación requiere fórmulas adicionales.

Principio metodológico 20.4. Declara qué matriz lleva cada conjunto de componentes al otro. Un producto vectorial solo puede reunir componentes expresadas en una misma base.

Ejercicios. Ejercicio 20.7. Para una rotación alrededor del eje z de ángulo $\phi(t)$, calcula R, W y $\boldsymbol{\Omega}$.

Solución. La matriz es $R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplicar $R^T\dot{R}$ da $W = \dot{\phi}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por definición 20.4, $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\mathbf{e}_z$. Para $\dot{\phi} > 0$, un punto sobre el eje móvil x gira hacia el eje móvil y en la orientación positiva del plano.

Ejercicio 20.8. Un vector tiene componentes móviles constantes $\mathbf{u}_0$. Calcula la derivada de su vector físico y decide cuándo es cero.

Solución. Su vector físico es $R\mathbf{u}_0$. La derivada es $\dot{R}\mathbf{u}_0 = R(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_0)$. Se anula exactamente cuando $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_0 = 0$: en ese instante el vector es paralelo a la velocidad angular, o alguno de ambos es cero. Tener componentes móviles constantes no implica permanecer fijo respecto del marco inercial.

5. La derivada de un vector y la derivada de sus componentes

El ejercicio anterior contiene el mecanismo de toda la transformación. Al diferenciar un vector escrito en una base móvil hay dos contribuciones: cambian sus componentes y cambia la base. Se pueden reunir en una única regla que usaremos tanto para la velocidad como para la aceleración.

Definición 20.5 — Derivadas en los dos marcos. Si un vector físico tiene componentes inerciales $\mathbf{a}_I = R\mathbf{a}$, el punto sobre $\mathbf{a}$ designa la derivada ordinaria de sus componentes móviles. La derivada física expresada en esa base es $R^T\dot{\mathbf{a}}_I$. Estas operaciones actúan sobre el mismo vector, con distintas bases mantenidas fijas al diferenciar.

Proposición 20.8 — Regla de transporte. Para R de clase C^1 y $\mathbf{a}$ de clase C^1,

$$R^T \frac{d}{dt}(R\mathbf{a}) = \dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}.$$

Demostración. La regla del producto da $d(R\mathbf{a})/dt = \dot{R}\mathbf{a} + R\dot{\mathbf{a}}$. Multiplicar por R^T transforma el primer término en $W\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}$ y el segundo en $\dot{\mathbf{a}}$. □

La regla se conoce también como teorema de transporte o de Coriolis. Su validez es cinemática: todavía no hemos usado una fuerza ni la segunda ley.[1] Por ejemplo, un vector fijo en el espacio tiene $\dot{\mathbf{a}} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}$ en los ejes que giran. Un vector fijo en la plataforma tiene $\dot{\mathbf{a}} = 0$, pero su derivada física es $R(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a})$.

El producto escalar no cambia al pasar de componentes móviles a inerciales: $(R\mathbf{a}) \cdot (R\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Al derivarlo, las dos contribuciones de la base se cancelan porque $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b}) = 0$. Por eso podemos calcular variaciones de normas con componentes móviles sin introducir un término extra para la norma misma. Esa cancelación será decisiva en el balance de energía.

Principio metodológico 20.5. Aplica la regla de transporte al vector completo. Identifica primero cuál de sus componentes se está derivando y cuál es la base de la respuesta.

Ejercicios. Ejercicio 20.9. Un vector fijo en el espacio tiene al inicio componentes móviles $(a, 0, 0)$. Los ejes giran uniformemente alrededor de z con rapidez $\Omega > 0$ y coinciden inicialmente con los fijos. Encuentra las componentes móviles posteriores.

Solución. El vector inercial permanece $(a, 0, 0)$. Multiplicar por $R^T(t)$ da $(a\cos\Omega t, -a\sin\Omega t, 0)$. Su derivada es $-\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{a}$, como exige proposición 20.8. El signo negativo expresa que, visto desde los ejes que giran positivamente, el vector fijo parece girar en sentido contrario.

Ejercicio 20.10. Usa proposición 20.8 para demostrar que $\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}) = 0$ y que la rotación de la base no modifica la derivada de $|\mathbf{a}|^2$.

Solución. Un producto vectorial es perpendicular a sus dos factores, por lo que su producto escalar con $\mathbf{a}$ es cero. La derivada física de la norma al cuadrado es $2\mathbf{a}_I \cdot \dot{\mathbf{a}}_I = 2\mathbf{a} \cdot [\dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}] = 2\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}}$. Coincide con diferenciar directamente $|\mathbf{a}|^2$. La orientación variable puede cambiar dirección sin cambiar longitud.

6. Qué velocidad llevaba el cuerpo al soltarlo

Un cuerpo que se suelta desde una plataforma conserva inicialmente la velocidad que tenía en el marco inercial. Si antes permanecía quieto respecto de la plataforma, esa velocidad incluye el movimiento del origen y la rotación local. Confundir reposo relativo con reposo inercial cambia el problema desde sus datos iniciales.

Proposición 20.9 — Transformación general de velocidad. Para $\mathbf{x} = \mathbf{X} + R\mathbf{r}$,

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{X}} + R(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

En particular, la velocidad relativa inicial asociada a un dato inercial $\mathbf{v}_0$ es

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = R_0^T(\mathbf{v}_0 - \dot{\mathbf{X}}_0) - \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}_0.$$

[1] S. Widnall y J. Peraire, MIT OpenCourseWare, *16.07 Dynamics*, Lecture L8, *Relative Motion using Rotating Axes*, 2009, pp. 2–4: https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/1b1825352e94d42461eb576b540b2f23_MIT16_07F09_Lec08.pdf . Contraste de la regla de transporte, transformación de aceleración y derivada de velocidad angular. Aquí la prueba se formula directamente mediante una matriz de orientación.

Demostración. Diferenciar la transformación de posiciones y aplicar proposición 20.8 a $R\mathbf{r}$ da la primera fórmula. Evaluarla en el instante inicial, multiplicar por R_0^T y despejar $\dot{\mathbf{r}}_0$ da la segunda. □

Proposición 20.10 — Velocidad de un punto fijado al marco. Si las componentes $\mathbf{r}$ de un punto son constantes, entonces $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{X}} + R(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$. Dos puntos fijados al marco cumplen

$$\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Demostración. La primera igualdad es proposición 20.9 con $\dot{\mathbf{r}} = 0$. Restar para dos puntos elimina $\dot{\mathbf{X}}$. Las rotaciones propias preservan el producto vectorial, de modo que $R(\boldsymbol{\Omega} \times \Delta\mathbf{r}) = (R\boldsymbol{\Omega}) \times (R\Delta\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{x}$. Esta preservación se verifica mediante el producto triple: una matriz ortogonal de determinante uno conserva sus valores y, por tanto, el vector que representa cada producto vectorial. □

La distancia entre esos dos puntos permanece constante, aunque sus velocidades puedan ser distintas. Esta fórmula anticipa la cinemática del cuerpo rígido sin añadir todavía una distribución de masa. Para una persona sobre una plataforma de eje fijo, cuanto mayor sea la distancia perpendicular al eje, mayor será la rapidez inercial debida a la rotación.

Principio metodológico 20.6. Expresa los datos iniciales en el mismo marco que la ecuación a resolver. «Soltar desde el reposo» necesita identificar respecto de qué observador había reposo.

Ejercicios. Ejercicio 20.11. Una plataforma de origen fijo gira con $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$. Un cuerpo está en $\mathbf{r}_0 = a\mathbf{e}_x$. Compara los datos relativos para un cuerpo inicialmente quieto en el espacio y otro inicialmente quieto sobre la plataforma.

Solución. Si $R_0 = I$ y la velocidad inercial es cero, proposición 20.9 da $\dot{\mathbf{r}}_0 = -\Omega a\mathbf{e}_y$. Si está quieto sobre la plataforma, $\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$ y su velocidad inercial es $\Omega a\mathbf{e}_y$. Las posiciones iniciales coinciden, pero las velocidades físicas y las trayectorias posteriores son diferentes.

Ejercicio 20.12. Un origen se mueve con velocidad $V\mathbf{e}_x$ y el marco gira alrededor de z con rapidez Ω. En un instante $R = I$, una partícula está en $a\mathbf{e}_y$ y tiene velocidad relativa $u\mathbf{e}_x$. Encuentra su velocidad inercial.

Solución. La contribución de rotación es $\Omega\mathbf{e}_z \times a\mathbf{e}_y = -\Omega a\mathbf{e}_x$. Proposición 20.9 da $\dot{\mathbf{x}} = (V + u - \Omega a)\mathbf{e}_x$. En particular, puede haber velocidad inercial cero con velocidad relativa distinta de cero. Las tres contribuciones se suman una vez expresadas en la misma base.

7. De dónde sale el factor dos

La velocidad relativa entra dos veces al diferenciar la velocidad física. Una contribución procede de la rotación de ese vector velocidad; la otra, del cambio de la posición que aparece en $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Mantener ambas operaciones visibles evita perder el factor dos de Coriolis.

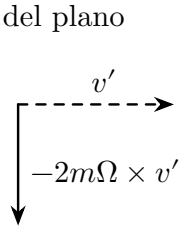


Figura 20.2. Si Ω sale del plano y $v\prime$ apunta a la derecha, $-2m\Omega \times v\prime$ apunta hacia abajo. La flecha discontinua es una velocidad; el término inercial no es una interacción nueva. Véase §7.

Proposición 20.11 — Transformación general de aceleración. Si $\mathbf{X}, R, \mathbf{r}$ son de clase C^2, entonces

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{X}} + R\left[\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})\right].$$

Demostración. proposición 20.9 escribe la velocidad como $\dot{\mathbf{X}} + R\mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$. Proposición 20.8 da $d(R\mathbf{b})/dt = R(\dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{b})$. La derivada de $\mathbf{b}$ es $\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}\times\dot{\mathbf{r}}$. El término de transporte añade $\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})$. Agrupar las dos contribuciones iguales da el resultado. □

Proposición 20.12 — Segunda ley en componentes móviles. Definamos $\mathbf{A} = R^T\ddot{\mathbf{X}}$ y $\mathbf{F}_R = R^T\mathbf{F}$, donde $\mathbf{F}$ es la suma de fuerzas físicas en componentes inerciales. Entonces $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ equivale a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_R - m\mathbf{A} - 2m\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\mathbf{r}} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{r} - m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}).$$

Demostración. Multiplicar proposición 20.11 por mR^T y usar $R^TR = I$ da la suma de la aceleración del origen y las cuatro contribuciones móviles. Sustituir $mR^T\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_R$ y despejar $m\ddot{\mathbf{r}}$ produce los signos indicados. Invertir estos pasos recupera la ecuación inercial, lo que prueba la equivalencia. □

Todos los productos vectoriales de la proposición 20.12 están escritos en ejes móviles. En particular $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ designa la derivada de sus componentes; proposición 20.7 asegura que representa la aceleración angular física tras multiplicar por R. La derivada de $\mathbf{A}$ no aparece en la proposición 20.12: la transformación de aceleración necesita la aceleración actual del origen, no su derivada.

El término $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})$ en la proposición 20.11 apunta hacia el eje para una rotación de eje fijo. En proposición 20.12 aparece con signo contrario y por ello apunta hacia afuera. Los nombres de aceleración centrípeta y fuerza centrífuga se refieren a lugares diferentes de estas dos igualdades.

Principio metodológico 20.7. Obtén los signos trasladando términos desde la transformación de aceleración. Comprueba el caso de un punto fijo en el marco y el caso sin rotación.

Ejercicios. Ejercicio 20.13. Para origen fijo y rotación $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(t)\mathbf{e}_z$, escribe las componentes inerciales de la aceleración expresadas en la base móvil.

Solución. Los productos de la proposición 20.11 dan $a^{(R)}_{I,x} = \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \dot{\Omega}y - \Omega^2x$, $a^{(R)}_{I,y} = \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \dot{\Omega}x - \Omega^2y$ y $a^{(R)}_{I,z} = \ddot{z}$. Los superíndices recuerdan que son componentes en la base móvil de la aceleración física, no las segundas derivadas relativas. Para obtener componentes inerciales se multiplica el vector completo por R.

Ejercicio 20.14. Un punto permanece en $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_x$ sobre una plataforma con origen fijo y $\Omega(t)$ alrededor de z. Encuentra la fuerza física necesaria para mantenerlo allí.

Solución. Como $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} = 0$, proposición 20.11 da $\mathbf{F}_R = m[-\Omega^2 a\mathbf{e}_x + \dot{\Omega} a\mathbf{e}_y]$. Una componente centrípeta sostiene el giro y una tangencial cambia su rapidez. En proposición 20.12 esas fuerzas se equilibran con los términos centrífugo y de Euler. Mantener al punto fijo en coordenadas móviles no implica que su fuerza física total sea cero.

8. Cuatro términos y sus funciones

La ecuación completa permite clasificar los efectos por los datos del marco que los originan. Esta clasificación ayuda a calcular, pero la condición que los distingue de las fuerzas físicas es su procedencia: se introducen al expresar la aceleración en un marco móvil. Las fuerzas del piso, de una cuerda o de un resorte siguen siendo interacciones entre cuerpos.

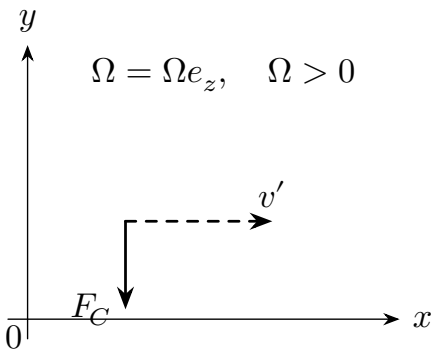


Figura 20.3. Con Ω saliente y velocidad relativa hacia la derecha, $-2m\Omega \times v'$ apunta hacia abajo. La velocidad discontinua es un dato cinemático; la flecha continua representa el término de fuerza en el marco que gira. Véase §8.

Definición 20.6 — Términos inerciales del marco móvil. En la ecuación relativa llamaremos

Término	Expresión en componentes móviles
Traslación	$\mathbf{F}_{\text{tr}} = -m\mathbf{A}$
Coriolis	$\mathbf{F}_{\text{C}} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$
Euler	$\mathbf{F}_{\text{E}} = -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}$
Centrífugo	$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$

Estos términos se llaman también fuerzas inerciales o ficticias. Actúan como términos de fuerza en la ecuación relativa; no asignan por sí mismos un segundo cuerpo con el que formar un par de acción y reacción. Si un motor hace girar una guía, sus interacciones y las reacciones transmitidas por ella deben calcularse además.[2]

Proposición 20.13 — Coriolis no aporta potencia relativa. Para cualquier $\boldsymbol{\Omega}(t)$ y velocidad relativa,

[2]MIT OpenCourseWare, *Classical Mechanics*, capítulo 31, *Non-Inertial Linear and Rotating Reference Frames*, versión 2022: https://live.ocw.mit.edu/courses/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/mit8_01scs22_chapter31.pdf . Contraste de convenciones para los términos inerciales. Las proposiciones y ejercicios presentes se derivan con las hipótesis locales indicadas en cada sección.

$$\mathbf{F}_{\mathrm{C}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0.$$

Demostración. El vector $\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\dot{\mathbf{r}}$. Multiplicar por el coeficiente $-2m$ conserva esa perpendicularidad. □

Esta propiedad no implica que la rapidez relativa sea constante en toda situación. Las otras fuerzas pueden aportar potencia, y una trayectoria desviada puede visitar regiones diferentes del potencial. Tampoco equivale a una afirmación sobre trabajo medido en el marco inercial: allí la velocidad que se usa en el producto escalar es otra.

Proposición 20.14 — Geometría y potencial centrífugos. Para $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$, sea $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r})/|\boldsymbol{\Omega}|^2$ la componente perpendicular al eje instantáneo. Entonces

$$\mathbf{F}_{\mathrm{cf}} = m|\boldsymbol{\Omega}|^2\mathbf{r}_\perp = -\nabla U_{\mathrm{cf}}, \qquad U_{\mathrm{cf}} = -\frac{m}{2}|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2.$$

El potencial espacial indicado también vale para $\boldsymbol{\Omega} = 0$, cuando ambos lados son cero.

Demostración. La identidad del producto vectorial doble da $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}) - |\boldsymbol{\Omega}|^2\mathbf{r}$. Cambiar el signo produce la expresión perpendicular. Además $|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2 = |\boldsymbol{\Omega}|^2|\mathbf{r}|^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r})^2$. Su gradiente respecto de $\mathbf{r}$ es $2[|\boldsymbol{\Omega}|^2\mathbf{r} - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\Omega}]$; multiplicar por $m/2$ prueba la igualdad de fuerzas. □

El signo negativo del potencial refleja que la fuerza centrífuga apunta hacia radios perpendiculares mayores. Si $\boldsymbol{\Omega}$ cambia, ese potencial también cambia con el tiempo, y aparece además el término de Euler. Para conocer una energía conservada habrá que examinar todos esos términos, como haremos en §11.

Principio metodológico 20.8. Distingue términos de ecuación y agentes físicos. En un balance de potencia usa la velocidad del marco correspondiente y revisa cada contribución por separado.

Ejercicios. Ejercicio 20.15. Para $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$, una partícula se mueve radialmente hacia afuera con velocidad relativa $u\mathbf{e}_x$ desde $a\mathbf{e}_x$. Encuentra los términos de Coriolis y centrífugo.

Solución. Coriolis es $-2m\Omega u\mathbf{e}_y$ y el centrífugo es $m\Omega^2 a\mathbf{e}_x$. Para $\Omega, u > 0$, la primera contribución desvía hacia el lado negativo de y; la segunda apunta radialmente hacia afuera. La potencia de Coriolis es cero. La potencia centrífuga en ese instante es $m\Omega^2 au$.

Ejercicio 20.16. Para la misma rotación de eje fijo, calcula la integral del término de Euler sobre una circunferencia de radio a recorrida positivamente en el plano perpendicular, a tiempo fijo. Decide si puede proceder de un potencial escalar espacial monovaluado cuando $\dot{\Omega} \neq 0$.

Solución. Con $\mathbf{r} = a(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, el término de Euler es $-m\dot{\Omega}a\mathbf{e}_\varphi$ y $d\mathbf{r} = a\mathbf{e}_\varphi d\varphi$. La circulación es $-m\dot{\Omega}a^2\int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi m\dot{\Omega}a^2$. Un gradiente de un potencial monovaluado tendría circulación nula en esa curva cerrada. Si $\dot{\Omega} \neq 0$, el resultado excluye esa representación espacial en un dominio que contenga la circunferencia completa.

9. Una recta vista desde una plataforma

Un ejemplo sin fuerzas permite poner a prueba la ecuación completa. En el marco inercial la trayectoria es una recta. En el marco que gira puede tener una forma complicada, pero conocemos de antemano una manera de obtenerla: transformar esa recta. Esa respuesta sirve para comprobar la ecuación y sus condiciones iniciales al mismo tiempo.

Proposición 20.15 — Trayectoria libre en una rotación uniforme. Supongamos origen fijo, $R(0) = I$ y $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ constante. Una partícula libre con posición inicial $\mathbf{r}_0$ y velocidad inercial $\mathbf{v}_0$ tiene componentes móviles

$$\mathbf{r}(t) = R(t)^T(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t).$$

Su velocidad relativa inicial es $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0$.

Demostración. La solución inercial de $\ddot{\mathbf{x}} = 0$ con esos datos es $\mathbf{x} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$. La transformación inversa $\mathbf{r} = R^T\mathbf{x}$ da la fórmula. Proposición 20.9 evaluada al inicio da la velocidad relativa. Como proposición 20.12 es equivalente a la ecuación inercial, la trayectoria satisface también la ecuación relativa con términos de Coriolis y centrífugo. □

Proposición 20.16 — Aceleración inicial después de soltar. Si una partícula libre se libera desde reposo relativo en $\mathbf{r}_0$, entonces

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0).$$

Si estaba inicialmente quieta en el marco inercial, entonces

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0).$$

Demostración. En el primer caso $\mathbf{u}_0 = 0$, por lo que proposición 20.12 con fuerza cero deja solo el término centrífugo. En el segundo, $\mathbf{u}_0 = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0$. Sustituirlo en $\ddot{\mathbf{r}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ produce dos veces el producto doble menos una vez ese producto, dejando la segunda fórmula. □

Los dos signos tienen una explicación geométrica. Un punto quieto en el espacio parece describir una circunferencia hacia atrás, con aceleración dirigida al eje. Un punto soltado desde la plataforma comienza con velocidad inercial tangencial; su recta de salida se separa del eje. El término centrífugo solo no representa cualquier trayectoria vista desde una plataforma: también hay que conocer la velocidad relativa que alimenta Coriolis.

Principio metodológico 20.9. Comprueba la ecuación móvil transformando una solución inercial conocida. Compara los datos iniciales físicos antes de comparar los términos de aceleración.

Ejercicios. Ejercicio 20.17. Una partícula se suelta desde reposo relativo en $a\mathbf{e}_x$ sobre una plataforma uniforme. Encuentra sus coordenadas móviles y su distancia al eje para $t \geq 0$.

Solución. Su velocidad inercial inicial es $\Omega a\mathbf{e}_y$. Por proposición 20.15, $x = a\cos\Omega t + \Omega a t \sin\Omega t$ y $y = -a\sin\Omega t + \Omega a t\cos\Omega t$. La norma en el plano coincide con la de la recta inercial: $\rho = a\sqrt{1+\Omega^2 t^2}$. Para $a > 0$ crece después del instante inicial, aunque la aceleración física sea cero. Diferenciar al inicio da $\dot{x} = \dot{y} = 0$ y $\ddot{x} = \Omega^2 a$, verificando proposición 20.16.

Ejercicio 20.18. Una partícula libre se lanza desde el origen con velocidad relativa $u\mathbf{e}_x$. Encuentra la trayectoria móvil y su desarrollo hasta orden t^2.

Solución. En el origen la velocidad de rotación es cero, así que la velocidad inercial inicial también es $u\mathbf{e}_x$. Proposición 20.15 da $x = ut\cos\Omega t$, $y = -ut\sin\Omega t$. Por Taylor, $x = ut + O(t^3)$ y $y = -u\Omega t^2 + O(t^4)$. La aceleración transversal inicial es $-2u\Omega\mathbf{e}_y$, igual a Coriolis; el término centrífugo inicial es cero porque la posición inicial es el origen.

10. Una guía que impone el giro

Si una cuenta se desliza por una varilla radial que gira, la trayectoria física deja de ser libre. La varilla impone que el ángulo de la cuenta acompañe su giro. Aunque la guía sea lisa, debe ejercer una reacción transversal para sostener esa condición. La palabra «sin fricción» elimina la fuerza longitudinal de rozamiento, pero conserva la reacción normal.

Definición 20.7 — Guía radial lisa de giro prescrito. Consideramos una cuenta puntual sobre una recta horizontal que pasa por un origen fijo y gira con Ω constante alrededor de z. La

coordenada firmada sobre la guía es q, por lo que sus componentes móviles son $\mathbf{r} = q\mathbf{e}_x$. La guía ejerce una reacción perpendicular a ella; las fuerzas verticales se equilibran y no hay fuerza física longitudinal.

Proposición 20.17 — Movimiento longitudinal de la cuenta. Bajo definición 20.7,

$$\ddot{q} = \Omega^2 q.$$

Para $\Omega \neq 0$, con $\nu = |\Omega|$, la solución de datos $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = u_0$ es $q(t) = q_0 \cosh(\nu t) + \frac{u_0}{\nu} \sinh(\nu t)$.

Demostración. La componente longitudinal de la proposición 20.12 recibe $m\Omega^2 q$ del término centrífugo. Coriolis es transversal, y la reacción también, de modo que $m\ddot{q} = m\Omega^2 q$. Las funciones $\cosh \nu t$ y $\sinh \nu t$ tienen segunda derivada ν^2 veces sí mismas. Evaluar posición y derivada al inicio fija los coeficientes indicados. Para $\Omega = 0$, la solución es $q = q_0 + u_0 t$. □

En una varilla de longitud finita, la fórmula vale hasta alcanzar un extremo o hasta que cambie alguna condición del vínculo. En una semirrecta también hay que especificar qué ocurre al llegar a $q = 0$. La solución firmada de la recta completa evita introducir inadvertidamente una continuación a través de un tope físico.

Proposición 20.18 — Reacción y potencia de la guía móvil. En definición 20.7, la reacción horizontal es $N_y = 2m\Omega\dot{q}$. Su potencia inercial es

$$\mathcal{P} = N_y \Omega q = 2m\Omega^2 q\dot{q} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \Omega^2 q^2)\right].$$

Su potencia relativa es cero.

Demostración. La componente transversal de la proposición 20.11 para $\mathbf{r} = q\mathbf{e}_x$ es $2\Omega\dot{q}$, que requiere la reacción indicada. La velocidad física expresada en ejes móviles es $\dot{q}\mathbf{e}_x + \Omega q \mathbf{e}_y$, por lo que el producto escalar con $N_y \mathbf{e}_y$ da la potencia inercial. Derivar la energía cinética indicada y usar proposición 20.17 da $m\dot{q}\Omega^2 q + m\Omega^2 q\dot{q}$, igual a esa potencia. En el marco móvil la velocidad es longitudinal, perpendicular a la reacción. □

El motor que mantiene el giro puede suministrar energía a la cuenta mediante la guía. Un vínculo ideal que no hace trabajo sobre desplazamientos relativos permitidos puede hacer trabajo en el marco inercial cuando su soporte se mueve. La diferencia se ve sin invocar todavía principios variacionales: basta con usar las dos velocidades en el producto escalar.

Principio metodológico 20.10. Conserva las reacciones necesarias para imponer el vínculo. Comprueba su potencia con la velocidad física, además de su potencia relativa.

Ejercicios. Ejercicio 20.19. Para $q_0 > 0$, $u_0 = 0$ y $\Omega \neq 0$, verifica que la energía relativa $m\dot{q}^2/2 - m\Omega^2 q^2/2$ es constante, y calcula la energía cinética inercial.

Solución. proposición 20.17 da $q = q_0 \cosh \nu t$ y $\dot{q} = q_0 \nu \sinh \nu t$. La energía relativa es $(m\nu^2 q_0^2/2)(\sinh^2 \nu t - \cosh^2 \nu t) = -m\nu^2 q_0^2/2$. La energía cinética inercial es $(m\nu^2 q_0^2/2)(\sinh^2 \nu t + \cosh^2 \nu t) = (m\nu^2 q_0^2/2)\cosh(2\nu t)$. Su crecimiento procede de la potencia de la guía, compatible con la conservación de la combinación relativa.

Ejercicio 20.20. Añade a la guía radial un resorte ideal de fuerza longitudinal $-kq$, con $k > 0$. Determina cuándo el origen tiene movimiento longitudinal oscilatorio, lineal o exponencial.

Solución. La ecuación se vuelve $\ddot{q} + (k/m - \Omega^2)q = 0$. Si $k/m > \Omega^2$, las soluciones son combinaciones de seno y coseno con frecuencia $\sqrt{k/m - \Omega^2}$. Si hay igualdad, son $q = q_0 + u_0 t$. Si $k/m < \Omega^2$, son combinaciones exponenciales con tasas $\pm\sqrt{\Omega^2 - k/m}$. Esta clasificación corresponde al grado

longitudinal impuesto por la guía; retirar la guía cambia la ecuación y exige conservar los términos transversales.

11. Equilibrio y energía en una rotación uniforme

Un cuerpo quieto sobre una plataforma tiene aceleración relativa cero. La fuerza física que necesita puede ser distinta de cero, como mostró ejercicio 20.14. Cuando la rotación es uniforme y las fuerzas físicas conservativas son estacionarias en la plataforma, el potencial centrífugo permite formular tanto la condición de equilibrio como un balance de energía.

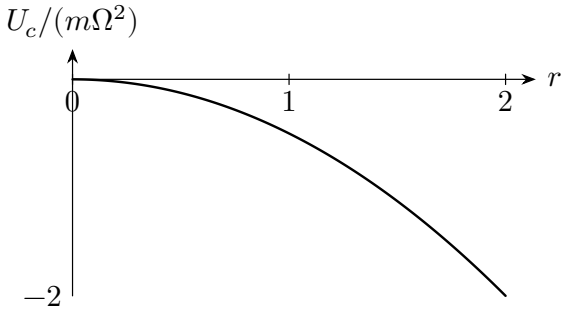


Figura 20.4. Para rotación uniforme, el término centrífugo radial deriva de $U_c = -m\Omega^2 r^2/2$. Su pendiente negativa produce una contribución dirigida hacia afuera. Véase §11.

Proposición 20.19 — Condición de equilibrio relativo. Supongamos origen fijo, $\boldsymbol{\Omega}$ constante y fuerza física en componentes móviles $-\nabla U(\mathbf{r})$, sin vínculos adicionales. Definamos

$$U_{\mathrm{ef}}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) - \frac{m}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2.$$

Una posición constante $\mathbf{r}_*$ es solución si y solo si $\nabla U_{\mathrm{ef}}(\mathbf{r}_*) = 0$.

Demostración. En una posición constante se anulan velocidad y aceleración relativas. Los términos de traslación y Euler son cero por hipótesis, y Coriolis se anula con la velocidad. Proposición 20.14 y proposición 20.12 dejan $0 = -\nabla U_{\mathrm{ef}}(\mathbf{r}_*)$. Recíprocamente, si ese gradiente es cero, la trayectoria constante satisface todos los términos de la ecuación. □

Si hay vínculos, la reacción puede equilibrar componentes del gradiente que no se anulan. La condición de la proposición 20.19 debe entonces proyectarse sobre las direcciones permitidas, como hicimos con la guía radial. Por otra parte, la condición de equilibrio no decide por sí sola la estabilidad: una perturbación con velocidad relativa activa Coriolis.

Proposición 20.20 — Energía relativa y alcance temporal. Para origen fijo y fuerza física $-\nabla U(\mathbf{r}, t)$, permitiendo $\boldsymbol{\Omega}(t)$, sea

$$\mathcal{E}_R = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + U(\mathbf{r}, t) - \frac{m}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2.$$

Entonces

$$\dot{\mathcal{E}}_R = \partial_t U - m(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} - m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}).$$

En particular, $\mathcal{E}_R$ es constante si U es estacionario y $\boldsymbol{\Omega}$ constante.

Demostración. Multiplicar proposición 20.12 por $\dot{\mathbf{r}}$ elimina Coriolis por la proposición 20.13. El trabajo de la fuerza conservativa se cancela con la parte espacial de $\dot{U}$, y el centrífugo con la

parte espacial de la derivada de su potencial. Permanecen $\partial_t U$, la potencia del término de Euler y la derivada temporal explícita del potencial centrífugo. Esta última es $-m(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})\cdot(\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{r})$, que da la fórmula. □

Un mínimo estricto del potencial efectivo puede servir para controlar perturbaciones usando esta energía, bajo las hipótesis adecuadas del capítulo capítulo 13. Cuando el potencial no tiene un mínimo, el balance por sí solo no decide toda la estabilidad del sistema con términos de velocidad. Ejercicio 20.20 tiene un vínculo que deja una sola coordenada; su clasificación no se debe trasladar sin más a un oscilador libre en dos dimensiones.

Principio metodológico 20.11. Separa equilibrio, conservación de energía y estabilidad. Cada conclusión usa hipótesis distintas; una fuerza dependiente de velocidad puede intervenir en la dinámica aunque su potencia sea cero.

Ejercicios. Ejercicio 20.21. Un resorte isotrópico plano ejerce $-k\mathbf{r}$, con $k>0$, sobre una masa sin guía. El origen es fijo y el marco gira uniformemente. Encuentra los equilibrios y decide si $k<m\Omega^2$ implica una trayectoria física exponencial.

Solución. En el plano, $U_{\mathrm{ef}}=(k-m\Omega^2)|\mathbf{r}|^2/2$. Si $k\neq m\Omega^2$, el único equilibrio relativo es el origen. Si hay igualdad, cualquier posición constante es solución: físicamente representa un giro circular con la frecuencia natural del resorte. Para decidir crecimiento, volvemos al marco inercial: $m\ddot{\mathbf{x}}=-k\mathbf{x}$, cuyas soluciones son senos y cosenos con frecuencia $\sqrt{k/m}$. Como R conserva normas, las posiciones móviles también están acotadas para datos finitos. El potencial efectivo negativo cuando $k<m\Omega^2$ no demuestra inestabilidad; omitir Coriolis produciría una ecuación diferente y una conclusión falsa.

Ejercicio 20.22. Una partícula se mueve conservativamente en una rotación uniforme con $\mathcal{E}_R=C$. Determina qué regiones son inaccesibles y qué información adicional hace falta para obtener la trayectoria.

Solución. La identidad $m|\dot{\mathbf{r}}|^2/2=C-U_{\mathrm{ef}}$ exige $U_{\mathrm{ef}}\le C$ a lo largo del movimiento. Una región con $U_{\mathrm{ef}}>C$ no puede visitarse. En varios grados de libertad esa identidad fija una rapidez posible, pero no su dirección ni el efecto de Coriolis. Se necesitan la ecuación vectorial y datos completos de posición y velocidad. La región permitida por la energía puede contener puntos que una trayectoria particular nunca alcance.

12. Un laboratorio que gira con la Tierra

En una experiencia terrestre, el movimiento de los ejes suele ser pequeño durante cada segundo y, sin embargo, acumular efectos medibles. Para fijar signos usemos un marco local con x hacia el este, y hacia el norte y z hacia arriba. En un modelo esférico de Tierra, a latitud λ, la velocidad angular tiene componentes

$$\boldsymbol{\Omega}=(0,\Omega\cos\lambda,\Omega\sin\lambda),\qquad \Omega>0.$$

La aceleración gravitatoria efectiva local incluye la aceleración del origen y el término centrífugo constante evaluados en el lugar. Aproximarla por $-g\mathbf{e}_z$ requiere ignorar sus variaciones sobre el tamaño de la experiencia. La vertical efectiva y la radial esférica difieren a orden Ω^2; en los cálculos de primer orden en Ω esa diferencia queda fuera del alcance retenido.

Proposición 20.21 — Componentes locales de Coriolis. Para $\dot{\mathbf{r}}=(u,v,w)$ en esos ejes, la aceleración de Coriolis es

$$\mathbf{a}_{\mathrm{C}} = (2\Omega \sin\lambda\, v - 2\Omega\cos\lambda\, w, -2\Omega\sin\lambda\, u, 2\Omega\cos\lambda\, u)\,.$$

Demostración. Expandir el determinante del producto $\boldsymbol{\Omega} \times (u, v, w)$ da $(\Omega\cos\lambda\, w - \Omega\sin\lambda\, v, \Omega\sin\lambda\, u, -\Omega\cos\lambda\, u)$. Multiplicar por -2 produce las componentes. □

Para movimiento horizontal, la desviación horizontal es hacia la derecha de la velocidad en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el sur. Una velocidad vertical activa la componente horizontal de $\boldsymbol{\Omega}$, incluso en el ecuador. La fórmula de la «derecha» necesita, por tanto, declarar que se está hablando de la proyección horizontal de un movimiento horizontal.

Proposición 20.22 — Desviación al caer, a primer orden. En gravedad efectiva local uniforme, ignorando resistencia del aire y variaciones espaciales del campo, una partícula soltada desde reposo terrestre a altura h tiene, a primer orden en Ω,

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2, \qquad x(t) = \frac{1}{3}\Omega\cos\lambda\, g t^3, \qquad y(t) = 0.$$

El desplazamiento este al llegar al suelo es $\Omega\cos\lambda\, g(2h/g)^{3/2}/3$. La aproximación requiere $|\Omega t| \ll 1$ durante la caída y una región suficientemente pequeña para el modelo uniforme.

Demostración. La trayectoria de orden cero tiene $u = v = 0$ y $w = -gt$. Insertarla en la proposición 20.21 da $\ddot{x} = 2\Omega\cos\lambda\, gt$ y $\ddot{y} = \ddot{z} + g = 0$ a primer orden. Integrar con velocidad horizontal inicial cero y $x(0) = y(0) = 0$ da las fórmulas. Los términos de Coriolis que dependen de las nuevas velocidades horizontales son de orden Ω^2 para tiempos fijos y no se retienen. El tiempo de llegada de orden cero es $t_f = \sqrt{2h/g}$; sustituirlo da la expresión final. □

La masa se cancela. En este modelo todos los cuerpos con la misma preparación comparten la desviación, mientras la resistencia del aire introduciría otras dependencias. La aproximación describe una consecuencia de rotación sobre una caída local; no incorpora vientos, geometría real del terreno ni gradientes gravitatorios.

Para ver un efecto acumulado durante muchas oscilaciones, consideremos un péndulo largo de longitud l y pequeña amplitud. Si su punto de suspensión permanece fijo al laboratorio, la tensión produce a primer orden la fuerza horizontal $-mg(x, y)/l$. La componente vertical de Coriolis altera la tensión a orden Ω por la velocidad horizontal, pero al multiplicarla por la pequeña inclinación su corrección horizontal es de segundo orden en amplitud y queda fuera de la linealización. Definamos $\omega_0^2 = g/l$ y $f = \Omega\sin\lambda$.

Proposición 20.23 — Precesión en el modelo lineal del péndulo de Foucault. En el modelo de pequeña amplitud que conserva Coriolis horizontal e ignora correcciones centrífugas espaciales de orden Ω^2, las ecuaciones son

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2f\dot{y}, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2f\dot{x}.$$

Escribiendo $s = x + iy$ y $s = e^{-ift}u$, se obtiene $\ddot{u} + (\omega_0^2 + f^2)u = 0$. En particular, existe una familia de oscilaciones cuya dirección gira con tasa firmada $-f$ vista desde arriba.

Demostración. La fuerza restauradora y proposición 20.21 para movimiento horizontal dan las dos ecuaciones reales. Sumarlas con coeficiente i produce $\ddot{s} + 2if\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$. Al sustituir $s = e^{-ift}u$, los términos en $\dot{u}$ se cancelan y el coeficiente restante es $\omega_0^2 + f^2$. Elegir $u = a\cos(\sqrt{\omega_0^2 + f^2}\, t)$ real da $x = a\cos(ft)\cos(\sqrt{\omega_0^2 + f^2}\, t)$ e $y = -a\sin(ft)\cos(\sqrt{\omega_0^2 + f^2}\, t)$. La dirección de la oscilación rota con ángulo $-ft$. □

La transformación resuelve exactamente el sistema reducido escrito en la proposición 20.23. El término f^2 de su frecuencia no debe interpretarse como una predicción física completa a segundo

orden en la rotación, pues otros términos de ese orden se omitieron al construir el modelo. La precesión de primer orden es horaria en el norte, antihoraria en el sur y nula en el ecuador dentro de este modelo. La familia real elegida tiene $\dot{s}(0) = -ifa$; un péndulo soltado desde reposo terrestre tiene otros coeficientes y una pequeña elipticidad en el sistema reducido. No todas las condiciones iniciales producen exactamente una línea que gira.

El experimento de Foucault de 1851 hizo visible la rotación terrestre mediante un movimiento mecánico local.[3] Su interpretación exige un péndulo con libertad horizontal suficiente y una separación de escalas entre la oscilación y la rotación. Las oscilaciones sistemáticas, el amortiguamiento y la excitación se estudiarán en el capítulo 23; aquí el ejemplo muestra cómo un término pequeño puede acumular un cambio de orientación.

Principio metodológico 20.12. En una aproximación terrestre, declara ejes, orden retenido y escalas. Resolver exactamente una ecuación aproximada no restaura los términos que se descartaron al formularla.

Ejercicios. Ejercicio 20.23. En el hemisferio sur, una partícula se mueve horizontalmente hacia el norte. Determina la dirección de su aceleración horizontal de Coriolis y compárala con una caída vertical en el mismo lugar.

Solución. Para $u = w = 0$, $v > 0$, proposición 20.21 da $a_x = 2\Omega \sin\lambda\, v < 0$, hacia el oeste: es la izquierda de quien avanza al norte. En una caída, $w < 0$ y $u = v = 0$, por lo que $a_x = -2\Omega \cos\lambda\, w > 0$ para latitudes no polares, hacia el este. La regla izquierda para movimiento horizontal no determina el caso vertical.

Ejercicio 20.24. Si $T_\oplus = 2\pi/\Omega$ es el período de rotación del modelo terrestre, calcula el tiempo de una vuelta dirigida completa de la precesión a latitudes $\lambda = \pm\pi/6$ y en el ecuador.

Solución. La magnitud de la tasa es $|f| = \Omega|\sin\lambda|$. El período dirigido es $2\pi/|f| = T_\oplus/|\sin\lambda|$. Para $\pm\pi/6$ vale $2T_\oplus$, con sentidos opuestos en ambos hemisferios. En el ecuador $f = 0$ y no hay una vuelta de precesión en este modelo. Una línea sin orientación vuelve a coincidir consigo misma después de media vuelta; el período pedido sigue una dirección para evitar esa ambigüedad.

13. Dos energías para la misma trayectoria

La energía relativa conservada en §11 contiene un potencial centrífugo negativo. Para entender qué combina, comparemos con la energía y el momento angular inerciales cuando el origen es fijo. La identidad resultante explica por qué una guía que gira puede aumentar la energía física y conservar, al mismo tiempo, una combinación relativa.

Definición 20.8 — Energía y momento angular en origen fijo. Sea $\mathbf{x} = R\mathbf{r}$, con origen inercial fijo. Escribimos $E_I = m|\dot{\mathbf{x}}|^2/2 + U_I(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{L}_I = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}$. El potencial móvil es $U(\mathbf{r}, t) = U_I(R\mathbf{r}, t)$; no se presume que sea estacionario en ambos marcos.

Proposición 20.24 — Identidad entre energía relativa, energía inercial y momento angular. Bajo definición 20.8,

$$\frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + U(\mathbf{r}, t) - \frac{m}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 = E_I - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_I.$$

[3] Richard Fitzpatrick, University of Texas at Austin, *Newtonian Dynamics*, «Foucault Pendulum», 2011: https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node59.html ; Michael Birse, University of Manchester, *Advanced Dynamics*, «Foucault's pendulum», 2000: https://theory.physics.manchester.ac.uk/~mikeb/lecture/pc167/noninertial/foucault.html . Contexto histórico de 1851 y contraste del sistema lineal. Se distingue la solución exacta de ese sistema reducido de una predicción física completa a segundo orden, y se explicitan las condiciones iniciales de la familia rectilínea rotante.

Demostración. proposición 20.9 da $\dot{\mathbf{x}} = R(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$. Expandir su norma produce $E_I = m|\dot{\mathbf{r}}|^2/2 + m\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + m|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2/2 + U$. Por otra parte, la invariancia de productos escalar y vectorial da $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_I = m\boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + m|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2$. Restar cancela el término cruzado y deja la identidad. □

La identidad vale instantáneamente incluso si la rotación cambia. Para obtener una constante de movimiento se añaden las hipótesis de la proposición 20.20. Si el potencial gira uniformemente con el marco y es estacionario allí, la combinación es constante aunque ni E_I ni la componente angular sean constantes por separado. Si además el potencial inercial es estacionario y simétrico alrededor del eje fijo de giro, las dos cantidades inerciales se conservan por sus balances conocidos, y la combinación también.

Un origen que se traslada introduce términos adicionales en esta comparación. Definición 20.8 declara origen fijo precisamente para no omitirlos. La masa de una plataforma y la energía de su motor tampoco están incluidas en la energía de una sola partícula; para estudiar el sistema completo habrá que ampliar el balance físico.

Principio metodológico 20.13. Antes de comparar energías, fija origen, marco y potencial transformado. Una identidad entre cantidades no demuestra su conservación sin hipótesis dinámicas adicionales.

Ejercicios. Ejercicio 20.25. Para la cuenta de la guía radial lisa, calcula L_z y comprueba proposición 20.24 con $U = 0$.

Solución. La velocidad física en la base móvil es $\dot{q}\mathbf{e}_x + \Omega q\mathbf{e}_y$, así que $L_z = m\Omega q^2$. La energía cinética inercial es $E_I = m(\dot{q}^2 + \Omega^2 q^2)/2$. Restar ΩL_z da $m\dot{q}^2/2 - m\Omega^2 q^2/2$, la constante del ejercicio 20.19 para sus datos particulares. La reacción tiene torque $\tau_z = qN_y = 2m\Omega q\dot{q}$, igual a $\dot{L}_z$.

Ejercicio 20.26. En una rotación uniforme de eje fijo, supón que $E_I - \Omega L_z$ es constante mientras el cuerpo recibe un torque físico total τ_z. Determina la potencia de las fuerzas no incluidas en el potencial si el potencial inercial no tiene dependencia temporal explícita.

Solución. Derivar la constante da $\dot{E}_I = \Omega \dot{L}_z = \Omega\tau_z$. Cuando el potencial no depende explícitamente del tiempo, $\dot{E}_I$ representa la potencia de las fuerzas físicas no incluidas en ese potencial. Es la potencia que debe suministrar el mecanismo que impone el giro en ejemplos como la guía. La potencia de todas las fuerzas físicas sería $\dot{K}_I = \Omega\tau_z - dU_I/dt$. La hipótesis de la constante y la condición temporal del potencial deben comprobarse en el sistema concreto.

14. Reconstruir el problema físico

Las ecuaciones móviles reúnen términos de posición, velocidad y tiempo. Esa mezcla puede sugerir que todos admiten un potencial o que todos pueden tratarse como fuerzas de contacto. Un último resultado permite delimitar la primera posibilidad y los problemas siguientes pondrán a prueba ambas interpretaciones.

Proposición 20.25 — Coriolis no procede de un potencial escalar de posición. Si $\boldsymbol{\Omega}(t) \neq 0$ en un instante y se permiten velocidades relativas arbitrarias en una misma posición, no existe una función escalar $V(\mathbf{r}, t)$ cuyo gradiente negativo reproduzca $-2m\boldsymbol{\Omega}(t) \times \dot{\mathbf{r}}$ para todas esas velocidades.

Demostración. A posición y tiempo fijos, $-\nabla V$ tiene un único valor independiente de la velocidad. Para velocidad cero, la fuerza de Coriolis es cero. Para una velocidad no paralela a $\boldsymbol{\Omega}$, es distinta de cero. Una única función de posición y tiempo no puede producir ambos valores en el mismo punto. □

El enunciado se limita a potenciales escalares de posición. Más adelante el formalismo lagrangiano permitirá términos dependientes de velocidad; no hace falta anticiparlos para reconocer la limitación de la proposición 20.25. La potencia relativa nula de Coriolis proviene de una perpendicularidad, y esa propiedad no lo convierte en un gradiente espacial.

Principio metodológico 20.14. Comprueba una descripción móvil reconstruyendo posición, velocidad, fuerza y potencia inerciales. Una solución relativa correcta debe representar el mismo encuentro físico y las mismas condiciones de contacto.

Problemas de integración. Ejercicio 20.27. Un origen acelera uniformemente con $\ddot{\mathbf{X}} = a\mathbf{e}_x$ en ejes inerciales. Sus ejes giran con Ω constante alrededor de z y $R(0) = I$. Encuentra $\mathbf{A}(t)$ y escribe la ecuación relativa de una partícula libre. ¿Puede sustituirse $\mathbf{A}$ por el vector móvil constante $a\mathbf{e}_x$?

Solución. La aceleración del origen es fija como vector inercial. Sus componentes móviles son $\mathbf{A} = R^T(a\mathbf{e}_x) = a(\cos\Omega t, -\sin\Omega t, 0)$. Proposición 20.12 da $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{A}(t) - 2\Omega\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{r}} - \Omega^2\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})$. Sustituir $\mathbf{A}$ por un vector móvil constante sería otro movimiento del origen: su aceleración física giraría con los ejes. La coincidencia en $t = 0$ no preserva el problema para tiempos posteriores.

Ejercicio 20.28. Una partícula se mantiene fija a distancia a del eje de una plataforma con origen fijo y rapidez angular variable $\Omega(t)$. Calcula la potencia física y compárala con la potencia relativa.

Solución. ejercicio 20.14 da $\mathbf{F}_R = -m\Omega^2 a\mathbf{e}_x + m\dot{\Omega}a\mathbf{e}_y$. Su velocidad física es $\Omega a\mathbf{e}_y$, de modo que la potencia es $ma^2\Omega\dot{\Omega}$. Coincide con $d(ma^2\Omega^2/2)/dt$. Su velocidad relativa es cero y su potencia relativa también. La componente centrípeta no aporta potencia física en este movimiento; la tangencial cambia la rapidez. Si $\Omega\dot{\Omega} < 0$, el mecanismo retira energía cinética.

Ejercicio 20.29. En el sistema reducido del péndulo de la proposición 20.23, toma $s(0) = a$ real y $\dot{s}(0) = 0$. Encuentra la solución y distingue su preparación de la familia con u real.

Solución. Con $s = e^{-ift}u$, los datos son $u(0) = a$ y $\dot{u}(0) = ifa$. Si $\nu = \sqrt{\omega_0^2 + f^2}$, la solución es $s = e^{-ift}[a\cos\nu t + i(fa/\nu)\sin\nu t]$. En las coordenadas de u, el movimiento describe una elipse de semiejes a y $|f|a/\nu$, en lugar de una línea exacta. Cuando $|f| \ll \omega_0$, esa elipse es estrecha y su eje principal rota en el laboratorio con tasa $-f$. La familia real de la proposición 20.23 requiere una pequeña velocidad transversal inicial $\dot{s}(0) = -ifa$; no corresponde exactamente a soltar desde reposo terrestre.

Ejercicio 20.30. Revisa el argumento defectuoso: «Coriolis no hace trabajo, por lo tanto puede eliminarse de la ecuación sin cambiar la trayectoria». Localiza el error y construye una refutación con un cuerpo lanzado desde el origen de una plataforma uniforme.

Solución. La igualdad de potencia solo controla una contribución a la variación de la energía cinética relativa. Una fuerza perpendicular puede cambiar la dirección de la velocidad y, con ello, la trayectoria. Ejercicio 20.18 da para una partícula libre $\mathbf{r} = ut(\cos\Omega t, -\sin\Omega t, 0)$, cuya aceleración inicial es $-2\Omega u\mathbf{e}_y$. Al borrar Coriolis, la ecuación restante tendría aceleración inicial cero porque el término centrífugo se anula en el origen. Ambas soluciones tendrían los mismos datos iniciales y aceleraciones iniciales distintas. Por tanto no representan la misma trayectoria. La reparación consiste en conservar Coriolis en la ecuación vectorial y usar su potencia nula únicamente en el balance escalar donde se ha demostrado.

La base móvil ha permitido escribir las observaciones de una cabina, una plataforma y un laboratorio terrestre sin perder su relación con las leyes inerciales. En el cuerpo rígido la misma velocidad angular describirá simultáneamente muchos puntos. La nueva dificultad será reunir sus masas para calcular momento angular y energía: allí aparecerá el tensor de inercia.

Capítulo 21

Cuerpo rígido: cinemática, rotaciones y tensor de inercia

Una puerta, una rueda y una herramienta que gira en el aire pueden describirse siguiendo muchos puntos. Si sus deformaciones son despreciables, las distancias entre esos puntos permanecen constantes y sus movimientos dejan de ser independientes. Basta conocer una posición y una orientación para reconstruirlos. La velocidad angular del capítulo 20 se convierte entonces en una descripción simultánea de todo el cuerpo.

La distribución de masa añade una dificultad distinta. Dos cuerpos que giran con la misma velocidad angular pueden tener energías y momentos angulares diferentes. Incluso en un mismo cuerpo, cambiar la dirección de giro puede cambiar la relación entre esas cantidades. El tensor de inercia organizará esa dependencia y sus ejes principales permitirán leerla con claridad.

Trabajaremos con el modelo rígido newtoniano, masas positivas y distribuciones con segundo momento finito. La rigidez es una idealización cinemática: no afirma que los materiales reales transmitan perturbaciones instantáneamente ni que puedan soportar cualquier fuerza. Aquí estudiaremos posiciones, velocidades y cantidades mecánicas asociadas. Las ecuaciones que determinan la evolución bajo torque, incluidas las ecuaciones de Euler, quedan para el capítulo 22.

1. Las distancias que no cambian

Una descripción rígida puede comenzar con puntos marcados en un objeto. Si la separación entre cada pareja permanece igual, queremos demostrar que todos se obtienen mediante una misma traslación y una misma orientación. Cuatro puntos no coplanares permiten fijar esas operaciones sin ambigüedad.

Definición 21.1 — Configuración rígida de puntos. Una familia de posiciones etiquetadas $\mathbf{x}_i(t)$ es rígida si $|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)|$ es independiente de t para cada pareja. La configuración de referencia se denota $\mathbf{a}_i$. Se supone continuidad temporal para excluir un salto instantáneo a una imagen reflejada.

Proposición 21.1 — Representación de un movimiento rígido no degenerado. Sea una configuración de referencia que contiene cuatro puntos afínmente independientes. En un intervalo conexo, toda familia continua de configuraciones rígidas que coincide con ella en un instante se representa de manera única como

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{X}(t) + R(t)\mathbf{a}_i, \qquad R^T R = I, \quad \det R = 1.$$

Demostración. Elijamos un punto de referencia $\mathbf{a}_0$ y tres vectores independientes $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0$. Sus imágenes son $\mathbf{c}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0$. Las distancias determinan productos escalares mediante $2\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{b}_k = |\mathbf{b}_j|^2 + |\mathbf{b}_k|^2 - |\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_k|^2$. La rigidez hace que los $\mathbf{c}_j$ tengan la misma matriz de productos escalares. La aplicación lineal única R que lleva $\mathbf{b}_j$ a $\mathbf{c}_j$ conserva, por expansión en esa base, todo producto escalar; por tanto $R^T R = I$. Su determinante es ± 1, depende continuamente del tiempo y vale uno en el instante de referencia. Es uno en todo el intervalo.

Para otro punto, sus distancias a los cuatro elegidos fijan sus productos escalares con los tres vectores de base. Así $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$ y $R(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0)$ tienen los mismos productos escalares con cada $\mathbf{c}_j$; su diferencia es perpendicular a una base y debe ser cero. Tomar $\mathbf{X} = \mathbf{x}_0 - R\mathbf{a}_0$ prueba la representación para todos. Cualquier otra representación debe coincidir en los tres vectores de base y después en el origen, lo que da unicidad. □

Un cuerpo idealizado como una sola varilla no fija una orientación completa: girar sus ejes alrededor de la varilla deja sus puntos donde estaban. Se puede elegir una orientación adicional para calcular, pero esa elección no es información que los puntos de la varilla determinen. Las distribuciones degeneradas reaparecerán al estudiar el núcleo del tensor.

Definición 21.2 — Orientación corporal y coordenadas de centro de masa. Escribiremos $\mathbf{x} = \mathbf{C} + R\mathbf{q}$, donde $\mathbf{C}$ es el centro de masa y $\mathbf{q}$ identifica un punto en una configuración corporal fija, con centro de masa corporal en el origen. La matriz R lleva componentes corporales a componentes inerciales. El conjunto de matrices con $R^T R = I$ y $\det R = 1$ se denota $SO(3)$.

Proposición 21.2 — Separación del centro de masa. Para puntos de masas constantes $m_i > 0$, sea $M = \sum_i m_i$ y $\mathbf{a}_C = M^{-1} \sum_i m_i \mathbf{a}_i$. La representación de la proposición 21.1 se reescribe como

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} + R\mathbf{a}_C, \qquad \mathbf{q}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_C, \qquad \sum_i m_i \mathbf{q}_i = 0.$$

Demostración. Multiplicar la representación de cada punto por su masa y sumar da $M\mathbf{C} = M\mathbf{X} + R\sum_i m_i \mathbf{a}_i$. Sustituir $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_C + \mathbf{q}_i$ produce definición 21.2. La suma ponderada de $\mathbf{q}_i$ es cero por la definición de $\mathbf{a}_C$. □

El centro de masa queda fijo en coordenadas corporales, aunque no pertenezca al material: el centro de un aro está en el hueco. Esa circunstancia no impide usarlo como origen geométrico. La traslación de $\mathbf{C}$ y la orientación R describen aspectos diferentes de la configuración.

Principio metodológico 21.1. Identifica qué puntos fijan realmente la orientación. Separa la configuración geométrica de la distribución de masa que define su centro.

Ejercicios. Ejercicio 21.1. Tres masas iguales ocupan $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, 0, a)$ en una configuración corporal. Encuentra su centro de masa y sus coordenadas centradas.

Solución. El centro es $(a/3, a/3, a/3)$. Las coordenadas centradas son $(2a/3, -a/3, -a/3)$ y sus dos permutaciones. Su suma es cero. Si el conjunto gira y se traslada, su centro físico es $\mathbf{X} + R(a/3, a/3, a/3)$; centrar primero evita mezclar luego términos de traslación y giro.

Ejercicio 21.2. Dos puntos distintos tienen separación fija. ¿Determinan de forma única una matriz $R \in SO(3)$ que represente su orientación?

Solución. No. Determinan la dirección de su segmento, pero una rotación adicional alrededor de esa dirección conserva ambos puntos una vez elegida la traslación. Hay una familia de orientaciones compatible con los mismos datos. Proposición 21.1 usa tres vectores independientes justamente para eliminar esa libertad; la construcción de un marco para una varilla necesita una elección suplementaria.

2. Una rotación finita tiene eje, pero el orden importa

Al mover un objeto de una orientación a otra, la matriz relativa es una rotación. En tres dimensiones puede describirse mediante un eje y un ángulo. Esa representación resulta útil para una transformación individual; componer varias exige conservar su orden.

Proposición 21.3 — Eje de una rotación propia tridimensional. Toda matriz $R \in SO(3)$ tiene un vector unitario $\mathbf{n}$ con $R\mathbf{n} = \mathbf{n}$. El plano perpendicular a $\mathbf{n}$ es invariante y la restricción de R a ese plano es una rotación bidimensional. Si $R \neq I$, su espacio de vectores fijos es exactamente una recta.

Demostración. La identidad $R - I = R(I - R^T)$ y $\det R = 1$ dan $\det(R - I) = \det(I - R^T) = \det(I - R)$. Pero en dimensión tres $\det(I - R) = -\det(R - I)$. Por tanto $\det(R - I) = 0$: existe un vector no nulo que R deja fijo, y lo normalizamos como $\mathbf{n}$. Para $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{n} \cdot R\mathbf{u} = (R^T\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} = 0$, de modo que el plano perpendicular es invariante. Su restricción es ortogonal de determinante uno y tiene la forma de una rotación plana. Si además fijara un vector no nulo en ese plano, esa rotación plana sería la identidad, y entonces $R = I$. □

Proposición 21.4 — Fórmula eje-ángulo. Para un eje unitario orientado $\mathbf{n}$ y ángulo θ, la rotación correspondiente actúa mediante

$$R\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{u} + (1 - \cos\theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{u}).$$

Su traza es $1 + 2\cos\theta$.

Demostración. Descompongamos $\mathbf{u}$ en su proyección axial $\mathbf{u}_\parallel = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}$ y su componente perpendicular. La primera permanece fija. La segunda rota en su plano como $\cos\theta\,\mathbf{u}_\perp + \sin\theta\,\mathbf{n} \times \mathbf{u}_\perp$. Sustituir $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\parallel$ da la fórmula. En una base con tercer eje $\mathbf{n}$, la diagonal contiene $\cos\theta, \cos\theta, 1$; la traza no cambia al cambiar de base. □

La fórmula se conoce como fórmula de Rodrigues.[1] El par eje-ángulo tiene convenciones y excepciones: cambiar $(\mathbf{n}, \theta)$ por $(-\mathbf{n}, -\theta)$ da la misma rotación; los ángulos difieren por múltiplos de 2π; para la identidad el eje es arbitrario. En un giro de π, los dos sentidos del eje representan la misma matriz. La traza recupera el coseno, pero no toda la información sobre el eje ni el sentido.

Si primero aplicamos R_1 a un vector y después R_2, la matriz total es R_2R_1. El orden importa porque el primer giro cambia los vectores sobre los que actúa el segundo. La orientación completa vive en $SO(3)$; no se obtiene sumando sin más tres ángulos de rotaciones finitas.

Principio metodológico 21.2. Escribe qué transformación actúa primero. Distingue un eje de rotación finita de la velocidad angular instantánea de una trayectoria de orientaciones.

Ejercicios. Ejercicio 21.3. Aplica a $\mathbf{e}_x$ giros positivos de $\pi/2$ alrededor de x y de y, en los dos órdenes.

Solución. Si actúa primero el giro alrededor de y, $\mathbf{e}_x$ pasa a $-\mathbf{e}_z$; el giro alrededor de x lleva después ese vector a $\mathbf{e}_y$. Si actúa primero el giro alrededor de x, $\mathbf{e}_x$ permanece igual, y el giro alrededor de y lo lleva a $-\mathbf{e}_z$. Por tanto $R_xR_y\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$ mientras $R_yR_x\mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$. Los ejes usados aquí son fijos; cambiar a giros alrededor de ejes ya movidos exige otra descripción.

Ejercicio 21.4. Para $\mathbf{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ y $\theta = 2\pi/3$, calcula $R\mathbf{e}_x$ mediante proposición 21.4.

Solución. Tenemos $\cos\theta = -1/2$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ y $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x)\mathbf{n} = (1, 1, 1)/3$. El primer término es $(-1/2, 0, 0)$, el segundo $(1/2, 1/2, 1/2)$ y el tercero $(0, 1/2, -1/2)$. Su suma es $\mathbf{e}_y$. La misma rotación lleva $\mathbf{e}_y$ a $\mathbf{e}_z$ y $\mathbf{e}_z$ a $\mathbf{e}_x$, conservando la diagonal dirigida por $\mathbf{n}$.

---

[1] MIT OpenCourseWare, *16.485 Visual Navigation for Autonomous Vehicles*, Lecture 2–3, 2020, representación eje-ángulo y fórmula de Rodrigues: `https://ocw.mit.edu/courses/16-485-visual-navigation-for-autonomous-vehicles-vnav-fall-2020/3d420ad5fb33e6cd304834b3ede12f6f_MIT16_485F20_lec02and03.pdf` . Contraste de convenciones matriciales. Las demostraciones presentes parten de ortogonalidad, determinante y descomposición axial.

3. La velocidad angular no es una lista de tres derivadas de ángulos

Una orientación cambia a lo largo de una curva $R(t)$. Su velocidad angular se obtiene diferenciando esa curva, como en el capítulo 20. Conviene conservar simultáneamente sus componentes corporales y su vector físico: cada uno simplifica una parte diferente de los cálculos.

Definición 21.3 — Velocidad angular corporal e inercial. Para $R(t) \in SO(3)$ de clase C^1, definimos $[\boldsymbol{\Omega}]_\times = R^T\dot{R}$, donde $[\boldsymbol{\Omega}]_\times \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$. El vector inercial es $\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$.

Proposición 21.5 — Ecuaciones de orientación y transporte corporal. La matriz $R^T\dot{R}$ es antisimétrica y determina un único $\boldsymbol{\Omega}$. Se cumple

$$\dot{R} = R[\boldsymbol{\Omega}]_\times = [\boldsymbol{\omega}]_\times R, \qquad \frac{d}{dt}(R\mathbf{a}) = R(\dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}).$$

Demostración. Diferenciar $R^TR = I$ da $\dot{R}^TR + R^T\dot{R} = 0$. Una matriz antisimétrica de orden tres tiene tres entradas independientes y es exactamente la matriz de producto vectorial con un único vector, como se demostró en el capítulo 20. Multiplicar por R da la primera expresión de $\dot{R}$. La identidad $R(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}) = (R\boldsymbol{\Omega}) \times (R\mathbf{a})$ transforma esa expresión en la segunda. La regla del producto aplicada a $R\mathbf{a}$ da la fórmula de transporte. □

Proposición 21.6 — Composición de velocidades angulares. Sean $R = R_1R_2$ y $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ los vectores asociados respectivamente a $\dot{R}_1R_1^T$ y $\dot{R}_2R_2^T$ en sus espacios de componentes. Entonces

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + R_1\boldsymbol{\omega}_2.$$

Demostración. Diferenciar el producto y multiplicar por $R^T = R_2^TR_1^T$ da $\dot{R}R^T = \dot{R}_1R_1^T + R_1(\dot{R}_2R_2^T)R_1^T$. El segundo término es la matriz de producto vectorial con $R_1\boldsymbol{\omega}_2$. La unicidad de ese vector en la proposición 21.5 permite sumar los dos vectores expresados ahora en el mismo espacio. □

La suma existe, pero uno de los sumandos necesita ser rotado. Si una parametrización usa giros sucesivos sobre ejes diferentes, sus derivadas multiplican los ejes instantáneos de cada etapa. Los tres coeficientes no son automáticamente las tres componentes de $\boldsymbol{\omega}$ en una base fija. La composición anterior permite reconstruirlas sin memorizar una convención ambigua de ángulos.

Principio metodológico 21.3. Al componer giros, transforma cada velocidad angular a una base común. La suma vectorial instantánea no hace conmutar las rotaciones finitas.

Ejercicios. Ejercicio 21.5. Sea $R(t) = R_z(\phi(t))R_x(\psi(t))$. Encuentra la velocidad angular inercial.

Solución. La primera etapa tiene $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\phi}\mathbf{e}_z$. La segunda tiene $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\psi}\mathbf{e}_x$ en las coordenadas sobre las que actúa R_z. Proposición 21.6 da $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{e}_z + \dot{\psi}(\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y)$. Aunque solo cambien dos ángulos, el vector puede tener tres componentes inerciales no nulas.

Ejercicio 21.6. Un giro tiene eje fijo $\mathbf{n}$ y ángulo $\theta(t)$. Determina $\boldsymbol{\omega}$ y explica qué información falta si solo conocemos la matriz en un instante.

Solución. Diferenciar proposición 21.4 o aplicar la rotación plana en el plano perpendicular da $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{n}$. Una matriz instantánea fija la orientación, pero no $\dot{\theta}$ ni la posible variación posterior del eje. Dos movimientos pueden pasar por la misma orientación con velocidades angulares distintas. El eje-ángulo de una matriz aislada no sustituye a su derivada temporal.

4. Todos los puntos comparten una ley de velocidades

Los puntos materiales tienen coordenadas corporales constantes. Al derivar $\mathbf{x}=\mathbf{C}+R\mathbf{q}$, el único cambio relativo procede de la base. La velocidad de cada punto se obtiene de su posición respecto del centro de masa y de un mismo vector angular.

$$v_B - v_A = \omega \times (r_B - r_A)$$

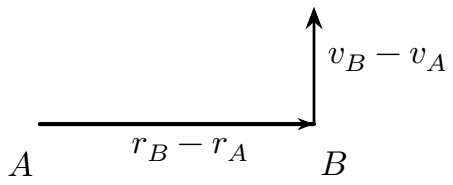


Figura 21.1. La diferencia de velocidades de dos puntos de un rígido es perpendicular a su separación. El esquema muestra ω saliente del plano y un punto A instantáneamente fijo. Véase §4.

Proposición 21.7 — Campo de velocidades rígido. Sea $\mathbf{V}=\dot{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{r}=R\mathbf{q}=\mathbf{x}-\mathbf{C}$. Entonces

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}.$$

Para dos puntos materiales, $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$ y la distancia entre ellos tiene derivada nula.

Demostración. proposición 21.5 con $\dot{\mathbf{q}}=0$ da $\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{C}}+R(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{q})=\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Restar elimina $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{d}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$, la derivada de $|\mathbf{d}|^2$ es $2\mathbf{d}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{d})=0$. $\square$

Proposición 21.8 — Aceleración de un punto material. Para un movimiento rígido de clase C^2, sea $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Entonces

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}).$$

Demostración. Diferenciar proposición 21.7 en el marco inercial da $\ddot{\mathbf{C}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}$. Como el punto está fijado al cuerpo, $\dot{\mathbf{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Sustituir produce la fórmula. $\square$

No aparece Coriolis para un punto fijado al cuerpo porque su velocidad corporal es cero. Un punto que se desliza sobre el cuerpo requiere la fórmula completa del capítulo 20. También hay que distinguir $\boldsymbol{\alpha}$ de una variación de la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$: cambiar su dirección produce aceleración angular aunque su norma permanezca constante.

La rigidez restringe posiciones y velocidades, pero las fuerzas necesarias para mantenerla pertenecen a otro análisis. Proposición 21.8 permite calcular qué aceleración requiere cada punto; no asegura que un material real pueda realizarla sin deformarse o romperse.

Principio metodológico 21.4. Determina si el punto está fijado al cuerpo o se mueve respecto de él. Usa la aceleración material y la aceleración relativa con sus respectivas hipótesis.

Ejercicios. Ejercicio 21.7. El centro de masa tiene velocidad $V\mathbf{e}_x$ y el cuerpo gira con $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{e}_z$. Calcula las velocidades de dos puntos que están en $\mathbf{r}=\pm a\mathbf{e}_y$.

Solución. Para $+a\mathbf{e}_y$, el producto vectorial es $-\omega a\mathbf{e}_x$ y la velocidad es $(V-\omega a)\mathbf{e}_x$. Para el otro punto es $(V+\omega a)\mathbf{e}_x$. Si $V=\omega a$, uno está instantáneamente quieto y el otro tiene velocidad $2V\mathbf{e}_x$. Ambos siguen formando parte del mismo cuerpo rígido.

Ejercicio 21.8. Un cuerpo gira con origen fijo alrededor de z, con rapidez $\omega(t)$. Para un punto en $a\mathbf{e}_x$ en cierto instante, calcula la aceleración y separa sus componentes.

Solución. En ese instante $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\omega}\mathbf{e}_z$. Proposición 21.8 da $\mathbf{a} = -\omega^2 a\mathbf{e}_x + \dot{\omega}a\mathbf{e}_y$. La primera componente cambia la dirección de la velocidad circular y la segunda cambia su magnitud. Si $\dot{\omega} = 0$, sigue habiendo aceleración hacia el eje; si $\omega = 0$ pero $\dot{\omega} \neq 0$, hay aceleración tangencial aunque la velocidad angular instantánea se anule.

5. El eje instantáneo puede moverse

En ejercicio 21.7 apareció un punto con velocidad cero mientras el resto del cuerpo se movía. Es posible describir el campo de velocidades instantáneo a partir de ese punto. El eje obtenido pertenece a un instante; no obliga a que los mismos puntos permanezcan quietos durante un intervalo.

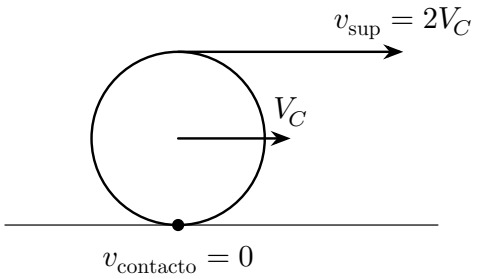


Figura 21.2. Una rueda que avanza hacia la derecha sin deslizar tiene velocidad nula en el contacto instantáneo y velocidad $2V_C$ en el punto superior. La condición es $V_C = R|\omega|$, con giro horario. Véase §5.

Proposición 21.9 — Giro instantáneo cuando existe un punto de velocidad cero. Si $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ y el campo rígido tiene velocidad cero en un punto geométrico O, entonces

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - O).$$

El conjunto geométrico de velocidad cero es la recta $O + \lambda\boldsymbol{\omega}$.

Demostración. proposición 21.7 aplicada al campo en O da $0 = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (O - \mathbf{C})$. Restar esa igualdad de la fórmula del campo en $\mathbf{x}$ produce el resultado. El producto vectorial se anula exactamente para vectores paralelos a $\boldsymbol{\omega}$, de donde sale la recta. □

El campo rígido se extiende geométricamente fuera del material. Su recta de velocidad cero puede atravesar un hueco o no tocar el cuerpo. En un movimiento plano representa el conocido centro instantáneo de rotación al cortar el plano. Usarlo para calcular velocidades no permite afirmar que sea un pivote físico fijo ni que su aceleración sea cero.

Proposición 21.10 — Eje instantáneo del movimiento general. Para $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, definamos

$$\mathbf{r}_* = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}, \qquad h = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}.$$

En la recta $\mathbf{x} = \mathbf{C} + \mathbf{r}_* + \lambda\boldsymbol{\omega}$, la velocidad vale $h\boldsymbol{\omega}$. En cualquier punto,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{C} - \mathbf{r}_*).$$

Demostración. La identidad de producto doble da $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_* = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V})/|\boldsymbol{\omega}|^2 - \mathbf{V} = h\boldsymbol{\omega} - \mathbf{V}$. Sustituirla en la proposición 21.7 produce la descomposición. Sobre la recta, el segundo producto vectorial se anula. Recíprocamente, para que la velocidad sea paralela a $\boldsymbol{\omega}$ debe anularse su componente perpendicular, y la descomposición exige que $\mathbf{x} - \mathbf{C} - \mathbf{r}_*$ sea paralelo al eje. □

La descripción es un giro instantáneo acompañado de una traslación sobre su eje. Si $h = 0$, hay una recta de velocidad cero y se recupera proposición 21.9. Si $h \neq 0$, ningún punto del campo está quieto. Si $\boldsymbol{\omega} = 0$, el movimiento instantáneo es una traslación y no se aplica la división usada en la proposición 21.10. Esta clasificación de velocidades no garantiza que el eje o h sean constantes en el movimiento completo.

Principio metodológico 21.5. Usa el eje instantáneo para velocidades en ese instante. Para aceleraciones conserva la evolución del origen y de la orientación.

Ejercicios. Ejercicio 21.9. Una rueda de radio a rueda sin deslizamiento sobre un suelo horizontal hacia $+x$. En cierto instante $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$ y $\boldsymbol{\omega} = -(V/a)\mathbf{e}_z$. Encuentra el eje de velocidad cero y la velocidad del punto superior.

Solución. proposición 21.10 da $\mathbf{r}_* = -a\mathbf{e}_y$ si y apunta hacia arriba. Además $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V} = 0$, así que $h = 0$. El eje pasa por el punto inferior de contacto y es paralelo a z. Para el punto superior, $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_y$, proposición 21.7 da $\mathbf{v} = V\mathbf{e}_x + (V/a)\mathbf{e}_x = 2V\mathbf{e}_x$. El punto material que está en contacto cambia a medida que la rueda avanza.

Ejercicio 21.10. Toma $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$ y $\mathbf{V} = U\mathbf{e}_x + W\mathbf{e}_z$, con $\omega \neq 0$. Encuentra la recta de la proposición 21.10 y decide cuándo hay puntos quietos.

Solución. Se obtiene $\mathbf{r}_* = (U/\omega)\mathbf{e}_y$ y $h = W/\omega$. La recta pasa por $\mathbf{C} + (U/\omega)\mathbf{e}_y$ y es paralela a z; todos sus puntos tienen velocidad $W\mathbf{e}_z$. Hay puntos de velocidad cero exactamente cuando $W = 0$. La componente transversal de traslación desplaza el eje; la componente axial permanece como avance sobre él.

6. De la distribución de masa a una matriz

El campo de velocidades ya está descrito. Para obtener energía o momento angular debemos ponderarlo con la masa de cada punto. En un giro alrededor de un eje, los puntos alejados de ese eje contribuyen más. En tres dimensiones necesitamos una expresión que permita variar la dirección del eje sin rehacer la integral desde cero.

Definición 21.4 — Distribución corporal de masa. La masa se representa por una medida positiva dm sobre coordenadas corporales $\mathbf{q}$, con $0 < M = \int dm < \infty$ y $\int |\mathbf{q}|^2 dm < \infty$. Si el origen es el centro de masa, $\int \mathbf{q}\, dm = 0$. Para puntos, $\int f\, dm = \sum_i m_i f(\mathbf{q}_i)$; para un volumen con densidad ρ, es $\int f\rho\, dV$. Láminas y varillas usan medidas de superficie y longitud.

La hipótesis de segundo momento finito asegura que las integrales cuadráticas que siguen existen. La masa puede ocupar un volumen, una superficie o una recta; ninguna de esas idealizaciones requiere una densidad volumétrica ordinaria. Su transporte rígido conserva las masas asociadas a las coordenadas corporales.

Definición 21.5 — Tensor de inercia respecto de un punto. Para coordenadas $\mathbf{q}$ medidas desde un punto corporal O, definimos la aplicación lineal

$$I_O = \int \left(|\mathbf{q}|^2 \mathbf{1} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T\right) dm.$$

Aquí $\mathbf{1}$ es la matriz identidad y $\mathbf{q}\mathbf{q}^T$ es la aplicación que lleva $\mathbf{u}$ a $\mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u})$. Su dimensión es masa por longitud al cuadrado. Cuando el punto sea el centro de masa, usaremos I_B para su matriz en ejes corporales.

Proposición 21.11 — Componentes y simetría del tensor. Si $\mathbf{q}=(x,y,z)$, la matriz de la definición 21.5 es

$$I_O=\begin{pmatrix}\int(y^2+z^2)dm & -\int xy\,dm & -\int xz\,dm\\ -\int xy\,dm & \int(x^2+z^2)dm & -\int yz\,dm\\ -\int xz\,dm & -\int yz\,dm & \int(x^2+y^2)dm\end{pmatrix}.$$

Es una matriz real simétrica.

Demostración. Expandir $|\mathbf{q}|^2\mathbf{1}-\mathbf{q}\mathbf{q}^T$ deja en cada entrada diagonal la suma de los otros dos cuadrados y en cada entrada exterior el producto negativo. Integrar entrada a entrada da la fórmula. La integrabilidad de los productos mixtos sigue de $2|xy|\le x^2+y^2$, y análogamente para los otros. Cada matriz integranda es simétrica, por lo que su integral también. □

Algunos textos llaman «productos de inercia» a $\int xy\,dm$ y otros a la entrada negativa de la matriz. La fórmula fijada aquí elimina esa ambigüedad. Para una dirección unitaria $\mathbf{n}$, la distancia de $\mathbf{q}$ al eje que pasa por O con esa dirección es $|\mathbf{n}\times\mathbf{q}|$. Esa distancia aparece exactamente en la forma cuadrática del tensor.

Proposición 21.12 — Positividad y momentos alrededor de ejes. Para cualquier $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u}^T I_O\mathbf{u}=\int|\mathbf{u}\times\mathbf{q}|^2dm\ge 0.$$

Para $|\mathbf{n}|=1$, esta cantidad es el momento escalar $I(\mathbf{n})$ alrededor del eje por O de dirección $\mathbf{n}$. Un vector no nulo pertenece al núcleo de I_O si y solo si la masa está concentrada, salvo un conjunto de masa nula, en la recta por O paralela a ese vector.

Demostración. definición 21.5 da la integral de $|\mathbf{u}|^2|\mathbf{q}|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{q})^2$, igual al cuadrado del producto vectorial. Si la masa está en esa recta, el integrando y la acción de cada matriz integranda sobre $\mathbf{u}$ se anulan, por lo que $I_O\mathbf{u}=0$. Recíprocamente, estar en el núcleo hace nula la forma cuadrática. Una función no negativa de integral cero es cero casi en todas partes, así que $\mathbf{u}\times\mathbf{q}=0$ para casi toda la masa. □

El tensor es definido positivo cuando no existe una recta por el punto de referencia que contenga toda la masa. Una lámina no colineal puede tener los tres momentos principales positivos; ser plana no obliga a un momento nulo. En cambio una varilla ideal sin espesor tiene momento cero sobre su propia recta. Es una consecuencia del modelo de masa, además de una degeneración geométrica.

Principio metodológico 21.6. Calcula la matriz y comprueba sus signos mediante la forma cuadrática. El punto de referencia y la distribución de masa pertenecen a la definición del tensor.

Ejercicios. Ejercicio 21.11. Dos masas iguales m están en $\pm a\mathbf{e}_x$. Calcula su tensor en el centro de masa y su núcleo.

Solución. Cada punto aporta $m\,\mathrm{diag}(0,a^2,a^2)$. La suma es $I_B=\mathrm{diag}(0,2ma^2,2ma^2)$. Para $a\neq 0$, el núcleo es la recta de $\mathbf{e}_x$. Girar idealmente sobre esa recta no mueve las dos masas; un giro alrededor de y o z sí les da velocidad.

Ejercicio 21.12. Tres masas iguales ocupan $(a,0,0)$, $(-a/2,\sqrt{3}a/2,0)$ y $(-a/2,-\sqrt{3}a/2,0)$. Calcula el tensor centrado.

Solución. La suma de posiciones es cero. Las sumas de x^2 e y^2 son ambas $3a^2/2$, la suma de xy es cero y $z=0$. Por proposición 21.11, $I_B=\mathrm{diag}(3ma^2/2,3ma^2/2,3ma^2)$. Si $a\neq 0$, los tres

valores son positivos aunque las masas sean coplanares. Las distancias a cualquier recta que pasa por el centro no se anulan para los tres puntos simultáneamente.

7. El momento angular puede apuntar hacia otro lado

Para una partícula, el momento angular combina posición y velocidad. Al sumar los momentos de un cuerpo rígido, el mismo vector $\boldsymbol{\omega}$ aparece en todas las velocidades, pero cada posición introduce una proyección diferente. El tensor reúne precisamente esa suma.

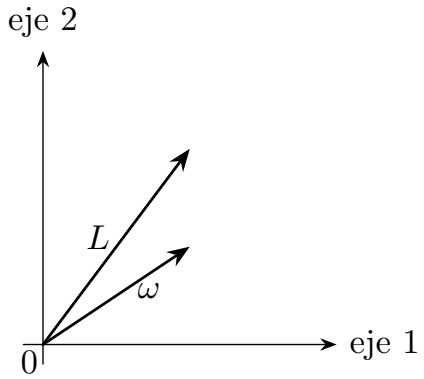


Figura 21.3. Con momentos principales $I_1 = 1$, $I_2 = 2$ y componentes normalizadas $\omega = (1{,}5, 1)$, resulta $L = (1{,}5, 2)$. Fuera de un eje principal, L y ω pueden no ser paralelos. Véase §7.

Proposición 21.13 — Momento angular interno del cuerpo rígido. En el centro de masa, sea $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{C}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. El momento angular interno es

$$\mathbf{H}_C = \int \mathbf{r} \times (\mathbf{v} - \mathbf{V}) dm = I_C \boldsymbol{\omega}, \quad I_C = \int (|\mathbf{r}|^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}\mathbf{r}^T) dm.$$

También se obtiene integrando $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, porque $\int \mathbf{r}\, dm = 0$.

Demostración. El producto triple da $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})$. Integrar es aplicar I_C a $\boldsymbol{\omega}$. La diferencia entre usar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ es $(\int \mathbf{r}\, dm) \times \mathbf{V} = 0$. □

La dirección de $I_C \boldsymbol{\omega}$ puede diferir de la de $\boldsymbol{\omega}$. Una matriz simétrica no multiplica todos los vectores por el mismo número; puede cambiar la proporción de sus componentes. Los ejes en los que ambas direcciones coinciden serán los ejes principales.

Proposición 21.14 — Separación orbital e interna. Respecto de un origen inercial fijo O, el momento angular total satisface

$$\mathbf{L}_O = M(\mathbf{C} - O) \times \mathbf{V} + \mathbf{H}_C.$$

Demostración. Sustituir $\mathbf{x} - O = (\mathbf{C} - O) + \mathbf{r}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ en la integral de $\mathbf{L}_O$. El primer producto da el término orbital. Los dos términos cruzados se anulan: uno contiene $\int \mathbf{r}\, dm$ y el otro $\int \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\, dm = \boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{r}\, dm$. El término restante es proposición 21.13. □

Cambiar el origen modifica el término orbital. El momento interno del centro de masa conserva un significado propio y prepara la ecuación dinámica del capítulo 22. La relación $\mathbf{H}_C = I_C \boldsymbol{\omega}$ es cinemática con masa distribuida: todavía no determina cómo cambia $\boldsymbol{\omega}$ bajo un torque.

Principio metodológico 21.7. Separa momento orbital y momento interno antes de usar el tensor. Un único momento escalar no describe todas las direcciones de giro.

Ejercicios. Ejercicio 21.13. Un tensor corporal diagonal tiene valores $(2J, 3J, 4J)$, con $J > 0$. Para $\boldsymbol{\Omega} = (\omega, \omega, 0)$, calcula el momento angular corporal y decide si es paralelo a la velocidad angular.

Solución. El momento corporal es $I_B\boldsymbol{\Omega} = (2J\omega, 3J\omega, 0)$. Si $\omega \neq 0$, el cociente entre sus dos primeras componentes es $2/3$, distinto del cociente uno de las componentes angulares. No son paralelos. Ambos vectores se transforman por R al marco inercial, de modo que la falta de paralelismo es independiente de la base.

Ejercicio 21.14. Un cuerpo de masa M tiene $\mathbf{C} - O = a\mathbf{e}_x$, $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{H}_C = H\mathbf{e}_z$. Calcula su momento total y encuentra cuándo se anula.

Solución. proposición 21.14 da $\mathbf{L}_O = (MaV + H)\mathbf{e}_z$. Se anula si $H = -MaV$. Esa cancelación permite momento total cero respecto de ese origen aunque exista giro interno y movimiento del centro de masa. No obliga a que todos los puntos estén quietos.

8. Cuánto cuesta mover el cuerpo

La energía cinética suma los cuadrados de las velocidades. Centrar el cuerpo hace desaparecer el término cruzado entre traslación y giro, por la misma condición de masa que separó el momento angular. En otros puntos de referencia ese término puede permanecer.

Proposición 21.15 — Energía cinética en el centro de masa. Para un cuerpo rígido,

$$K = \frac{1}{2}M|\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I_C\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}M|\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T I_B\boldsymbol{\Omega}.$$

Demostración. Expandir $\frac{1}{2}\int |\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|^2 dm$ da la energía de traslación, un término $\mathbf{V}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{r}\,dm) = 0$ y $\frac{1}{2}\int|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|^2dm$. Proposición 21.12 identifica el último con la forma cuadrática de I_C. Como $\mathbf{r} = R\mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$, la invariancia de normas convierte esa integral en la forma corporal. □

Proposición 21.16 — Energía desde un punto corporal que puede moverse. Sea $O(t)$ un punto fijado geométricamente al cuerpo, de velocidad $\mathbf{V}_O$, y sea $\mathbf{d} = \mathbf{C} - O$. Su tensor I_O se expresa aquí en ejes inerciales. Entonces

$$K = \frac{1}{2}M|\mathbf{V}_O|^2 + M\mathbf{V}_O\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{d}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I_O\boldsymbol{\omega}.$$

Si O permanece fijo en el marco inercial, $K = \boldsymbol{\omega}^T I_O\boldsymbol{\omega}/2$.

Demostración. La ley de velocidades respecto de ese punto es $\mathbf{v} = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x} - O)$. Expandir el cuadrado dentro de la integral da tres términos. El término cruzado contiene $\int(\mathbf{x} - O)dm = M\mathbf{d}$ y el término cuadrático de giro se identifica mediante proposición 21.12. Si $\mathbf{V}_O = 0$, desaparecen las dos primeras contribuciones. □

La fórmula de energía puramente rotacional sobre un pivote requiere un pivote fijo. Elegir un punto cualquiera del cuerpo no cumple esa condición. En el centro de masa, $\mathbf{d} = 0$, así que el término cruzado desaparece aunque el origen se mueva. Estas dos simplificaciones tienen razones diferentes y conviene conservarlas separadas.

Principio metodológico 21.8. Comprueba por qué desaparece cada término energético: centro de masa, origen fijo o vínculo concreto. La notación I_O no garantiza ninguna de esas condiciones.

Ejercicios. Ejercicio 21.15. Para el tensor y velocidad del ejercicio 21.13, calcula la energía de giro y verifica $K_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{H}_B/2$.

Solución. La forma cuadrática da $K_{\mathrm{rot}} = (2J\omega^2 + 3J\omega^2)/2 = 5J\omega^2/2$. El producto escalar de $(\omega, \omega, 0)$ con $(2J\omega, 3J\omega, 0)$ da $5J\omega^2$. La energía se calcula correctamente aunque los dos vectores no sean paralelos. Sustituir una norma por un producto escalar sin conservar su ángulo sería un paso injustificado.

Ejercicio 21.16. Una rueda de masa M, radio a y momento central axial J rueda sin deslizamiento con rapidez V. Calcula la energía desde el centro y explica cómo obtenerla desde el contacto instantáneo.

Solución. Desde el centro, proposición 21.15 da $K = MV^2/2 + JV^2/(2a^2)$. En el instante de contacto, la velocidad del punto material inferior es cero, así que la descomposición instantánea de la proposición 21.16 deja $K = I_O V^2/(2a^2)$. El teorema de ejes paralelos, que demostraremos en §12, da $I_O = J + Ma^2$ y reproduce la respuesta. Esta igualdad energética instantánea no hace del contacto un punto material fijo durante el movimiento; para derivadas temporales debe atenderse a su evolución.

9. El tensor corporal permanece fijo; su matriz espacial cambia

La masa no cambia de lugar en las coordenadas del cuerpo. En esas coordenadas, el tensor calculado en un punto corporal es constante. Un observador inercial ve girar sus ejes y, por ello, ve cambiar las entradas de la matriz. Esa variación no significa que el cuerpo esté redistribuyendo su masa.

Proposición 21.17 — Transformación del tensor al marco inercial. Para $\mathbf{r} = R\mathbf{q}$ y tensor central corporal I_B,

$$I_C(t) = R(t) I_B R(t)^T.$$

El momento angular corporal es $\mathbf{H}_B = I_B \boldsymbol{\Omega}$ y el inercial $\mathbf{H}_C = R\mathbf{H}_B$.

Demostración. La norma de $R\mathbf{q}$ es la de $\mathbf{q}$ y $(R\mathbf{q})(R\mathbf{q})^T = R\mathbf{q}\mathbf{q}^T R^T$. Como $R\mathbf{1}R^T = \mathbf{1}$, integrar la definición de I_C permite extraer R y R^T y da la fórmula. Sustituir $\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$ en la proposición 21.13 da $\mathbf{H}_C = R I_B \boldsymbol{\Omega}$; multiplicar por R^T identifica las componentes corporales. □

Proposición 21.18 — Cambio pasivo de base e invariantes. Si las columnas de una matriz ortogonal Q son los nuevos ejes expresados en los anteriores, la matriz del mismo tensor en la nueva base es $I' = Q^T I Q$. Su traza, sus autovalores y su forma cuadrática sobre una dirección física no cambian.

Demostración. Un vector con nuevas componentes $\mathbf{u}'$ tiene componentes anteriores $Q\mathbf{u}'$. Para expresar $I(Q\mathbf{u}')$ en la nueva base se multiplica por Q^T, dando I'. La traza es igual por $\operatorname{tr}(Q^T I Q) = \operatorname{tr}(IQQ^T) = \operatorname{tr} I$. Si $I\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$, entonces $I'(Q^T\mathbf{u}) = \lambda Q^T \mathbf{u}$, y el argumento inverso muestra igualdad de espectros. Finalmente $\mathbf{u}'^T I' \mathbf{u}' = (Q\mathbf{u}')^T I (Q\mathbf{u}')$. □

Proposición 21.17 describe una orientación física variable en una base espacial fija. Proposición 21.18 describe otra base para el mismo objeto en el mismo instante. Las dos fórmulas contienen matrices ortogonales, pero el significado de sus factores determina dónde va cada transpuesta. Una comprobación útil es transformar también un vector y verificar que el resultado conserve la misma relación física.

Principio metodológico 21.9. Declara si giras el cuerpo o cambias los ejes de descripción. Comprueba conjuntamente la transformación del tensor y la del vector sobre el que actúa.

Ejercicios. Ejercicio 21.17. Un tensor corporal tiene $I_B = \operatorname{diag}(A, B, C)$ y el cuerpo gira respecto de los ejes inerciales mediante $R_z(\phi)$. Calcula la matriz espacial.

Solución. Multiplicar RI_BR^T da $I_{xx} = A\cos^2\phi + B\sin^2\phi$, $I_{yy} = A\sin^2\phi + B\cos^2\phi$, $I_{xy} = (A-B)\sin\phi\cos\phi$, $I_{zz} = C$ y $I_{xz} = I_{yz} = 0$. La suma diagonal sigue siendo $A+B+C$. Para $A \neq B$, pueden aparecer entradas mixtas sin que haya deformación; para $A = B$, el giro alrededor de z deja la matriz igual.

Ejercicio 21.18. Comprueba que la energía del ejercicio 21.17 es independiente de la base cuando $\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$.

Solución. La forma inercial es $\boldsymbol{\omega}^T RI_BR^T\boldsymbol{\omega}/2$. Sustituir $\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$ y usar $R^TR = I$ reduce la expresión a $\boldsymbol{\Omega}^T I_B\boldsymbol{\Omega}/2$. La igualdad no exige que I_B sea diagonal: funciona para cualquier tensor transformado con la misma orientación que el vector.

10. Escoger los ejes que simplifican el giro

Las entradas mixtas dependen de la base. Podemos elegir una base que las anule porque el tensor es simétrico. La existencia de esa base tiene una prueba geométrica: una dirección que extrema la forma cuadrática en la esfera unitaria es un autovector, y su plano perpendicular queda preservado por la matriz.

Definición 21.6 — Ejes y momentos principales. Una dirección unitaria $\mathbf{e}_i$ es principal respecto del punto elegido si $I\mathbf{e}_i = J_i\mathbf{e}_i$. El número J_i es su momento principal. Una base principal ortonormal diagonaliza el tensor. Los ejes se refieren al punto y a la distribución de masa usados al definirlo.

Proposición 21.19 — Existencia de una base principal. Todo tensor de inercia admite una base ortonormal de autovectores con momentos $J_i \geq 0$. La base puede elegirse orientada positivamente.

Demostración. La función continua $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}^T I\mathbf{u}$ alcanza un extremo en la esfera unitaria, que es compacta. Sea $\mathbf{e}_1$ una dirección extrema. Para cualquier $\mathbf{v} \perp \mathbf{e}_1$, la curva $(\mathbf{e}_1 + s\mathbf{v})/|\mathbf{e}_1 + s\mathbf{v}|$ tiene derivada inicial $\mathbf{v}$. La derivada de la forma cuadrática allí es $2\mathbf{v}^T I\mathbf{e}_1$, que debe ser cero. Así $I\mathbf{e}_1$ es paralelo a $\mathbf{e}_1$. La simetría implica que su plano perpendicular es invariante: $\mathbf{e}_1 \cdot I\mathbf{v} = (I\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{v} = 0$.

Repetir el argumento sobre la circunferencia unitaria de ese plano produce un segundo autovector perpendicular. La recta restante es invariante y da un tercero. Sus autovalores son $\mathbf{e}_i^T I\mathbf{e}_i \geq 0$ por la proposición 21.12. Cambiar el signo de uno de los vectores, si hace falta, conserva su condición de autovector y hace positivo el determinante de la base. □

Si dos momentos son iguales, cualquier base ortonormal de su plano propio sirve. Si los tres son iguales, todas las direcciones son principales. Cuando los valores son distintos, cada recta propia está determinada, aunque los signos y el orden de los ejes sigan siendo convenciones. Tener ejes principales no exige una simetría visible del contorno: la diagonalización existe para cualquier distribución admitida.

Proposición 21.20 — Lectura energética y direccional en ejes principales. En una base principal,

$$\mathbf{H}_B = (J_1\Omega_1, J_2\Omega_2, J_3\Omega_3), \qquad K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} J_i\Omega_i^2.$$

Si $J_{\mathrm{mín}}$ y $J_{\mathrm{máx}}$ son los valores extremo, entonces

$$\frac{1}{2}J_{\mín}|\boldsymbol{\Omega}|^2 \le K_{\rot} \le \frac{1}{2}J_{\máx}|\boldsymbol{\Omega}|^2.$$

Para $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$, $I_B\boldsymbol{\Omega}$ es colineal con $\boldsymbol{\Omega}$ exactamente cuando esta pertenece a un espacio propio.

Demostración. En la base diagonal, proposición 21.13 y proposición 21.15 dan las dos primeras fórmulas. Cada coeficiente J_i está entre los extremos y cada Ω_i^2 es no negativo, de donde salen las cotas. La condición $I_B\boldsymbol{\Omega} = \lambda\boldsymbol{\Omega}$ equivale a $(J_i - \lambda)\Omega_i = 0$ para cada componente: las componentes no nulas deben pertenecer al mismo autovalor. Esto caracteriza un espacio propio. Si ese valor es cero, el momento es el vector cero; aquí «colineal» incluye ese caso degenerado. □

Las cotas comparan giros con una rapidez angular fijada. Si en cambio se fija la magnitud del momento angular, la comparación cambia. Para un tensor definido positivo, $\boldsymbol{\Omega} = I_B^{-1}\mathbf{H}_B$ y la energía es $\mathbf{H}_B^T I_B^{-1}\mathbf{H}_B/2$. A momento fijado, una dirección de mayor inercia requiere menor energía. Tampoco estas comparaciones energéticas deciden qué giros libres son estables; esa pregunta dinámica pertenece al capítulo 22.

Principio metodológico 21.10. Especifica qué cantidad mantienes fija al comparar giros. Diagonalizar organiza la cinemática y la energía; la estabilidad requiere la ecuación de evolución.

Ejercicios. Ejercicio 21.19. Diagonaliza $I = J\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, con $J > 0$.

Solución. El vector $(1,1,0)/\sqrt{2}$ tiene autovalor $2J$. El vector $(-1,1,0)/\sqrt{2}$ tiene autovalor $4J$ y $\mathbf{e}_z$ también $4J$. Son ortonormales y, en ese orden, forman una base positiva. El plano perpendicular al primer vector es un espacio propio doble; cualquier base ortonormal orientada compatible dentro de él diagonaliza la matriz. El signo negativo de la entrada mixta determina qué diagonal del plano tiene el momento menor.

Ejercicio 21.20. Para momentos principales $2J, 3J, 4J$, compara las energías mínima y máxima a rapidez angular ω fija y a magnitud de momento H fija.

Solución. A rapidez fija, las cotas son $J\omega^2$ y $2J\omega^2$, alcanzadas sobre los ejes de $2J$ y $4J$. A momento fijo, la energía sobre un eje de momento J_i es $H^2/(2J_i)$. El mínimo es $H^2/(8J)$ en el eje de $4J$ y el máximo $H^2/(4J)$ en el de $2J$. Invertir qué se mantiene fijo invierte la comparación.

11. La simetría puede ahorrar integrales

Una distribución simétrica hace que ciertas contribuciones se cancelen por parejas. La simetría relevante es la de la masa, no solo la del borde. Una placa de contorno simétrico con densidad desigual puede conservar productos de inercia que el dibujo invita a borrar.

Definición 21.7 — Simetría ortogonal de la masa respecto de un punto. Una matriz ortogonal S, propia o impropia, es simetría de la distribución centrada en el punto si $\int f(S\mathbf{q})dm = \int f(\mathbf{q})dm$ para toda función integrable pertinente. La condición dice que transformar las posiciones por S conserva la medida de masa.

Proposición 21.21 — Consecuencias tensoriales de una simetría. Una simetría S cumple $SI_OS^T = I_O$, y por tanto $SI_O = I_OS$. La reflexión respecto del plano $x = 0$ hace nulas las entradas I_{xy} e I_{xz}. Si la masa es invariante bajo todos los giros alrededor de z, entonces $I_O = \operatorname{diag}(A, A, C)$ en ejes con ese eje z.

Demostración. El cambio $\mathbf{q} \mapsto S\mathbf{q}$ conserva normas y transforma el integrando de la definición 21.5 en

$$S(|\mathbf{q}|^2\mathbf{1} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T)S^T.$$

La simetría de la medida prueba la primera igualdad; multiplicar por S a la derecha da la conmutación. Para la reflexión $S = \operatorname{diag}(-1, 1, 1)$, las entradas xy y xz cambian de signo al conjugar, así que deben ser cero. En la simetría axial, el giro de π anula xz e yz; el de $\pi/2$ exige $I_{xx} = I_{yy}$ e invierte el signo de I_{xy}, que también se anula. □

Una reflexión sola no borra I_{yz}. Tres planos coordenados de simetría bastan para diagonalizar, pero esa condición es suficiente y no necesaria. La existencia general de ejes principales procede de la proposición 21.19, incluso cuando no podemos identificarlos por inspección de la distribución.[2]

Proposición 21.22 — Teorema de ejes perpendiculares para una distribución plana. Si toda la masa está en el plano $z = 0$ y el punto de referencia pertenece a ese plano, entonces

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}, \qquad I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Demostración. En proposición 21.11, $z = 0$ para casi toda la masa. Así $I_{xx} = \int y^2 dm$, $I_{yy} = \int x^2 dm$ e $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$. Los productos que contienen z se anulan. □

El eje normal al plano es principal, pero los ejes elegidos dentro del plano pueden tener $I_{xy} \neq 0$. El teorema no afirma que todos los momentos de un cuerpo volumétrico satisfagan una igualdad semejante. La posición del punto de referencia también importa: desplazarlo fuera de la lámina introduce cuadrados de la distancia al plano.

Principio metodológico 21.11. Usa una simetría de la medida de masa y expresa qué entradas transforma. Comprueba las condiciones geométricas antes de aplicar una identidad de ejes.

Ejercicios. Ejercicio 21.21. Una distribución es simétrica respecto de $x = 0$, pero no se conoce ninguna otra simetría. Escribe la forma más general de su tensor y determina un eje principal garantizado.

Solución. proposición 21.21 da $I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & D \\ 0 & D & C \end{pmatrix}$. El eje x es principal con momento A. El bloque yz necesita diagonalización si $D \neq 0$; la reflexión dada no cambia el signo de yz y no autoriza borrarlo. La positividad del tensor impone además restricciones a ese bloque.

Ejercicio 21.22. Una lámina tiene $I_{xx} = 2J$, $I_{yy} = 5J$ e $I_{xy} = J$, con z normal a su plano y origen en él. Calcula el momento normal y los momentos principales del plano.

Solución. proposición 21.22 da $I_{zz} = 7J$. Los valores propios del bloque $J \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ satisfacen $\lambda^2 - 7J\lambda + 9J^2 = 0$, por lo que son $J(7 \pm \sqrt{13})/2$. Su suma es $7J$, igual al momento normal. El valor mixto rota los ejes principales del plano sin alterar esa suma.

12. Cambiar el punto, conservar la dirección del eje

Hasta aquí los cambios de base conservaron el punto de referencia. Mover el punto cambia las distancias de la masa a los ejes y, por tanto, cambia el tensor físico. El centro de masa hace especialmente simple esa traslación, porque anula los primeros momentos.

[2] MIT OpenCourseWare, *16.07 Dynamics*, Lecture L26, *3D Rigid Body Dynamics: The Inertia Tensor*: `https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/dd277ec654440f4c2b5b07d6c286c3fd_MIT16_07F09_Lec26.pdf` ; G. J. Sussman y J. Wisdom, *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*, segunda edición, capítulo 2: `https://mitp-content-server.mit.edu/books/content/sectbyfn/books_pres_0/9579/sicm_edition_2.zip/chapter002.html` . Contraste de tensor, base principal y energía. En la lectura de L26 debe corregirse una inversión verbal en la descripción del problema característico: los autovectores dan direcciones y los autovalores dan momentos. Proposición 21.19 fija aquí esa correspondencia mediante prueba propia.

$$I = I_C + Md^2$$

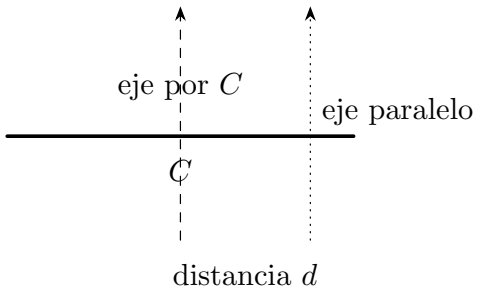


Figura 21.4. Para una misma dirección de giro, desplazar el eje una distancia perpendicular d desde el centro de masa añade Md^2 al momento de inercia. Véase §12.

Definición 21.8 — Tensor y momento sobre ejes trasladados. Sean O y C el nuevo punto y el centro de masa, con $\mathbf{d} = C - O$. Usaremos ejes paralelos de la misma orientación en ambos puntos, y $\mathbf{r}$ denotará posición relativa a C. Una dirección unitaria $\mathbf{n}$ define momentos $I_O(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^T I_O \mathbf{n}$ e $I_C(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^T I_C \mathbf{n}$.

Proposición 21.23 — Teorema tensorial de ejes paralelos. Bajo definición 21.8,

$$I_O = I_C + M\left(|\mathbf{d}|^2 \mathbf{1} - \mathbf{d}\mathbf{d}^T\right),$$

y para la misma dirección unitaria, $I_O(\mathbf{n}) = I_C(\mathbf{n}) + M|\mathbf{n} \times \mathbf{d}|^2$.

Demostración. La posición desde O es $\mathbf{r} + \mathbf{d}$. Al expandir $|\mathbf{r} + \mathbf{d}|^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r} + \mathbf{d})(\mathbf{r} + \mathbf{d})^T$, queda el integrando central, el término constante $|\mathbf{d}|^2 \mathbf{1} - \mathbf{d}\mathbf{d}^T$ y términos lineales en $\mathbf{r}$. Los últimos integran a cero porque $\int \mathbf{r}\, dm = 0$. La integral del término constante multiplica por M y da la primera fórmula. Multiplicarla por $\mathbf{n}^T$ y $\mathbf{n}$ usa proposición 21.12 para obtener la segunda. □

La distancia que importa en la fórmula escalar es la separación perpendicular de los ejes. Si $\mathbf{d}$ es paralelo a $\mathbf{n}$, ambos puntos definen la misma recta y el momento escalar no cambia. El tensor completo sí puede cambiar: las otras direcciones pasan por rectas diferentes. Para trasladar entre dos puntos que no sean el centro de masa, se puede aplicar proposición 21.23 dos veces, conservando las orientaciones.[3]

Las entradas mixtas también cambian. En particular, $I_{O,xy} = I_{C,xy} - M d_x d_y$. Trasladar todos los momentos diagonales correctamente y conservar sin justificación las entradas mixtas puede producir un tensor inconsistente. El término añadido es semidefinido positivo, de modo que el momento sobre cada dirección no disminuye al pasar del eje central al paralelo desplazado.

Principio metodológico 21.12. Distingue rotación de base y traslación del punto. En ejes paralelos usa la distancia perpendicular y aplica la corrección a la matriz completa.

Ejercicios. Ejercicio 21.23. Una varilla uniforme de longitud l y masa M está sobre x, centrada en el origen. Calcula su tensor central y el tensor en un extremo.

---

[3]MIT OpenCourseWare, *8.09 Classical Mechanics III*, capítulo 2, *Rigid Body Dynamics*, ecuación 2.49: `https://ocw.mit.edu/courses/8-09-classical-mechanics-iii-fall-2014/6fe39e8d5ce4ce746ca256dfea665eda_MIT8_09F14_Chapter_2.pdf` . Contraste de traslación tensorial del punto. El teorema se demuestra en la proposición 21.23 expandiendo la integral y usando los primeros momentos centrales nulos.

Solución. La densidad lineal es M/l y $\int x^2 dm = (M/l)\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = Ml^2/12$. Por proposición 21.11, $I_C = \operatorname{diag}(0, Ml^2/12, Ml^2/12)$. Para un extremo, $|d_x| = l/2$ y proposición 21.23 añade $\operatorname{diag}(0, Ml^2/4, Ml^2/4)$. El resultado es $\operatorname{diag}(0, Ml^2/3, Ml^2/3)$. La recta longitudinal es la misma en ambos puntos y su momento sigue siendo cero.

Ejercicio 21.24. Un cuerpo tiene tensor central $I_C = J\mathbf{1}$ y se cambia el punto mediante $\mathbf{d} = a(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$. Calcula I_O y sus ejes principales.

Solución. La corrección es $Ma^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La dirección $(1,1,0)/\sqrt{2}$, paralela a $\mathbf{d}$, conserva el momento J. Las dos direcciones perpendiculares tienen momento $J + 2Ma^2$. Una distribución isotrópica en el centro puede, por tanto, tener un tensor no isotrópico respecto de otro punto, con entradas mixtas en los ejes anteriores.

13. Integrar cuerpos sencillos con una idea común

La fórmula del tensor parece contener seis integrales independientes. Las simetrías suelen reducirlas a dos o una, y las coordenadas adaptadas a la forma vuelven visible qué distancia se está promediando. Conviene hacer al menos un cálculo completo antes de usar tablas de momentos.

Proposición 21.24 — Tres distribuciones homogéneas centradas. Con los ejes indicados, los tensores centrales son:

Distribución	Tensor central
Lámina rectangular, $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $z = 0$	$\frac{M}{3}\operatorname{diag}(b^2, a^2, a^2+b^2)$
Disco delgado de radio a en $z = 0$	$Ma^2 \operatorname{diag}(1/4, 1/4, 1/2)$
Esfera maciza de radio a	$\frac{2}{5}Ma^2\mathbf{1}$

Demostración. En el rectángulo, la densidad superficial es $M/(4ab)$, suponiendo $a, b > 0$. Las reflexiones hacen nulos los productos mixtos. La integral de x^2 es $[M/(4ab)](2a^3/3)(2b) = Ma^2/3$, y la de y^2 es $Mb^2/3$. Proposición 21.11 y proposición 21.22 dan la primera fila.

En el disco, la densidad es $M/(\pi a^2)$. En coordenadas polares, $x = r\cos\varphi$ y $dA = r\,dr\,d\varphi$. Así $\int x^2 dm = [M/(\pi a^2)]\int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = Ma^2/4$. La simetría hace igual la integral de y^2 y anula la mixta. La suma da el momento normal $Ma^2/2$.

En la esfera, las reflexiones anulan las entradas mixtas y la simetría hace iguales las integrales de los tres cuadrados. La densidad volumétrica es $3M/(4\pi a^3)$. La integral de $|\mathbf{q}|^2$ es $[3M/(4\pi a^3)]4\pi\int_0^a r^4 dr = 3Ma^2/5$. Cada cuadrado aporta $Ma^2/5$, y cada momento diagonal suma dos de ellos, dando $2Ma^2/5$. □

La esfera maciza y una cáscara esférica no distribuyen la masa de la misma manera. En una cáscara de radio a, todos los puntos tienen $|\mathbf{q}|^2 = a^2$, por lo que las tres integrales iguales valen $Ma^2/3$ y el tensor es $2Ma^2\mathbf{1}/3$. Concentrar masa más lejos del centro aumenta la inercia sin cambiar la masa total ni el radio exterior.

Para cuerpos compuestos, el tensor se suma una vez que todas las piezas se han expresado respecto del mismo punto y en la misma base. Si una tabla da el tensor central de cada pieza, antes de sumar hay que trasladarlo por la proposición 21.23 y orientarlo por la proposición 21.18 o proposición 21.17. La suma de matrices no corrige por sí sola diferencias de origen.

Principio metodológico 21.13. Empieza por simetría, normalización de masa y coordenadas de integración. Para ensamblar piezas, unifica punto y base antes de sumar sus tensores.

Ejercicios. Ejercicio 21.25. Calcula el momento de una lámina rectangular de la proposición 21.24 sobre una dirección unitaria $\mathbf{n} = (\cos\beta, \sin\beta, 0)$ que pasa por el centro.

Solución. proposición 21.12 da $I(\mathbf{n}) = M[b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta]/3$. Para $\beta = 0$ se obtiene el momento sobre x y para $\beta = \pi/2$ el de y. Si $a = b$, la respuesta es independiente de la dirección del eje en el plano, aunque el cuadrado no tenga simetría geométrica bajo todos los ángulos de giro. El tensor puede tener una simetría mayor que la forma material.

Ejercicio 21.26. Dos esferas macizas iguales, cada una de masa m y radio a, tienen centros en $\pm d\mathbf{e}_x$ y se unen rígidamente con un soporte de masa despreciable. Calcula el tensor total sobre su centro común.

Solución. Cada tensor central es $2ma^2\mathbf{1}/5$. Proposición 21.23 añade para cada esfera $md^2\,\mathrm{diag}(0,1,1)$. Sumar las dos matrices da $I = \mathrm{diag}(4ma^2/5, 4ma^2/5+2md^2, 4ma^2/5+2md^2)$. La dirección de los centros tiene el momento menor. Para un modelo material de esferas no superpuestas se requiere $d \geq a$; la suma algebraica representa la medida indicada incluso si se superponen idealmente.

14. Qué matrices pueden ser una inercia

La simetría y la positividad son necesarias, pero aún no bastan para cualquier matriz candidata. Cada momento principal suma dos promedios de cuadrados y esos promedios deben ser no negativos. Esta observación proporciona una comprobación adicional y una pequeña reconstrucción de distribuciones.

Proposición 21.25 — Desigualdades y realización de momentos principales. Los momentos principales de una distribución de masa satisfacen

$$J_1 + J_2 \geq J_3, \qquad J_2 + J_3 \geq J_1, \qquad J_3 + J_1 \geq J_2.$$

La igualdad $J_1+J_2 = J_3$ equivale a que la masa esté concentrada en el plano corporal $q_3 = 0$, salvo un conjunto de masa nula. Recíprocamente, toda terna no negativa que cumpla esas desigualdades se realiza como momentos centrales de una distribución puntual de cualquier masa total prescrita $M > 0$.

Demostración. En ejes principales, proposición 21.11 da $J_1 + J_2 - J_3 = 2\int q_3^2\,dm \geq 0$, y las otras relaciones resultan por permutación. La integral se anula exactamente cuando $q_3 = 0$ para casi toda la masa.

Para la realización, pongamos $Q_i = (J_j + J_k - J_i)/2$ con $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Las desigualdades aseguran $Q_i \geq 0$. Coloquemos dos masas de $M/6$ en cada pareja de puntos $\pm\sqrt{3Q_i/M}\,\mathbf{e}_i$. La suma de masas es M y su centro es cero por parejas. Las integrales de q_i^2 valen Q_i y las mixtas son cero. El momento sobre el eje i es $Q_j + Q_k = J_i$. Si algún Q_i es cero, la pareja coincide en el origen, lo que sigue definiendo una medida positiva válida. □

La realización puntual no reconstruye de forma única un cuerpo real. Muchos objetos comparten tensor; el tensor registra segundos momentos y omite otros detalles de la distribución. Tampoco la demostración exige que la medida tenga volumen o superficie continua. Es una caracterización de los datos de inercia dentro del modelo de masa admitido.

La orientación seguirá describiéndose por una curva en $SO(3)$. En un instante, sus posibles velocidades se identifican con matrices antisimétricas de tres entradas independientes, o con un

vector angular. La composición finita conserva la información del orden que vimos en §2. Esta relación entre orientación y velocidad angular ofrece una primera entrada geométrica al espacio de rotaciones; no convierte todo giro finito en una suma de vectores. Para usarla dinámicamente habrá que transportar también el momento angular y relacionar su derivada con el torque.

Principio metodológico 21.14. Comprueba simetría, positividad y desigualdades principales de una matriz candidata. Distingue los datos que determina el tensor de la forma material y de la ley dinámica que todavía falta.

Problemas de integración. Ejercicio 21.27. Un tensor central tiene momentos principales $2J, 3J, 4J$. El cuerpo gira con rapidez ω sobre una dirección que forma ángulos iguales con los tres ejes principales. Calcula energía y norma del momento angular, y decide si ambos vectores son colineales.

Solución. Podemos tomar $\boldsymbol{\Omega} = \omega(1,1,1)/\sqrt{3}$; otras elecciones de signos dan las mismas dos cantidades escalares. Proposición 21.20 da $K_{\mathrm{rot}} = (\omega^2/6)(2J + 3J + 4J) = 3J\omega^2/2$. El momento es $J\omega(2,3,4)/\sqrt{3}$ y su norma $J|\omega|\sqrt{29/3}$. Si $\omega \neq 0$, sus componentes no son proporcionales a las de $\boldsymbol{\Omega}$, así que no son colineales. Usar $|\mathbf{H}||\boldsymbol{\Omega}|/2$ para la energía daría un valor incorrecto porque omitiría el ángulo entre ambos.

Ejercicio 21.28. Un disco delgado homogéneo de masa M y radio a gira sobre un eje fijo contenido en su plano y tangente a su circunferencia. Calcula su momento y energía a rapidez angular ω.

Solución. El eje es una recta en el plano del disco, paralela a un diámetro y a distancia a del centro, tangente al borde. El momento central sobre la dirección del diámetro es $Ma^2/4$ por la proposición 21.24. Proposición 21.23 añade Ma^2, así que $I_O = 5Ma^2/4$. Como el eje es fijo en el marco inercial, proposición 21.16 da $K = 5Ma^2\omega^2/8$. No debe usarse el momento normal $Ma^2/2$: la dirección del eje especificado está en el plano.

Ejercicio 21.29. Para momentos principales $(6J, 8J, 10J)$ y masa total M, construye la distribución de seis puntos de la proposición 21.25.

Solución. Las integrales cuadráticas requeridas son $Q_1 = (8 + 10 - 6)J/2 = 6J$, $Q_2 = 4J$ y $Q_3 = 2J$. Cada punto tiene masa $M/6$. Las parejas están en $\pm\sqrt{18J/M}\,\mathbf{e}_1$, $\pm\sqrt{12J/M}\,\mathbf{e}_2$ y $\pm\sqrt{6J/M}\,\mathbf{e}_3$. Las sumas de primeros momentos son cero y las integrales de cuadrados son respectivamente $6J, 4J, 2J$. Por proposición 21.11, los momentos son $4J + 2J$, $6J + 2J$ y $6J + 4J$, como se pidió.

Ejercicio 21.30. Revisa la afirmación defectuosa: «Toda matriz simétrica definida positiva puede representar un tensor de inercia». Usa la matriz $J\,\mathrm{diag}(1,1,3)$, con $J > 0$, para localizar la falla y formular un criterio correcto en el modelo de la definición 21.4.

Solución. La matriz es simétrica y su forma cuadrática es positiva para todo vector no nulo. Sin embargo $J_1 + J_2 = 2J < 3J = J_3$, contradiciendo proposición 21.25. Equivalentemente, exigiría $\int q_3^2\,dm = (J_1 + J_2 - J_3)/2 = -J/2$, imposible para masa positiva. El criterio correcto es simetría, autovalores no negativos y las tres desigualdades triangulares de momentos. Son necesarios por la proposición 21.11, proposición 21.12 y proposición 21.25, y suficientes para una realización puntual por la construcción de la proposición 21.25 después de orientar los ejes mediante una matriz ortogonal. El tensor no puede elegirse ignorando que procede de una distribución de masa.

Tenemos una orientación, una velocidad angular y una aplicación que convierte esa velocidad en momento angular. En el capítulo 22 la distribución permanecerá fija en ejes corporales mientras el momento angular cambiará según el torque. La regla de transporte del capítulo 20 permitirá reunir esos dos hechos y obtener las ecuaciones de dinámica del cuerpo rígido.

Capítulo 22

Cuerpo rígido: dinámica

Un cuerpo que gira puede conservar su momento angular mientras cambia la dirección de su velocidad angular. Una rueda sostenida por un eje necesita reacciones que no se ven en el balance escalar del motor. Un trompo inclinado puede mantener una inclinación constante o variar entre dos alturas. Para distinguir estos movimientos hay que reunir la distribución de masa del capítulo 21 con el balance de torque.

La dificultad principal aparece al escoger los ejes. En el espacio, la derivada del momento angular es el torque. En ejes fijados al cuerpo, el tensor permanece constante, pero la derivada de sus componentes incluye el transporte de la base. Las ecuaciones de Euler nacen de escribir coherentemente ambos hechos. Sus términos cruzados contienen buena parte de la dinámica que una fórmula de un solo eje deja fuera.

Supondremos masas constantes, rigidez ideal, tensor definido positivo y fuerzas cuyo torque interno total se cancela. Un sistema discreto de fuerzas internas centrales por parejas satisface esa última condición. Los momentos principales serán positivos; las distribuciones degeneradas del capítulo 21 necesitan un tratamiento separado cuando una ecuación requiera dividir por un momento nulo. El giro se estudia respecto del centro de masa o de un punto corporal fijo en un marco inercial, según se declare.

1. Escoger el punto antes de derivar el momento

El momento angular depende del punto sobre el que se calcula. Para el cuerpo libre, el centro de masa separa el movimiento interno. Para un trompo sujeto, el pivote fijo permite incluir la gravedad y eliminar del torque la reacción aplicada en ese punto. Estas dos elecciones tienen justificaciones distintas.

Definición 22.1 — Torque externo sobre el centro o el pivote. Escribimos $\boldsymbol{\tau}_C = \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{C}) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ para el centro de masa. Sobre un pivote O, el torque es $\boldsymbol{\tau}_O = \sum_i (\mathbf{x}_i - O) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$. Una fuerza aplicada exactamente en el punto elegido tiene brazo nulo; un par de fuerzas puede conservar torque aunque la fuerza neta sea cero.

Proposición 22.1 — Balance del momento interno central. Para un cuerpo de masa constante, cuyo torque interno total es cero,

$$\frac{d\mathbf{H}_C}{dt} = \boldsymbol{\tau}_C, \qquad \mathbf{H}_C = \int (\mathbf{x} - \mathbf{C}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{V}) dm.$$

La derivada de la izquierda se toma en el marco inercial.

Demostración. En un sistema discreto, pongamos $\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{C}$. Derivar cada producto da $\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = 0$ y $\mathbf{r}_i \times m_i(\mathbf{a}_i - \ddot{\mathbf{C}})$. El término con $\ddot{\mathbf{C}}$ se anula al sumar porque $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0$. Las aceleraciones restantes se sustituyen mediante Newton. Los torques internos se cancelan por hipótesis y queda el externo. Para una distribución continua suficientemente regular, el mismo

balance se formula con la integral de fuerzas y los torques internos netos; requiere las hipótesis de intercambio de derivada e integral o su balance integral equivalente. □

Proposición 22.2 — Balance sobre un punto corporal fijo. Si un punto corporal O permanece fijo en el marco inercial, entonces

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_O, \qquad \mathbf{L}_O = I_O(t)\boldsymbol{\omega}.$$

Una reacción puntual en O no contribuye al torque sobre O.

Demostración. Con O fijo, derivar $\int (\mathbf{x}-O)\times\mathbf{v}\,dm$ deja $\int(\mathbf{x}-O)\times\mathbf{a}\,dm$, porque $\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0$. El balance de fuerzas y la cancelación interna dan el torque externo. La velocidad de un punto del cuerpo es $\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x}-O)$; la identidad de producto triple usada en el capítulo 21 convierte la integral en $I_O\boldsymbol{\omega}$. Una fuerza en O tiene brazo cero. □

Un punto que está instantáneamente quieto no cumple necesariamente la hipótesis de pivote fijo durante un intervalo. El contacto de una rueda que rueda exige atender al cambio de punto y a su aceleración. Tampoco un cojinete real se reduce siempre a una fuerza puntual: un soporte puede ejercer un par, y ese torque debe conservarse si el modelo lo incluye.

Principio metodológico 22.1. Declara el punto del balance y las reacciones que elimina. La aceleración del centro de masa y la fijación de un pivote justifican simplificaciones diferentes.

Ejercicios. Ejercicio 22.1. Dos fuerzas opuestas $\pm F\mathbf{e}_y$ se aplican en puntos situados a $\pm a\mathbf{e}_x$ respecto del centro. Calcula fuerza neta y torque.

Solución. La fuerza neta es cero. El torque del punto positivo es $aF\mathbf{e}_z$ y el del negativo también, porque cambian simultáneamente brazo y fuerza. El torque total es $2aF\mathbf{e}_z$. El centro no recibe aceleración por ese par, pero el momento interno puede cambiar.

Ejercicio 22.2. Una masa rígidamente distribuida tiene centro $G = O + l\mathbf{n}$ y está sujeta a un pivote fijo O. Un campo gravitatorio uniforme ejerce gravedad $-Mg\mathbf{e}_z$. Encuentra su torque y explica qué datos no determina este cálculo.

Solución. La gravedad total actúa para el torque como $-Mg\mathbf{e}_z$ en el centro, de modo que $\boldsymbol{\tau}_O = -Mgl\mathbf{n}\times\mathbf{e}_z = Mgl\mathbf{e}_z\times\mathbf{n}$. El pivote puntual no añade torque sobre sí mismo. El cálculo no determina por sí solo la reacción del soporte; para ella hacen falta la aceleración del centro y el balance de fuerza neta. También hace falta el tensor sobre O para obtener la evolución angular.

2. Derivar en ejes que giran con el cuerpo

Sea I la matriz corporal constante del tensor sobre el punto del balance. El momento corporal es $I\boldsymbol{\Omega}$, mientras el momento físico es $RI\boldsymbol{\Omega}$. La derivada de ese producto debe conservar el término de transporte, incluso si el tensor corporal es diagonal.

Definición 22.2 — Estado angular y torque corporal. El estado angular se describe mediante $R(t)\in SO(3)$ y $\boldsymbol{\Omega}(t)$, con $\dot R = R[\boldsymbol{\Omega}]_\times$. El torque corporal es $\mathbf{T} = R^T\boldsymbol{\tau}$. La matriz I se calcula sobre el centro de masa en la proposición 22.1 o sobre el pivote fijo en la proposición 22.2.

Proposición 22.3 — Ecuación vectorial de Euler. En cualquiera de esos dos casos,

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\times(I\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{T}.$$

Demostración. El balance inercial es $d(RI\boldsymbol{\Omega})/dt = \boldsymbol{\tau}$. La regla de transporte del capítulo 20 da $R[I\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\times(I\boldsymbol{\Omega})]$, porque I es constante en el cuerpo. Multiplicar por R^T produce la ecuación. □

Proposición 22.4 — Componentes en una base principal. Si $I = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$, las ecuaciones son

$$\begin{aligned} J_1\dot{\Omega}_1 + (J_3 - J_2)\Omega_2\Omega_3 &= T_1,\\ J_2\dot{\Omega}_2 + (J_1 - J_3)\Omega_3\Omega_1 &= T_2,\\ J_3\dot{\Omega}_3 + (J_2 - J_1)\Omega_1\Omega_2 &= T_3. \end{aligned}$$

Demostración. El producto $I\boldsymbol{\Omega}$ tiene componentes $J_i\Omega_i$. La primera componente de $\boldsymbol{\Omega} \times I\boldsymbol{\Omega}$ es $\Omega_2 J_3\Omega_3 - \Omega_3 J_2\Omega_2 = (J_3 - J_2)\Omega_2\Omega_3$. Las otras resultan por las permutaciones cíclicas que conservan la orientación del producto vectorial. Sustituir en la proposición 22.3 da las tres igualdades. □

Resolver esas ecuaciones da las componentes corporales de la velocidad angular. Para reconstruir la orientación hay que integrar además $\dot{R} = R[\boldsymbol{\Omega}]_\times$ con una orientación inicial. El mismo historial corporal puede corresponder a orientaciones espaciales diferentes si se cambia ese dato inicial. En particular, un vector angular que cambia en el cuerpo puede estar asociado a un momento físico constante.[1]

Principio metodológico 22.2. Conserva el transporte de la base al derivar el momento. Después de resolver Euler, reconstruye la orientación con sus propios datos iniciales.

Ejercicios. Ejercicio 22.3. Si $J_1 = J_2 = J_3 = J > 0$, escribe Euler y resuelve el caso de torque corporal constante $\mathbf{T}_0$.

Solución. Como $I\boldsymbol{\Omega} = J\boldsymbol{\Omega}$, el producto cruzado se anula y $J\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{T}_0$. Así $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(0) + t\mathbf{T}_0/J$. «Torque corporal constante» prescribe un vector unido a los ejes del cuerpo; su vector inercial es $R(t)\mathbf{T}_0$ y puede variar. La orientación se obtiene resolviendo la ecuación de R con esta velocidad angular.

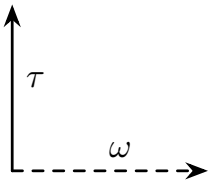
Ejercicio 22.4. Para momentos $(2J, 3J, 4J)$, torque cero y $\boldsymbol{\Omega}(0) = (u, u, 0)$, calcula la aceleración angular corporal inicial.

Solución. proposición 22.4 da $\dot{\Omega}_1(0) = \dot{\Omega}_2(0) = 0$ porque contienen Ω_3. La tercera es $\dot{\Omega}_3(0) = -(3J - 2J)u^2/(4J) = -u^2/4$. Aparece una tercera componente aunque inicialmente fuera cero. La conservación del momento inercial no impone conservación de cada componente corporal.

3. Torque y potencia responden a preguntas distintas

Un torque perpendicular a la velocidad angular puede cambiar el momento sin aportar potencia de giro. Los cojinetes de un eje impuesto ofrecen un ejemplo: pueden sostener torques transversales que cambian la dirección del momento, mientras el motor controla la componente axial que cambia la energía.

[1] MIT OpenCourseWare, *8.09 Classical Mechanics III*, capítulo 2, *Rigid Body Dynamics*, §2.4, ecuaciones 2.69–2.73: https://ocw.mit.edu/courses/8-09-classical-mechanics-iii-fall-2014/6fe39e8d5ce4ce746ca256dfea665eda_MIT8_09F14_Chapter_2.pdf . Contraste del transporte de momento y componentes de Euler. La derivación aquí usa directamente los balances del capítulo 15 y la base del capítulo 20.



$$P = \tau \cdot \omega = 0$$

Figura 22.1. Un torque perpendicular a ω cambia el momento angular y tiene potencia instantánea nula. La velocidad angular se dibuja discontinua para distinguirla del torque. Véase §3.

Proposición 22.5 — Potencia del torque. Para $K_{\text{rot}} = \mathbf{\Omega}^T I \mathbf{\Omega}/2$,

$$\dot{K}_{\text{rot}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

En un pivote fijo, esta es la potencia cinética total; en el centro de masa es la potencia de la parte interna de giro.

Demostración. La simetría y constancia corporal de I dan $\dot{K}_{\text{rot}} = \mathbf{\Omega} \cdot I\dot{\mathbf{\Omega}}$. Multiplicar proposición 22.3 por $\mathbf{\Omega}$ elimina el término cruzado por perpendicularidad. La rotación R conserva el producto escalar y da la segunda expresión. La identificación de energía total o interna sigue de las descomposiciones del capítulo 21. □

Proposición 22.6 — Balance axial bajo un eje fijo impuesto. Si un cuerpo gira con $\mathbf{\Omega} = \omega(t)\mathbf{n}$ sobre un eje corporal unitario que permanece fijo en el espacio, su momento escalar axial es $J_n = \mathbf{n}^T I \mathbf{n}$ y

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (R\mathbf{n}) = J_n \dot{\omega}.$$

El torque corporal completo requerido es $\mathbf{T} = \dot{\omega} I\mathbf{n} + \omega^2 \mathbf{n} \times (I\mathbf{n})$.

Demostración. Sustituir $\mathbf{\Omega} = \omega\mathbf{n}$ en la proposición 22.3 da la fórmula vectorial. Multiplicarla por $\mathbf{n}$ elimina el producto cruzado y deja $J_n\dot{\omega}$. Transformar ambos vectores a la base inercial conserva esa proyección. □

Si $\mathbf{n}$ no es principal, incluso una rapidez constante puede requerir torque transversal. El balance escalar axial no lo calcula. La condición de eje fijo impone restricciones al cuerpo y sus reacciones completan el balance vectorial. Esta diferencia será importante al interpretar una rueda equilibrada sobre cojinetes.

Principio metodológico 22.3. Usa potencia para cambios de energía y el balance vectorial para cambios de momento. La proyección axial no elimina los torques de los soportes.

Ejercicios. Ejercicio 22.5. Un cuerpo tiene $I = \operatorname{diag}(2J, 3J, 4J)$ y gira uniformemente con $\mathbf{\Omega} = (u, u, 0)$. Encuentra el torque necesario y su potencia.

Solución. Como las componentes angulares son constantes, proposición 22.3 da $\mathbf{T} = \mathbf{\Omega} \times I\mathbf{\Omega} = Ju^2\mathbf{e}_3$. Su producto escalar con $(u, u, 0)$ es cero. El momento físico cambia de dirección por la rotación del cuerpo, aunque su energía de giro permanezca constante. Omitir este torque convertiría el movimiento impuesto en el giro libre diferente del ejercicio 22.4.

Ejercicio 22.6. Un rotor gira sobre un eje principal de momento J. Recibe torque axial $T(t) = T_0 t/t_0$, con $t_0 > 0$, y parte de reposo. Encuentra rapidez y trabajo hasta tiempo t_0.

Solución. El balance es $J\dot{\omega} = T_0 t/t_0$, por lo que $\omega(t) = T_0 t^2/(2Jt_0)$. En t_0, la energía es $J[T_0 t_0/(2J)]^2/2 = T_0^2 t_0^2/(8J)$. La integral de potencia $\int_0^{t_0} T(t)\omega(t)dt$ da $[T_0^2/(2Jt_0^2)]\int_0^{t_0} t^3 dt$, que coincide con esa energía.

4. Lo que conserva un giro sin torque

Antes de resolver una trayectoria libre conviene identificar sus constantes. En el marco inercial el momento angular no cambia. En el cuerpo puede moverse sobre la intersección de una esfera de momento y una superficie de energía. Esa geometría limitará las perturbaciones de ciertos giros.

Definición 22.3 — Giro libre. Llamaremos libre al giro con torque externo nulo sobre el punto del balance. No se exige que la fuerza externa neta sobre el centro de masa sea cero: un campo uniforme aplicado en el centro puede trasladarlo sin añadir torque central.

Proposición 22.7 — Invariantes del giro libre. Para torque cero se conservan

$$K = \frac{1}{2}\sum_i J_i \Omega_i^2, \qquad H^2 = \sum_i J_i^2 \Omega_i^2.$$

El vector inercial $\mathbf{H} = RI\boldsymbol{\Omega}$ es constante.

Demostración. proposición 22.5 con torque cero da $\dot{K} = 0$. Escribamos $\mathbf{h} = I\boldsymbol{\Omega}$. Proposición 22.3 da $\dot{\mathbf{h}} = -\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{h} = \mathbf{h}\times I^{-1}\mathbf{h}$, de modo que $d|\mathbf{h}|^2/dt = 2\mathbf{h}\cdot(\mathbf{h}\times I^{-1}\mathbf{h}) = 0$. La norma es la misma en ambas bases. Aplicar la regla de transporte a $R\mathbf{h}$ da derivada cero, que prueba la constancia del vector espacial. □

Proposición 22.8 — Existencia global del giro libre con inercia positiva. Para momentos principales positivos, cualquier dato angular inicial finito tiene una solución única de Euler para todos los tiempos. La orientación también se reconstruye globalmente a partir de $R(0) \in SO(3)$.

Demostración. Euler con torque cero tiene un campo polinómico suave en $\boldsymbol{\Omega}$, por lo que el teorema local de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales produce una solución. Proposición 22.7 y $J_{\text{mín}} > 0$ dan $|\boldsymbol{\Omega}(t)|^2 \le 2K/J_{\text{mín}}$. El campo y su derivada están acotados sobre una bola que contiene toda la solución. Si hubiera un extremo temporal finito, la velocidad de $\boldsymbol{\Omega}$ acotada haría que sus valores fueran de Cauchy al acercarse a ese extremo; tendrían un límite dentro de la bola. La solución local desde ese límite prolongaría la anterior por unicidad, contradiciendo maximalidad. Lo mismo vale hacia tiempos negativos.

La ecuación de R es lineal en sus entradas con coeficientes continuos globales y acotados en intervalos finitos. Conserva $RR^T = I$, porque su derivada usa una matriz antisimétrica, y conserva el determinante positivo por continuidad. Sus entradas permanecen acotadas y se prolongan con el mismo argumento. □

Los invariantes no determinan por sí solos en qué sentido se recorre una intersección ni cómo se orienta el cuerpo en el espacio. Dan controles globales que acompañan la ecuación. Cerca de un giro principal, esos controles pueden demostrar estabilidad sin resolver toda la trayectoria.

Principio metodológico 22.4. Encuentra las constantes antes de aproximar el movimiento. Usa sus cotas para controlar tanto el dominio temporal como el alcance de una perturbación.

Ejercicios. Ejercicio 22.7. Con momentos $(2J, 3J, 4J)$ y datos $(u, u, 0)$, calcula energía y norma del momento; acota la rapidez angular posterior.

Solución. La energía es $5Ju^2/2$ y $H^2 = 13J^2u^2$. Como $J_{\text{mín}} = 2J$, proposición 22.8 da $|\boldsymbol{\Omega}|^2 \le 5u^2/2$. La rapidez inicial al cuadrado es $2u^2$, pero no se presume que permanezca igual; las cantidades conservadas ponderan sus componentes de dos maneras diferentes.

Ejercicio 22.8. Un cálculo aproximado de giro libre produce una pequeña deriva de K y de H^2. ¿Qué puede concluirse sobre su exactitud y qué comprobación adicional exige la orientación?

Solución. La deriva contradice la solución exacta de la proposición 22.7 y mide un error del cálculo o una fuerza no incorporada al modelo. Conservar aproximadamente ambos invariantes es una comprobación necesaria útil, pero no suficiente para la trayectoria: pueden recorrerse incorrectamente las superficies comunes. La orientación debe satisfacer además $\dot R = R[\boldsymbol{\Omega}]_\times$ y permanecer ortogonal de determinante uno. También debe verificarse que $RI\boldsymbol{\Omega}$ conserve el vector inicial, no solo su norma.

5. Perturbar un giro principal

Un giro uniforme sobre un eje principal tiene componentes corporales constantes. Primero linealizaremos Euler para observar qué sucede al apartarse un poco de él. La aproximación descubre oscilaciones o crecimiento local, pero la estabilidad del sistema completo necesita una justificación adicional.

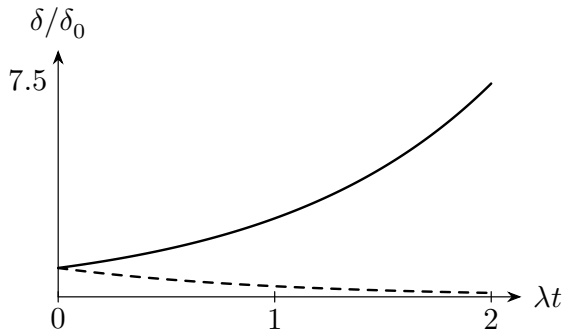


Figura 22.2. Para $I_1 < I_2 < I_3$, el giro alrededor del eje intermedio admite modos lineales crecientes y decrecientes $e^{\pm\lambda t}$. La figura usa $\lambda = 1$; los extremos principal menor y mayor tienen modos oscilatorios. Véase §5.

Proposición 22.9 — Giros estacionarios libres. Una velocidad angular corporal constante $\boldsymbol{\Omega}_*$ es solución libre si y solo si $\boldsymbol{\Omega}_* \times I\boldsymbol{\Omega}_* = 0$. Para un vector no nulo, esto equivale a pertenecer a un espacio propio de I. Con tres momentos distintos, los giros no nulos estacionarios son exactamente los giros sobre las tres rectas principales.

Demostración. proposición 22.3 con torque cero y derivada angular cero da la condición cruzada. Para un vector no nulo, anularla significa que $I\boldsymbol{\Omega}_* = \lambda\boldsymbol{\Omega}_*$ para algún escalar. En una base principal con valores distintos, componentes no nulas sobre autovalores diferentes no pueden satisfacer esa igualdad. El vector cero también es solución. □

Proposición 22.10 — Perturbaciones lineales transversales. Sea $\boldsymbol{\Omega}_* = u\mathbf{e}_i$, con $u \neq 0$, y sean (i, j, k) índices cíclicos. Al primer orden,

$$\dot\eta_j = \frac{J_k - J_i}{J_j} u\eta_k, \qquad \dot\eta_k = \frac{J_i - J_j}{J_k} u\eta_j,$$

y por tanto

$$\ddot\eta_j = \frac{(J_k - J_i)(J_i - J_j)}{J_j J_k} u^2 \eta_j.$$

Para $J_1 < J_2 < J_3$, el coeficiente es negativo en los ejes extremos y positivo en el intermedio. La perturbación longitudinal es constante a primer orden.

Demostración. Sustituir $\Omega_i = u + \eta_i$, $\Omega_j = \eta_j$ y $\Omega_k = \eta_k$ en la proposición 22.4. La ecuación longitudinal contiene un producto de dos perturbaciones y no contribuye al primer orden. En las otras, sustituir Ω_i por u deja las igualdades. Diferenciar la primera y usar la segunda da el coeficiente. Para el momento mínimo o máximo, sus factores tienen signos opuestos; para el intermedio, tienen el mismo signo. □

Un coeficiente negativo produce oscilaciones transversales; uno positivo admite una solución creciente exponencial. Cuando la perturbación se vuelve apreciable, los términos omitidos pueden cambiar la trayectoria. Proposición 22.8 impide que la velocidad angular libre exacta diverja desde energía finita. La inestabilidad puede consistir en una gran reorientación corporal con todas las magnitudes acotadas.

Principio metodológico 22.5. Identifica el orden descartado al linealizar. Una tasa de crecimiento local no implica crecimiento exponencial ilimitado de la solución exacta.

Ejercicios. Ejercicio 22.9. Para momentos $2J, 3J, 4J$, calcula la frecuencia lineal alrededor del eje de $2J$ y la tasa de crecimiento alrededor del de $3J$, a rapidez u.

Solución. En el primer eje, el coeficiente es $(4J - 2J)(2J - 3J)u^2/[(3J)(4J)] = -u^2/6$, y la frecuencia es $|u|/\sqrt{6}$. En el segundo, los índices cíclicos son $(2, 3, 1)$; el coeficiente es $(2J - 3J)(3J - 4J)u^2/[(4J)(2J)] = u^2/8$, con tasa $|u|/\sqrt{8}$. Son resultados para perturbaciones pequeñas en componentes corporales.

Ejercicio 22.10. ¿Qué falla si se clasifica un cuerpo con $J_1 = J_2 \neq J_3$ como si tuviera tres momentos estrictamente ordenados?

Solución. Para giros en el plano propio de los momentos iguales, un factor del coeficiente se anula. Desaparece la separación estricta entre oscilaciones de frecuencia no nula y exponentes reales no nulos. Hay además una familia de direcciones estacionarias en ese plano. El caso simétrico requiere sus ecuaciones exactas, desarrolladas en §7.

6. Estabilidad fuera de la linealización

Las constantes permiten reforzar el resultado de los ejes extremos. Una combinación positiva que mida componentes transversales impide que una preparación cercana se aleje mucho. Para el intermedio construiremos una trayectoria exacta que empieza arbitrariamente cerca y alcanza una distancia fija.

Definición 22.4 — Estabilidad angular corporal. Una solución estacionaria $\boldsymbol{\Omega}_*$ es estable en el sentido de Lyapunov si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\boldsymbol{\Omega}(0) - \boldsymbol{\Omega}_*| < \delta$ implica $|\boldsymbol{\Omega}(t) - \boldsymbol{\Omega}_*| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Aquí se comparan velocidades angulares corporales; la orientación y su fase espacial son variables adicionales.

Proposición 22.11 — Estabilidad no lineal de los giros extremos. Para $0 < J_1 < J_2 < J_3$, todos los giros libres no nulos sobre los ejes de J_1 y J_3 son estables según la definición 22.4.

Demostración. Usemos $h_i = J_i\Omega_i$ y $a_i = 1/J_i$, con $a_1 > a_2 > a_3$. Para el primer eje, la combinación conservada

$$F_1 = a_1 H^2 - 2K = (a_1 - a_2)h_2^2 + (a_1 - a_3)h_3^2$$

controla las componentes transversales: $h_2^2 + h_3^2 \leq F_1/c_1$, donde $c_1 = \min(a_1 - a_2, a_1 - a_3) > 0$. Cerca de $\mathbf{h}_* = h_*\mathbf{e}_1$, con $h_* \neq 0$, la continuidad de F_1 hace esa cota arbitrariamente pequeña. La

continuidad del otro invariante, H^2, mantiene su valor cerca de h_*^2. La igualdad $h_1^2 = H^2 - h_2^2 - h_3^2$ mantiene entonces $|h_1|$ cerca de $|h_*|$. Para datos suficientemente próximos, la norma queda separada de cero y la cota transversal impide que h_1 se anule. Su signo sigue siendo el de h_*. Estas cotas, uniformes en tiempo, mantienen el vector completo tan próximo a $\mathbf{h}_*$ como se quiera.

Para el tercer eje se usa $F_3 = 2K - a_3 H^2 = (a_1 - a_3)h_1^2 + (a_2 - a_3)h_2^2$, con el mismo control positivo transversal y el mismo argumento de norma y signo. La transformación invertible $\boldsymbol{\Omega} = I^{-1}\mathbf{h}$ transporta ambas conclusiones a la norma angular. □

La prueba permite pequeñas variaciones de energía y norma de momento iniciales. No demuestra atracción hacia el giro estacionario. Dos giros próximos pueden acumular una diferencia de fase espacial durante mucho tiempo, aunque sus velocidades angulares corporales sigan cercanas.

Proposición 22.12 — Inestabilidad exacta del giro intermedio. Bajo las mismas desigualdades estrictas, un giro libre no nulo sobre el eje de J_2 es inestable según la definición 22.4.

Demostración. Sea $H > 0$ la magnitud del momento del giro positivo. Pongamos $\alpha = a_1 - a_2 > 0$, $\beta = a_2 - a_3 > 0$ y $\gamma = H\sqrt{\alpha\beta}$. Una solución exacta de $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \times I^{-1}\mathbf{h}$ es

$$
\begin{aligned}
h_1(t) &= H\sqrt{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\,\operatorname{sech}(\gamma t),\\
h_2(t) &= -H\tanh(\gamma t),\\
h_3(t) &= -H\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,\operatorname{sech}(\gamma t).
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones son $\dot h_1 = -\beta h_2 h_3$, $\dot h_2 = (\alpha+\beta)h_3 h_1$ y $\dot h_3 = -\alpha h_1 h_2$. Sustituir las fórmulas y usar las derivadas $\tanh' = \operatorname{sech}^2$ y $\operatorname{sech}' = -\operatorname{sech}\tanh$ verifica las tres con el valor de γ indicado.

Cuando $t \to -\infty$, la solución tiende a $H\mathbf{e}_2$. En $t = 0$, tiene $h_2 = 0$ y norma transversal H, por lo que está a distancia fija positiva de ese giro. Escoger datos en $t = -T$ permite empezar arbitrariamente cerca y esperar un tiempo T para llegar al punto alejado. La autonomía permite llamar cero al instante inicial elegido. Esto contradice estabilidad. Cambiar simultáneamente dos signos conserva las ecuaciones y prueba también el caso del giro negativo. Volver a $\boldsymbol{\Omega} = I^{-1}\mathbf{h}$ conserva una separación positiva. □

La trayectoria conserva H^2 y $K = a_2 H^2/2$. Se acerca a giros intermedios opuestos en sus extremos temporales y nunca diverge en rapidez. Esta distinción entre magnitudes conservadas y dirección corporal cambiante explica la vuelta inesperada de un objeto lanzado casi sobre su eje intermedio.[2]

Principio metodológico 22.6. Especifica la variable cuya estabilidad demuestras. Refuerza una linealización mediante un control positivo conservado o una trayectoria exacta que pruebe separación.

Ejercicios. Ejercicio 22.11. Para $J_1 = 2J$, $J_2 = 3J$, $J_3 = 4J$, escribe F_1 y una cota de $h_2^2 + h_3^2$.

[2]Michael Birse, University of Manchester, *Advanced Dynamics*, «Stability of free rotation»: https://www.theory.physics.manchester.ac.uk/~mikeb/lecture/pc167/rigidbody/stability.html . Contraste de signos de la linealización. Las pruebas no lineales de las proposiciones 22.11–22.12 se desarrollan aquí mediante invariantes y una solución exacta; se distingue su alcance de la clasificación lineal. Para las tasas del cuerpo simétrico: «The symmetric top», https://www.theory.physics.manchester.ac.uk/~mikeb/lecture/pc167/rigidbody/top.html .

Solución. Los coeficientes son $a_1 = 1/(2J)$, $a_2 = 1/(3J)$, $a_3 = 1/(4J)$. Resulta $F_1 = h_2^2/(6J) + h_3^2/(4J)$, y el mínimo coeficiente es $1/(6J)$. Por tanto $h_2^2 + h_3^2 \le 6JF_1$. El lado derecho se conserva y controla la desviación transversal exacta.

Ejercicio 22.12. Verifica la norma de la solución de la proposición 22.12 y expresa su tasa γ mediante la rapidez intermedia $u = H/J_2$.

Solución. Los cuadrados transversales suman $H^2\,\mathrm{sech}^2(\gamma t)$ y el axial es $H^2\tanh^2(\gamma t)$. La suma es H^2. Además $\gamma = |u|\sqrt{(J_2 - J_1)(J_3 - J_2)/(J_1 J_3)}$. Coincide con la tasa creciente de la linealización, aunque la trayectoria exacta se mantenga acotada.

7. Dos tasas de precesión para un cuerpo simétrico libre

Con dos momentos iguales, Euler admite una solución explícita. La velocidad angular gira en ejes corporales mientras el eje material describe en el espacio un cono alrededor del momento constante. Las tasas corresponden a observadores y ejes diferentes.

Definición 22.5 — Cuerpo dinámicamente simétrico. Usaremos $I = \mathrm{diag}(A, A, C)$ con $A, C > 0$. La simetría del tensor basta para estas ecuaciones, aunque la forma material pueda tener menos simetrías. El eje físico asociado a $\mathbf{e}_3$ es $\mathbf{n} = R\mathbf{e}_3$.

Proposición 22.13 — Solución corporal simétrica libre. Con torque cero, $\Omega_3 = s$ es constante. Si $\eta = \Omega_1 + i\Omega_2$ y $\gamma_B = (C - A)s/A$, entonces

$$\eta(t) = \eta(0)e^{i\gamma_B t}.$$

Demostración. La tercera ecuación tiene término cruzado cero y da $C\dot{\Omega}_3 = 0$. Las otras son $\dot{\Omega}_1 = -\gamma_B\Omega_2$ y $\dot{\Omega}_2 = \gamma_B\Omega_1$. Reunirlas da $\dot{\eta} = i\gamma_B\eta$, y la exponencial cumple esta ecuación y el dato inicial. □

Proposición 22.14 — Precesión espacial del eje simétrico. En ese giro,

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{H}}{A} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = Cs.$$

Si $H > 0$, el eje conserva su ángulo con el momento constante y precesa alrededor de él con tasa H/A, salvo el caso paralelo en que no describe un cono no trivial.

Demostración. La relación tensorial es $\mathbf{H} = A\boldsymbol{\omega} + (C - A)s\mathbf{n}$, con $s = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$. Despejar $\boldsymbol{\omega}$ y usar $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$ elimina el término paralelo a $\mathbf{n}$. El producto escalar con $\mathbf{n}$ da Cs. Puesto que $\mathbf{H}$ es constante, la ecuación obtenida es la de un vector que gira alrededor de $\mathbf{H}/A$. □

La tasa corporal puede ser negativa y se anula para $A = C$. La espacial usa otro eje. En un cuerpo de inercia esférica, la velocidad angular es constante en ambas bases, pero un eje material no paralelo sigue girando alrededor de ella. Cuando los tres momentos coinciden, escoger el tercer eje es una convención adicional.

Principio metodológico 22.7. Acompaña cada tasa con su eje y observador. Separa la variación de componentes corporales del movimiento espacial de un eje material.

Ejercicios. Ejercicio 22.13. Para $A = 2J$, $C = 3J$ y datos $(u, 0, s)$, encuentra componentes corporales y ángulo del eje con $\mathbf{H}$.

Solución. proposición 22.13 da $\Omega_1 = u\cos(st/2)$, $\Omega_2 = u\sin(st/2)$ y $\Omega_3 = s$. El momento tiene magnitud $H = J\sqrt{4u^2 + 9s^2}$. Para $H > 0$, $\cos\theta = 3s/\sqrt{4u^2 + 9s^2}$ y la tasa espacial es $H/(2J)$, generalmente distinta de $s/2$.

Ejercicio 22.14. Si $s = 0$, $A \neq C$ y $\eta(0) \neq 0$, ¿qué hace la velocidad angular en el cuerpo y el eje material en el espacio?

Solución. Como $\gamma_B = 0$, las componentes angulares son constantes en el plano principal doble. El momento es $A\boldsymbol{\omega}$ y es perpendicular a $\mathbf{n}$. El eje material gira alrededor de él con tasa $H/A = |\boldsymbol{\Omega}|$. La constancia de un vector corporal no mantiene quietos todos los ejes materiales.

8. Mantener un giro cuesta un torque concreto

Podemos recorrer Euler en sentido inverso: una velocidad angular prescrita permite calcular el torque que la sostiene. Esta operación distingue la reorientación impuesta por los soportes del giro libre que aparece al retirarlos.

Proposición 22.15 — Torque del giro uniforme impuesto. Para $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0$ constante, el torque requerido es

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times I\boldsymbol{\Omega}_0.$$

Su potencia es cero y se anula para velocidad cero o una dirección principal. Además,

$$|\mathbf{T}|^2 = |\boldsymbol{\Omega}_0|^2 |I\boldsymbol{\Omega}_0|^2 - (\boldsymbol{\Omega}_0 \cdot I\boldsymbol{\Omega}_0)^2.$$

Demostración. proposición 22.3 con derivada cero da el torque. Su perpendicularidad a $\boldsymbol{\Omega}_0$ anula la potencia por la proposición 22.5, y proposición 22.9 caracteriza su anulación. La identidad de norma del producto vectorial da la expresión cuadrática del torque. □

Una potencia nula puede coexistir con esfuerzos en los cojinetes. Euler fija el torque resultante; distribuir las fuerzas entre soportes requiere conocer su geometría y sus restricciones.

Proposición 22.16 — Rotor axial con resistencia viscosa. Sobre un eje principal fijo de momento J, con torque motor constante T_0 y resistencia $-\kappa\omega$, $\kappa > 0$, la rapidez firmada es

$$\omega(t) = \frac{T_0}{\kappa} + \left(\omega(0) - \frac{T_0}{\kappa}\right) e^{-\kappa t/J}.$$

Su energía cumple $d(J\omega^2/2)/dt = T_0\omega - \kappa\omega^2$.

Demostración. El balance axial es $J\dot{\omega} = T_0 - \kappa\omega$. Restar el equilibrio T_0/κ deja una ecuación de tasa $-\kappa/J$, cuya exponencial satisface el dato. Multiplicar el balance por ω da la igualdad energética. □

En régimen estacionario, el motor sigue suministrando energía y la resistencia la disipa con igual potencia. El modelo contiene un eje impuesto y una ley resistente declarada; retirar los soportes exige resolver de nuevo el movimiento vectorial completo.

Principio metodológico 22.8. Calcula el torque de una trayectoria impuesta y separa potencia motora, disipación y reacciones de orientación.

Ejercicios. Ejercicio 22.15. Para $I = \operatorname{diag}(2J, 3J, 4J)$ y $\boldsymbol{\Omega} = (u, u, u)$ constante, calcula el torque corporal.

Solución. proposición 22.15 da $\mathbf{T} = Ju^2(1, -2, 1)$. Su producto con la velocidad es $Ju^3(1 - 2 + 1) = 0$. Retirar este torque activa las derivadas de Euler aunque el balance energético del giro impuesto fuera estacionario.

Ejercicio 22.16. El rotor de la proposición 22.16 parte de reposo con $T_0 > 0$. Encuentra cuándo alcanza el 90 % de la rapidez estacionaria y la potencia motora límite.

Solución. Su rapidez es $(T_0/\kappa)(1 - e^{-\kappa t/J})$. Igualar a $0.9T_0/\kappa$ da $t = (J/\kappa)\log 10$. La potencia límite es T_0^2/κ, igual a la disipada. La energía cinética deja de crecer mientras continúa la transferencia motor-resistencia.

9. El trompo pesado y su punto de apoyo

Un trompo sujeto por un pivote fijo tiene fuerzas exteriores incluso cuando gira sin rozamiento. La gravedad añade torque y el pivote suministra la fuerza necesaria para mover el centro de masa sobre una esfera. Calcular el torque sobre el pivote elimina la reacción puntual de esa ecuación, pero conserva la gravedad.

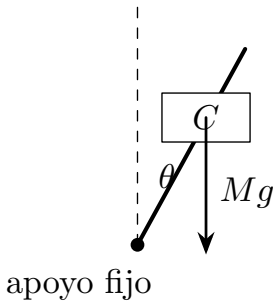


Figura 22.3. El peso aplicado en el centro de masa produce respecto del apoyo un torque de módulo $Mg\ell\sin\theta$. La reacción del apoyo tiene brazo nulo respecto de ese mismo punto. Véase §9.

Definición 22.6 — Trompo simétrico pesado de pivote fijo. El pivote O permanece fijo en un marco inercial y no ejerce un par adicional. El centro de masa está en $G = O + l\mathbf{n}$, con $l > 0$, y la gravedad es $-Mg\mathbf{e}_z$, con $g > 0$. El tensor sobre O es $\operatorname{diag}(A, A, C)$, con momentos positivos. Escribimos $k = Mgl$ y elegimos potencial $U = k\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z$.

Los momentos de la definición 22.6 se calculan sobre el pivote. Si una tabla ofrece los momentos centrales, el teorema de ejes paralelos del capítulo 21 debe trasladarlos antes de usarlos. La altura del centro es $l\cos\theta$, de modo que el potencial aumenta al levantar el eje hacia la vertical superior.

Proposición 22.17 — Ecuaciones vectoriales del trompo. Sea $s = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}$. Entonces

$$\mathbf{H} = A\boldsymbol{\omega} + (C - A)s\mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{H}} = k\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}.$$

Demostración. El tensor de simetría axial, expresado en el espacio, es $A\mathbf{1} + (C - A)\mathbf{n}\mathbf{n}^T$. Aplicarlo a $\boldsymbol{\omega}$ da el momento. La fuerza gravitatoria produce torque $l\mathbf{n}\times(-Mg\mathbf{e}_z) = k\mathbf{e}_z\times\mathbf{n}$. Proposición 22.2 y el transporte del eje material dan las dos derivadas. □

Proposición 22.18 — Tres constantes del trompo ideal. En el modelo de la definición 22.6 se conservan

$$a = \mathbf{H}\cdot\mathbf{e}_z, \qquad b = \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = Cs, \qquad E = K + k\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z.$$

Demostración. El torque es perpendicular a $\mathbf{e}_z$, de modo que $\dot{a} = 0$. Para b, la regla del producto da $\dot{b} = \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{n}}$. El primero es cero y el segundo también, pues $\mathbf{H}$ es combinación de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{n}$, mientras $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}$. La relación $b = Cs$ sigue de la proposición 22.17. Por proposición 22.5, $\dot{K} = k(\mathbf{e}_z\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\omega} = -k\mathbf{e}_z\cdot\dot{\mathbf{n}}$, que se cancela con la derivada del potencial. La reacción del pivote fijo no aporta potencia y el modelo no contiene disipación. □

El momento vectorial completo ya no es constante, pero sí sus dos proyecciones indicadas. Una se mide sobre un eje espacial fijo y otra sobre un eje corporal móvil. La conservación de esta última depende de la simetría del tensor y de que el torque no tenga componente axial; no se debe extender a cualquier cuerpo inclinado.

Principio metodológico 22.9. Calcula la inercia sobre el pivote y declara qué esfuerzos puede transmitir. Distingue las proyecciones conservadas del vector de momento completo.

Ejercicios. Ejercicio 22.17. Una esfera maciza de radio r, masa M y centro a distancia l del pivote se mueve como un cuerpo de la definición 22.6. Encuentra A y C tomando el eje del centro como tercer eje.

Solución. El tensor central es $2Mr^2\mathbf{1}/5$. El desplazamiento al pivote es axial, así que capítulo 21 añade Ml^2 a los dos momentos transversales y cero al axial. Por tanto $A = 2Mr^2/5 + Ml^2$ y $C = 2Mr^2/5$. El soporte se idealiza sin masa adicional ni torque de par; cualquier soporte con masa debe incorporarse al tensor.

Ejercicio 22.18. El eje del trompo es inicialmente horizontal y su velocidad angular es $s\mathbf{n}$. Encuentra a, b, E y el torque inicial.

Solución. El momento es $Cs\mathbf{n}$, con $a = 0$ por horizontalidad y $b = Cs$. La energía es $Cs^2/2$ porque el potencial inicial es cero. El torque tiene magnitud k y dirección $\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}$. Aunque el eje no tenga inicialmente velocidad de inclinación o precesión, ese torque cambia inmediatamente el momento; la preparación no garantiza una precesión uniforme.

10. Separar inclinación, azimut y giro axial

La dirección del eje necesita dos ángulos. La orientación del material alrededor de ese eje necesita un tercero. La velocidad axial recibe contribuciones del giro propio y del movimiento del eje, tal como anticipó la composición de rotaciones en el capítulo 21.

Definición 22.7 — Ángulos del trompo en un dominio no polar. Para $0 < \theta < \pi$, escribimos

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

La inclinación es θ, el azimut de precesión ϕ y el giro restante del cuerpo ψ, con convención $R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$. El giro axial físico es $s = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}$.

Proposición 22.19 — Velocidades y energía en esos ángulos. Con la convención anterior,

$$s = \dot\psi + \dot\phi\cos\theta, \qquad K = \frac{A}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{C}{2}s^2,$$

y $a = A\dot\phi\sin^2\theta + b\cos\theta$.

Demostración. La composición del capítulo 21 da $\boldsymbol{\omega} = \dot\phi\mathbf{e}_z + \dot\theta\mathbf{e}_\phi + \dot\psi\mathbf{n}$, donde $\mathbf{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$. Su proyección axial es la primera fórmula. Si $\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$, entonces $\boldsymbol{\omega} = s\mathbf{n} + \dot\theta\mathbf{e}_\phi - \dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\theta$. Las tres direcciones son ortonormales; el tensor tiene momento C en la axial y A en las otras. La forma cuadrática da la energía. Por proposición 22.17, $\mathbf{H} = b\mathbf{n} + A\dot\theta\mathbf{e}_\phi - A\dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\theta$. Multiplicar por $\mathbf{e}_z$ usa $\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_z = -\sin\theta$ y da la expresión de a. □

Proposición 22.20 — Reducción escalar de la inclinación. Para los valores conservados a, b, sea $E' = E - b^2/(2C)$. En $0 < \theta < \pi$,

$$\dot\phi = \frac{a - b\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \qquad \frac{A}{2}\dot\theta^2 + V_{\mathrm{ef}}(\theta) = E',$$

con

$$V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{(a - b\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + k\cos\theta.$$

Demostración. Despejar $\dot{\phi}$ en la proposición 22.19 exige $\sin\theta \neq 0$, que es la restricción indicada. Sustituirlo en $K + U = E$ y usar $s = b/C$ produce el potencial y la constante reducida. □

Cuando $E' > V_{\mathrm{ef}}$ en un tramo de inclinación monótona, el tiempo se obtiene integrando $dt = \pm\sqrt{A/2}\, d\theta/\sqrt{E' - V_{\mathrm{ef}}(\theta)}$. Al llegar a un retorno hay que escoger la continuación consistente con la ecuación dinámica. Una energía igual al potencial no prueba por sí sola que el eje vaya a permanecer inmóvil: el gradiente decide si ese punto es un equilibrio.

En los polos, los ángulos pierden su significado separado. Si $a \neq b$, el primer término diverge al acercarse a $\theta = 0$ y una trayectoria de energía finita no llega allí. Si $a = b$, la singularidad puede cancelarse; se estudiará por un límite o con variables vectoriales, conservando las condiciones iniciales.[3]

Principio metodológico 22.10. Distingue giro axial físico y derivada del tercer ángulo. Controla el dominio de los ángulos y las cancelaciones antes de usar una cuadratura.

Ejercicios. Ejercicio 22.19. En una precesión de inclinación $\theta = \pi/3$, el azimut tiene tasa p y el giro axial es s. Encuentra $\dot{\psi}$ y la energía cinética.

Solución. proposición 22.19 da $\dot{\psi} = s - p/2$. La energía es $3Ap^2/8 + Cs^2/2$, porque $\dot{\theta} = 0$ y $\sin^2(\pi/3) = 3/4$. Identificar s con $\dot{\psi}$ omitiría la contribución de la precesión y cambiaría la energía axial.

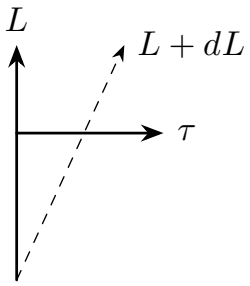
Ejercicio 22.20. Para $b \neq 0$, determina las condiciones que cancelan la barrera angular en el polo superior y en el inferior. ¿Puede una misma elección de a cancelar ambas?

Solución. Arriba se requiere $a = b$, pues el numerador tiende a $(a - b)^2$. Abajo se requiere $a = -b$. Con $b \neq 0$, no pueden cumplirse simultáneamente. La gravedad añade un término acotado y no cancela una barrera divergente. Si $b = 0$ y $a = 0$, ambos cocientes admiten una extensión nula y los polos requieren otra parametrización.

11. Cuándo existe una precesión regular

Una inclinación constante puede sostenerse si el cambio del momento causado por la precesión coincide con el torque gravitatorio. El cálculo vectorial permite obtener la condición sin adelantar el formalismo lagrangiano.

[3]MIT OpenCourseWare, *16.07 Dynamics*, Lecture L30, *3D Rigid Body Dynamics: Tops and Gyroscopes*: `https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/99f271d601bb3d9d04e8b8ce0c73cb7a_MIT16_07F09_Lec30.pdf` ; David Tong, University of Cambridge, *Dynamics and Relativity*, «The Motion of Rigid Bodies»: https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics/dynhtml/S3.html . Contraste de trompo pesado y precesión. La reducción presente se obtiene por cinemática y balances de Newton, conservando el formalismo variacional para capítulos posteriores.



$$dL = \tau\, dt$$

Figura 22.4. Cuando el torque es perpendicular al momento angular, el cambio de primer orden altera su dirección sin alterar su módulo. El dibujo es una construcción diferencial; no identifica por sí solo las tasas de precesión de un trompo. Véase §11.

Proposición 22.21 — Condición exacta de precesión uniforme. Para $0 < \theta < \pi$, giro axial constante $s = b/C$ y tasa azimutal constante p, una precesión regular del trompo satisface, y puede construirse cuando satisface,

$$A\cos\theta\, p^2 - bp + k = 0.$$

Demostración. Con $\dot\theta = 0$, la velocidad es $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_z + (s - p\cos\theta)\mathbf{n}$. Por proposición 22.17, $\mathbf{H} = Ap\mathbf{e}_z + (b - Ap\cos\theta)\mathbf{n}$. Su derivada es $(b - Ap\cos\theta)p\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}$. Igualarla al torque $k\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}$, no nulo en el dominio indicado, da la condición. Recíprocamente, eligiendo $\phi = pt + \phi_0$, θ constante y $\dot\psi = s - p\cos\theta$, se reconstruye una orientación con esa velocidad. La misma identidad verifica el balance vectorial completo. □

La constante vertical compatible con esta solución es $a = Ap\sin^2\theta + b\cos\theta$. Por eso una preparación con valores arbitrarios de a, b y energía no garantiza la precesión elegida. Dos raíces de la ecuación a inclinación y giro axial fijados tienen, en general, distintos valores de a y de energía.

Proposición 22.22 — Ramas lenta y rápida y error de la aproximación. Supongamos $b > 0$, $\cos\theta = c > 0$ y $b^2 \geq 4Akc$. Las tasas posibles son

$$p_\pm = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4Akc}}{2Ac}, \qquad p_- = \frac{2k}{b + \sqrt{b^2 - 4Akc}}.$$

Si $\varepsilon = 4Akc/b^2 \leq 1$, el error relativo de aproximar la rama lenta por k/b, medido respecto de k/b, es

$$0 \leq \frac{p_-}{k/b} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon}}{1 + \sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{(1 + \sqrt{1-\varepsilon})^2} \leq \varepsilon.$$

Demostración. Resolver la cuadrática de la proposición 22.21 da las raíces. Multiplicar numerador y denominador de la raíz con signo menos por la expresión conjugada da su forma racionalizada. Dividir por k/b y escribir la raíz como $b\sqrt{1-\varepsilon}$ produce las igualdades. El denominador final es al menos uno, que prueba la cota. □

Para $\varepsilon \ll 1$, la rama lenta tiene tasa cercana a $k/b = Mgl/(Cs)$. La rápida se aproxima a $b/(Ac)$; pertenece a otra preparación y no se obtiene suponiendo que el momento está casi alineado con el

eje. En el caso horizontal, $c = 0$ y la ecuación se vuelve lineal: $p = k/b$ para $b \neq 0$. Con $c < 0$, las raíces y sus signos requieren leer la cuadrática sin aplicar las hipótesis de la proposición 22.22.

Principio metodológico 22.11. Comprueba existencia de la precesión y compatibilidad con las constantes preparadas. Identifica la rama y el parámetro pequeño antes de usar una tasa aproximada.

Ejercicios. Ejercicio 22.21. Usa unidades coherentes en las que $A = 1$, $k = 1$, $b = 3$ y $\cos\theta = 1/2$. Calcula ambas tasas y el error de la aproximación lenta.

Solución. La ecuación es $p^2/2 - 3p + 1 = 0$, por lo que $p_\pm = 3 \pm \sqrt{7}$. La lenta vale aproximadamente 0.35425, frente a $k/b = 1/3$. El exceso relativo es $3(3 - \sqrt{7}) - 1 \approx 0.06275$, menor que $\varepsilon = 2/9$. Las dos tasas corresponden a diferentes valores de a según la proposición 22.19.

Ejercicio 22.22. Para $b > 0$, $k > 0$ y $\theta = \pi/2$, encuentra la tasa regular y los valores de a y E.

Solución. proposición 22.21 da $p = k/b$. Como $\cos\theta = 0$ y $\sin\theta = 1$, $a = Ap = Ak/b$. La energía es $E = Ap^2/2 + b^2/(2C)$, pues el potencial es cero. La preparación horizontal del ejercicio 22.18 tenía $a = 0$, así que no es este movimiento regular salvo que el torque gravitatorio fuera cero, excluido aquí.

12. La nutación y los retornos de la inclinación

Una preparación que no cumple la precesión regular puede producir cambios de inclinación. Las constantes reducen su estudio a una coordenada, pero el potencial efectivo debe acompañarse de la ecuación de segundo orden para decidir qué ocurre en los retornos.

Proposición 22.23 — Ecuación de nutación y oscilaciones locales. En el dominio angular de la definición 22.7, poniendo $p = \dot\phi$,

$$A\ddot\theta = \sin\theta(Ap^2\cos\theta - bp + k) = -V_{\mathrm{ef}}'(\theta),$$

con a, b fijos al derivar el potencial. Si θ_* es un punto crítico interior y $V_{\mathrm{ef}}''(\theta_*) > 0$, la perturbación lineal de inclinación tiene frecuencia

$$\nu = \sqrt{V_{\mathrm{ef}}''(\theta_*)/A}.$$

Demostración. proposición 22.19 escribe $\mathbf{H} = b\mathbf{n} + A\dot\theta\mathbf{e}_\phi - Ap\sin\theta\mathbf{e}_\theta$. Al derivar, usamos $\dot{\mathbf{n}} = \dot\theta\mathbf{e}_\theta + p\sin\theta\mathbf{e}_\phi$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot\theta\mathbf{n} + p\cos\theta\mathbf{e}_\phi$. La derivada de $\mathbf{e}_\phi$ no tiene componente sobre sí misma. La componente de $\dot{\mathbf{H}}$ sobre $\mathbf{e}_\phi$ es así $bp\sin\theta + A\ddot\theta - Ap^2\sin\theta\cos\theta$. El torque sobre esa dirección es $k\sin\theta$, lo que da la primera igualdad. Para la segunda, derivar el cociente de la proposición 22.20 y sustituir $p = (a - b\cos\theta)/(A\sin^2\theta)$ produce $-V_{\mathrm{ef}}' = \sin\theta(Ap^2\cos\theta - bp + k)$. Por último, escribir $\theta = \theta_* + \eta$ y expandir la derivada del potencial al primer orden da $A\ddot\eta = -V_{\mathrm{ef}}''(\theta_*)\eta$, cuya solución es una combinación de seno y coseno a la frecuencia indicada. □

Una energía ligeramente superior a un mínimo estricto admite retornos próximos y controla la inclinación mediante la barrera de potencial. Esto es estabilidad del movimiento reducido de inclinación con sus constantes, no atracción ni estabilidad automática de todas las fases angulares. Un retorno simple tiene $V_{\mathrm{ef}}' \neq 0$ y aceleración no nula: el movimiento invierte su sentido. Un punto crítico con energía exactamente igual puede corresponder a precesión regular, o a un límite que requiera analizar cómo se alcanza.

Si dos retornos interiores simples $\theta_- < \theta_+$ delimitan un intervalo accesible sin singularidades, el período de nutación es

$$T_\theta = \sqrt{2A}\int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{d\theta}{\sqrt{E' - V_{\mathrm{ef}}(\theta)}}.$$

Es el doble del tiempo de una travesía. La singularidad inversa de raíz en un retorno simple es integrable; una raíz doble puede introducir una demora ilimitada. Esa distinción es la misma que apareció en las cuadraturas orbitales, aunque aquí la coordenada reducida sea una inclinación.

Principio metodológico 22.12. Usa la ecuación de segundo orden en los retornos. Distingue la solución reducida y sus fases, y controla la multiplicidad de las raíces al calcular períodos.

Ejercicios. Ejercicio 22.23. En una precesión regular horizontal, $a = Ak/b$, con $b \neq 0$. Calcula $V_{\mathrm{ef}}''(\pi/2)$ y la frecuencia local de nutación.

Solución. Para $N = a - b\cos\theta$, la derivada es $V' = Nb/(A\sin\theta) - N^2\cos\theta/(A\sin^3\theta) - k\sin\theta$. Su derivada en $\pi/2$ vale $(a^2+b^2)/A$: el primer término aporta b^2/A, el segundo a^2/A y el tercero cero. Así $\nu^2 = (a^2+b^2)/A^2 = b^2/A^2 + (k/b)^2$. Es positiva. La conclusión se refiere a la inclinación con los valores a, b de esta precesión.

Ejercicio 22.24. Cerca de un mínimo, sustituye V_{ef} por $V_* + \mu(\theta-\theta_*)^2/2$, con $\mu > 0$. Calcula el período mediante la cuadratura anterior.

Solución. Si $E' - V_* = \Delta > 0$, los retornos son $\theta_* \pm d$, con $d = \sqrt{2\Delta/\mu}$. Sustituir $\theta - \theta_* = d\sin u$ reduce la integral entre retornos a $\pi\sqrt{2/\mu}$. Multiplicar por $\sqrt{2A}$ da $T = 2\pi\sqrt{A/\mu} = 2\pi/\nu$. La independencia de amplitud es exacta para el potencial cuadrático sustituto y una aproximación local para el potencial original.

13. El trompo vertical y el umbral de giro

Con el eje hacia arriba, la gravedad tiene torque nulo en la configuración exacta. La cuestión de estabilidad aparece al inclinarlo un poco. El giro axial introduce términos de velocidad capaces de modificar la respuesta a esa perturbación.

Proposición 22.24 — Umbral lineal de inclinación del trompo vertical superior. En definición 22.6, considérese $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ y giro axial constante s, con $b = Cs$. La perturbación transversal compleja $z = \xi_x + i\xi_y$ satisface al primer orden

$$A\ddot{z} - ib\dot{z} - kz = 0.$$

Si $b^2 > 4Ak$, todas sus soluciones permanecen acotadas. Si $b^2 < 4Ak$, existe una solución creciente exponencial. En $b^2 = 4Ak$, la ecuación lineal admite crecimiento proporcional al tiempo y no proporciona una clasificación no lineal por sí sola.

Demostración. La identidad exacta $\mathbf{H} = b\mathbf{n} + A\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}}$ sigue de $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}} + s\mathbf{n}$. Escribamos $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\xi}$ al primer orden, con $\boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{e}_z$. La derivada del momento es $b\dot{\boldsymbol{\xi}} + A\mathbf{e}_z\times\ddot{\boldsymbol{\xi}}$ y el torque $k\mathbf{e}_z\times\boldsymbol{\xi}$. Multiplicar transversalmente por $-\mathbf{e}_z\times$ da $A\ddot{\boldsymbol{\xi}} - b\mathbf{e}_z\times\dot{\boldsymbol{\xi}} - k\boldsymbol{\xi} = 0$. El producto con $\mathbf{e}_z$ equivale a multiplicar z por i, dando la ecuación compleja.

Para $z = e^{i\nu t}$, la ecuación exige $A\nu^2 - b\nu + k = 0$. Con discriminante positivo, las dos frecuencias son reales distintas, y la solución general combina dos exponenciales de módulo uno. Con discriminante negativo, una frecuencia tiene parte imaginaria que produce crecimiento real. Con discriminante cero, la raíz es doble y la solución es $(c_1 + c_2 t)e^{ibt/(2A)}$. □

El umbral involucra el momento transversal sobre el pivote y el momento axial b, no solo la masa o la rapidez de un punto del borde. La acotación lineal superior no describe amortiguamiento: el trompo ideal no converge hacia la vertical.

El potencial reducido ayuda a reconocer el cambio. En el sector $a = b$, el cociente de la proposición 22.20 se extiende cerca del polo como

$$V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{b^2}{2A}\tan^2(\theta/2) + k\cos\theta = k + \left(\frac{b^2}{8A} - \frac{k}{2}\right)\theta^2 + O(\theta^4).$$

Su término cuadrático cambia en el mismo umbral. Exactamente allí, los órdenes superiores y las condiciones del sector necesitan examen propio; una raíz doble de la linealización no debe convertirse en una afirmación general de estabilidad o inestabilidad del sistema completo.

Principio metodológico 22.13. Separa el umbral del modelo lineal de una conclusión no lineal, especialmente en la igualdad crítica. Conserva el punto sobre el que se calculan las inercias.

Ejercicios. Ejercicio 22.25. Encuentra la condición sobre $|s|$ para el régimen lineal acotado del trompo vertical y describe qué cambia al duplicar $|s|$.

Solución. Como $b = Cs$, se requiere $|s| > 2\sqrt{Ak}/C$. Duplicar la rapidez multiplica b^2 por cuatro, mientras $4Ak$ permanece igual si el cuerpo y la gravedad no cambian. Puede llevar una preparación del régimen exponencial al acotado, pero no introduce disipación ni hace que cualquier orientación inicial llegue a ser vertical.

Ejercicio 22.26. En unidades coherentes, toma $A = 1$, $k = 1$. Calcula las frecuencias lineales para $b = 3$ y describe el caso $b = 2$.

Solución. Para $b = 3$, las frecuencias son $(3 \pm \sqrt{5})/2$, reales distintas. La perturbación es una combinación acotada de dos giros transversales. Para $b = 2$, la frecuencia doble es uno y $z = (c_1 + c_2 t)e^{it}$. Los datos que producen $c_2 \neq 0$ generan crecimiento lineal en esa aproximación; los términos no lineales deciden su evolución cuando deja de ser pequeña.

14. Disipación y alcance de un balance decreciente

La conservación ideal ha explicado los giros libres y el trompo sostenido. Un torque resistente rompe parte de esas constantes. La energía puede seguir proporcionando control, aunque una función decreciente no determine por sí sola el estado final.

Definición 22.8 — Resistencia angular viscosa. En un cuerpo con pivote fijo añadimos un torque corporal $\mathbf{T}_d = -D\boldsymbol{\Omega}$, donde D es una matriz simétrica semidefinida positiva. Puede representar resistencia anisótropa. El pivote continúa sin aportar un par ni potencia adicional.

Proposición 22.25 — Energía disipada del trompo. Para definición 22.6 y definición 22.8,

$$\dot{E} = -\boldsymbol{\Omega}^T D\boldsymbol{\Omega} \leq 0.$$

Si $D \geq d\mathbf{1}$ con $d > 0$, la solución se prolonga para todos los tiempos positivos y

$$\int_0^\infty |\boldsymbol{\Omega}(t)|^2 dt \leq \frac{E(0) + k}{d}.$$

Demostración. proposición 22.5 da la potencia de los torques gravitatorio y resistente. La primera se cancela con la derivada del potencial como en la proposición 22.18, dejando la forma negativa indicada. El potencial está entre $-k$ y k, de modo que $K \leq E(0) + k$ y la inercia positiva acota $\boldsymbol{\Omega}$. La orientación permanece en $SO(3)$ y los torques gravitatorio y viscoso son suaves y acotados sobre el conjunto alcanzado. El argumento de continuación de la proposición 22.8 permite prolongar el movimiento. Integrar hasta T da $d\int_0^T |\boldsymbol{\Omega}|^2 dt \leq E(0) - E(T) \leq E(0) + k$. El límite monótono al crecer T da la desigualdad impropia. □

El cálculo no demuestra, por sí solo, convergencia de toda la orientación ni determina qué equilibrio se alcanza. Esa conclusión necesita estudiar el conjunto de movimiento y las condiciones bajo las que se anula la disipación. Tampoco las dos proyecciones a, b de la proposición 22.18 siguen conservadas en general: el nuevo torque puede tener componente vertical o axial. En una matriz semidefinida, algunas direcciones pueden permanecer sin resistencia.

Principio metodológico 22.14. Revisa qué constantes sobreviven al añadir un torque. Una cota de energía decreciente exige un argumento adicional antes de convertirse en una conclusión de convergencia.

Problemas de integración. Ejercicio 22.27. Un cuerpo tiene tensor principal $\operatorname{diag}(2J, 3J, 4J)$ y velocidad corporal $(u, u, 0)$, con $u \neq 0$. Un torque instantáneo es $(3T, -2T, 0)$. Comprueba que puede ser perpendicular al momento y tener potencia no nula.

Solución. El momento corporal es $(2Ju, 3Ju, 0)$. Su producto con el torque es $6JTu - 6JTu = 0$, por lo que la norma del momento no cambia instantáneamente. El producto del torque con la velocidad es Tu, distinto de cero si $T \neq 0$. La energía sí cambia. Una perpendicularidad al momento no equivale a perpendicularidad a la velocidad angular cuando ambos vectores no son colineales.

Ejercicio 22.28. Un trompo ideal parte con eje horizontal $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ y velocidad angular puramente axial. Calcula la aceleración inicial del eje y explica por qué ese giro inicial no garantiza una precesión regular inmediata.

Solución. Inicialmente $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0$. Derivar $\mathbf{H} = b\mathbf{n} + A\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}$ deja entonces $\dot{\mathbf{H}} = A\mathbf{e}_x \times \ddot{\mathbf{n}}$. El torque es $k\mathbf{e}_y$. Además $\ddot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = -|\dot{\mathbf{n}}|^2 = 0$. Resolver da $\ddot{\mathbf{n}} = -(k/A)\mathbf{e}_z$, hacia abajo. La rapidez axial no aparece en esa aceleración inicial. La precesión horizontal regular requiere una velocidad inicial de eje no nula y el valor $a = Ak/b$, mientras esta preparación tiene $a = 0$.

Ejercicio 22.29. En la trayectoria exacta de la proposición 22.12, empieza en un instante negativo con fracción transversal $\sqrt{h_1^2 + h_3^2}/H = \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < 1$. Calcula el tiempo hasta $h_2 = 0$ y su comportamiento al hacer pequeña la preparación transversal.

Solución. La fracción es $\operatorname{sech}(\gamma t)$. Si el inicio es $t = -T$, entonces $\cosh(\gamma T) = 1/\varepsilon$. Por tanto $T = \gamma^{-1} \log[(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon]$. Para $\varepsilon \to 0$, es asintótico a $\gamma^{-1} \log(2/\varepsilon)$. Una preparación mucho más próxima retrasa la gran reorientación con una escala logarítmica, pero no elimina la inestabilidad de la definición 22.4. La norma de momento sigue siendo H durante toda la trayectoria.

Ejercicio 22.30. Revisa el argumento defectuoso: «Sin torque, la velocidad angular tiene componentes constantes porque el momento angular es constante». Localiza el paso ilegítimo y da un contraejemplo exacto.

Solución. La constancia del momento se refiere al vector inercial. Su relación con la velocidad usa un tensor cuya matriz espacial puede cambiar al girar el cuerpo. En ejes corporales el tensor es constante, pero la derivada del momento incluye transporte. Para $I = \operatorname{diag}(2J, 2J, 3J)$, $s \neq 0$ y datos $(u, 0, s)$ con $u \neq 0$, proposición 22.13 da $(u\cos(st/2), u\sin(st/2), s)$: las primeras dos componentes cambian aunque el torque sea cero. La reparación es conservar $I\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times I\boldsymbol{\Omega} = 0$ y distinguir el vector inercial de sus componentes corporales. La velocidad constante es un caso especial caracterizado por la proposición 22.9.

El balance de torque ha hecho visible cómo una base móvil y una distribución fija producen una dinámica no lineal. Las pequeñas perturbaciones han llevado también a ecuaciones oscilatorias y a escalas de amortiguamiento. En el capítulo 23 estudiaremos esas oscilaciones como tema propio, comenzando por una fuerza restauradora y siguiendo la relación entre fase, energía y respuesta a una excitación.

Capítulo 23

Oscilaciones lineales

Desplacemos una masa unida a un resorte y soltémosla. Al principio la fuerza la acelera hacia el equilibrio; al llegar allí, la fuerza se anula, pero la masa ya tiene velocidad. La inercia la lleva al otro lado. El regreso comienza cuando el resorte ha detenido ese movimiento y vuelve a acelerarla en sentido contrario. La posición de equilibrio organiza el movimiento sin convertirse por ello en su destino.

La misma alternancia aparece en un péndulo de pequeña amplitud, en una barra que gira sobre un apoyo y en las vibraciones de un instrumento. Las fuerzas y las variables pueden ser diferentes. Cerca de un equilibrio estable no degenerado, una aproximación de primer orden conduce a una ecuación común. Su sencillez permite estudiar con precisión qué información aportan la amplitud, la fase, la energía y el tiempo de decaimiento.

El modelo también muestra cómo una fuerza pequeña puede sostener un movimiento considerable. Para comprenderlo habrá que seguir el trabajo de esa fuerza durante cada ciclo. La resonancia adquiere entonces un significado concreto que depende de lo que se mida: desplazamiento, velocidad o potencia transferida.

Usaremos las leyes de Newton y el estudio de potencial y estabilidad del capítulo 10 e capítulo 13. Se presupone derivación, integración y ecuaciones diferenciales lineales elementales; las soluciones centrales se obtendrán y comprobarán aquí. Todos los modelos tendrán un solo grado de libertad. El acoplamiento entre varios osciladores corresponde al capítulo 24.

1. La fuerza cerca del equilibrio

Sea q una coordenada cartesiana para una partícula de masa constante $m > 0$. En ausencia de otras fuerzas, su ecuación es $m\ddot{q} = -U'(q)$. Un equilibrio q_* satisface $U'(q_*) = 0$. Escribir $x = q - q_*$ permite medir las desviaciones desde ese punto.

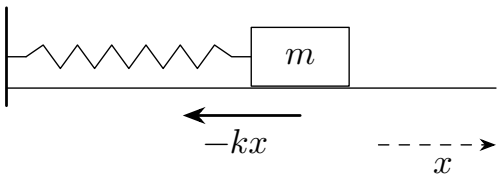


Figura 23.1. El desplazamiento se mide desde el equilibrio. Para $x > 0$, la fuerza elástica es negativa: $m\ddot{x} = -kx$. El plano es liso y las fuerzas verticales se compensan. Véase §1.

Supongamos que U es tres veces continuamente diferenciable en un entorno del equilibrio y que $k = U''(q_*) > 0$. Taylor da $U'(q_* + x) = kx + R(x), \qquad |R(x)| \le C|x|^2$

en un intervalo suficientemente pequeño. La fuerza principal es proporcional al desplazamiento y tiene signo opuesto. Si se retiene ese término, queda $m\ddot{x} + kx = 0$.

Definición 23.1 — Oscilador armónico y frecuencia natural. Un oscilador armónico de un grado de libertad satisface la ecuación anterior, con $m, k > 0$ constantes. Su frecuencia angular natural es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, su período es $T_0 = 2\pi/\omega_0$ y su frecuencia ordinaria es $f_0 = 1/T_0$. Los radianes se consideran adimensionales; ω_0 se expresa en s^{-1} y f_0 en hertz.

Proposición 23.1 — Orden del error de fuerza. Bajo las hipótesis anteriores, la diferencia entre la aceleración exacta y la aceleración armónica, evaluadas en una misma posición x, tiene módulo a lo sumo $(C/m)|x|^2$. Para $x \neq 0$, el cociente entre el error de fuerza y $k|x|$ es a lo sumo $C|x|/k$.

Demostración. La ecuación exacta es $\ddot{x} = -kx/m - R(x)/m$. Restar $-kx/m$ y aplicar la cota del resto prueba la primera afirmación. Dividir $|R(x)| \leq C|x|^2$ por $k|x|$ prueba la segunda. □

La cota compara fuerzas en una posición. Para deducir una aproximación de trayectorias en un intervalo temporal hay que controlar también la acumulación del error. Dos movimientos muy próximos durante varios períodos pueden perder sincronía mucho después. Esa distinción será especialmente importante para el péndulo.

Cuando $U''(q_*) = 0$, el argumento no produce un resorte de rigidez positiva. El potencial $U(x) = \lambda x^4/4$, con $\lambda > 0$, tiene un mínimo estricto y movimientos oscilatorios, pero la ecuación $m\ddot{x} = -\lambda x^3$ conserva su carácter no lineal por pequeña que sea la amplitud. La estabilidad del capítulo 13 admite más casos que el oscilador armónico.

2. Resolver el problema inicial

La ecuación normalizada es $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Derivar dos veces un seno o un coseno devuelve la misma función multiplicada por $-\omega_0^2$. Esto sugiere buscar la solución en el espacio generado por ambas funciones.

Proposición 23.2 — Solución inicial única. Para cualesquiera datos reales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, la solución es

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Demostración. La sustitución verifica la ecuación y los datos. Para probar unicidad sin dar por completa nuestra búsqueda trigonométrica, restemos dos soluciones con esos mismos datos. Su diferencia z satisface $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ y $z(0) = \dot{z}(0) = 0$. Al derivar,

$$\frac{d}{dt}(\dot{z}^2 + \omega_0^2 z^2) = 2\dot{z}(\ddot{z} + \omega_0^2 z) = 0.$$

La expresión es constante e inicialmente nula. Sus dos sumandos son no negativos, de modo que $z = \dot{z} = 0$ para todo t. □

El dato de velocidad tiene tanta importancia como el de posición. Una masa situada en el equilibrio puede permanecer allí o atravesarlo con cualquier rapidez inicial. La ecuación de segundo orden necesita ambos datos porque describe un estado formado por posición y velocidad.

Por ejemplo, para $m = 0{,}50\,\mathrm{kg}$ y $k = 8\,\mathrm{N/m}$ resulta $\omega_0 = 4\,\mathrm{s}^{-1}$. Con $x_0 = 0{,}03\,\mathrm{m}$ y $v_0 = 0{,}16\,\mathrm{m/s}$, $x(t) = 0{,}03\cos(4t) + 0{,}04\sin(4t)$ metros,

donde el valor numérico de t se introduce en segundos. La rapidez inicial positiva hace crecer la posición durante un primer intervalo, aunque el resorte ya tire hacia el equilibrio.

3. Amplitud y fase

Los dos coeficientes de la solución contienen información que puede reorganizarse geométricamente. Pongamos

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}.$$

Para $A > 0$ existe un ángulo ϕ, determinado módulo 2π, tal que $x_0 = A\cos\phi$ y $v_0 = -A\omega_0 \sin\phi$. La fórmula de adición del coseno transforma la solución en $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$.

Definición 23.2 — Amplitud y fase. En una solución armónica no nula escrita como $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, con $A > 0$, la amplitud es A y la fase es $\omega_0 t + \phi$ módulo 2π. Para la solución nula fijamos $A = 0$; su fase carece de determinación física.

La fase inicial se calcula con los dos signos, $\phi = \operatorname{atan2}(-v_0/\omega_0, x_0)$. La función $\operatorname{atan2}(y, x)$ designa el argumento del vector (x, y) en un intervalo de longitud 2π. Usar únicamente la tangente pierde la distinción entre cuadrantes y puede invertir el sentido inicial del movimiento.

Proposición 23.3 — Cambio del origen temporal. Si $t = t' + t_*$, la amplitud y la frecuencia permanecen iguales y la fase inicial pasa de ϕ a $\phi + \omega_0 t_*$, módulo 2π.

Demostración. Sustituir $t' + t_*$ en $A\cos(\omega_0 t + \phi)$ produce directamente la expresión indicada. □

Por tanto, una fase aislada depende del reloj elegido. La diferencia de fase entre dos movimientos de la misma frecuencia, observados con el mismo reloj, permanece constante. Una diferencia de π corresponde a desplazamientos opuestos; una diferencia de $\pi/2$ sitúa el máximo de uno en un cruce por el equilibrio del otro.

4. Energía y geometría del estado

La energía del oscilador, tomando cero de potencial en el equilibrio, es $E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$.

Proposición 23.4 — Conservación y amplitud energética. La energía permanece constante y vale $E = kA^2/2$. Si $A > 0$, la curva recorrida en el plano (x, v) es la elipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 A^2} = 1.$$

Demostración. Derivar E da $\dot{E} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$. Sustituir $x = A\cos\theta$ y $v = -A\omega_0\sin\theta$, con $\theta = \omega_0 t + \phi$, da $E = kA^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)/2 = kA^2/2$. Dividir la identidad energética por ese valor produce la ecuación de la elipse. □

En un extremo $x = \pm A$ la velocidad es cero. En el equilibrio $x = 0$ la rapidez es máxima: $|v| = \omega_0 A$. La energía permite obtener esos valores sin averiguar en qué instante se alcanzan.

Proposición 23.5 — Promedios en un ciclo. En cualquier intervalo de longitud T_0, las energías cinética y potencial medias son ambas $E/2$.

Demostración. Las dos energías son $E\sin^2\theta$ y $E\cos^2\theta$. Durante un ciclo, θ recorre un intervalo de longitud 2π. Las identidades $\sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$ y $\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$ muestran que ambas medias valen $1/2$. □

En las coordenadas $(x, v/\omega_0)$ la elipse se convierte en un círculo. El punto de estado gira uniformemente en sentido horario, pues en $(A, 0)$ la aceleración es negativa. Un único valor de posición, en cambio, suele corresponder a dos estados: uno que avanza y otro que regresa.

5. Qué conserva la aproximación armónica

En un resorte vertical ideal, con eje positivo hacia abajo, la ecuación es $m\ddot q = mg - kq$, donde q mide el alargamiento desde la longitud natural. El equilibrio se encuentra en $q_* = mg/k$. Al escribir $x = q - q_*$ queda exactamente $m\ddot x = -kx$. La gravedad uniforme desplaza el equilibrio; el coeficiente de la desviación sigue siendo k.

Para un péndulo simple de longitud ℓ, el balance tangencial da $\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$. Como $|\sin\theta - \theta| \le |\theta|^3/6$, la aproximación de pequeña amplitud es $\ddot\theta + (g/\ell)\theta = 0$, con frecuencia $\sqrt{g/\ell}$. La variable es angular; el papel de masa inercial lo cumple $m\ell^2$ si escribimos el balance de torque, y la rigidez angular vale $mg\ell$.

Proposición 23.6 — Período exacto del péndulo y primer error. Para una oscilación del péndulo ideal con amplitud $0 < \alpha < \pi$,

$$T(\alpha) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)\sin^2\psi}}.$$

Cuando $\alpha \to 0$, $T(\alpha) = T_0[1 + \alpha^2/16 + O(\alpha^4)]$, donde $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ y α se mide en radianes.

Demostración. La energía en el extremo es $mg\ell(1-\cos\alpha)$. Igualarla a $m\ell^2\dot\theta^2/2 + mg\ell(1-\cos\theta)$ da

$$\dot\theta^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Un cuarto del período es la integral temporal entre 0 y α. La sustitución $\sin(\theta/2) = s\sin\psi$, con $s = \sin(\alpha/2)$, transforma esa integral en la anunciada. Para s pequeño, Taylor, uniformemente para $0 \le \psi \le \pi/2$, da $(1 - s^2\sin^2\psi)^{-1/2} = 1 + s^2\sin^2\psi/2 + O(s^4)$. Integrar y usar $s^2 = \alpha^2/4 + O(\alpha^4)$ produce el coeficiente $1/16$. $\square$

El período real es mayor que T_0: el integrando exacto es mayor que uno en el interior. La diferencia de período es pequeña para amplitudes pequeñas, pero se repite en cada ciclo y termina produciendo un desfase apreciable. La aproximación de fuerza y su duración útil son dos cuestiones relacionadas que conviene medir por separado.

6. Una fuerza que disipa energía

Un movimiento real suele perder energía mecánica. En un régimen en que la fuerza resistente es aproximadamente proporcional a la velocidad respecto del medio, escribimos $F_d = -b\dot x$, con $b \ge 0$. El medio y el soporte del resorte se suponen en reposo en el marco usado. La ecuación libre es $m\ddot x + b\dot x + kx = 0$.

Definición 23.3 — Parámetros de amortiguamiento. Definimos $\beta = b/(2m)$ y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. El sistema es subamortiguado si $0 < \beta < \omega_0$, críticamente amortiguado si $\beta = \omega_0$ y sobreamortiguado si $\beta > \omega_0$. El caso $\beta = 0$ es el oscilador conservativo.

Proposición 23.7 — Balance disipativo. Para el oscilador libre con resistencia viscosa,

$$\dot E = -b\dot x^2, \qquad E(t) + \int_0^t b\dot x(s)^2\,ds = E(0) \quad (t \ge 0).$$

Demostración. Derivar E y sustituir la ecuación deja $\dot x(-b\dot x)$. Integrar entre 0 y t prueba el balance. $\square$

La energía es no creciente. Eso todavía no demuestra por sí solo que x tienda al equilibrio: una función no creciente puede tender a un valor positivo. Las soluciones explícitas permitirán resolver esa pregunta. También conviene observar que $\dot E = 0$ en cada instante de retorno, donde $\dot x = 0$. La energía no necesita decrecer a una tasa estrictamente negativa en todos los instantes para perderse a lo largo del movimiento.

La ley viscosa es una hipótesis de modelo. El rozamiento seco depende del signo de la velocidad y requiere otro tratamiento cerca del reposo. Sustituir uno por otro cambia tanto las soluciones como la manera en que se detiene el sistema.

7. Los tres regímenes de retorno

Buscamos soluciones $x = e^{rt}$. Al sustituir, aparece $r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$. El discriminante decide la forma del movimiento.

Proposición 23.8 — Soluciones libres amortiguadas. Con datos iniciales x_0, v_0:
Si $0 \le \beta < \omega_0$ y $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$,

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[x_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right].$$

Si $\beta = \omega_0$, $x(t) = e^{-\beta t}[x_0 + (v_0 + \beta x_0)t]$. Si $\beta > \omega_0$ y $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$,

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[x_0\cosh(\gamma t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma}\sinh(\gamma t)\right].$$

Demostración. La sustitución $x = e^{-\beta t}y$ reduce la ecuación a $\ddot y + (\omega_0^2 - \beta^2)y = 0$, con $y(0) = x_0$ y $\dot y(0) = v_0 + \beta x_0$. Según el signo del coeficiente, se resuelve con senos y cosenos, funciones afines o exponenciales reales. Las expresiones satisfacen los datos. La unicidad se prueba con el balance energético aplicado a la diferencia de dos soluciones de datos iguales: su energía empieza en cero y no puede aumentar ni hacerse negativa. □

En el caso subamortiguado, cualquier solución no nula cambia de signo repetidamente. Su parte trigonométrica conserva un período $T_d = 2\pi/\omega_d$, aunque la solución completa ya no es periódica.

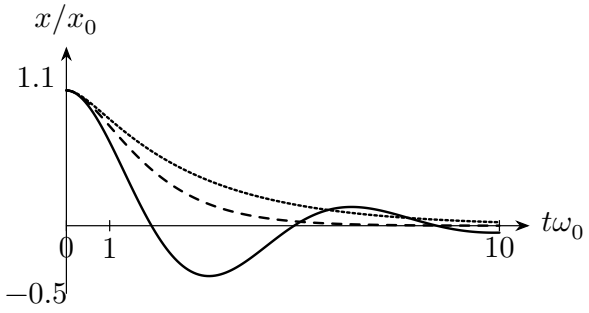


Figura 23.2. Con $x(0) = 1$, $\dot x(0) = 0$ y $\omega_0 = 1$, se comparan $\beta = 0{,}3$ (continua), 1 (discontinua) y 1,5 (punteada) en $\ddot x + 2\beta\dot x + x = 0$. Sólo el primero cruza repetidamente el equilibrio. Véase §7.

En los casos crítico y sobreamortiguado puede haber un cruce por el equilibrio, según los datos iniciales. Lo que desaparece es la sucesión indefinida de cruces. Para comprobarlo, en el caso crítico basta estudiar el signo del factor afín. En el sobreamortiguado, escribir $x = c_+e^{r_+t} + c_-e^{r_-t}$, con

$r_+ > r_-$, muestra que la ecuación $x = 0$ equivale a $c_+ e^{(r_+ - r_-)t} + c_- = 0$, con a lo sumo una solución si el movimiento no es nulo.

Proposición 23.9 — Atracción del equilibrio y cola lenta. Si $\beta > 0$, todas las soluciones libres satisfacen $(x(t), \dot{x}(t)) \to (0, 0)$ cuando $t \to \infty$. En el régimen sobreamortiguado, la tasa exponencial más lenta es

$$r_+ = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\frac{\omega_0^2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}.$$

Demostración. En el régimen subamortiguado, la exponencial decreciente multiplica funciones acotadas. En el crítico, tanto $e^{-\beta t}$ como $te^{-\beta t}$ y sus derivadas tienden a cero. En el sobreamortiguado las dos raíces son negativas porque $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$. La identidad para r_+ se obtiene racionalizando. □

Cuando β es muy grande, $r_+ \sim -\omega_0^2/(2\beta) = -k/b$. Una resistencia enorme puede hacer muy lento el retorno. La frase «más amortiguamiento, retorno más rápido» falla en ese régimen. La tasa lenta aparece salvo que los datos anulen exactamente su coeficiente.

8. Medir el decaimiento

En el régimen subamortiguado podemos escribir $x = A_d e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \phi_d)$. El factor $A_d e^{-\beta t}$ es una envolvente: la curva permanece entre sus valores positivo y negativo. Los extremos reales no ocurren exactamente cuando el coseno vale ± 1, porque también varía la exponencial.

Al derivar, la condición de extremo es $\beta \cos\theta + \omega_d \sin\theta = 0$. Los máximos positivos consecutivos tienen la misma fase módulo 2π, por lo que están separados por T_d.

Definición 23.4 — Decremento logarítmico y factor de calidad. Para máximos positivos consecutivos X_n, X_{n+1}, definimos $\delta = \log(X_n / X_{n+1})$. Para $\beta > 0$, adoptamos el factor de calidad del modelo $Q = \omega_0/(2\beta) = m\omega_0/b$.

Proposición 23.10 — Medición por máximos. En el régimen subamortiguado,

$$\delta = \beta T_d, \qquad \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \beta^2}, \qquad Q = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}{2\delta}.$$

Demostración. La parte trigonométrica toma el mismo valor en dos máximos positivos consecutivos. Su cociente es por ello $e^{\beta T_d}$, y el logaritmo da la primera igualdad. La definición de ω_d da la segunda. Sustituir $\omega_d = 2\pi/T_d$ y $\beta = \delta/T_d$ en Q prueba la tercera. □

Para $\delta \ll 1$, $Q \simeq \pi/\delta$. Esta última relación es aproximada. Tampoco la energía instantánea es, en general, una exponencial pura: E contiene factores periódicos además de $e^{-2\beta t}$. Sí se cumple exactamente

$$E(t + T_d) = e^{-2\beta T_d} E(t),$$

pues tanto posición como velocidad se multiplican por $e^{-\beta T_d}$ al avanzar un ciclo de la parte oscilatoria.

9. Una fuerza aplicada y la respuesta causal

Incorporemos una fuerza exterior prescrita $F(t)$: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$. La ecuación es lineal. Si x_1, x_2 responden a F_1, F_2, entonces $a_1 x_1 + a_2 x_2$ responde a $a_1 F_1 + a_2 F_2$. Para sumar respuestas con condiciones iniciales hay que sumar también esos datos. Cuando se busca la respuesta de reposo, todas las contribuciones se toman con datos nulos.

Proposición 23.11 — Fórmula de respuesta para datos nulos. Sea F continua y h la solución homogénea con $h(0)=0$, $\dot h(0)=1$. Entonces

$$x(t)=\frac{1}{m}\int_0^t h(t-s)F(s)\,ds$$

es la solución con $x(0)=\dot x(0)=0$. En el régimen subamortiguado, $h(t)=e^{-\beta t}\sin(\omega_d t)/\omega_d$ para $t\ge 0$.

Demostración. Derivar la integral una vez no añade término de borde porque $h(0)=0$. Derivarla otra vez añade $\dot h(0)F(t)/m=F(t)/m$. En $\ddot x+2\beta\dot x+\omega_0^2 x$, los términos integrales se anulan por la ecuación de h. Los datos iniciales son nulos. La unicidad ya probada para diferencias homogéneas completa el argumento. $\square$

La integral acumula respuestas a fuerzas pasadas. En el instante t sólo usa valores de $F(s)$ con $s\le t$. Esta causalidad resulta especialmente útil para una fuerza que se enciende, se apaga o actúa durante un intervalo corto. En los regímenes crítico y sobreamortiguado, las mismas ideas se aplican con $h(t)=te^{-\beta t}$ y $h(t)=e^{-\beta t}\sinh(\gamma t)/\gamma$, respectivamente.

Una fuerza continua por tramos también admite esta fórmula, interpretando las derivadas en cada tramo y manteniendo continuas posición y velocidad en los saltos finitos de la fuerza.

10. Fuerza sinusoidal y desfase

Supongamos $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$, con $F_0>0$, $\Omega>0$ y $b>0$. Buscamos una solución particular de la misma frecuencia, $x_s(t)=a\cos(\Omega t)+c\sin(\Omega t)$. Sustituir y agrupar senos y cosenos da, poniendo $d=k-m\Omega^2$, $da+b\Omega c=F_0$, $\qquad dc-b\Omega a=0$.

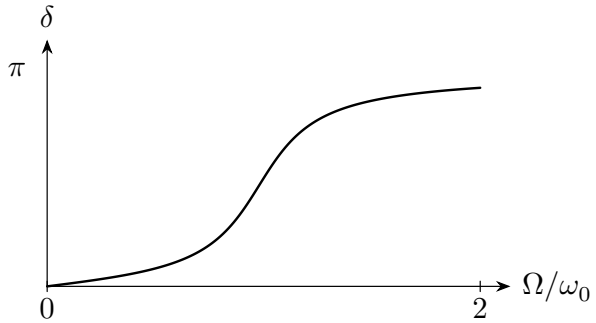


Figura 23.3. Para $\ddot x+0{,}4\dot x+x=F_0\cos\Omega t$, la fase estacionaria satisface $\delta=\operatorname{atan2}(0{,}4\Omega,1-\Omega^2)$. En $\Omega=1$, la respuesta se retrasa $\pi/2$ respecto de la fuerza. Véase §10.

El determinante $D=d^2+b^2\Omega^2$ es positivo. Así, $a=\frac{F_0 d}{D}$, $\qquad c=\frac{F_0 b\Omega}{D}$.

Definición 23.5 — Respuesta estacionaria y susceptibilidad. La respuesta sinusoidal estacionaria es $x_s=A(\Omega)\cos(\Omega t-\vartheta)$, donde

$$A(\Omega)=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+b^2\Omega^2}},\qquad \vartheta=\operatorname{atan2}(b\Omega,k-m\Omega^2)\in(0,\pi).$$

Con la convención compleja $F(t)=\operatorname{Re}(F_0 e^{i\Omega t})$, la susceptibilidad es $\chi(\Omega)=(k-m\Omega^2+ib\Omega)^{-1}$, de modo que $x_s=\operatorname{Re}(\chi F_0 e^{i\Omega t})$.

Proposición 23.12 — Pérdida de memoria inicial. Para $b > 0$, toda solución con la fuerza sinusoidal indicada satisface $x(t) - x_s(t) \to 0$ y $\dot{x}(t) - \dot{x}_s(t) \to 0$.

Demostración. La diferencia satisface la ecuación homogénea amortiguada. Proposición 23.9 asegura su decaimiento para cualesquiera datos iniciales. □

«Estacionaria» significa aquí que el patrón de respuesta se repite y ya no depende de cómo se inició el movimiento. La masa continúa moviéndose y disipando energía. Cuando Ω es pequeña, $A \to F_0/k$ y $\vartheta \to 0$: el resorte sigue casi estáticamente la fuerza. Cuando Ω es muy grande, $A \sim F_0/(m\Omega^2)$ y $\vartheta \to \pi$: domina la aceleración. En $\Omega = \omega_0$, la fase es $\pi/2$. Entonces la velocidad, derivada de $A\sin(\omega_0 t)$, está en fase con la fuerza.

11. Qué frecuencia maximiza el desplazamiento

La amplitud depende de Ω. Para compararla entre frecuencias fijaremos m, k, b y la amplitud de fuerza F_0. Esta última condición importa: si el mecanismo cambia la fuerza al variar la frecuencia, cambia también el problema de optimización.

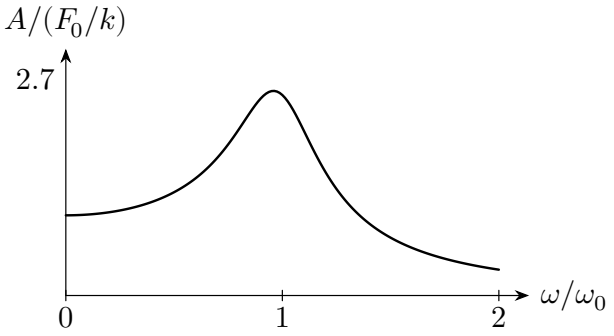


Figura 23.4. Con $\omega_0 = 1$ y $\beta = 0{,}2$, la amplitud estacionaria normalizada es $[(1-\omega^2)^2 + 0{,}16\omega^2]^{-1/2}$. Su máximo ocurre en $\omega = \sqrt{0{,}92}$, por debajo de la frecuencia natural. Véase §11.

Proposición 23.13 — Pico de desplazamiento. Si $0 < \beta < \omega_0/\sqrt{2}$, la amplitud estacionaria tiene un máximo único para $\Omega > 0$ en

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \qquad A(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Si $\beta \geq \omega_0/\sqrt{2}$, la amplitud decrece estrictamente para $\Omega > 0$ y su supremo es el valor estático F_0/k cuando $\Omega \to 0$.

Demostración. Maximizar A equivale a minimizar

$$H(\Omega) = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2.$$

Con $u = \Omega^2 \geq 0$, $H = u^2 + (4\beta^2 - 2\omega_0^2)u + \omega_0^4$.

Es una parábola estrictamente convexa cuyo vértice está en $u = \omega_0^2 - 2\beta^2$. Si ese valor es positivo, da el mínimo interior; sustituirlo produce $H = 4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)$ y la amplitud anunciada. Si es no positivo, H aumenta estrictamente con $u > 0$. □

La frecuencia natural ω_0, la frecuencia libre amortiguada ω_d y la frecuencia del pico Ω_r son distintas. Para amortiguamiento débil se aproximan, lo que explica que una descripción poco precisa

pueda confundirlas sin que un experimento elemental lo revele. Hay incluso sistemas subamortiguados, con $\omega_0/\sqrt{2} \le \beta < \omega_0$, cuya respuesta libre oscila y cuya curva de desplazamiento carece de un pico interior.

12. Trabajo por ciclo y resonancia de potencia

El balance energético con fuerza exterior es $\dot{E} = F(t)\dot{x} - b\dot{x}^2$. En régimen estacionario, la energía recupera su valor después de un período $T_\Omega = 2\pi/\Omega$. Promediar el balance da $\langle F\dot{x}_s\rangle = b\langle \dot{x}_s^2\rangle$. La potencia que entrega la fuerza compensa exactamente la disipación media.

Proposición 23.14 — Potencia media y máximo. Con $b > 0$ y F_0 fijo,

$$\overline{P}(\Omega) = \frac{1}{2} b\Omega^2 A(\Omega)^2 = \frac{F_0^2 b\Omega^2}{2[(k - m\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2]}.$$

Para $\Omega > 0$ su máximo único se alcanza en $\Omega = \omega_0$ y vale $F_0^2/(2b)$.

Demostración. La media de $\dot{x}_s^2 = \Omega^2 A^2 \sin^2(\Omega t - \vartheta)$ es $\Omega^2 A^2/2$. Para localizar el máximo, divídase numerador y denominador por Ω^2:

$$\overline{P} = \frac{F_0^2 b}{2[(k/\Omega - m\Omega)^2 + b^2]}.$$

El denominador es mínimo exactamente cuando $k/\Omega = m\Omega$, es decir, cuando $\Omega = \sqrt{k/m}$. $\square$

Definición 23.6 — Anchura de media potencia. Sean $\Omega_- < \omega_0 < \Omega_+$ las frecuencias positivas donde $\overline{P}$ es la mitad de su máximo. Definimos $\Delta\Omega = \Omega_+ - \Omega_-$.

Proposición 23.15 — Anchura exacta del modelo viscoso. Se cumple

$$\Omega_\pm = \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2} \pm \beta, \qquad \Delta\Omega = 2\beta, \qquad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}.$$

Demostración. La condición de media potencia equivale a $(k - m\Omega^2)^2 = b^2\Omega^2$, o $|\omega_0^2 - \Omega^2| = 2\beta\Omega$. Resolver las dos cuadráticas y tomar sus raíces positivas da los valores indicados. Restarlos produce 2β y la definición de Q completa la prueba. $\square$

La igualdad para la anchura es exacta para esta potencia, este amortiguamiento viscoso y esta fuerza de amplitud fija. Si se usa el cuadrado del desplazamiento para definir otra anchura, hay que repetir el cálculo. En un oscilador de calidad alta las curvas se parecen mucho cerca del pico, pero ese parecido no vuelve intercambiables sus definiciones.

13. Resonancia sin disipación y batidos

Para $b = 0$ desaparece el mecanismo que borra las condiciones iniciales. Si $\Omega \neq \omega_0$, todavía existe una solución particular sinusoidal, pero el movimiento libre que se le añade permanece indefinidamente. Ya no se obtiene una respuesta única atrayente.

Proposición 23.16 — Forzamiento sin disipación desde el reposo. Con $b = 0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ y $F = F_0\cos(\Omega t)$,

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}[\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (\Omega \neq \omega_0).$$

En resonancia exacta, $x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t)$.

Demostración. Fuera de resonancia, el primer coseno, con su coeficiente, resuelve la ecuación forzada; el segundo cancela la posición inicial sin alterar la fuerza y ambas derivadas iniciales son cero. En resonancia, derivar dos veces $t\sin(\omega_0 t)$ da

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)[t\sin(\omega_0 t)] = 2\omega_0\cos(\omega_0 t).$$

La expresión propuesta satisface la ecuación y los datos. La unicidad prueba ambas fórmulas. □

Para frecuencias cercanas, la identidad

$$\cos(\Omega t)-\cos(\omega_0 t) = -2\sin\left(\frac{\Omega+\omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega-\omega_0}{2}t\right)$$

separa una oscilación rápida de una modulación lenta. Los máximos del módulo de la envolvente están separados por $2\pi/|\Omega-\omega_0|$: ése es el período de batido. El signo de la envolvente alterna, lo que equivale a un cambio de fase de π de la oscilación rápida.

La fórmula resonante también se recupera tomando $\Omega\to\omega_0$ en la solución de reposo para cada tiempo fijo. Su crecimiento proporcional a t permanece dentro de un modelo ideal de resorte lineal y fuerza prescrita. Un aparato físico termina encontrando disipación, no linealidad, límites del actuador o una amplitud incompatible con la aproximación inicial.

14. Reconstruir el modelo y reconocer sus límites

Un registro de posición puede revelar varios parámetros. La oscilación libre permite medir T_d y δ; de ellos se obtienen β y ω_0. Todavía falta una escala de masa para separar m, k y b: multiplicar los tres por una misma constante deja inalterada la ecuación libre normalizada.

Una fuerza estática conocida aporta otra observación. Si produce un desplazamiento de equilibrio $x_s\neq 0$, entonces $k=F_s/x_s$. Después $m=k/\omega_0^2$ y $b=2m\beta$. Cada medición resuelve una indeterminación distinta. Ajustar una curva sin examinar qué parámetros pueden identificarse puede dar una precisión numérica engañosa.

También la excitación necesita una descripción correcta. Si el extremo del resorte se mueve con posición prescrita $y(t)$ y la resistencia viscosa actúa respecto de ese mismo soporte, el balance es $m\ddot{x}=-k(x-y)-b(\dot{x}-\dot{y})$.

Con la coordenada relativa $z=x-y$, $m\ddot{z}+b\dot{z}+kz=-m\ddot{y}$. Para $y=Y\cos(\Omega t)$, la amplitud de la fuerza equivalente es $m\Omega^2 Y$. Aunque la amplitud del soporte permanezca fija, la fuerza equivalente crece con la frecuencia. Las conclusiones de la proposición 23.13, formuladas con F_0 fijo, deben adaptarse antes de usarse en este experimento.

La energía proporciona un control transversal: una resistencia viscosa pasiva siempre aporta $-b\dot{x}^2$ en el marco en que se ha definido esa resistencia. Un signo contrario señalaría un mecanismo activo o un error en el balance. La fase ofrece otro control: la velocidad estacionaria está en fase con la fuerza en la frecuencia de máxima potencia. Un ajuste que contradiga simultáneamente estos balances exige revisar convenciones y modelo.

En el capítulo 24, cada masa sentirá fuerzas que dependen también de las posiciones de las otras. Encontrar movimientos en que todas oscilen con una frecuencia común permitirá recuperar ecuaciones escalares como las de este capítulo. La amplitud y la fase pasarán a describir la organización del movimiento colectivo.

15. Ejercicios

Ejercicio 23.1 — Del resorte al período.

Una masa de 2 kg está unida a un resorte de 18 N/m. Halla frecuencia angular, frecuencia ordinaria y período. Explica qué cambia si la amplitud se duplica en el modelo ideal.

Ejercicio 23.2 — Datos con velocidad.

Resuelve $\ddot{x}+9x=0$ con $x(0)=2$ y $\dot{x}(0)=-3$. Da amplitud y fase con la convención del capítulo.

Ejercicio 23.3 — La posición no determina el estado.

Construye dos soluciones armónicas de frecuencia ω_0 que pasen por $x=0$ en $t=0$ con velocidades opuestas no nulas. Compara sus energías y fases.

Ejercicio 23.4 — Cambiar de reloj.

Para $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$, con $A>0$, escoge un nuevo origen temporal en un máximo positivo. Escribe la solución con el nuevo reloj.

Ejercicio 23.5 — Energía y extremos.

Un oscilador tiene $m=1\,\mathrm{kg}$, $k=25\,\mathrm{N/m}$ y $E=0{,}50\,\mathrm{J}$. Halla su amplitud y su rapidez máxima.

Ejercicio 23.6 — Un cociente que exige cuidado.

Un argumento divide $m\ddot{x}=-kx$ por $\dot{x}$ para obtener una ecuación energética. Diagnostica el problema y construye una prueba válida incluso en los extremos.

Ejercicio 23.7 — Cambio del equilibrio vertical.

Un resorte vertical ideal soporta una masa m y después otra de masa $4m$. Compara los alargamientos de equilibrio y los períodos, suponiendo que sigue siendo válida la ley de Hooke.

Ejercicio 23.8 — Equilibrio degenerado.

Para $m\ddot{x}=-\lambda x^3$, con $\lambda>0$, una oscilación tiene amplitud $A>0$. Deduce mediante energía que su período es proporcional a $1/A$.

Ejercicio 23.9 — Error del período del péndulo.

Usa proposición 23.6 para estimar la corrección relativa del período a una amplitud de 0,20 radianes. Distingue estimación asintótica y cota rigurosa.

Ejercicio 23.10 — Clasificación dimensional.

Sean $m=1\,\mathrm{kg}$ y $k=9\,\mathrm{N/m}$. Clasifica los casos $b=2$, 6 y 10 kg/s y calcula las frecuencias o raíces relevantes.

Ejercicio 23.11 — Subamortiguado desde un extremo.

Resuelve $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$ con $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$. Explica por qué el coeficiente del seno no es cero.

Ejercicio 23.12 — Cruce en el régimen crítico.

Para $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0$, $x(0)=1$, determina qué velocidades iniciales producen un cruce por el equilibrio en un tiempo positivo.

Ejercicio 23.13 — Modo lento ausente.

En $\ddot{x}+6\dot{x}+5x=0$, encuentra la relación entre x_0 y v_0 que elimina el modo más lento. Resuelve para $x_0=1$ bajo esa condición.

Ejercicio 23.14 — Inferir amortiguamiento.

Los máximos positivos de una oscilación están separados por 2 s y cada uno vale el 80 % del anterior. Calcula β, ω_d, ω_0 y Q.

Ejercicio 23.15 — ¿Energía exponencial exacta?.

Refuta la afirmación de que toda energía libre subamortiguada satisface $E(t)=E(0)e^{-2\beta t}$. Usa datos de reposo con desplazamiento no nulo.

Ejercicio 23.16 — Encendido de una fuerza constante.

Un oscilador subamortiguado parte del reposo en el equilibrio. A partir de $t = 0$ actúa una fuerza constante F_s. Halla $x(t)$ y su límite.

Ejercicio 23.17 — Impulso ideal.

Un impulso de magnitud algebraica J actúa en $t = 0$ sobre un oscilador en reposo. Modela su efecto como un salto de velocidad J/m y escribe la respuesta subamortiguada posterior. Calcula la energía inmediatamente después.

Ejercicio 23.18 — Pulso de duración finita.

Con los datos del ejercicio 23.16, la fuerza se apaga en $t = \tau > 0$. Expresa la respuesta completa usando la respuesta al escalón unitario de fuerza y justifica la continuidad en τ.

Ejercicio 23.19 — Resolver amplitud y fase.

Para $m = 1$, $k = 9$, $b = 2$, $F_0 = 4$ y $\Omega = 2$ en unidades coherentes, calcula la respuesta estacionaria y su desfase.

Ejercicio 23.20 — Una tangente insuficiente.

En el sistema del ejercicio 23.19 usa $\Omega = 4$. Explica qué error produce escoger la fase con la función arctan de un solo argumento.

Ejercicio 23.21 — Oscilar sin pico de desplazamiento.

Construye un sistema libre subamortiguado cuya amplitud estacionaria decrezca para toda $\Omega > 0$ con F_0 fijo. Justifica ambas propiedades.

Ejercicio 23.22 — Tres frecuencias.

Para $\omega_0 = 5\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\beta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, ordena y calcula la frecuencia libre amortiguada, la de máximo desplazamiento y la de máxima potencia.

Ejercicio 23.23 — Energía por ciclo.

Demuestra que el trabajo de la fuerza en un ciclo estacionario es $W = \pi b \Omega A^2$. Calcula su valor en $\Omega = \omega_0$.

Ejercicio 23.24 — Frecuencias de media potencia.

Para $\omega_0 = 10$ y $\beta = 1$ en unidades coherentes, calcula Ω_-, Ω_+ y su media geométrica. ¿Está ω_0 en el punto medio aritmético?

Ejercicio 23.25 — Resonancia de reposo.

Comprueba directamente la solución resonante de la proposición 23.16 y calcula su energía en los instantes $t_n = n\pi/\omega_0$, para enteros $n \geq 0$.

Ejercicio 23.26 — Batidos audibles.

Dos oscilaciones de igual amplitud tienen frecuencias ordinarias 440 y 442 Hz. Escribe su suma como producto y determina la frecuencia de los máximos del módulo de la envolvente.

Ejercicio 23.27 — Identificación incompleta.

Demuestra que observar una trayectoria libre, aun exactamente y durante un intervalo arbitrariamente largo, no basta en general para identificar por separado m, b y k.

Ejercicio 23.28 — Identificación con dato estático.

Se miden $\beta = 0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\omega_d = \sqrt{15{,}75}\,\mathrm{s}^{-1}$. Una fuerza estática de 8 N desplaza el equilibrio 0,02 m. Halla m, k, b y Q.

Ejercicio 23.29 — Excitación por el soporte.

Para el modelo de soporte móvil de §14, con $y = Y\cos(\Omega t)$ y $b > 0$, encuentra la amplitud estacionaria relativa Z y sus límites cuando $\Omega \to 0$ y $\Omega \to \infty$.

Ejercicio 23.30 — Estabilidad sin pérdida de energía.

Demuestra que el equilibrio del oscilador libre sin disipación es estable en el plano posición-velocidad, pero no es asintóticamente estable. Usa la distancia escalada $r(x,v)=\sqrt{x^2+(v/\omega_0)^2}$ y explica su relación con la distancia euclídea.

16. Soluciones

Solución del ejercicio 23.1.

Dividir la rigidez por la masa da $\omega_0^2 = 9\,\mathrm{s}^{-2}$. Por tanto $\omega_0 = 3\,\mathrm{s}^{-1}$, $T_0 = 2\pi/3\,\mathrm{s}$ y $f_0 = 3/(2\pi)\,\mathrm{Hz}$. La ecuación lineal no contiene la amplitud en su frecuencia. Duplicar A deja T_0 igual y multiplica por cuatro la energía $kA^2/2$. Esta conclusión exige conservar el modelo de resorte ideal.

Solución del ejercicio 23.2.

Proposición 23.2 da $x = 2\cos 3t - \sin 3t$. Comparando con $A\cos(3t+\phi)$, obtenemos $A=\sqrt{5}$, $\cos\phi = 2/\sqrt{5}$ y $\sin\phi = 1/\sqrt{5}$. Puede elegirse $\phi = \arctan(1/2)$, en el primer cuadrante. La derivada inicial es $-3A\sin\phi = -3$, lo que verifica el signo.

Solución del ejercicio 23.3.

Para cualquier $V>0$, tomemos $x_{\pm}(t) = \pm(V/\omega_0)\sin(\omega_0 t)$. Sus velocidades iniciales son $\pm V$ y ambas energías valen $mV^2/2$. Con amplitudes positivas, las fases son $-\pi/2$ y $\pi/2$ módulo 2π. Los estados son distintos aunque compartan posición y energía; sus puntos en la elipse energética están en lados opuestos del eje de posición.

Solución del ejercicio 23.4.

Escogemos $t_* = (2\pi n - \phi)/\omega_0$ para algún entero n. Con $t' = t - t_*$ resulta $x = A\cos(\omega_0 t' + 2\pi n) = A\cos(\omega_0 t')$. La velocidad en $t'=0$ es cero y la aceleración es negativa, de modo que se trata de un máximo positivo. La elección de n sólo selecciona cuál de esos máximos inicia el reloj.

Solución del ejercicio 23.5.

En el extremo toda la energía es potencial: $A = \sqrt{2E/k} = 0{,}20\,\mathrm{m}$. En el equilibrio toda es cinética: $v_{\max} = \sqrt{2E/m} = 1\,\mathrm{m/s}$. Coincide con $\omega_0 A = 5\cdot 0{,}20$. Las dos vías sirven como comprobación mutua.

Solución del ejercicio 23.6.

La división no está definida en los puntos donde $\dot x = 0$, incluidos los extremos de toda oscilación no trivial. La prueba global consiste en multiplicar la ecuación por $\dot x$, sin dividir: $m\ddot x\dot x + kx\dot x = 0$. El lado izquierdo es la derivada de $m\dot x^2/2 + kx^2/2$. Así la energía se conserva en todo el intervalo, también donde ambos productos se anulan.

Solución del ejercicio 23.7.

El equilibrio satisface $kq_* = mg$, por lo que cuadruplicar la masa cuadruplica el alargamiento. La frecuencia pasa de $\sqrt{k/m}$ a $\sqrt{k/(4m)} = \omega_0/2$; el período se duplica. La gravedad no cambia la frecuencia para una masa dada en este modelo, pero cambiar la masa modifica tanto equilibrio como inercia.

Solución del ejercicio 23.8.

La energía es $m\dot x^2/2 + \lambda x^4/4 = \lambda A^4/4$. En un cuarto del ciclo,

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{2m}{\lambda}}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2m}{\lambda}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

La sustitución fue $x = Au$. La integral es finita: cerca de $u=1$, $1-u^4$ tiene un cero simple, por lo que la singularidad es del tipo $(1-u)^{-1/2}$, integrable. El factor restante no depende de A. Por tanto T es proporcional a $1/A$ y diverge cuando la amplitud tiende a cero. Un mínimo estable degenerado puede tener una dependencia de amplitud muy distinta de la armónica.

Solución del ejercicio 23.9.

El primer término relativo es $\alpha^2/16 = 0{,}04/16 = 0{,}0025$, es decir, aproximadamente $0{,}25\,\%$. Proposición 23.6 deja un resto $O(\alpha^4)$ sin dar una constante numérica explícita. Por ello el resultado es una estimación asintótica; no autoriza afirmar que el error exacto sea menor que $0{,}25\,\%$. De hecho, los términos positivos de orden superior hacen que la corrección exacta supere ligeramente ese primer término.

Solución del ejercicio 23.10.

La frecuencia natural es $3\,\mathrm{s}^{-1}$. Para $b = 2$, $\beta = 1$ y $\omega_d = \sqrt{8}\,\mathrm{s}^{-1}$: caso subamortiguado. Para $b = 6$, $\beta = 3 = \omega_0$: caso crítico y raíz doble $-3\,\mathrm{s}^{-1}$. Para $b = 10$, $\beta = 5$ y $\gamma = 4$: caso sobreamortiguado con raíces -1 y $-9\,\mathrm{s}^{-1}$. El parámetro que se compara con ω_0 es $b/(2m)$; comparar directamente b con una frecuencia sería dimensionalmente incorrecto.

Solución del ejercicio 23.11.

Aquí $\beta = 1$, $\omega_0 = \sqrt{5}$ y $\omega_d = 2$. La solución es $x = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$. Al derivarla en cero aparece $-1 + 2(1/2) = 0$. Si se omitiera el seno, la derivada de la envolvente produciría una velocidad inicial -1. La condición de reposo debe imponerse a la solución completa.

Solución del ejercicio 23.12.

La solución crítica es $x = e^{-2t}[1 + (v_0 + 2)t]$. La exponencial siempre es positiva, de modo que un cero positivo exige $v_0 + 2 < 0$. Por tanto el cruce ocurre exactamente para $v_0 < -2$, en $t_* = -1/(v_0 + 2)$. Si $v_0 = -2$, el movimiento es $e^{-2t} > 0$; si $v_0 > -2$, el factor afín permanece positivo para $t \geq 0$.

Solución del ejercicio 23.13.

Las raíces son -1 y -5, por lo que $x = ce^{-t} + de^{-5t}$. Los datos satisfacen $c + d = x_0$ y $-c - 5d = v_0$. Para eliminar el modo lento se requiere $c = 0$, equivalente a $v_0 = -5x_0$. Con $x_0 = 1$, resulta $x = e^{-5t}$. Una perturbación de esa relación reintroduce el modo e^{-t} y cambia el comportamiento dominante a tiempos largos.

Solución del ejercicio 23.14.

El decremento es $\delta = \log(1/0{,}8) = \log 1{,}25 \approx 0{,}22314$. Entonces $\beta = \delta/2 \approx 0{,}11157\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\omega_d = 2\pi/2 = \pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Reconstruimos $\omega_0 = \sqrt{\pi^2 + \beta^2} \approx 3{,}14357\,\mathrm{s}^{-1}$. Finalmente $Q = \omega_0/(2\beta) \approx 14{,}09$. La medición usa máximos del mismo signo; tomar extremos alternos cambiaría el intervalo y el decremento.

Solución del ejercicio 23.15.

Con $x_0 \neq 0$ y $v_0 = 0$, la energía inicial es positiva y el balance exacto da $\dot{E}(0) = -bv_0^2 = 0$. La fórmula propuesta implicaría $\dot{E}(0) = -2\beta E(0) < 0$ si $\beta > 0$, contradicción. La relación exponencial es exacta al comparar estados separados por T_d y sirve como descripción de envolvente; no es la ley instantánea general de la energía.

Solución del ejercicio 23.16.

El nuevo equilibrio es $x_s = F_s/k$. La desviación $u = x - x_s$ satisface la ecuación homogénea con $u(0) = -x_s$ y $\dot{u}(0) = 0$. Por proposición 23.8,

$$x(t) = \frac{F_s}{k}\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\beta}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)\right].$$

Si $\beta > 0$, el término transitorio tiende a cero y $x \to F_s/k$. Para $\beta = 0$, la misma fórmula da $x = (F_s/k)(1 - \cos\omega_0 t)$, que no converge: el equilibrio se desplaza, pero no hay disipación que atraiga el movimiento hacia él.

Solución del ejercicio 23.17.

Integrar el balance de momento durante un impulso ideal da $m[v(0^+) - v(0^-)] = J$. La posición sigue siendo cero y $v(0^+) = J/m$. Por proposición 23.8, $x(t) = \frac{J}{m\omega_d} e^{-\beta t} \sin(\omega_d t), \qquad t > 0$.

La energía inicial posterior es $J^2/(2m)$. Este modelo concentra el impulso en un intervalo cuya duración se desprecia frente al período y al tiempo de amortiguamiento; la evolución posterior vuelve a ser libre.

Solución del ejercicio 23.18.

Sea $S(t)$ la expresión del ejercicio 23.16 con $F_s = 1$, para $t \geq 0$, y fijemos $S(t) = 0$ para $t < 0$. Entonces $x(t) = F_s[S(t) - S(t-\tau)]$. El primer término enciende la fuerza; el segundo añade un escalón opuesto cuando se apaga. Como $S(0) = S'(0) = 0$, introducir el segundo término en τ no genera saltos de posición ni de velocidad. La aceleración sí cambia en una cantidad $-F_s/m$, coherente con el salto de la fuerza.

Solución del ejercicio 23.19.

Tenemos $d = 9 - 4 = 5$, $b\Omega = 4$ y $D = 41$. Así

$$x_s = \frac{20}{41}\cos 2t + \frac{16}{41}\sin 2t, \qquad A = \frac{4}{\sqrt{41}}, \quad \vartheta = \arctan(4/5) \approx 0{,}67474.$$

La fase está en el primer cuadrante porque ambos componentes que la definen son positivos. Reagrupar como $A\cos(2t - \vartheta)$ reproduce los dos coeficientes y verifica la convención de retraso.

Solución del ejercicio 23.20.

Con $\Omega = 4$, $d = 9 - 16 = -7$ y $b\Omega = 8$. La fase correcta es $\vartheta = \operatorname{atan2}(8, -7) \approx 2{,}28963$ radianes, en el segundo cuadrante. Usar $\arctan(8/(-7))$ devuelve un ángulo negativo, separado del correcto por π. Con amplitud positiva invertiría el signo de toda la respuesta particular. Debe usarse la información de los dos componentes, no sólo su cociente.

Solución del ejercicio 23.21.

Tomemos $m = k = 1$ y $b = \sqrt{3}$, de modo que $\omega_0 = 1$ y $\beta = \sqrt{3}/2$. Como $\beta < 1$, la frecuencia libre amortiguada es $\omega_d = 1/2$ y las soluciones libres no nulas oscilan. Pero $\beta > 1/\sqrt{2}$, así que proposición 23.13 prueba que la amplitud forzada decrece para toda frecuencia positiva. La oscilación libre y el pico de desplazamiento son propiedades diferentes.

Solución del ejercicio 23.22.

La frecuencia del pico de desplazamiento es $\sqrt{25 - 2} = \sqrt{23} \approx 4{,}79583$. La frecuencia libre amortiguada es $\sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} \approx 4{,}89898$. La de máxima potencia es $\omega_0 = 5$, todas en s^{-1}. Por tanto $\Omega_r < \omega_d < \omega_0$. Las tres se acercan cuando β/ω_0 tiende a cero.

Solución del ejercicio 23.23.

En régimen estacionario, el trabajo por ciclo es la potencia media multiplicada por T_Ω. Proposición 23.14 da $W = (b\Omega^2 A^2/2)(2\pi/\Omega) = \pi b \Omega A^2$. En $\Omega = \omega_0$, la amplitud es $F_0/(b\omega_0)$ y por tanto $W = \pi F_0^2/(b\omega_0)$. Coincide con la energía disipada durante ese ciclo, porque la energía almacenada vuelve al mismo valor.

Solución del ejercicio 23.24.

Las frecuencias son $\sqrt{101} - 1 \approx 9{,}04988$ y $\sqrt{101} + 1 \approx 11{,}04988$. Su producto es $101 - 1 = 100$, de modo que su media geométrica es $10 = \omega_0$. Su media aritmética es $\sqrt{101} > 10$. Los extremos de media potencia tienen separación exacta 2β, pero no están dispuestos simétricamente alrededor de ω_0 en una escala lineal.

Solución del ejercicio 23.25.

Sea $c = F_0/(2m\omega_0)$. Derivar $x = ct\sin\omega_0 t$ da $\dot{x} = c\sin\omega_0 t + c\omega_0 t\cos\omega_0 t$ y $\ddot{x} = 2c\omega_0\cos\omega_0 t - c\omega_0^2 t\sin\omega_0 t$. Así $m\ddot{x} + kx = F_0\cos\omega_0 t$ y los datos son cero. En t_n, $x = 0$ y $\dot{x} = c\omega_0 t_n(-1)^n$, por lo que

$$E(t_n) = \frac{F_0^2 t_n^2}{8m}.$$

Esta sucesión exhibe el crecimiento cuadrático energético del modelo resonante sin disipación.

Solución del ejercicio 23.26.

La suma es

$$A\cos(2\pi 440t) + A\cos(2\pi 442t) = 2A\cos(2\pi t)\cos(2\pi 441t).$$

El módulo de la envolvente $2A|\cos 2\pi t|$ tiene máximos separados por 0,5 s, por lo que la frecuencia de batido es 2 Hz. El factor firmado $\cos 2\pi t$ tiene período de un segundo; su signo negativo representa una inversión de fase de la oscilación rápida, no una amplitud física negativa.

Solución del ejercicio 23.27.

Si $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$, entonces para todo $c > 0$ también $(cm)\ddot{x} + (cb)\dot{x} + (ck)x = 0$. Los mismos datos iniciales producen la misma trayectoria en una familia infinita de ternas físicas. En el mejor caso la observación determina las razones b/m y k/m, pero no una escala común. Algunas trayectorias especiales pueden ofrecer aún menos información; la solución nula, por ejemplo, es compatible con cualquier terna positiva.

Solución del ejercicio 23.28.

Se obtiene $\omega_0^2 = \omega_d^2 + \beta^2 = 15{,}75 + 0{,}25 = 16\,\mathrm{s}^{-2}$. El dato estático da $k = 8/0{,}02 = 400\,\mathrm{N/m}$. Después $m = k/\omega_0^2 = 25\,\mathrm{kg}$ y $b = 2m\beta = 25\,\mathrm{kg/s}$. Por último $Q = \omega_0/(2\beta) = 4$. La fuerza estática proporciona la escala de rigidez que faltaba en el ejercicio 23.27.

Solución del ejercicio 23.29.

La fuerza equivalente de la ecuación relativa es $m\Omega^2 Y\cos\Omega t$. Aplicando §10, $\frac{Z}{Y} = \frac{m\Omega^2}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+b^2\Omega^2}}$.

Para $\Omega \to 0$, $Z/Y \sim m\Omega^2/k \to 0$: el desplazamiento relativo es pequeño y la masa sigue aproximadamente al soporte. Para $\Omega \to \infty$, dividir por $m\Omega^2$ muestra que $Z/Y \to 1$. En ese límite la coordenada relativa tiene fase próxima a π respecto de y, de modo que $z \simeq -y$ y la posición absoluta $x = y+z$ es pequeña. Las amplitudes relativas y absolutas expresan observaciones distintas.

Solución del ejercicio 23.30.

Proposición 23.4 implica que $r(x(t), v(t))$ es constante. Para cualquier $\varepsilon > 0$, un estado con $r(x_0, v_0) < \varepsilon$ permanece dentro de esa misma bola escalada para todo tiempo: el equilibrio es estable. Pero un estado inicial no nulo tiene $r > 0$ constante y no converge al origen, de modo que falta atracción y el equilibrio no es asintóticamente estable. Después de fijar unidades para ambos ejes, la norma escalada y la euclídea satisfacen cotas de la forma $c\|(x,v)\| \le r(x,v) \le C\|(x,v)\|$, con $c, C > 0$, porque el cambio $(x, v) \mapsto (x, v/\omega_0)$ es lineal e invertible. Por ello expresan la misma noción local de estabilidad. La conservación energética justifica permanencia cerca del equilibrio; la disipación de la proposición 23.9 añade convergencia.

Notas y lecturas

1. La distinción entre fuerza de rozamiento seco y resistencia proporcional a la velocidad puede contrastarse en David Tong, *Dynamics and Relativity*, §§2.5.1–2.5.3, pp. impresas 31–34. En

§2.5.3, su coeficiente de fuerza resistente se denota por γ y su tasa de amortiguamiento por α. Aquí corresponden a b y β. Texto del autor, University of Cambridge.

2. Para acompañar el estudio de transitorios y respuesta sinusoidal, el curso de Yen-Jie Lee, *Physics III: Vibrations and Waves*, MIT OpenCourseWare, otoño de 2016, ofrece la lección 3, «Driven Oscillators, Transient Phenomena, Resonance», con materiales de lectura y demostraciones. Página de la lección. Las demostraciones, la secuencia y los ejercicios de este capítulo se desarrollan en el propio texto; estas lecturas permiten ampliar el estudio.
3. El factor Q se ha definido aquí mediante los coeficientes de la ecuación. Su identificación con $\omega_0/\Delta\Omega$ se demuestra en la proposición 23.15 para la potencia media y fuerza de amplitud fija. Las interpretaciones mediante pérdida relativa de energía por ciclo requieren distinguir una pérdida finita de su aproximación de amortiguamiento débil.

Capítulo 24

Oscilaciones acopladas y modos normales

Dos masas unidas por un resorte pueden moverse de una manera que deje a ese resorte sin deformación adicional. Basta que se desplacen juntas, conservando su separación. También pueden alejarse y acercarse entre sí, haciendo trabajar intensamente el resorte intermedio. El mismo aparato admite así movimientos con fuerzas restauradoras distintas y, por ello, con frecuencias distintas.

Si soltamos sólo una de las masas desde una posición desplazada, por lo general no obtenemos ninguno de esos movimientos puros. Aparecen ambos superpuestos. Durante algunos intervalos una masa parece concentrar la actividad; después la otra se mueve con mayor amplitud. Encontrar los movimientos puros permite comprender esta alternancia y calcularla sin resolver de nuevo todo el sistema para cada condición inicial.

Las matrices entrarán cuando necesitemos organizar muchas ecuaciones del mismo tipo. Sus autovectores describirán patrones de desplazamiento y sus autovalores determinarán frecuencias al cuadrado. La distribución de masas obligará a precisar qué significa ortogonalidad: dos patrones pueden ser perpendiculares para la energía cinética sin serlo para el producto escalar ordinario de sus componentes.

Trabajaremos con un número finito de grados de libertad, masas constantes y fuerzas conservativas lineales, o con la aproximación lineal cerca de un equilibrio. Usaremos álgebra lineal real, matrices simétricas y el teorema espectral. Las ecuaciones se obtienen mediante Newton; los principios variacionales se desarrollarán en el capítulo 25.

1. Un aparato con dos movimientos simples

Sean dos masas iguales $m > 0$ sobre una guía horizontal sin rozamiento. Cada una está conectada a una pared mediante un resorte de rigidez $k > 0$, y un resorte de rigidez $\kappa \geq 0$ une las masas. Medimos sus desplazamientos desde el equilibrio con coordenadas x_1, x_2 positivas hacia la derecha. La deformación adicional del resorte intermedio es $x_2 - x_1$.

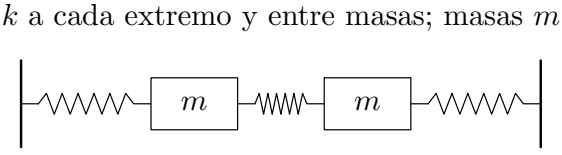


Figura 24.1. Dos masas iguales unidas por tres resortes iguales tienen matriz de rigidez $k\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Las posiciones se miden desde el equilibrio. Véase §1.

La fuerza de ese resorte sobre la primera masa vale $\kappa(x_2 - x_1)$ y sobre la segunda tiene signo opuesto. Los balances son

$$m\ddot{x}_1 = -(k+\kappa)x_1 + \kappa x_2, \qquad m\ddot{x}_2 = \kappa x_1 - (k+\kappa)x_2.$$

Sumar las ecuaciones elimina el resorte intermedio. Restarlas duplica su contribución. Introduzcamos

$$s = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad a = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Obtenemos dos ecuaciones independientes:

$$\ddot{s} + \frac{k}{m} s = 0, \qquad \ddot{a} + \frac{k + 2\kappa}{m} a = 0.$$

Definición 24.1 — Modo normal oscilatorio. En un sistema lineal libre, un modo normal oscilatorio es un movimiento no nulo $x(t) = u\, q(t)$, donde el vector real $u \neq 0$ es fijo y q satisface $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ con $\omega > 0$. El vector u representa la forma modal; multiplicarlo por una constante no nula y dividir q por la misma constante representa el mismo movimiento.

Proposición 24.1 — Modos del sistema simétrico. Si $\kappa > 0$, las formas $(1, 1)^T$ y $(1, -1)^T$ tienen frecuencias

$$\omega_- = \sqrt{k/m}, \qquad \omega_+ = \sqrt{(k + 2\kappa)/m}.$$

Todo movimiento libre se escribe de manera única como $x_1 = s + a$, $x_2 = s - a$, con s y a soluciones de las ecuaciones escalares anteriores.

Demostración. La suma y la diferencia ya dan las ecuaciones desacopladas. El cambio es invertible, pues $x_1 = s + a$ y $x_2 = s - a$. Si $a = 0$, ambas masas tienen desplazamiento s y la frecuencia es ω_-. Si $s = 0$, los desplazamientos son opuestos y la frecuencia es ω_+. La unicidad de los dos problemas iniciales escalares del capítulo 23 prueba la unicidad de la reconstrucción. □

En el primer modo el resorte intermedio conserva su longitud; por eso ω_- no depende de κ. En el segundo contribuye a la restauración. Los signos de un autovector expresarán precisamente esas relaciones de fase: componentes del mismo signo se mueven juntas; componentes de signos opuestos lo hacen en oposición.

2. Soltar una sola masa

Tomemos $x_1(0) = A$, $x_2(0) = 0$ y velocidades iniciales nulas. Aquí $s(0) = a(0) = A/2$. Por capítulo 23,

$$x_1(t) = \frac{A}{2}[\cos(\omega_- t) + \cos(\omega_+ t)], \qquad x_2(t) = \frac{A}{2}[\cos(\omega_- t) - \cos(\omega_+ t)].$$

La masa inicialmente quieta empieza a moverse porque el resorte intermedio transmite una fuerza. Para ver la modulación, pongamos $\bar{\omega} = (\omega_+ + \omega_-)/2$ y $\Delta = \omega_+ - \omega_- > 0$. Las identidades trigonométricas dan

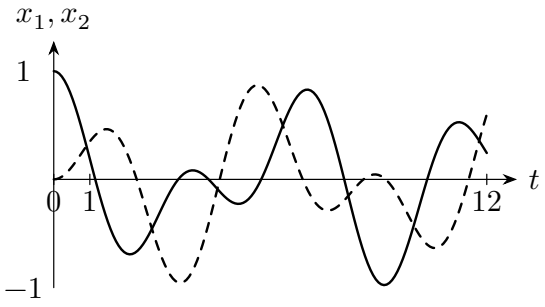


Figura 24.2. Al soltar sólo la primera masa, con $m = k = 1$ y velocidades nulas, $x_1 = (\cos t + \cos\sqrt{3}t)/2$ y $x_2 = (\cos t - \cos\sqrt{3}t)/2$. Continua: primera masa; discontinua: segunda. Véase §2.

$$x_1 = A\cos(\bar{\omega}t)\cos(\Delta t/2), \qquad x_2 = A\sin(\bar{\omega}t)\sin(\Delta t/2).$$

Si $\kappa \ll k$, la diferencia de frecuencias es pequeña. En efecto,

$$\Delta = \frac{2\kappa/m}{\omega_+ + \omega_-} \simeq \frac{\kappa}{m\omega_-}.$$

La alternancia de envolventes transcurre mucho más despacio que las oscilaciones individuales. El primer cero de la envolvente de x_1 está en $t = \pi/\Delta$. Ese cero no basta para afirmar que toda la energía ha pasado a la segunda masa. En ese instante, $\dot{x}_1 = -\frac{A\Delta}{2}\cos(\bar{\omega}t)\sin(\Delta t/2)$,

que generalmente no se anula. Queda energía cinética en la primera masa; además, el resorte intermedio almacena energía compartida. Para acoplamiento débil, el residuo cinético es pequeño frente a la escala $mA^2\bar{\omega}^2$, pero esa estimación no es una igualdad exacta de transferencia.

La superposición ofrece una descripción exacta incluso cuando la imagen de «energía que pasa de una masa a otra» sólo resulta aproximada. Más adelante distinguiremos energía modal y energía localizada.

3. Organizar las fuerzas en una matriz

Para n desplazamientos reunimos las coordenadas en una columna $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Si cada coordenada es la posición de una masa sobre una guía, la inercia se representa mediante $M = \mathrm{diag}(m_1, \dots, m_n)$, con $m_i > 0$. Las ecuaciones toman la forma $M\ddot{x} + Kx = 0$.

Definición 24.2 — Matrices de masa y rigidez. Llamamos matriz de masa a la matriz simétrica definida positiva M que determina la energía cinética $T = \dot{x}^T M\dot{x}/2$. Llamamos matriz de rigidez a la matriz simétrica K que determina el potencial cuadrático $U = x^T Kx/2$, medido desde un equilibrio. En las coordenadas cartesianas independientes descritas, Newton produce la ecuación $M\ddot{x} = -Kx$.

Permitiremos matrices M simétricas definidas positivas no diagonales cuando resulten de un cambio lineal invertible de esas coordenadas. Si $x = Sz$, multiplicar las ecuaciones por S^T da masas $S^T MS$ y rigideces $S^T KS$. La simetría y la positividad cinética se conservan.

Proposición 24.2 — Conservación de la energía cuadrática. Para M y K constantes y simétricas,

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^T M\dot{x} + \frac{1}{2}x^T Kx$$

es constante a lo largo de las soluciones libres.

Demostración. La simetría permite derivar cada forma cuadrática como $\dot{x}^T M\ddot{x}$ y $\dot{x}^T Kx$. Sumarlas da $\dot{E} = \dot{x}^T(M\ddot{x} + Kx) = 0$. $\square$

Para el aparato de §1,

$$K = \begin{pmatrix} k+\kappa & -\kappa \\ -\kappa & k+\kappa \end{pmatrix}, \qquad U = \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_1)^2.$$

La simetría de K expresa aquí que el acoplamiento se obtiene de un potencial. Una fuerza lineal arbitraria puede tener una matriz no simétrica; las conclusiones espectrales que siguen requieren la estructura conservativa especificada.

4. Un problema de autovalores con masas

Insertar un movimiento $x = u\cos(\omega t)$ en la ecuación matricial da $Ku = \omega^2 Mu$.

Definición 24.3 — Autovalor generalizado. Un número λ y un vector $u \neq 0$ forman un par propio generalizado de (K, M) si $Ku = \lambda Mu$. Para $\lambda > 0$, la frecuencia modal es $\omega = \sqrt{\lambda}$.

La condición de existencia de un vector no nulo es $\det(K - \lambda M) = 0$. Hallar las raíces encuentra candidatos a frecuencias; resolver después el núcleo de cada matriz encuentra los patrones. Un determinante por sí solo no dice cómo se mueven las masas.

Proposición 24.3 — Realidad y ortogonalidad de modos distintos. Con M definida positiva y K simétrica, todo autovalor generalizado es real. Si $Ku = \lambda Mu$ y $Kv = \mu Mv$ con $\lambda \neq \mu$, entonces $u^T Mv = 0$.

Demostración. Para permitir inicialmente un candidato complejo, usemos el adjunto conjugado u^*. La igualdad $u^* Ku = \lambda u^* Mu$ da $\lambda = (u^*Ku)/(u^*Mu)$, cociente real con denominador positivo. Se pueden elegir vectores propios reales porque las matrices y el autovalor son reales. Para la segunda afirmación, la simetría da $u^T Kv = \mu u^T Mv$ y también $u^T Kv = (Ku)^T v = \lambda u^T Mv$. Restar deja $(\lambda - \mu)u^T Mv = 0$. $\square$

La matriz $M^{-1}K$ tiene esos autovalores, pero en general no es simétrica en el producto escalar ordinario. Aplicarle sin justificación las reglas de ortogonalidad euclídea puede producir coordenadas incorrectas. Necesitamos una transformación que haga visible la simetría conservada.

5. Hacer euclídea la energía cinética

Toda matriz simétrica definida positiva tiene una raíz cuadrada simétrica definida positiva. Para construirla, diagonalizamos $M = O\,\mathrm{diag}(m_j)O^T$, con O ortogonal y $m_j > 0$, y ponemos $M^{1/2} = O\,\mathrm{diag}(\sqrt{m_j})O^T$. Su inversa es $M^{-1/2}$.

Escribamos $y = M^{1/2}x$. Multiplicar la ecuación por $M^{-1/2}$ da $\ddot{y} + Dy = 0$, $\quad D = M^{-1/2}KM^{-1/2}$. La matriz D es simétrica. El teorema espectral garantiza una base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ con $De_j = \lambda_j e_j$. La energía cinética se ha convertido en $\dot{y}^T\dot{y}/2$, por lo que la ortogonalidad ordinaria tiene ahora el significado energético esperado.

Proposición 24.4 — Base modal completa. Existe una base real $u_1, \dots, u_n$ tal que

$$Ku_j = \lambda_j Mu_j, \qquad u_i^T Mu_j = \delta_{ij}.$$

Si U es la matriz cuyas columnas son los u_j, entonces

$$U^T MU = I, \qquad U^T KU = \Lambda, \qquad U^{-1} = U^T M,$$

con $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Demostración. Definimos $u_j = M^{-1/2} e_j$. La ecuación de D equivale, al multiplicar por $M^{1/2}$, a $K u_j = \lambda_j M u_j$. Asimismo $u_i^T M u_j = e_i^T e_j = \delta_{ij}$. La matriz U es invertible porque se obtiene de una base mediante una transformación invertible. Las dos primeras identidades matriciales resumen esas igualdades; de $U^T M U = I$ se deduce la fórmula de la inversa. □

La normalización cambia la escala de las coordenadas modales. Si x se mide en longitud y M en masa, las coordenadas normalizadas tendrán unidades de longitud por raíz de masa. Esto simplifica la energía sin cambiar posiciones físicas ni frecuencias.

6. Desacoplar la evolución y sus datos

Definición 24.4 — Coordenadas normales. Para una base modal normalizada como en la proposición 24.4, definimos $Q = U^T M x$, de modo que $x = UQ = \sum_j u_j Q_j$. Las componentes Q_j son las coordenadas normales de esa base.

Proposición 24.5 — Ecuaciones y solución modal. Las ecuaciones libres equivalen a

$$\ddot{Q}_j + \lambda_j Q_j = 0.$$

Si todos los λ_j son positivos y $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$,

$$Q_j(t) = a_j \cos(\omega_j t) + \frac{c_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t), \quad a_j = u_j^T M x_0, \quad c_j = u_j^T M v_0.$$

Demostración. Sustituimos $x = UQ$ y multiplicamos por U^T. Proposición 24.4 reduce $U^T M U \ddot{Q} + U^T K U Q = 0$ a $\ddot{Q} + \Lambda Q = 0$. La misma transformación aplicada a los datos da a_j y c_j. Cada ecuación escalar se resuelve mediante capítulo 23. El cambio invertible garantiza que reconstruir x resuelve el problema original y que no se pierden soluciones. □

Proposición 24.6 — Energía separada por modos. En esas coordenadas,

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j, \qquad E_j = \frac{1}{2}(\dot{Q}_j^2 + \lambda_j Q_j^2),$$

y cada E_j es constante en el sistema libre.

Demostración. Sustituir $x = UQ$ en la energía y usar proposición 24.4 elimina todos los términos cruzados. Derivar cada sumando da $\dot{E}_j = \dot{Q}_j(\ddot{Q}_j + \lambda_j Q_j) = 0$. □

Un estado inicial puramente modal exige que tanto x_0 como v_0 pertenezcan a la misma recta modal. Preparar sólo el desplazamiento correcto y dar una velocidad en otra dirección excita otros modos. La expansión de los datos permite comprobar esa condición antes de interpretar una trayectoria.

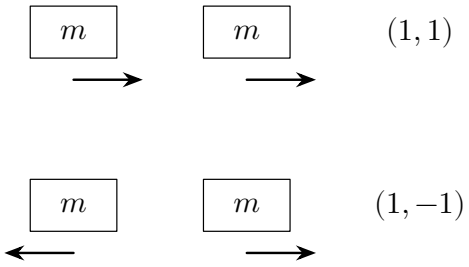


Figura 24.3. El modo en fase tiene $\omega_+^2 = k/m$; el modo en oposición, $\omega_-^2 = 3k/m$. El signo global del autovector es arbitrario. Las flechas son desplazamientos modales. Véase §6.

7. Qué cambia cuando las masas son diferentes

Consideremos $M = \operatorname{diag}(1, 2)$ y

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

en unidades coherentes. Puede realizarse con dos resortes exteriores de rigidez 2 y uno intermedio de rigidez 1. La ecuación característica es

$$\det(K - \lambda M) = (3 - \lambda)(3 - 2\lambda) - 1 = 2\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0.$$

Sus raíces son $\lambda_\pm = (9 \pm \sqrt{17})/4$. Una forma para cada modo es $w_\pm = (1, 3 - \lambda_\pm)^T$. La raíz menor da componentes del mismo signo; la mayor da signos opuestos. Pero los desplazamientos ya no tienen igual módulo. La segunda masa responde con una inercia distinta y rompe la igualdad de amplitudes del aparato simétrico.

Los dos vectores cumplen

$$w_-^T M w_+ = 1 + 2(3 - \lambda_-)(3 - \lambda_+) = 0,$$

porque $\lambda_- + \lambda_+ = 9/2$ y $\lambda_-\lambda_+ = 4$. En cambio, $w_-^T w_+ = 1/2$. Son ortogonales para el producto de masas y no lo son para el producto ordinario.

Para normalizarlos tomamos

$$u_\pm = \frac{(1, 3 - \lambda_\pm)^T}{\sqrt{1 + 2(3 - \lambda_\pm)^2}}.$$

Un modo se puede representar mediante una forma sencilla sin normalizar cuando interesa describir su geometría. Para proyectar datos con la fórmula $Q_j = u_j^T M x$, la normalización declarada forma parte del cálculo. Mezclar ambas convenciones sin ajustar los factores cambia las amplitudes reconstruidas.

8. Estabilidad, frecuencias nulas y direcciones inestables

La positividad del potencial tiene una consecuencia dinámica precisa en el modelo lineal. Como K y D están relacionadas por una congruencia invertible, K es definida positiva exactamente cuando todos los autovalores de D son positivos. En ese caso cada coordenada normal oscila.

Proposición 24.7 — Estabilidad del equilibrio lineal. Para M simétrica definida positiva y K simétrica, el estado $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ del sistema libre es estable si y sólo si K es definida positiva. En ese caso no es asintóticamente estable.

Demostración. Si K es definida positiva, la energía es una forma cuadrática definida positiva en el estado completo. En un espacio de dimensión finita existen constantes $c, C > 0$ tales que

$$c\|(x, v)\|^2 \le E(x, v) \le C\|(x, v)\|^2,$$

tras fijar unidades para las coordenadas. La conservación da $\|(x(t), v(t))\| \le \sqrt{C/c}\,\|(x_0, v_0)\|$, que prueba estabilidad. Una solución no nula no puede converger al origen porque conserva energía positiva.

Si K no es definida positiva, D tiene algún autovalor $\lambda \le 0$. Para $\lambda = 0$, la ecuación modal es $\ddot{Q} = 0$. Datos $Q(0) = 0$, $\dot{Q}(0) = \varepsilon$ producen $Q(t) = \varepsilon t$, que sale de cualquier entorno fijo por pequeño que sea $\varepsilon > 0$. Para $\lambda = -\sigma^2 < 0$, la solución $Q(t) = \varepsilon e^{\sigma t}$ tiene datos iniciales arbitrariamente

pequeños y crece sin cota. La transformación modal invertible lleva ambos ejemplos al sistema original. □

Un modo nulo puede expresar una libertad física legítima. Dos masas unidas sólo entre sí tienen una frecuencia interna y una traslación común de frecuencia cero. El centro de masa puede desplazarse con velocidad constante. Las distancias relativas permanecen controladas aunque el estado de un equilibrio particular no sea estable en todas las coordenadas absolutas. Formular estabilidad después de eliminar una simetría exige indicar qué se mantiene fijo o qué estados se consideran equivalentes.

Cuando K es el Hessiano de un potencial no lineal, un autovalor nulo sólo informa de que la aproximación lineal es degenerada en esa dirección. El potencial x^4 del capítulo 23 demuestra que términos posteriores pueden restaurar estabilidad. Proposición 24.7 se refiere al sistema lineal exacto; no clasifica por sí solo todos los equilibrios no lineales degenerados.

9. De un potencial a su aproximación modal

Sea V un potencial de clase C^3 cerca de un equilibrio $q_* \in \mathbb{R}^n$, con $\nabla V(q_*) = 0$. Pongamos $x = q - q_*$. Su Hessiano en el equilibrio es la matriz simétrica $K = \nabla^2 V(q_*)$ y Taylor da $\nabla V(q_* + x) = Kx + R(x), \qquad \|R(x)\| \le C\|x\|^2$

en una bola pequeña. Para una matriz de masa constante, Newton conduce a $M\ddot{x} + Kx = -R(x)$. Los modos del Hessiano describen la aproximación lineal.

Proposición 24.8 — Rigideces extremas y cociente de Rayleigh. Para $u \neq 0$, definamos

$$\mathcal{R}(u) = \frac{u^T K u}{u^T M u}.$$

Si $\lambda_{\text{mín}}$ y $\lambda_{\text{máx}}$ son los autovalores extremos, entonces $\lambda_{\text{mín}} \le \mathcal{R}(u) \le \lambda_{\text{máx}}$. Ambos extremos se alcanzan en sus respectivos espacios propios.

Demostración. Expresamos $u = \sum_j a_j u_j$ en la base normalizada. Proposición 24.4 da $u^T M u = \sum_j a_j^2$ y $u^T K u = \sum_j \lambda_j a_j^2$. Su cociente es una media ponderada de los autovalores, con pesos no negativos cuya suma es uno. Las cotas se siguen y se alcanzan al escoger un vector propio extremo. □

El cociente permite estimar la frecuencia más baja mediante una forma de movimiento elegida sin resolver todo el problema. Para cualquier prueba u, $\lambda_{\text{mín}} \le \mathcal{R}(u)$: se obtiene una cota superior del mínimo, no una cota inferior. La dirección de esa desigualdad merece atención al usar aproximaciones.

Si se aumenta la rigidez mediante una matriz simétrica semidefinida positiva B, cada cociente aumenta: $\mathcal{R}_{K+B}(u) \ge \mathcal{R}_K(u)$. En particular, la menor frecuencia al cuadrado no disminuye. Para afirmar la monotonía de todos los autovalores ordenados se requiere el principio minimax completo; la cota anterior sólo demuestra directamente el caso extremo mínimo.

10. Degeneración y simetría

Dos modos diferentes pueden tener la misma frecuencia. En ese caso no hay una única elección de ejes normales dentro de su espacio propio.

Definición 24.5 — Frecuencia degenerada. Una frecuencia positiva es degenerada si su autovalor ω^2 tiene un espacio propio de dimensión mayor que uno. Cualquier base ortonormal para el producto de masas dentro de ese espacio puede usarse como parte de una base modal.

Si $M = mI$ y $K = kI$ en dos dimensiones, toda dirección es una forma modal con frecuencia $\sqrt{k/m}$. Sin embargo, el movimiento general de esa frecuencia no tiene por qué seguir una recta. Por ejemplo, $x(t) = (A\cos\omega t, A\sin\omega t)^T$ recorre un círculo. Combina dos direcciones degeneradas con fases diferentes y no tiene la forma $uq(t)$ con u real fijo.

Proposición 24.9 — Simetría y subespacios modales. Sea P una transformación lineal que cumple $P^TMP = M$, $P^TKP = K$ y $P^2 = I$. Los subespacios $Px = x$ y $Px = -x$ son invariantes bajo $M^{-1}K$ y ortogonales entre sí para el producto de masas.

Demostración. De $P^2 = I$ se deduce $P^{-1} = P$. Las identidades de preservación dan $MP = P^TM$ y $KP = P^TK$. Por ello

$$(M^{-1}K)P = M^{-1}P^TK = PM^{-1}K.$$

La conmutación prueba la invariancia de los subespacios de signos. Si $Pu = u$ y $Pv = -v$, entonces $u^TMv = (Pu)^TM(Pv) = -u^TMv$, y el producto es cero. □

Para el aparato de §1, P intercambia ambas masas. Sus subespacios son las formas simétrica y antisimétrica que encontramos sumando y restando ecuaciones. La simetría explica por qué funcionó aquel cálculo. También muestra por qué deja de ser suficiente al cambiar una de las masas: el intercambio ya no preserva la energía cinética.

11. Energía de los modos y energía de las masas

En un sistema libre conservativo las energías modales permanecen constantes. Aun así, la energía asociada a una región del aparato puede variar. Son descomposiciones diferentes del mismo balance.

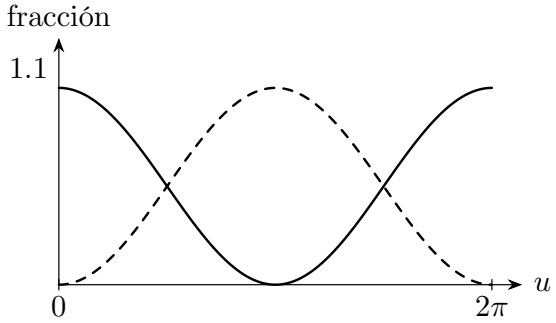


Figura 24.4. En un esquema de batidos, dos contribuciones locales pueden intercambiarse como $\cos^2(u/2)$ y $\sin^2(u/2)$ mientras su suma permanece uno. Es una ilustración normalizada del intercambio; no identifica cada curva con la energía modal conservada del sistema general. Véase §11.

Para las dos masas de §1, pongamos $d = x_2 - x_1$ y repartamos por mitades la energía del resorte intermedio:

$$e_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{\kappa}{4}d^2, \qquad e_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{\kappa}{4}d^2.$$

Proposición 24.10 — Balance local del acoplamiento. Con esa asignación,

$$\dot{e}_1 = \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_1)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \qquad \dot{e}_2 = -\dot{e}_1.$$

Demostración. Al derivar los términos cinético y exterior de e_1, Newton da $\dot{x}_1(m\ddot{x}_1 + kx_1) = \kappa d\dot{x}_1$. La derivada de la parte asignada del resorte central es $(\kappa/2)d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$. Sumarlas produce la fórmula. El cálculo para e_2 da el opuesto; además $e_1 + e_2 = E$. □

Esta partición es útil, pero su elección debe declararse: la energía del resorte central pertenece al vínculo. Asignarla de otra manera altera cada expresión local y conserva el balance total. La energía modal, por su parte, describe patrones distribuidos sobre ambas masas y no necesita viajar entre ellos.

La transferencia exacta también puede ocurrir en casos especiales. Si $\omega_+/\omega_- = 3/2$ y se usan los datos de §2, en $t_* = 2\pi/\omega_-$ las fases son 2π y 3π. Se obtiene $x_1 = 0$, $x_2 = A$ y ambas velocidades nulas: el estado inicial se ha intercambiado entre las masas. La condición equivale a $\kappa = 5k/8$. La conmensurabilidad de las frecuencias hace posible esa coincidencia exacta.

12. Fuerzas que seleccionan modos

Con una fuerza exterior vectorial $f(t)$, la ecuación es $M\ddot{x} + Kx = f(t)$. La transformación modal da $\ddot{Q}_j + \lambda_j Q_j = f_j(t), \qquad f_j(t) = u_j^T f(t)$. La proyección de la fuerza no lleva un factor adicional M: surge al multiplicar el balance original por U^T. La proyección del desplazamiento sí lo lleva, porque $Q = U^T M x$. Ambas fórmulas responden a operaciones diferentes.

Proposición 24.11 — Selección y resonancia modal. Supongamos K definida positiva y $f(t) = g\cos\Omega t$. Si Ω^2 no es un autovalor, existe una solución particular

$$x_p(t) = \sum_j u_j \frac{u_j^T g}{\lambda_j - \Omega^2}\cos\Omega t.$$

Si $\Omega = \omega_j$ y $u_j^T g \neq 0$, la correspondiente coordenada modal admite el término resonante $(u_j^T g)t\sin(\omega_j t)/(2\omega_j)$. Un modo no es excitado desde datos nulos si $u_j^T g = 0$.

Demostración. Cada ecuación normal es un problema forzado escalar del capítulo 23, con masa normalizada igual a uno. Fuera de resonancia se sustituye el coseno y se divide por $\lambda_j - \Omega^2$. En resonancia, proposición 24.16 del capítulo 23 da el término secular. Si la fuerza proyectada y los dos datos de un modo son nulos, la unicidad de la ecuación escalar obliga a $Q_j = 0$. □

En el aparato simétrico, fuerzas iguales sobre ambas masas excitan sólo la forma simétrica; fuerzas opuestas excitan sólo la antisimétrica. Hacer coincidir una frecuencia con la frecuencia natural de un modo es insuficiente si la fuerza no tiene componente sobre él. Para una frecuencia degenerada, la condición se aplica a la proyección sobre todo su espacio propio, independientemente de la base elegida dentro de él.

13. Cuándo el amortiguamiento conserva el desacoplamiento

Añadamos una fuerza resistente $-C\dot{x}$, con C simétrica semidefinida positiva: $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$. El balance pasa a ser $\dot{E} = \dot{x}^T f - \dot{x}^T C\dot{x}$. La pasividad de la resistencia se reconoce en el signo del segundo término. En coordenadas normales aparece

$$\ddot{Q} + (U^T C U)\dot{Q} + \Lambda Q = U^T f.$$

Aunque las masas y las rigideces estén diagonalizadas, la matriz de amortiguamiento puede acoplar las velocidades normales.

Proposición 24.12 — Amortiguamiento proporcional. Si $C = aM + bK$, con $a, b \geq 0$ y K definida positiva, las ecuaciones modales permanecen independientes:

$$\ddot{Q}_j + (a + b\lambda_j)\dot{Q}_j + \lambda_j Q_j = f_j.$$

Cada modo tiene tasa $\beta_j = (a + b\lambda_j)/2$ y frecuencia natural $\sqrt{\lambda_j}$. El coeficiente a tiene unidades de tiempo inverso y b de tiempo.

Demostración. proposición 24.4 da $U^T C U = aI + b\Lambda$. Sustituir en la ecuación normal prueba el resultado. La comparación con el capítulo 23 identifica $2\beta_j$. □

La positividad de C garantiza disipación, pero no basta para garantizar atracción de todos los modos. Si una dirección modal queda sin resistencia, puede seguir oscilando indefinidamente. Tampoco toda resistencia pasiva es proporcional: en ese caso el análisis forzado sigue siendo un problema matricial y no se resuelve asignando arbitrariamente un factor de calidad independiente a cada modo conservativo.

14. Una cadena finita y el horizonte de las ondas

Consideremos N masas iguales m y $N+1$ resortes iguales k entre dos extremos fijos. Sean $x_0 = x_{N+1} = 0$ las condiciones de borde. Para las masas móviles, $m\ddot{x}_j = k(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1})$, $\quad 1 \le j \le N$.

La diferencia segunda en el índice aparece al restar las fuerzas de los resortes vecinos. Busquemos una forma $u_j = \sin(j\theta)$. La identidad de adición da $u_{j-1} + u_{j+1} = 2\cos\theta\, u_j$. El extremo izquierdo se satisface automáticamente y el derecho exige $\sin((N+1)\theta) = 0$.

Proposición 24.13 — Espectro de la cadena fija. Hay N frecuencias positivas distintas,

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\frac{r\pi}{2(N+1)}, \qquad r = 1, \dots, N,$$

con formas $w_j^{(r)} = \sin(jr\pi/(N+1))$. Forman una base modal y pueden normalizarse como $u_j^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{m(N+1)}}\,\sin\frac{jr\pi}{N+1}$.

Demostración. Sustituir la forma sinusoidal en Newton produce $m\omega_r^2 = 2k(1 - \cos\theta_r) = 4k\sin^2(\theta_r/2)$, con $\theta_r = r\pi/(N+1)$. Para $1 \le r \le N$, el seno de medio ángulo es positivo y estrictamente creciente; las frecuencias son distintas. Hay N vectores propios no nulos de autovalores distintos, de modo que son independientes y forman una base. Proposición 24.3 garantiza su ortogonalidad. Para la norma, $\sin^2 z = (1 - \cos 2z)/2$ y la suma geométrica de $e^{2ij\theta_r}$ dan $\sum_{j=1}^{N}\cos(2j\theta_r) = -1$. Así $\sum_{j=1}^{N}\sin^2(j\theta_r) = (N+1)/2$, que produce el factor indicado. □

Para índices r pequeños frente a $N+1$, $\sin z \simeq z$ da $\omega_r \simeq \sqrt{k/m}\,\frac{r\pi}{N+1}$. Las frecuencias bajas se aproximan a múltiplos de una fundamental. Las altas conservan la diferencia entre el seno y su argumento: la cadena discreta no tiene un espectro exactamente armónico. Los extremos fijos son parte esencial del problema; liberar los extremos permite una traslación común y cambia la selección de patrones.

Si la separación entre masas es h, la combinación de parámetros $h\sqrt{k/m}$ tiene unidades de velocidad. Para obtener un límite continuo sobre una longitud fija, deben escalarse coherentemente masa y rigidez: por ejemplo, $m = \rho h$ y $k = \mathcal{T}/h$ mantienen esa velocidad igual a $\sqrt{\mathcal{T}/\rho}$. El paso al campo continuo, con sus hipótesis y balances, se hará en el Tomo II. La cadena deja preparado el mecanismo: una familia de patrones espaciales convierte el movimiento colectivo en ecuaciones temporales escalares.

15. Ejercicios

Ejercicio 24.1 — Dos resortes exteriores y un vínculo.
Para el aparato de §1, con $m = 2$, $k = 8$, $\kappa = 5$ en unidades coherentes, calcula las frecuencias y verifica directamente ambas formas modales en Newton.

Ejercicio 24.2 — Una preparación puramente modal.
En el mismo aparato, con $\kappa > 0$, determina qué relaciones deben cumplir (x_{10}, x_{20}) y (v_{10}, v_{20}) para excitar sólo el modo de mayor frecuencia. ¿Basta con $x_{10} = -x_{20}$?

Ejercicio 24.3 — Reconstrucción de datos arbitrarios.
Expresa $x_1(t), x_2(t)$ mediante las frecuencias ω_-, ω_+ para datos iniciales generales $x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}$ en el aparato simétrico.

Ejercicio 24.4 — Desacoplamiento sin resorte intermedio.
Estudia el caso $\kappa = 0$. Explica por qué las coordenadas s, a siguen siendo válidas aunque ya no haya dos frecuencias distintas.

Ejercicio 24.5 — Matriz a partir de la energía.
Para $V(x_1, x_2) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2$, halla el Hessiano, las fuerzas y las frecuencias si ambas masas son unitarias.

Ejercicio 24.6 — Un término cruzado mal contado.
Un cálculo asigna $K_{12} = K_{21} = -2$ al potencial del ejercicio 24.5 porque «el término cruzado es $-x_1x_2$». Identifica el error y reconstruye $x^TKx/2$ con la matriz correcta.

Ejercicio 24.7 — Masas diferentes.
Para $M = \operatorname{diag}(1, 2)$ y $K = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula numéricamente las dos frecuencias y los cocientes x_2/x_1 de las formas modales.

Ejercicio 24.8 — Proyectar con una base sin normalizar.
Sea w_j una base de modos ortogonales para M, sin normalización, y escribe $x = \sum_j w_j q_j$. Deduce la fórmula correcta para q_j y la expresión de la energía.

Ejercicio 24.9 — Una masa no diagonal.
Partiendo de dos masas unitarias con coordenadas x_1, x_2, haz el cambio $x_1 = z_1 + z_2$, $x_2 = z_2$. Halla la matriz cinética en z y demuestra que es definida positiva.

Ejercicio 24.10 — Dos masas libres.
Dos masas $m_1, m_2 > 0$ están unidas sólo por un resorte de rigidez $\kappa > 0$. Halla la frecuencia interna, la forma del modo nulo y una forma del modo oscilatorio. Relaciónalo con el centro de masa.

Ejercicio 24.11 — Un autovalor negativo.
Para $M = I$ y $K = \operatorname{diag}(4, -1)$, construye una familia de datos que tienda al origen y cuyas soluciones abandonen una bola fija del espacio de estados.

Ejercicio 24.12 — Estabilidad que depende del modelo.
Compara $\ddot{x} = 0$ y $\ddot{x} = -x^3$. Ambas linealizaciones en el origen coinciden. ¿Qué puede concluirse y qué información se pierde?

Ejercicio 24.13 — Usar una forma de prueba.
En la cadena fija de tres masas con $m = k = 1$, calcula el cociente de Rayleigh de $w = (1, 1, 1)^T$. Compáralo con el menor autovalor exacto y señala la dirección de la cota.

Ejercicio 24.14 — Aumentar el resorte central.

En el aparato simétrico, aumenta κ manteniendo m, k fijos. Explica por qué la frecuencia mínima permanece constante aunque la matriz de rigidez aumente en una matriz semidefinida positiva no nula.

Ejercicio 24.15 — Frecuencia repetida y órbita circular.

Para $M = I$, $K = 4I$ en dos dimensiones, halla datos que produzcan un círculo de radio $A > 0$. Demuestra que ese movimiento no es un modo rectilíneo según la definición 24.1.

Ejercicio 24.16 — Normalizar y rotar una base degenerada.

Si u_1, u_2 son dos modos normalizados con la misma frecuencia, verifica que $(u_1 + u_2)/\sqrt{2}$ y $(u_1 - u_2)/\sqrt{2}$ forman otra base modal normalizada. ¿Qué sucede con la suma de sus energías?

Ejercicio 24.17 — Error en una transferencia de energía.

Usa los datos de §2 y el instante $t_* = \pi/\Delta$. Calcula $x_1(t_*)$ y $\dot{x}_1(t_*)$, y da una condición adicional para que la primera masa esté exactamente en reposo allí.

Ejercicio 24.18 — Intercambio exacto del estado.

Verifica el intercambio de posiciones y velocidades de §11 cuando $\kappa = 5k/8$. Compara la energía total inicial y final, incluyendo el resorte central.

Ejercicio 24.19 — Flujo local de energía.

En el aparato simétrico, calcula $\dot{e}_1$ en un instante con $x_2 > x_1$, $\dot{x}_1 > 0$, $\dot{x}_2 > 0$. Interpreta el signo y comprueba qué sucede en un modo puro.

Ejercicio 24.20 — Fuerza simétrica.

Desde el reposo, aplica $f(t) = (F, F)^T \cos \Omega t$ al aparato simétrico. Deduce la ecuación forzada de s y demuestra que a permanece nula. Halla la respuesta de reposo en $\Omega = \omega_-$.

Ejercicio 24.21 — Resonancia que no se excita.

En ejercicio 24.20, escoge $\Omega = \omega_+$ y $\kappa > 0$. ¿Hay crecimiento resonante? Justifica la respuesta a partir de las proyecciones y de una solución explícita.

Ejercicio 24.22 — Una fuerza localizada.

Aplica ahora $f(t) = (F, 0)^T \cos \Omega t$. Calcula las fuerzas en las ecuaciones de s, a. Explica por qué puede excitar ambas frecuencias.

Ejercicio 24.23 — Amortiguamiento proporcional.

Para dos frecuencias al cuadrado $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 16$ y $C = M + 0{,}25K$, clasifica el régimen de cada modo y calcula su frecuencia libre amortiguada.

Ejercicio 24.24 — Pasividad sin amortiguamiento modal independiente.

Para el aparato simétrico con masas unitarias, usa $C = \operatorname{diag}(c, 0)$, con $c > 0$. Calcula $U^T C U$ en la base $u_\pm = (1, \pm 1)^T/\sqrt{2}$ y explica por qué esos modos conservativos siguen acoplados por la resistencia.

Ejercicio 24.25 — Tres masas y extremos fijos.

Para $N = 3$, $m = k = 1$, halla las tres frecuencias y escribe formas modales sencillas. Indica qué masa permanece inmóvil en el modo intermedio.

Ejercicio 24.26 — Frecuencia más alta de una cadena.

Demuestra que todas las frecuencias de la cadena fija satisfacen $0 < \omega_r < 2\sqrt{k/m}$. Describe el límite de la mayor frecuencia cuando $N \to \infty$ con m, k fijos.

Ejercicio 24.27 — Una masa que no ve un modo.

En la cadena del ejercicio 24.25, aplica una fuerza sólo a la masa central. Determina qué modos pueden excitarse desde el reposo y explica la respuesta mediante las componentes de las formas modales.

Ejercicio 24.28 — Repetición exacta del movimiento.

Supón que un movimiento libre tiene varias coordenadas normales no nulas. Demuestra que es periódico si existe $T > 0$ con $\omega_j T \in 2\pi\mathbb{Z}$ para todos los modos activos. Para dos frecuencias distintas activas, demuestra la necesidad de que su cociente sea racional.

Ejercicio 24.29 — Cambio de coordenadas y frecuencias.

Sean $M' = S^T M S$ y $K' = S^T K S$, con S invertible. Demuestra que el cambio preserva las frecuencias y explica cómo se transforman las formas modales.

Ejercicio 24.30 — Preparar un movimiento observable.

En un sistema con K definida positiva, base modal normalizada u_j y frecuencias distintas, se mide $z(t) = \ell^T x(t)$. Una fuerza $g\cos\Omega t$ actúa desde el reposo. Deduce qué condiciones sobre ℓ y g permiten que la resonancia de un modo aparezca en esa medición. Distingue excitar el modo y observarlo.

16. Soluciones

Solución del ejercicio 24.1.

La frecuencia simétrica es $\omega_- = \sqrt{8/2} = 2$ y la antisimétrica es $\omega_+ = \sqrt{(8+10)/2} = 3$. Para $x_1 = x_2 = q$, los términos del vínculo se cancelan y cada ecuación se reduce a $2\ddot{q} = -8q$. Para $x_1 = q$, $x_2 = -q$, la primera da $2\ddot{q} = -18q$ y la segunda expresa la misma ecuación con signo opuesto. Ambas verificaciones fijan también la dirección de las fuerzas.

Solución del ejercicio 24.2.

Hay que anular la coordenada simétrica y su velocidad: $s(0) = (x_{10} + x_{20})/2 = 0$ y $\dot{s}(0) = (v_{10} + v_{20})/2 = 0$. Por tanto se requiere $x_{10} = -x_{20}$ y $v_{10} = -v_{20}$. La relación entre posiciones sola no basta; una velocidad común no nula añade el modo de menor frecuencia. Para que el movimiento final sea no nulo, al menos uno de los datos antisimétricos debe ser distinto de cero.

Solución del ejercicio 24.3.

Primero proyectamos los datos mediante suma y diferencia:

$$s(t) = \frac{x_{10} + x_{20}}{2}\cos\omega_- t + \frac{v_{10} + v_{20}}{2\omega_-}\sin\omega_- t,$$

$$a(t) = \frac{x_{10} - x_{20}}{2}\cos\omega_+ t + \frac{v_{10} - v_{20}}{2\omega_+}\sin\omega_+ t.$$

Después $x_1 = s + a$, $x_2 = s - a$. En $t = 0$ se recuperan las dos posiciones; al derivar se recuperan ambas velocidades. Esta comprobación evita confundir el factor $1/2$ de las coordenadas con una normalización de masas.

Solución del ejercicio 24.4.

Con $\kappa = 0$, ambas ecuaciones son $m\ddot{x}_i + kx_i = 0$ y las frecuencias coinciden. El cambio a s, a sigue siendo invertible y ambas variables satisfacen $\ddot{q} + (k/m)q = 0$. Cualquier combinación de sus formas es también una forma propia de la misma frecuencia. Las coordenadas originales son otra base modal igualmente válida: la degeneración permite elegir direcciones según la preparación o la observación.

Solución del ejercicio 24.5.

El gradiente es $(3x_1 - x_2, 3x_2 - x_1)^T$, por lo que las fuerzas son sus opuestos y $K = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Los vectores $(1,1)^T$ y $(1,-1)^T$ tienen autovalores 2 y 4. Con $M = I$, las frecuencias son $\sqrt{2}$ y 2. La positividad de ambos confirma que el equilibrio del sistema lineal es estable.

Solución del ejercicio 24.6.

Al expandir una forma cuadrática simétrica, $\frac{1}{2}x^T Kx = \frac{1}{2}K_{11}x_1^2 + K_{12}x_1x_2 + \frac{1}{2}K_{22}x_2^2$. Las dos entradas fuera de la diagonal se suman y el factor $1/2$ cancela esa duplicación. Se necesita $K_{12} = -1$, no -2. Con $K_{11} = K_{22} = 3$ se recupera exactamente el potencial del ejercicio 24.5. Derivar el potencial y comprobar la fuerza ofrece una segunda forma de detectar el error.

Solución del ejercicio 24.7.

Las raíces son $\lambda_- = (9 - \sqrt{17})/4 \approx 1{,}21922$ y $\lambda_+ = (9 + \sqrt{17})/4 \approx 3{,}28078$. Las frecuencias son aproximadamente 1,10418 y 1,81129. Los cocientes son $3 - \lambda_- \approx 1{,}78078$ y $3 - \lambda_+ \approx -0{,}28078$. En el modo lento la segunda masa se mueve más y en el mismo sentido; en el rápido su desplazamiento es menor y opuesto. Las frecuencias dependen de la inercia, además de la rigidez.

Solución del ejercicio 24.8.

Multiplicar $x = \sum_i w_i q_i$ por $w_j^T M$ elimina todos los términos salvo el de índice j. Así $q_j = \frac{w_j^T Mx}{w_j^T Mw_j}$. Si $\mu_j = w_j^T Mw_j > 0$, la energía queda $E = \sum_j \mu_j(\dot{q}_j^2 + \lambda_j q_j^2)/2$. La coordenada normalizada sería $Q_j = \sqrt{\mu_j}q_j$. El denominador ausente en una proyección sin normalizar es precisamente la masa modal que reaparece en la energía.

Solución del ejercicio 24.9.

El cambio tiene matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto $M' = S^T S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Para cualquier $z \neq 0$,

$$z^T M' z = (z_1 + z_2)^2 + z_2^2 > 0,$$

porque anular ambos cuadrados exigiría $z_1 = z_2 = 0$. Una masa no diagonal puede expresar simplemente una elección de coordenadas que mezcla movimientos independientes.

Solución del ejercicio 24.10.

Aquí $K = \kappa \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \operatorname{diag}(m_1, m_2)$. El modo nulo tiene forma $(1, 1)^T$: trasladar juntas las masas no deforma el resorte. Para la forma interna podemos elegir $u = (m_2, -m_1)^T$. Se verifica $Ku = \kappa(m_1 + m_2)(1, -1)^T$ y $Mu = m_1 m_2 (1, -1)^T$. Así

$$\omega_{int}^2 = \kappa \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

El modo interno cumple $m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$ y deja fijo el centro de masa; el modo nulo describe su traslación uniforme. El inverso del factor entre paréntesis es la masa reducida del capítulo 17.

Solución del ejercicio 24.11.

Tomemos $x_1 = 0$ y $x_2(t) = \varepsilon e^t$. Los datos son $x(0) = (0, \varepsilon)$ y $v(0) = (0, \varepsilon)$, que tienden al origen cuando $\varepsilon \to 0$. En $t = \log(1/\varepsilon)$ se alcanza $x_2 = 1$, para $0 < \varepsilon < 1$. Por tanto los datos pueden estar tan cerca del equilibrio como se quiera y salir después de una bola fija de radio menor que uno. La dirección de rigidez negativa produce inestabilidad exponencial.

Solución del ejercicio 24.12.

La primera ecuación tiene soluciones $x = x_0 + v_0 t$ y su equilibrio en el estado completo es inestable frente a velocidades iniciales pequeñas. La segunda conserva $E = \dot{x}^2/2 + x^4/4$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, elegir $E(0) < \min(\varepsilon^2/2, \varepsilon^4/4)$ fuerza $|\dot{x}(t)| < \varepsilon$ y $|x(t)| < \varepsilon$ para todo t. Como $E(0) \to 0$ con los datos, esto prueba estabilidad. La derivada de la fuerza en cero es nula en ambos casos; la linealización pierde el término cúbico restaurador y no decide el segundo problema.

Solución del ejercicio 24.13.

La rigidez es la matriz tridiagonal con diagonal 2 y vecinos -1. Para $w = (1, 1, 1)^T$, $Kw = (1, 0, 1)^T$; así $\mathcal{R}(w) = 2/3$. El menor autovalor exacto es $4\sin^2(\pi/8) = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}58579$, menor

que 2/3. La forma de prueba da una cota superior del mínimo: escoger un movimiento particular restringe la minimización y no puede reducir su valor por debajo del mínimo global.

Solución del ejercicio 24.14.

El incremento es $\Delta\kappa \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su forma cuadrática vale $\Delta\kappa(x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Es no nulo como matriz, pero se anula en la dirección $(1,1)^T$. Esa dirección sigue teniendo autovalor k/m y continúa siendo la de menor frecuencia. Una perturbación semidefinida puede endurecer unas direcciones y dejar intactas otras; la monotonía no implica incremento estricto.

Solución del ejercicio 24.15.

Los datos $x(0) = (A, 0)^T$ y $v(0) = (0, 2A)^T$ dan $x(t) = (A\cos 2t, A\sin 2t)^T$. Su norma es siempre A, así que recorre un círculo. Si fuera $uq(t)$ con u fijo, toda su trayectoria estaría en la recta generada por u. Sin embargo, pasa por $(A, 0)$ y $(0, A)$, que son linealmente independientes. Es una superposición de dos modos degenerados en cuadratura.

Solución del ejercicio 24.16.

La ecuación propia es lineal, de modo que ambas combinaciones conservan el autovalor. Sus productos para M se calculan expandiendo y usando $u_i^T M u_j = \delta_{ij}$: cada norma es uno y el producto mutuo cero. Las nuevas coordenadas son combinaciones ortogonales de las anteriores. Conservan tanto $\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2$ como $Q_1^2 + Q_2^2$, por lo que la suma energética del subespacio es idéntica. Los valores asignados a cada eje dentro de él dependen de la base.

Solución del ejercicio 24.17.

En $t_* = \pi/\Delta$, $\cos(\Delta t_*/2) = 0$ y $\sin(\Delta t_*/2) = 1$. Por tanto $x_1(t_*) = 0$ y $\dot{x}_1(t_*) = -A\Delta\cos(\bar{\omega}t_*)/2$. Para $A \neq 0$ se requiere además $\cos(\bar{\omega}t_*) = 0$ si queremos reposo exacto. Una envolvente mide desplazamientos; derivarla revela un término que sigue contribuyendo a la velocidad cuando la envolvente se anula.

Solución del ejercicio 24.18.

Con $\kappa = 5k/8$, $\omega_+^2 = (k + 2\kappa)/m = 9k/(4m)$, así que $\omega_+ = 3\omega_-/2$. En $t_* = 2\pi/\omega_-$, los cosenos de §2 son 1 y -1 y ambos senos son cero. Resulta $(x_1, x_2) = (0, A)$ y $(v_1, v_2) = (0, 0)$. Inicialmente $E = kA^2/2 + \kappa A^2/2 = (k + \kappa)A^2/2$. Al final el resorte exterior de la segunda masa y el central tienen los mismos alargamientos en módulo que sus correspondientes contribuciones iniciales. La energía total se conserva y la configuración completa se intercambia por la simetría.

Solución del ejercicio 24.19.

Proposición 24.10 da $\dot{e}_1 > 0$ cuando $\kappa > 0$: en esa partición aumenta la energía asignada a la primera masa y disminuye la de la segunda. En el modo simétrico $x_2 - x_1 = 0$, por lo que el flujo es cero. En el antisimétrico $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$, también es cero. Los batidos se deben a superponer modos, y el flujo local puede variar aunque cada energía modal se mantenga constante.

Solución del ejercicio 24.20.

Sumar las ecuaciones y dividir por dos da $m\ddot{s} + ks = F\cos\Omega t$. Restarlas da $m\ddot{a} + (k + 2\kappa)a = 0$. Los datos nulos fuerzan $a = 0$ para todo tiempo. En $\Omega = \omega_-$, la respuesta escalar de reposo es $s = Ft\sin(\omega_- t)/(2m\omega_-)$. Ambas masas tienen ese desplazamiento. La fuerza resultante sobre el modo simétrico combina dos fuerzas aplicadas, pero la inercia de ese patrón también combina dos masas; la ecuación de s conserva el factor indicado.

Solución del ejercicio 24.21.

La fuerza no tiene componente antisimétrica y a sigue nula. El modo simétrico responde a una frecuencia $\Omega = \omega_+ \neq \omega_-$. Desde el reposo,

$$s(t) = \frac{F}{m(\omega_-^2 - \omega_+^2)}[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)], \qquad a = 0.$$

El denominador es no nulo porque $\kappa > 0$ y la respuesta está acotada. La frecuencia de excitación coincide con una frecuencia del aparato, pero el patrón de fuerza impide excitar precisamente ese modo.

Solución del ejercicio 24.22.

La suma y la diferencia de fuerzas valen ambas $F\cos\Omega t$. Tras dividir entre dos aparecen $m\ddot{s}+ks = (F/2)\cos\Omega t$ y $m\ddot{a} + (k+2\kappa)a = (F/2)\cos\Omega t$. Ambas proyecciones son no nulas, de modo que variar la frecuencia permite resonar con cualquiera de los dos modos. La reconstrucción espacial sigue siendo $x_1 = s + a$, $x_2 = s - a$.

Solución del ejercicio 24.23.

El coeficiente de velocidad modal es $a + b\lambda_j = 1 + 0{,}25\lambda_j$. Para $\lambda_1 = 4$, vale 2, así que $\beta_1 = 1$ y $\omega_{d1} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Para $\lambda_2 = 16$, vale 5, por lo que $\beta_2 = 2{,}5$ y $\omega_{d2} = \sqrt{16 - 6{,}25} = \sqrt{9{,}75}$. Ambos son subamortiguados porque $\beta_j < \sqrt{\lambda_j}$. Los coeficientes a, b se han expresado en unidades compatibles con las frecuencias dadas.

Solución del ejercicio 24.24.

Como sólo la primera masa siente resistencia,

$$U^T C U = \frac{c}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los términos fuera de la diagonal son distintos de cero: cada ecuación normal contiene la velocidad de la otra coordenada. La matriz sigue siendo semidefinida positiva, pues su forma cuadrática es $c(\dot{Q}_- + \dot{Q}_+)^2/2$. La pasividad se conserva sin que las coordenadas conservativas desacoplen el movimiento amortiguado.

Solución del ejercicio 24.25.

Proposición 24.13 da $\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\omega_2 = \sqrt{2}$ y $\omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Formas proporcionales a las sinusoidales son $(1, \sqrt{2}, 1)^T$, $(1, 0, -1)^T$ y $(1, -\sqrt{2}, 1)^T$. En el modo intermedio la masa central permanece quieta, porque las dos fuerzas vecinas se cancelan durante todo el movimiento. Cada forma se puede comprobar multiplicándola por la rigidez tridiagonal.

Solución del ejercicio 24.26.

Para $1 \le r \le N$, el ángulo $r\pi/[2(N+1)]$ pertenece estrictamente a $(0, \pi/2)$ y su seno está entre cero y uno. Esto prueba la cota. La mayor frecuencia es $\omega_N = 2\sqrt{k/m}\cos\frac{\pi}{2(N+1)}$,

que tiende a $2\sqrt{k/m}$ desde abajo al crecer N. En este límite se añaden masas manteniendo las constantes individuales; es diferente del límite sobre longitud física fija, que requiere el escalamiento de §14.

Solución del ejercicio 24.27.

La fuerza tiene forma $g = (0, F, 0)^T$. Su proyección sobre cada modo es $u_j^T g = F(u_j)_2$. El modo intermedio tiene componente central cero y no se excita desde el reposo. Los modos primero y tercero tienen componentes centrales no nulas y sí pueden excitarse. La fuerza puede actuar físicamente sobre el aparato sin hacer trabajo sobre un patrón que mantiene inmóvil su punto de aplicación.

Solución del ejercicio 24.28.

Si $\omega_j T$ es múltiplo de 2π para todos los modos activos, cada seno y coseno modal se repite al avanzar T y la reconstrucción $x = UQ$ también se repite. Para la necesidad con dos frecuencias, si $x(t+T) = x(t)$ para todo t, la transformación inversa da $Q_j(t+T) = Q_j(t)$. Cada coordenada

activa no nula es una sinusoide y sus períodos positivos son múltiplos enteros de $2\pi/\omega_j$. Por tanto $\omega_1 T = 2\pi n_1$ y $\omega_2 T = 2\pi n_2$, con enteros positivos, y $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$. Con cociente irracional no hay repetición exacta del estado completo, aunque pueda haber retornos cercanos.

Solución del ejercicio 24.29.

La identidad $K' - \lambda M' = S^T(K - \lambda M)S$ implica $\det(K' - \lambda M') = (\det S)^2 \det(K - \lambda M)$. Como el factor es no nulo, las raíces y sus multiplicidades no cambian. Si $Ku = \lambda Mu$, el vector $w = S^{-1}u$ satisface $K'w = \lambda M'w$. Recíprocamente, $u = Sw$ recupera la forma original. Las componentes cambian porque describen el mismo patrón en otra base; las frecuencias pertenecen al sistema físico.

Solución del ejercicio 24.30.

La proyección de fuerza sobre el modo j es $g_j = u_j^T g$. En $\Omega = \omega_j$, su término secular es $Q_j^{sec} = g_j t \sin(\omega_j t)/(2\omega_j)$. La medición incluye, por tanto,

$$z_j^{sec}(t) = \frac{(\ell^T u_j)(u_j^T g)}{2\omega_j}\, t \sin(\omega_j t).$$

Para que aparezca ese crecimiento deben ser no nulos ambos factores: $u_j^T g$ permite excitar el modo y $\ell^T u_j$ permite observarlo. Con frecuencias distintas, los demás modos aportan términos acotados a esa frecuencia de excitación y no cancelan este crecimiento. Un modo puede acumular energía y permanecer invisible para un sensor situado en un nodo o para una combinación de mediciones ortogonal a su forma. La conclusión se refiere al modelo sin disipación; con resistencia hay que estudiar la respuesta acotada correspondiente.

Notas y lecturas

1. La lección 4 del curso de Yen-Jie Lee, *Physics III: Vibrations and Waves*, MIT OpenCourseWare, otoño de 2016, presenta osciladores acoplados y modos normales mediante aparatos simétricos. Ofrece una lectura complementaria a la construcción inicial de este capítulo. Página oficial de la lección.
2. Las coordenadas normales dependen de la normalización de los autovectores. Las frecuencias y los subespacios propios permanecen invariantes frente a cambios lineales de coordenadas; la ortogonalidad apropiada se expresa mediante M. Las fórmulas proposiciones 24.4–24.6 hacen explícita esa convención para que los datos, las fuerzas y la energía puedan transformarse sin ambigüedad.
3. La cadena de §14 tiene extremos fijos, un número finito de masas y resortes ideales. Su aproximación a un campo continuo exige especificar qué magnitudes físicas permanecen fijas al variar la discretización. El estudio sistemático del límite y de las condiciones de frontera corresponde al Tomo II.

Capítulo 25

Configuración, trabajo virtual y principios variacionales

Una cuenta ensartada en un alambre recibe una fuerza del alambre que mantiene su movimiento sobre la curva. Si queremos calcular esa reacción, necesitamos seguir su dirección y su magnitud. Si sólo queremos saber cómo avanza la cuenta, parte de ese cálculo puede resultar innecesaria: una proyección tangencial elimina la reacción de un alambre liso y deja la ecuación del movimiento permitido.

Con varios cuerpos y restricciones, escoger una tangente en cada problema se vuelve incómodo. Una cuerda inextensible relaciona desplazamientos de masas diferentes; una articulación permite ciertos giros y excluye otros; un soporte móvil cambia con el tiempo las posiciones admisibles. Buscaremos una forma de proyectar Newton que respete esas relaciones desde el comienzo.

El paso siguiente consistirá en comparar trayectorias completas. La derivada de una función compara valores próximos de una variable; la primera variación de una acción compara valores próximos de una trayectoria. Aprenderemos a efectuar esa comparación, a recuperar de ella las ecuaciones diferenciales y a precisar qué significa que la acción sea estacionaria. Los extremos espaciales y los tiempos de comparación formarán parte de los datos del problema.

Se presuponen los vínculos elementales del capítulo 11, trabajo y energía del capítulo 12–I13, y las ecuaciones de movimiento desarrolladas hastal capítulo 24. Introduciremos el cálculo de variaciones necesario mediante familias de curvas, derivación bajo una integral e integración por partes. La mecánica lagrangiana del capítulo 26 empleará esta construcción para organizar sistemas más amplios.

1. Las posiciones que un sistema puede adoptar

Para N partículas, reunamos sus posiciones cartesianas en $r \in \mathbb{R}^{3N}$. Una restricción holónoma se expresa mediante ecuaciones $g_\alpha(r,t) = 0$, con $\alpha = 1, \dots, s$. En un instante fijo, esas ecuaciones seleccionan las configuraciones admisibles.

Definición 25.1 — Espacio local de configuraciones. Para un tiempo fijo t, el conjunto de configuraciones es $\mathcal{C}_t = \{r : g(r,t) = 0\}$. En una región donde el Jacobiano respecto de r, $A = \partial g/\partial r$, tiene rango constante s, unas coordenadas locales independientes $q = (q^1, \dots, q^n)$, con $n = 3N - s$, parametrizan el conjunto mediante $r = R(q,t)$. Su matriz $J = \partial R/\partial q$ tiene rango n.

El teorema de la función implícita justifica estas coordenadas en un entorno de cada configuración regular. Contar ecuaciones sólo es válido después de comprobar su independencia. Las ecuaciones $x^2 + y^2 = \ell^2$ y $2x^2 + 2y^2 = 2\ell^2$ describen una sola restricción, aunque se hayan escrito dos líneas.

Una partícula plana sujeta a una circunferencia tiene un grado de libertad. Podemos usar $x = \ell \sin\theta$, $y = -\ell\cos\theta$ en un intervalo angular apropiado. El ángulo describe localmente la posición; sus valores separados por 2π corresponden al mismo punto. Una coordenada útil no necesita convertirse en una identificación global del círculo con toda la recta.

Proposición 25.1 — Direcciones permitidas en una configuración regular. Con el tiempo fijo, las direcciones tangentes admisibles satisfacen $A\,\delta r = 0$, y toda una de esas direcciones se escribe de manera única como $\delta r = J\,\delta q$ en la parametrización local elegida.

Demostración. Derivar $g(R(q,t),t) = 0$ respecto de q da $AJ = 0$, por lo que la imagen de J está contenida en el núcleo de A. El rango de A es s y la dimensión de su núcleo es $3N-s = n$, igual al rango de J. Ambos espacios coinciden. Como J tiene columnas independientes, los coeficientes δq de cada vector tangente son únicos. □

El estado mecánico necesita también velocidades. El espacio de configuraciones organiza dónde puede estar el sistema; la dinámica determina cómo cambia esa configuración y qué datos de velocidad son compatibles con ella.

2. Desplazar virtualmente y avanzar en el tiempo

Definición 25.2 — Desplazamiento virtual. Un desplazamiento virtual es una variación infinitesimal de configuración a tiempo fijo, compatible con los vínculos: $\delta r = J\delta q$ y $\delta t = 0$. En componentes, $\delta \mathbf{r}_i = \sum_a (\partial \mathbf{r}_i/\partial q^a)\delta q^a$.

Para un movimiento real $r(t) = R(q(t),t)$, en cambio, $\dot r = J\dot q + R_t$, $\qquad A\dot r + g_t = 0$. El término R_t describe el movimiento prescrito del soporte o de la geometría. No aparece en el desplazamiento virtual, porque al comparar configuraciones se mantiene fijo el instante.

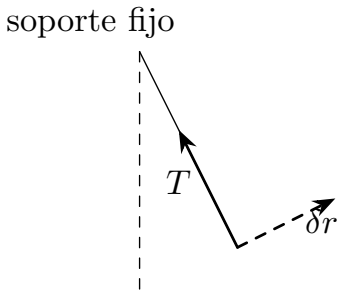


Figura 25.1. Con tiempo fijo y longitud de péndulo fija, δr es tangente al círculo. La tensión radial realiza trabajo virtual nulo; esta afirmación depende de la idealidad del vínculo. Véase §2.

Una cuenta sobre una circunferencia cuyo radio $\ell(t)$ cambia ilustra la diferencia. Las variaciones virtuales son tangentes al círculo de ese instante. La velocidad real tiene además una componente radial $\dot\ell\,\mathbf{e}_r$. Una reacción radial puede ser perpendicular a todo desplazamiento virtual y realizar trabajo durante el movimiento real.

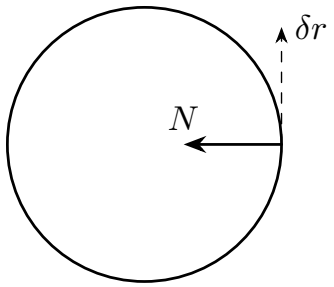
Proposición 25.2 — Diferencia de velocidades compatibles. En una configuración e instante dados, la diferencia entre dos velocidades que satisfacen los mismos vínculos móviles pertenece al espacio de desplazamientos virtuales. Una velocidad compatible individual no tiene por qué pertenecer a él.

Demostración. Si $Av_1 + g_t = 0$ y $Av_2 + g_t = 0$, restar da $A(v_1 - v_2) = 0$. Pero $Av_1 = -g_t$ puede ser distinto de cero. □

Las velocidades admisibles forman, en general, un espacio afín: comparten una componente impuesta por el vínculo y difieren en direcciones tangentes. Para vínculos independientes del tiempo, $g_t = 0$ y esa distinción desaparece.

3. Qué se supone de las fuerzas de vínculo

Escribamos Newton como $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$, separando las fuerzas aplicadas $\mathbf{F}_i$ y las reacciones de vínculo $\mathbf{R}_i$. La clasificación depende del modelo: una fuerza que se prescribe explícitamente se conserva entre las aplicadas; una reacción desconocida se determina al exigir compatibilidad.



$$N \cdot \delta r = 0$$

Figura 25.2. En una guía circular fija y lisa, el desplazamiento virtual admisible es tangente y la reacción es normal. Su trabajo virtual es cero. Las flechas no describen dos fuerzas que se equilibren. Véase §3.

Definición 25.3 — Vínculo ideal. Un sistema de vínculos se llama ideal si sus reacciones satisfacen

$$\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

para todo desplazamiento virtual admisible. La igualdad es colectiva: no exige que cada producto individual sea cero. Una guía lisa ejerce una reacción normal a su tangente. Una cuerda ideal puede realizar trabajos virtuales individuales no nulos en sus extremos que se cancelan por la relación entre desplazamientos. El rozamiento de deslizamiento aporta, en general, trabajo virtual no nulo y debe permanecer entre las fuerzas que se proyectan.

Proposición 25.3 — Reacciones como normales a los vínculos. En una configuración regular, una reacción total R es ideal si y sólo si existe una columna $\lambda \in \mathbb{R}^s$ tal que $R = A^T\lambda$. Los coeficientes son únicos cuando las filas de A son independientes.

Demostración. Si $R = A^T\lambda$, entonces $R \cdot \delta r = \lambda^T A\delta r = 0$. Recíprocamente, idealidad significa que R pertenece al complemento ortogonal de $\ker A$. En álgebra lineal finita ese complemento es $\operatorname{im} A^T$: la inclusión se obtiene del cálculo anterior y ambos espacios tienen dimensión s. La independencia de las filas hace inyectiva a A^T, lo que da unicidad. □

Para vínculos móviles, la potencia real de esa reacción es $R \cdot \dot{r} = \lambda^T A\dot{r} = -\lambda^T g_t$. La idealidad permite eliminar reacciones en el trabajo virtual y no implica por sí sola potencia real nula. Tampoco las ecuaciones geométricas prueban que un contacto sea ideal: ésa es una hipótesis física que debe declararse.

4. Equilibrio mediante trabajo virtual

Pensemos primero en una geometría fija, con contactos bilaterales ideales: el sistema puede desplazarse virtualmente en ambos sentidos de cada dirección tangente. En equilibrio, las fuerzas aplicadas se compensan con las reacciones.

Proposición 25.4 — Criterio de equilibrio ideal. En una configuración regular de vínculos fijos, existe una reacción ideal que equilibra las fuerzas aplicadas si y sólo si

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

para todo desplazamiento virtual. Esta condición garantiza compatibilidad algebraica con las reacciones ideales; si el modelo impone además límites de signo o magnitud a una reacción, hay que comprobarlos separadamente.

Demostración. Si $F + R = 0$, el trabajo virtual de F es el opuesto del de R, que se anula. A la inversa, si F anula todas las tangentes, proposición 25.3 permite escribir $F = A^T\mu$. Escoger $R = -A^T\mu$ equilibra las fuerzas y es una reacción ideal. □

Si $F = -\nabla V$, la condición es $\delta V = 0$ sobre las configuraciones admisibles. Localmente se convierte en $\partial V(R(q))/\partial q^a = 0$ para cada coordenada independiente. Los puntos críticos incluyen mínimos y máximos; decidir estabilidad requiere el análisis energético del capítulo 13.

Para una masa que puede deslizar sin rozamiento sobre un plano inclinado, una fuerza normal desconocida no contribuye a δW. La componente de gravedad tangencial sí lo hace. Si otra fuerza aplicada la compensa, hay equilibrio; si no, la cuenta inicia un movimiento. La eliminación de la normal conserva exactamente la información necesaria para esa decisión.

5. D'Alembert: proyectar la dinámica

Multipliquemos cada ecuación de Newton por un desplazamiento virtual admisible y sumemos. Las reacciones ideales desaparecen. El resultado tiene la misma forma de equilibrio si se incorpora el término $-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$.

Proposición 25.5 — Forma de d'Alembert. Una trayectoria compatible con vínculos ideales satisface

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

para todo desplazamiento virtual admisible en cada instante. Recíprocamente, para una trayectoria compatible, esa identidad permite reconstruir una reacción ideal que completa Newton, bajo las hipótesis regulares y bilaterales de la proposición 25.3.

Demostración. Newton da $\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -\mathbf{R}_i$; el trabajo virtual colectivo se anula por idealidad. En sentido inverso, la identidad afirma que el vector $m\ddot{r} - F$ anula el espacio tangente. Por proposición 25.3 puede escribirse $A^T\lambda$ y sirve como reacción ideal en Newton. □

La aceleración es la de la trayectoria real que se quiere determinar. El vector δr sirve para probar su proyección en todas las direcciones permitidas. No es necesario identificar δr con un desplazamiento que el sistema vaya a efectuar en un tiempo pequeño.

La expresión de d'Alembert conserva las restricciones sobre el movimiento y elimina sus reacciones de las ecuaciones proyectadas. Si después necesitamos la tensión de una cuerda o la carga de un apoyo, se vuelve a Newton con la trayectoria ya calculada.

6. Fuerzas generalizadas y una identidad cinética

Sustituyendo $\delta \mathbf{r}_i = \sum_a \mathbf{r}_{i,a}\delta q^a$, el trabajo de las fuerzas aplicadas se reorganiza como

$$\delta W = \sum_a Q_a \delta q^a, \qquad Q_a = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_{i,a}, \quad \mathbf{r}_{i,a} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^a}.$$

Definición 25.4 — Fuerza generalizada. El coeficiente Q_a es la fuerza generalizada conjugada a q^a. Su producto $Q_a \delta q^a$ tiene unidades de energía. Para una coordenada de longitud suele ser una fuerza; para un ángulo puede ser un torque.

Sea $T(q, \dot q, t) = \sum_i m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2/2$, con $\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_a \mathbf{r}_{i,a}\dot q^a + \mathbf{r}_{i,t}$. Las masas se suponen constantes y las parametrizaciones suficientemente diferenciables.

Proposición 25.6 — Identidad de proyección de la inercia. Se cumple

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_{i,a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a}.$$

Demostración. Como $\partial \dot{\mathbf{r}}_i / \partial \dot q^a = \mathbf{r}_{i,a}$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q^a} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_{i,a}.$$

Su derivada temporal es la suma buscada más $\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (d\mathbf{r}_{i,a}/dt)$. Por la regla de la cadena y la igualdad de derivadas mixtas,

$$\frac{d\mathbf{r}_{i,a}}{dt} = \sum_b \mathbf{r}_{i,ab}\dot q^b + \mathbf{r}_{i,at} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^a},$$

donde en la última derivada se mantienen fijas $\dot q$ y t. El término adicional es, por tanto, $\partial T/\partial q^a$. Restarlo prueba la identidad. □

La fórmula admite vínculos móviles. En ese caso T puede contener términos lineales en $\dot q$ y términos independientes de $\dot q$, además de los cuadráticos. Omitirlos porque no aparecen en un soporte fijo cambia la dinámica.

Proposición 25.7 — Ecuaciones proyectadas. Para coordenadas independientes y vínculos ideales,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} = Q_a.$$

Si las fuerzas aplicadas derivan de un potencial $V(r, t)$ sin dependencia de velocidades, entonces $Q_a = -\partial V(q,t)/\partial q^a$. Con $L = T - V$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0.$$

Demostración. Sustituimos definición 25.4 y proposición 25.6 en la proposición 25.5. La suma de los coeficientes por δq^a se anula para todo vector δq, así que cada coeficiente es cero. Para el potencial, la regla de la cadena da $\partial V/\partial q^a = \sum_i \nabla_i V \cdot \mathbf{r}_{i,a} = -Q_a$. Reagrupar los términos produce la ecuación para L. □

7. El péndulo, con soporte fijo y móvil

Para un péndulo plano de longitud ℓ, con eje vertical positivo hacia arriba, escribimos $\mathbf{r} = (\ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$. La derivada $\mathbf{r}_{,\theta} = \ell(\cos\theta, \sin\theta)$ es tangente. La gravedad $\mathbf{F} = (0, -mg)$ tiene fuerza generalizada $Q_\theta = -mg\ell\sin\theta$. La tensión, radial, no contribuye.

Como $T = m\ell^2\dot\theta^2/2$, proposición 25.7 da $m\ell^2\ddot\theta = -mg\ell\sin\theta$. Se recupera la ecuación del capítulo 23 sin calcular primero la tensión. Con $V = -mg\ell\cos\theta$, la misma ecuación se obtiene de $L = T - V$.

Si el soporte se mueve horizontalmente con posición prescrita $a(t)$, la parametrización es $\mathbf{r} = (a(t) + \ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$,

y la energía cinética completa resulta

$$T = \frac{m}{2}\dot a^2 + m\ell\dot a\cos\theta\,\dot\theta + \frac{m\ell^2}{2}\dot\theta^2.$$

En la identidad proposición 25.6, derivar $\partial T/\partial\dot\theta = m\ell\dot a\cos\theta + m\ell^2\dot\theta$ produce un término $-m\ell\dot a\sin\theta\dot\theta$ que se cancela con $\partial T/\partial\theta$. Queda

$$m\ell^2\ddot\theta + m\ell\ddot a\cos\theta + mg\ell\sin\theta = 0.$$

La aceleración del soporte actúa como excitación. Las variaciones virtuales siguen siendo tangentes en cada instante, pero la velocidad real contiene además $\dot a$ y la reacción puede intercambiar energía con el actuador del soporte. Las ecuaciones proyectadas y el balance energético responden a preguntas distintas que deben mantenerse compatibles.

8. Una función cuyo argumento es una curva

Fijemos dos tiempos $t_0 < t_1$ y dos configuraciones en una carta local. Para comparar trayectorias, consideramos curvas $q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ que unen esas configuraciones. La función $L(q, v, t)$ asigna un valor a una posición, una velocidad y un instante. Su integral asigna un número a cada curva completa.

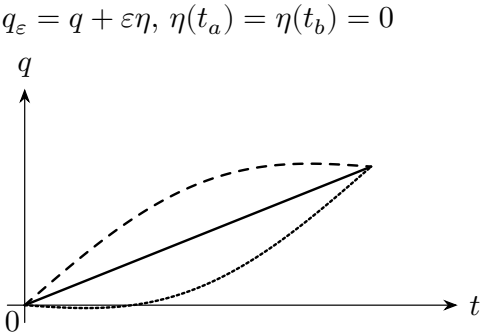


Figura 25.3. Las curvas variadas comparten los extremos y difieren en su interior. La acción asigna un número a cada curva completa; la variación deriva esa asignación con respecto al parámetro de la familia. Véase §8.

Definición 25.5 — Funcional de acción. Para un lagrangiano L, la acción de una trayectoria es

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot q(t), t)\,dt.$$

Un funcional es una aplicación cuyo argumento es, aquí, una función $q(t)$. Para $L = T - V$, la acción tiene unidades de energía multiplicada por tiempo, equivalentes al producto de momento lineal y longitud.

Una trayectoria constante y otra que recorre un largo rodeo pueden unir los mismos extremos. Sus acciones dependen de las posiciones intermedias y de las velocidades con que se recorren. Tampoco se está comparando sólo la energía en los extremos: el integrando es $T - V$ y se acumula a lo largo del intervalo temporal fijo.

Definición 25.6 — Variación y primera variación. Una familia de prueba local tiene la forma $q_\varepsilon(t) = q(t) + \varepsilon\eta(t)$, con η de clase C^1. Para extremos fijos se exige $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. La primera variación en dirección η es

$$\delta S[q;\eta] = \frac{d}{d\varepsilon} S[q_\varepsilon]\Big|_{\varepsilon=0}.$$

El parámetro ε compara curvas. El tiempo t indica en qué punto de cada curva se efectúa la comparación. Derivar la familia respecto de t da $\dot q_\varepsilon = \dot q + \varepsilon\dot\eta$, así que la variación de velocidad es la derivada temporal de la variación de posición. No se mantienen fijas las velocidades de los extremos salvo que se imponga una condición adicional.

Para una parametrización curva, la familia física es $r_\varepsilon(t) = R(q_\varepsilon(t), t)$. Satisface exactamente los vínculos para todo ε pequeño. En cambio, $r + \varepsilon\delta r$ sólo es tangente al conjunto admisible y puede abandonarlo a segundo orden: una recta tangente a una circunferencia sale de ella. El cálculo se realiza en coordenadas que garantizan la admisibilidad de la familia completa.

9. Derivar la acción e integrar por partes

Supongamos L de clase C^2 en un entorno de la trayectoria y q de clase C^2. Tomamos variaciones suficientemente pequeñas para permanecer en ese entorno. El intervalo es compacto, por lo que las derivadas continuas del integrando están uniformemente controladas cerca de cada familia de prueba.

Proposición 25.8 — Fórmula de primera variación. Con $p_a = \partial L/\partial v^a$, evaluado a lo largo de la trayectoria,

$$\delta S[q;\eta] = \left[\sum_a p_a \eta^a\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{dp_a}{dt}\right)\eta^a \, dt.$$

Demostración. La regla de la cadena y la derivación bajo la integral dan

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a}\eta^a + \frac{\partial L}{\partial v^a}\dot\eta^a\right) dt.$$

En cada segundo término aplicamos integración por partes: $\int p_a\dot\eta^a = [p_a\eta^a] - \int \dot p_a \eta^a$. Sumarlas produce la fórmula. La continuidad de las derivadas en un entorno compacto justifica intercambiar la derivación paramétrica con la integral. $\square$

Con extremos fijos, el término de borde se anula porque η vale cero allí. Ésta es la razón concreta de esa condición. Aunque la variación se anule en los extremos, su derivada puede ser no nula: las trayectorias de comparación pueden llegar a los mismos puntos con velocidades distintas.

La integral restante contiene un coeficiente que sólo depende de la trayectoria y un factor de prueba η que podemos elegir. Exigir que esa integral sea cero para todas las elecciones encierra mucha más información que comprobarla para una sola variación.

10. Por qué una identidad integral determina una ecuación

Proposición 25.9 — Lema fundamental de las variaciones. Sea $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ continua. Si $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)\,dt = 0$ para toda función C^1 de soporte compacto en (t_0, t_1), entonces $f(t) = 0$ en todo el intervalo. La afirmación se aplica componente por componente a funciones vectoriales.

Demostración. Si $f(t_*) > 0$ en un punto interior, la continuidad proporciona un intervalo cerrado $[a, b] \subset (t_0, t_1)$ donde f es positiva. Elegimos $\eta(t) = (t-a)^2(b-t)^2$ dentro de $[a, b]$ y cero fuera. Es C^1, no negativa y positiva en (a, b). Entonces $\int f\eta > 0$, contradicción. Para $f(t_*) < 0$ el mismo argumento produce una integral negativa. Así f se anula en el interior y, por continuidad, también en los extremos. Para un vector, se eligen pruebas con una única componente no nula. □

Definición 25.7 — Trayectoria estacionaria. Una trayectoria es estacionaria para la acción y las condiciones de extremo especificadas si su primera variación es cero para toda variación admisible. La definición exige anulación del cambio de primer orden; no decide el signo de los cambios de segundo orden o superiores.

Proposición 25.10 — Ecuaciones de Euler–Lagrange. Bajo las hipótesis de la proposición 25.8, una curva q con extremos fijos es estacionaria si y sólo si satisface, para cada a,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0.$$

Demostración. Si la curva es estacionaria, proposición 25.8 sin término de borde da una integral nula contra todas las variaciones de extremos cero y, en particular, contra las de soporte compacto. El coeficiente es continuo. Proposición 25.9 obliga a que cada componente se anule, lo que da las ecuaciones. Recíprocamente, si se satisfacen las ecuaciones, el integrando de la proposición 25.8 es cero y el término de borde se anula por las condiciones de variación. Por tanto $\delta S = 0$ para toda prueba admisible. □

El paso decisivo consiste en poder elegir variaciones localizadas en cualquier intervalo interior. Probar la identidad sólo para una colección pequeña de curvas, por ejemplo variaciones constantes o lineales, no autoriza a concluir las ecuaciones punto a punto.

11. El principio de Hamilton y su equivalencia mecánica

Proposición 25.11 — Acción estacionaria para vínculos holónomos ideales. Para masas constantes, fuerzas aplicadas derivadas de un potencial $V(r, t)$ y vínculos holónomos regulares ideales, la trayectoria mecánica en coordenadas independientes es estacionaria para

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\,dt$$

respecto de variaciones con tiempos y configuraciones extremas fijos. Recíprocamente, toda trayectoria estacionaria compatible satisface Newton con alguna reacción ideal, en el sentido de la proposición 25.5.

Demostración. proposición 25.7 transforma Newton proyectado en las ecuaciones de Euler–Lagrange de $L = T - V$. Proposición 25.10 muestra que esas ecuaciones equivalen a estacionariedad. En sentido inverso, proposición 25.10 y proposición 25.6 recuperan la identidad de d'Alembert;

proposición 25.5 reconstruye las reacciones. Las coordenadas garantizan que los vínculos se cumplen durante toda la variación. □

Esta formulación recibe el nombre de principio de Hamilton. En el ámbito descrito se ha demostrado su equivalencia con la dinámica de Newton y las hipótesis de idealidad. Para modelos más generales, proponer una acción exige comprobar de nuevo qué ecuaciones y qué condiciones de borde produce.

Una fuerza adicional no conservativa no desaparece de la proyección. Si tiene componentes generalizadas Q^{nc}_a, las ecuaciones son $\dot p_a - \partial L/\partial q^a = Q^{\mathrm{nc}}_a$. La fórmula integral correspondiente es $\delta S + \int_{t_0}^{t_1} \sum_a Q^{\mathrm{nc}}_a \eta^a \, dt = 0$.

Se evalúan las fuerzas en la trayectoria considerada. Esta identidad de trabajo virtual no afirma que el término adicional sea la variación de otro funcional. Para la resistencia viscosa del capítulo 23 se recupera así la ecuación amortiguada sin atribuirle incorrectamente la acción conservativa del oscilador libre.

12. El oscilador: mínimo, degeneración y punto de silla

Tomemos $L = m\dot q^2/2 - m\omega^2 q^2/2$, con $m, \omega > 0$, en $[0, \tau]$. Su ecuación de Euler–Lagrange es $\ddot q + \omega^2 q = 0$. Si q la satisface y η tiene extremos cero, expandir la acción da una identidad exacta:

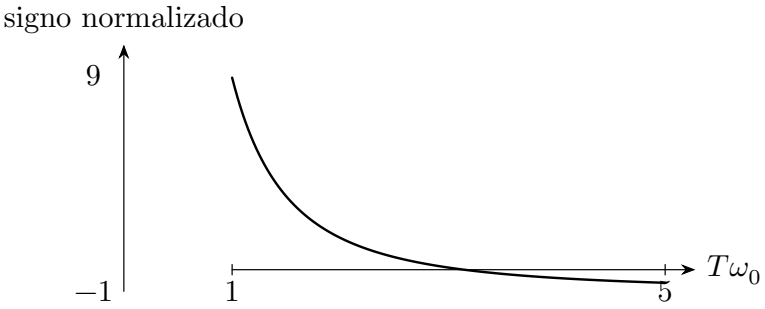


Figura 25.4. Para la variación $\eta = \sin(\pi t/T)$ del oscilador, el signo de la segunda variación es el de $(\pi/T)^2 - \omega_0^2$. El modo pierde positividad en $T\omega_0 = \pi$. Véase §12.

$$S[q + \varepsilon\eta] - S[q] = \frac{m\varepsilon^2}{2} \int_0^\tau (\dot\eta^2 - \omega^2 \eta^2)\, dt.$$

El término lineal se anula por estacionariedad y no hay términos de orden mayor, porque el lagrangiano es cuadrático.

Proposición 25.12 — Clasificación variacional del oscilador. Cuando existe una trayectoria estacionaria con los extremos dados, su acción es un mínimo estricto si $\tau < \pi/\omega$, un mínimo no estricto si $\tau = \pi/\omega$, y un punto de silla si $\tau > \pi/\omega$.

Demostración. Primero probamos la desigualdad

$$\int_0^\tau \dot\eta^2 \, dt \geq \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \int_0^\tau \eta^2 \, dt$$

para η de clase C^1 con extremos cero. Pongamos $\alpha = \pi/\tau$ y expandamos el cuadrado $[\dot\eta - \alpha \cot(\alpha t)\eta]^2$ en un intervalo interior $[h, \tau - h]$. La integración por partes del término cruzado da, al hacer $h \to 0$,

$$\int_0^\tau [\dot\eta - \alpha\cot(\alpha t)\eta]^2 dt = \int_0^\tau (\dot\eta^2 - \alpha^2\eta^2) dt.$$

Los términos de borde $\alpha\cot(\alpha t)\eta^2$ tienden a cero porque $\eta(t) = O(t)$ y $\eta(t) = O(\tau - t)$ en los extremos. El integrando del cuadrado es integrable: η es C^1 y la singularidad de la cotangente queda compensada por esos ceros. Su no negatividad prueba la desigualdad.

Si $\tau < \pi/\omega$, la diferencia exacta de acciones es positiva para toda $\eta \neq 0$, por la cota $[(\pi/\tau)^2 - \omega^2]\int \eta^2 > 0$. Si $\tau = \pi/\omega$, es no negativa y se anula para $\eta = \sin(\omega t)$: el mínimo no es estricto. Si $\tau > \pi/\omega$, la prueba $\eta = \sin(\pi t/\tau)$ da un cambio negativo. Una prueba $\eta = \sin(n\pi t/\tau)$ con $n\pi/\tau > \omega$ da uno positivo. Multiplicar las pruebas por números arbitrariamente pequeños muestra ambos signos en cualquier entorno de la trayectoria. □

El intervalo temporal altera el carácter variacional de una misma ecuación física. La palabra «estacionaria» cubre todos esos casos y evita atribuir un mínimo allí donde el cálculo produce una silla.

Proposición 25.13 — Extremos fijos y existencia en el oscilador. Para $q(0) = q_0$, $q(\tau) = q_1$, si $\sin(\omega\tau) \neq 0$ existe una única trayectoria estacionaria. Si $\omega\tau = n\pi$, con entero $n \geq 1$, existe una familia infinita cuando $q_1 = (-1)^n q_0$ y ninguna cuando esa compatibilidad falla.

Demostración. Toda solución es $q(t) = q_0\cos\omega t + B\sin\omega t$. La condición final exige $q_1 = q_0\cos\omega\tau + B\sin\omega\tau$. Si el seno no es cero, determina un único B. Si lo es, la condición se reduce a la compatibilidad indicada y deja libre B o resulta imposible. Proposición 25.10 identifica estas soluciones con las estacionarias. □

Los datos de posición y velocidad iniciales siguen determinando una solución única en todos los casos del capítulo 23. Es el problema con posiciones en dos tiempos diferentes el que puede perder existencia o unicidad. La formulación de Hamilton no obliga a que toda elección de extremos admita una trayectoria física que los una en el tiempo fijado.

13. Términos de borde y extremos libres

La integración por partes de la proposición 25.8 conserva información en los extremos. Puede eliminarse al fijar las configuraciones, o producir condiciones adicionales si algunas componentes quedan libres.

Proposición 25.14 — Añadir una derivada total. Si $G(q,t)$ es suficientemente diferenciable y $L' = L + dG/dt$, entonces $S'[q] = S[q] + G(q(t_1),t_1) - G(q(t_0),t_0)$. Con tiempos y configuraciones extremas fijos, ambos funcionales tienen las mismas trayectorias estacionarias.

Demostración. Sobre cada curva, $dG/dt = G_q\dot q + G_t$. El teorema fundamental del cálculo da la diferencia de acciones. Los valores de borde son iguales para todas las curvas de comparación y su variación es cero. Por tanto las primeras variaciones coinciden. □

La afirmación concierne a las condiciones de extremo declaradas. Si una configuración extrema queda libre, el término añadido puede cambiar la condición natural correspondiente, aunque las ecuaciones interiores sigan siendo las mismas.

Proposición 25.15 — Condición natural con tiempo final fijo. Si la posición inicial se fija y la posición final se deja completamente libre, manteniendo t_0, t_1 fijos y sin término terminal adicional, una curva estacionaria satisface Euler–Lagrange en el interior y

$$p_a(t_1) = \frac{\partial L}{\partial \dot q^a}(t_1) = 0$$

para toda componente final libre. Estas condiciones también son suficientes para la estacionariedad de primera variación.

Demostración. Las pruebas de soporte interior producen Euler–Lagrange por la proposición 25.9. Entonces proposición 25.8 se reduce a $\sum_a p_a(t_1)\eta^a(t_1)$, porque la variación inicial se anula. Cada componente final libre puede variarse independientemente, por lo que su coeficiente debe ser cero. Recíprocamente, la ecuación interior y esas condiciones anulan toda la primera variación. □

Para una partícula libre, $p = m\dot{q}$. Si parte de una posición fija y puede terminar en cualquier punto a un tiempo dado sin coste final, la solución estacionaria tiene velocidad cero. Cambiar el problema de borde cambia las trayectorias seleccionadas. Los extremos móviles en tiempo y las condiciones de transversalidad requieren otra ampliación; aquí los tiempos permanecen fijos.

14. Multiplicadores y límites de la formulación

A veces conviene conservar coordenadas cartesianas redundantes y añadir las restricciones a la acción. Sea $A = \partial g/\partial r$ de rango completo, y usemos $L(r, \dot{r}, t)$ antes de eliminar vínculos.

Proposición 25.16 — Multiplicadores para vínculos holónomos regulares. Las trayectorias estacionarias de la acción restringida, con configuraciones extremas fijas y variaciones tangentes, satisfacen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = A^T\lambda(t), \qquad g(r,t) = 0.$$

Equivalentemente, son las ecuaciones de estacionariedad del funcional ampliado $\int [L + \sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha]dt$, variando r y los multiplicadores independientemente, con extremos de r fijos. Para el lagrangiano cartesiano natural, $A^T\lambda$ es la reacción ideal.

Demostración. La primera variación restringida es el negativo de la integral del residuo de Euler–Lagrange por una variación tangente. Usando una base local de tangentes y pruebas temporales de soporte interior, proposición 25.9 obliga a que ese residuo sea normal al conjunto de configuraciones en cada instante. Proposición 25.3 lo escribe como $A^T\lambda$. Recíprocamente, un residuo de esa forma tiene producto nulo con toda variación tangente. En el funcional ampliado, variar λ impone $g = 0$; variar r produce el residuo de L menos $A^T\lambda$, que debe anularse. Para $L = \sum_i m_i|\dot{\mathbf{r}}_i|^2/2 - V$, el residuo es $m\ddot{r} + \nabla V = m\ddot{r} - F$, identificando la reacción. □

El signo del multiplicador depende de cómo se escriba el término añadido y de cómo se defina cada g_α. La fuerza $A^T\lambda$ es la combinación que tiene significado mecánico.

Las restricciones no holónomas plantean una cuestión diferente. Para una relación de velocidades $\dot{z} - x\dot{y} = 0$, variar una familia de trayectorias que la satisfaga produce $\dot{\eta}_z - x\dot{\eta}_y - \dot{y}\eta_x = 0$.

En el modelo de d'Alembert asociado a esa restricción, se postulan desplazamientos virtuales con $\eta_z - x\eta_y = 0$. Derivar esta última condición produce $\dot{\eta}_z - x\dot{\eta}_y - \dot{x}\eta_y = 0$, distinta de la anterior en general. Por ello, extremar la acción entre curvas que satisfacen una restricción de velocidades y proyectar Newton con el modelo virtual correspondiente pueden dar ecuaciones diferentes. No trasladaremos proposición 25.11 ni proposición 25.16 a esos sistemas sin especificar el principio físico y las variaciones permitidas.

También un contacto unilateral tiene desplazamientos permitidos de un solo lado en la frontera. Las igualdades bilaterales de este capítulo deben adaptarse a condiciones de contacto y a restricciones de signo sobre las reacciones. Una cuerda puede tensar sin empujar; una superficie puede sostener sin atraer. El cálculo de una reacción debe comprobar después que el régimen supuesto es físicamente posible.

Con esas fronteras fijadas, la construcción queda disponible para el capítulo 26: parametrizar configuraciones, escribir la energía cinética completa, identificar fuerzas y potencial, y obtener la dinámica mediante proyección o acción estacionaria. Cada paso conserva una hipótesis y una operación que pueden revisarse por separado.

15. Ejercicios

Ejercicio 25.1 — Contar restricciones independientes.
En $\mathbb{R}^3$, considera $g_1 = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$ y $g_2 = 2x^2 + 2y^2 - 2\ell^2 = 0$, con $\ell > 0$. Calcula el rango y la dimensión del conjunto de configuraciones. Propón coordenadas locales.

Ejercicio 25.2 — Una tangente concreta.
Para $r(\theta) = (\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta)$, escribe δr y comprueba que es perpendicular al radio. ¿Todo vector perpendicular al radio puede representarse así?

Ejercicio 25.3 — Vínculo móvil y potencia.
Una cuenta permanece en una circunferencia de radio $\ell(t) > 0$ y recibe una reacción radial $R_r\mathbf{e}_r$. Calcula su trabajo virtual y su potencia real. Explica cómo pueden diferir.

Ejercicio 25.4 — Cancelación colectiva.
Dos masas cuelgan de los extremos de una cuerda ideal sobre una polea ideal fija. Con posiciones verticales y_1, y_2 positivas hacia abajo, se cumple $y_1 + y_2 = c$. Demuestra que la tensión total realiza trabajo virtual nulo, aunque cada término no lo haga.

Ejercicio 25.5 — Rozamiento en una guía.
Una cuenta se desliza por una recta con resistencia $-b\dot{q}$ a lo largo de la guía. ¿Puede eliminarse esa fuerza junto con la reacción normal invocando idealidad? Escribe el trabajo virtual resistente.

Ejercicio 25.6 — Equilibrio sobre un plano.
Una masa sobre un plano liso de ángulo $0 < \alpha < \pi/2$ recibe una fuerza tangencial P dirigida cuesta arriba. Usa trabajo virtual para hallar la condición de equilibrio y la reacción normal bajo gravedad uniforme.

Ejercicio 25.7 — Equilibrio y estabilidad del péndulo.
Con $V(\theta) = -mg\ell\cos\theta$, determina las configuraciones de equilibrio y clasifícalas mediante el segundo orden del potencial. Se supone una barra rígida que permite completar toda la circunferencia.

Ejercicio 25.8 — D'Alembert con una sola coordenada.
Deduce la ecuación del péndulo fijo directamente de la proposición 25.5, calculando la proyección de la aceleración sobre $r_{,\theta}$. Identifica el término centrípeto que desaparece.

Ejercicio 25.9 — Una fuerza horizontal.
Añade al péndulo fijo una fuerza horizontal $F(t)$ sobre la masa. Calcula su fuerza generalizada y la nueva ecuación angular. Comprueba las unidades.

Ejercicio 25.10 — Coordenadas polares.
Para una partícula plana con $r = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, $\rho > 0$, escribe T y las dos ecuaciones proyectadas para fuerzas generalizadas Q_ρ, Q_θ. Relaciónalas con la aceleración polar.

Ejercicio 25.11 — Soporte con aceleración constante.
En §7, supón $\ddot{a} = A$ constante. Busca una solución de ángulo constante con $|\theta| < \pi/2$ y determina qué ocurre con la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de ella.

Ejercicio 25.12 — Reacción que entrega energía.

Una guía vertical lisa prescribe $x = a(t)$ a una partícula libre de fuerza horizontal aplicada. Calcula la reacción horizontal y su potencia. Comprueba que coincide con la derivada de la energía cinética horizontal.

Ejercicio 25.13 — Partícula libre entre dos posiciones.

Para $L = m\dot{q}^2/2$, con $q(0) = q_0$, $q(\tau) = q_1$, demuestra que la recta uniforme es la única trayectoria estacionaria y que minimiza estrictamente la acción.

Ejercicio 25.14 — El signo del potencial.

Compara las ecuaciones producidas por $L_- = m\dot{q}^2/2 - kq^2/2$ y $L_+ = m\dot{q}^2/2 + kq^2/2$, con $m, k > 0$. Explica por qué cambiar el signo altera el modelo físico.

Ejercicio 25.15 — Una prueba aislada no basta.

En $[0, 1]$, toma $f(t) = t - 1/2$ y $\eta(t) = t(1-t)$. Demuestra que $\int_0^1 f\eta\, dt = 0$ aunque f no sea nula. Relaciónalo con la hipótesis «para toda variación» de la proposición 25.9.

Ejercicio 25.16 — Familia exactamente admisible.

Para la circunferencia del ejercicio 25.2, compara $r(\theta) + \varepsilon r_{,\theta}\eta$ con $r(\theta + \varepsilon\eta)$. Calcula la norma al cuadrado de la primera y explica por qué sólo la segunda respeta exactamente el vínculo.

Ejercicio 25.17 — Primera variación del oscilador.

Calcula δS para $L = m\dot{q}^2/2 - kq^2/2$ antes y después de integrar por partes. Separa el término de borde y la ecuación interior.

Ejercicio 25.18 — Muchas trayectorias con los mismos extremos.

Para el oscilador de frecuencia ω, impón $q(0) = q(\pi/\omega) = 0$. Halla todas las trayectorias estacionarias y calcula sus acciones.

Ejercicio 25.19 — Un problema de borde sin solución.

En el mismo intervalo del ejercicio 25.18, exige $q(0) = 0$ y $q(\pi/\omega) = 1$. Demuestra que no hay trayectoria estacionaria y explica por qué eso no contradice la existencia del problema inicial.

Ejercicio 25.20 — Dos signos arbitrariamente cerca.

Supón $\tau = 3\pi/(2\omega)$ en la acción del oscilador. Encuentra dos variaciones de extremos cero que produzcan cambios de acción de signos opuestos y calcula sus coeficientes cuadráticos.

Ejercicio 25.21 — Igualdad en la desigualdad de la proposición 25.12.

Verifica que $\eta(t) = c\sin(\pi t/\tau)$ alcanza la igualdad en la desigualdad de la proposición 25.12. Justifica que son todas las funciones que la alcanzan.

Ejercicio 25.22 — Gravedad y posiciones finales.

Para una partícula vertical con eje positivo hacia arriba, $L = m\dot{y}^2/2 - mgy$. Encuentra la trayectoria estacionaria entre $y(0) = y_0$ y $y(\tau) = y_1$. Demuestra que es un mínimo estricto de acción.

Ejercicio 25.23 — Una derivada total explícita.

Añade a un lagrangiano dG/dt con $G(q) = cq^2/2$. Calcula el término añadido, el cambio de acción y el cambio en $p = \partial L/\partial\dot{q}$. ¿Cambian las ecuaciones interiores?

Ejercicio 25.24 — Coste terminal y extremo libre.

Considera $J[q] = \int_0^\tau m\dot{q}^2/2\, dt + \gamma q(\tau)^2/2$, con $q(0) = q_0$, extremo final libre y $\gamma \geq 0$. Halla la condición natural y la trayectoria estacionaria. Aquí γ tiene unidades de masa por tiempo.

Ejercicio 25.25 — Multiplicador de una circunferencia.

Una partícula sin fuerzas aplicadas se mueve uniformemente sobre una circunferencia fija de radio ℓ, con rapidez v. Usa $g(r) = |r|^2 - \ell^2$ para hallar el multiplicador y la reacción. Interpreta su signo.

Ejercicio 25.26 — Resistencia mediante trabajo virtual.

Para el oscilador con fuerza resistente $Q^{\mathrm{nc}} = -b\dot{q}$, deduce de la identidad integral de §11 la ecuación amortiguada. Comprueba el balance energético.

Ejercicio 25.27 — Resorte con extremo móvil.

Una masa de posición absoluta q tiene potencial $V(q,t) = k[q-a(t)]^2/2$. Obtén su ecuación por Euler–Lagrange y transforma después a la coordenada relativa $z = q - a(t)$.

Ejercicio 25.28 — Dos clases distintas de variación.

En la restricción $\dot{z} - x\dot{y} = 0$, considera la trayectoria $x = t$, $y = z = 0$ en $[0,1]$. Toma $\eta_x = 0$, $\eta_y = t(1-t)$ y $\eta_z = t\eta_y$. Comprueba la condición virtual de d'Alembert y la condición obtenida al variar curvas admisibles. ¿Coinciden?

Ejercicio 25.29 — Una restricción singular.

Para $g(x,y) = x^2 + y^2 = 0$, calcula el Jacobiano en el origen y compara su núcleo con las direcciones de curvas que permanecen en el conjunto admisible. Explica qué hipótesis de la proposición 25.1 falla.

Ejercicio 25.30 — Una cuenta sobre una parábola.

Una cuenta de masa m se mueve sin rozamiento sobre la guía fija $y = ax^2$, con $a > 0$ y gravedad vertical. Usa $q = x$ para construir T, V, L, obtener la ecuación de movimiento y hallar la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor del vértice. Comprueba la ecuación mediante proyección de Newton.

16. Soluciones

Solución del ejercicio 25.1.

Las filas del Jacobiano son $(2x, 2y, 0)$ y $(4x, 4y, 0)$. Sobre el cilindro $x^2 + y^2 = \ell^2$, la primera nunca es nula y la segunda es su doble, así que el rango es uno. Hay dos coordenadas independientes, no una: el ángulo alrededor del eje y la altura z. Una parametrización local es $(\ell\cos\theta, \ell\sin\theta, z)$. La dimensión depende del rango efectivo, no del número de ecuaciones escritas.

Solución del ejercicio 25.2.

La variación es $\delta r = \ell(\cos\theta, \sin\theta)\delta\theta$. Su producto con r es $\ell^2(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\delta\theta = 0$. En el plano, el complemento del radio no nulo tiene dimensión uno y $r_{,\theta}$ es un vector no nulo de ese espacio. Por tanto todo vector perpendicular al radio es un múltiplo suyo y determina un único $\delta\theta$ local.

Solución del ejercicio 25.3.

A tiempo fijo, $\delta r = \ell\mathbf{e}_\theta\delta\theta$, de modo que $R\cdot\delta r = 0$. La velocidad real es $\dot{r} = \dot{\ell}\mathbf{e}_r + \ell\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$. Así la potencia radial es $R_r\dot{\ell}$. Puede ser positiva, negativa o nula según el sentido de la reacción y del cambio de radio. El movimiento prescrito del vínculo añade una componente que no pertenece a las variaciones de tiempo fijo.

Solución del ejercicio 25.4.

La cuerda inextensible impone $\delta y_1 + \delta y_2 = 0$. Con tensiones iguales T, cada fuerza tiene componente $-T$ en su coordenada positiva hacia abajo. El trabajo virtual total es $-T\delta y_1 - T\delta y_2 = 0$. Si $\delta y_1 \neq 0$, cada término es no nulo y se cancela con el otro. La igualdad de tensiones forma parte del modelo de cuerda y polea ideales.

Solución del ejercicio 25.5.

El desplazamiento virtual tangencial es δq y la resistencia aporta $\delta W_d = -b\dot{q}\,\delta q$. Para una velocidad no nula, esta expresión no se anula para todas las variaciones. La reacción normal de una guía lisa sí puede eliminarse, pero la resistencia debe permanecer en la fuerza generalizada. Confundir ambas fuerzas suprimiría la disipación y produciría una ecuación conservativa incorrecta.

Solución del ejercicio 25.6.

Tomamos una variación tangencial positiva cuesta arriba. El trabajo aplicado es $(P - mg\sin\alpha)\delta q$. Como δq puede tener ambos signos, el equilibrio exige $P = mg\sin\alpha$. La proyección normal de Newton en equilibrio da $N = mg\cos\alpha$, positiva. La fuerza aplicada es tangencial y no modifica ese balance. La positividad comprueba que el plano puede sostener el contacto supuesto.

Solución del ejercicio 25.7.

La derivada es $V' = mg\ell\sin\theta$, que se anula en $\theta = n\pi$. En los puntos inferiores, $\theta = 2n\pi$, $V'' = mg\ell > 0$: hay mínimos no degenerados y estabilidad energética. En los superiores, $\theta = (2n+1)\pi$, $V'' = -mg\ell < 0$: son máximos inestables. La barra permite reacciones radiales de ambos signos; una cuerda flexible exigiría comprobar además que su tensión no se haga negativa.

Solución del ejercicio 25.8.

La aceleración es $\ddot{r} = \ell\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - \ell\dot\theta^2\mathbf{e}_r$. Como $r_{,\theta} = \ell\mathbf{e}_\theta$, su producto vale $\ell^2\ddot\theta$. El término centrípeto es radial y su proyección tangencial es cero. D'Alembert queda $[-mg\ell\sin\theta - m\ell^2\ddot\theta]\delta\theta = 0$ para todo $\delta\theta$. Por tanto $\ddot\theta + (g/\ell)\sin\theta = 0$.

Solución del ejercicio 25.9.

La fuerza horizontal es $(F(t), 0)$ y su fuerza generalizada es $F(t)\ell\cos\theta$. Añadiendo gravedad, $m\ell^2\ddot\theta = -mg\ell\sin\theta + F(t)\ell\cos\theta$. Cada término tiene unidades de torque. La coordenada angular es adimensional y el producto de fuerza generalizada por variación angular tiene unidades de trabajo. El factor $\cos\theta$ es la proyección de la fuerza sobre la tangente y cambia al variar la configuración.

Solución del ejercicio 25.10.

La rapidez al cuadrado es $\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2$, por lo que $T = m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2)/2$. Proposición 25.7 produce

$$m(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2) = Q_\rho, \qquad m(\rho^2\ddot\theta + 2\rho\dot\rho\dot\theta) = Q_\theta.$$

Aquí $Q_\rho = F_r$ y $Q_\theta = \rho F_\theta$. Dividir la segunda por $\rho > 0$ da la componente tangencial $m(\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta) = F_\theta$. La restricción $\rho > 0$ evita la singularidad de la carta polar en el origen.

Solución del ejercicio 25.11.

La ecuación para ángulo constante es $A\cos\theta_* + g\sin\theta_* = 0$. En el intervalo indicado, $\tan\theta_* = -A/g$. Escribiendo $G = \sqrt{g^2 + A^2}$, se tiene $\cos\theta_* = g/G$ y $\sin\theta_* = -A/G$. Para $\theta = \theta_* + u$, el coeficiente lineal restaurador es $[g\cos\theta_* - A\sin\theta_*]/\ell = G/\ell$. Así la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones es $\sqrt{G/\ell}$. La aceleración del soporte modifica la dirección y el módulo de la gravedad efectiva en su marco.

Solución del ejercicio 25.12.

La coordenada horizontal satisface $\ddot x = \ddot a$. Como no hay otra fuerza horizontal, $R_x = m\ddot a$. La potencia de esa reacción es $R_x\dot x = m\ddot a\dot a = d(m\dot a^2/2)/dt$. Las variaciones virtuales de la guía tienen $\delta x = 0$, por lo que el trabajo virtual horizontal sigue siendo cero. El actuador que mueve la guía aporta o retira energía según el signo de la potencia.

Solución del ejercicio 25.13.

Euler–Lagrange da $\ddot q = 0$. Los extremos fijan $q_*(t) = q_0 + (q_1 - q_0)t/\tau$, única solución afín compatible. Para cualquier curva $q = q_* + \eta$ con extremos iguales,

$$S[q] - S[q_*] = m\dot q_* \int_0^\tau \dot\eta\, dt + \frac{m}{2}\int_0^\tau \dot\eta^2 dt = \frac{m}{2}\int_0^\tau \dot\eta^2 dt.$$

La integral es positiva salvo que $\dot\eta = 0$ en todo el intervalo. Con extremos cero eso exige $\eta = 0$. Por tanto el mínimo es estricto entre las curvas admisibles.

Solución del ejercicio 25.14.

Para L_-, $\partial L_-/\partial q = -kq$ y $d(\partial L_-/\partial \dot q)/dt = m\ddot q$, así que $m\ddot q + kq = 0$. Para L_+ resulta $m\ddot q - kq = 0$, con soluciones exponenciales. El potencial físico del segundo lagrangiano natural es $-kq^2/2$, que tiene un máximo en el origen. El signo cambia una fuerza restauradora por una fuerza que aleja del equilibrio; no es una convención inofensiva.

Solución del ejercicio 25.15.

Al sustituir $u = 1 - t$, la función η conserva su valor y f cambia de signo. Por tanto la integral es igual a su opuesto y vale cero. Sin embargo, $f(0) = -1/2$ y $f(1) = 1/2$. Una prueba de simetría puede ocultar un coeficiente no nulo. Proposición 25.9 utiliza todas las pruebas localizadas; elegir una apoyada en un intervalo donde $f > 0$ daría una integral positiva y detectaría inmediatamente el fallo.

Solución del ejercicio 25.16.

Como $|r|^2 = |r_{,\theta}|^2 = \ell^2$ y $r \cdot r_{,\theta} = 0$,

$$|r + \varepsilon r_{,\theta}\eta|^2 = \ell^2 + \varepsilon^2 \ell^2 \eta^2.$$

La familia lineal cartesiana abandona la circunferencia para $\varepsilon\eta \neq 0$. En cambio, $|r(\theta + \varepsilon\eta)|^2 = \ell^2$ exactamente. Sus derivadas respecto de ε en cero coinciden, de modo que producen el mismo desplazamiento virtual de primer orden. La familia exacta contiene los términos de orden superior necesarios para permanecer en el vínculo.

Solución del ejercicio 25.17.

Antes de integrar por partes, $\delta S = \int_0^\tau (m\dot q\dot\eta - kq\eta)dt$.

Después,

$$\delta S = [m\dot q\eta]_0^\tau - \int_0^\tau (m\ddot q + kq)\eta\, dt.$$

Con extremos fijos el primer término se anula. La arbitrariedad de η obliga a $m\ddot q + kq = 0$. Mantener visibles el borde y el signo de la integral permite reutilizar el cálculo cuando cambian las condiciones extremas.

Solución del ejercicio 25.18.

Toda solución con posición inicial cero es $q = B\sin\omega t$. En $\tau = \pi/\omega$, el extremo final es cero para cualquier B. Su lagrangiano es $mB^2\omega^2(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t)/2$, cuya integral en ese intervalo vale cero. Todas las acciones son iguales a cero. Por proposición 25.12 son mínimos no estrictos; la dirección sinusoidal une una familia continua de trayectorias con la misma acción y los mismos extremos.

Solución del ejercicio 25.19.

Con $q(0) = 0$, la solución tiene forma $B\sin\omega t$ y necesariamente termina en cero a tiempo π/ω. No puede terminar en uno. Proposición 25.10 excluye entonces toda trayectoria estacionaria de clase C^2 con esos extremos. Para cualquier velocidad inicial existe una solución única, pero todas las que parten de posición cero regresan a esa posición en ese tiempo. El problema inicial existe; la posición final solicitada es incompatible con él.

Solución del ejercicio 25.20.

Tomamos $\eta_1 = \sin(\pi t/\tau)$ y $\eta_2 = \sin(2\pi t/\tau)$. Para η_n, la identidad exacta da

$$S[q + \varepsilon\eta_n] - S[q] = \frac{m\varepsilon^2\tau}{4}\left[\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2\right].$$

Con $\tau = 3\pi/(2\omega)$, el corchete es $-5\omega^2/9$ para $n = 1$ y $7\omega^2/9$ para $n = 2$. Por tanto los cambios son $-5m\varepsilon^2\tau\omega^2/36$ y $7m\varepsilon^2\tau\omega^2/36$. Ambos signos persisten al hacer ε tan pequeño como se quiera.

Solución del ejercicio 25.21.

La sustitución directa da $\int \dot\eta^2 = (\pi/\tau)^2 \int \eta^2$, pues las integrales de seno y coseno al cuadrado son ambas $\tau/2$. Para la necesidad, la identidad del cuadrado de la proposición 25.12 exige $\dot\eta - \alpha\cot(\alpha t)\eta = 0$ en el interior: el integrando es no negativo y continuo allí. Esto equivale a $d[\eta/\sin(\alpha t)]/dt = 0$. El cociente es constante y $\eta = c\sin(\alpha t)$; los extremos se satisfacen por continuidad.

Solución del ejercicio 25.22.

La ecuación es $\ddot y = -g$. Las posiciones extremas dan

$$y_*(t) = y_0 + \Big(\frac{y_1 - y_0}{\tau} + \frac{g\tau}{2}\Big)\, t - \frac{g}{2}t^2.$$

Para una perturbación η de extremos cero, el término lineal en la acción se anula porque y_* satisface Euler–Lagrange. El potencial es lineal, así que el cambio restante es $m\int \dot\eta^2/2$, positivo salvo para $\eta = 0$. La aceleración gravitatoria modifica la trayectoria estacionaria, pero no la positividad de esa diferencia cuadrática.

Solución del ejercicio 25.23.

El término añadido es $cq\dot q$. Su integral es $c[q(\tau)^2 - q(0)^2]/2$, constante para extremos fijos. El momento pasa de p a $p' = p + cq$. Su derivada añade $c\dot q$ y la derivada de L' respecto de q añade el mismo $c\dot q$; se cancelan en Euler–Lagrange. El momento conjugado depende de esta elección de lagrangiano, mientras las ecuaciones interiores permanecen iguales.

Solución del ejercicio 25.24.

La primera variación interior produce $\ddot q = 0$. En el extremo final aparecen $m\dot q(\tau)\eta(\tau) + \gamma q(\tau)\eta(\tau)$, de modo que la condición natural es $m\dot q(\tau) + \gamma q(\tau) = 0$. Escribiendo $q = q_0 + vt$,

$$v = -\frac{\gamma q_0}{m + \gamma\tau}, \qquad q(\tau) = \frac{m q_0}{m + \gamma\tau}.$$

El denominador es positivo para $m > 0$, $\gamma \geq 0$, por lo que la trayectoria es única. La condición $p(\tau) = 0$ de la proposición 25.15 se modifica porque aquí sí existe un término terminal adicional.

Solución del ejercicio 25.25.

El gradiente de g es $2r$. La aceleración circular uniforme es $\ddot r = -(v^2/\ell^2)r$. La ecuación con multiplicador da $m\ddot r = 2\lambda r$, por lo que $\lambda = -mv^2/(2\ell^2)$. Así $R = 2\lambda r = -mv^2 r/\ell^2$, dirigida al centro. El signo negativo corresponde a haber escrito $g = |r|^2 - \ell^2$ y $L + \lambda g$; cambiar g por su opuesto invertiría λ sin cambiar la reacción.

Solución del ejercicio 25.26.

Por ejercicio 25.17, con extremos fijos,

$$\delta S + \int_0^\tau (-b\dot q)\eta\, dt = -\int_0^\tau (m\ddot q + kq + b\dot q)\eta\, dt.$$

Proposición 25.9 da $m\ddot q + b\dot q + kq = 0$. Multiplicar por $\dot q$ muestra $d(m\dot q^2/2 + kq^2/2)/dt = -b\dot q^2$. La fuerza resistente aparece con el signo disipativo correcto; no procede de extremar sin más la acción conservativa.

Solución del ejercicio 25.27.

En coordenada absoluta, $L = m\dot q^2/2 - k[q - a(t)]^2/2$ y Euler–Lagrange da $m\ddot q + k[q - a(t)] = 0$. Con $q = z + a(t)$ resulta $m\ddot z + kz = -m\ddot a$. El mismo resultado se obtiene sustituyendo primero en L: la energía cinética se convierte en $m(\dot z + \dot a)^2/2$. Su término cruzado es necesario para obtener la excitación $-m\ddot a$. Eliminarlo sin compensación cambiaría la ecuación.

Solución del ejercicio 25.28.

La trayectoria cumple la restricción porque $\dot{y} = \dot{z} = 0$. La variación propuesta satisface $\eta_z - x\eta_y = t\eta_y - t\eta_y = 0$, así que pertenece a las direcciones virtuales postuladas por d'Alembert. Pero la condición linealizada de una familia de trayectorias admisibles da $\dot{\eta}_z - t\dot{\eta}_y - 0\eta_x = \eta_y = t(1-t)$,

no nula en el interior. Por tanto esa variación virtual no es tangente a una familia que satisfaga la restricción de velocidades. Ambas elecciones de variaciones contienen información distinta; su confusión cambia el principio que se está aplicando.

Solución del ejercicio 25.29.

El Jacobiano en $(0,0)$ es la fila nula, cuyo núcleo es todo $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, el conjunto admisible consta únicamente del origen. Toda curva que permanece en él es constante y tiene derivada cero, así que su único vector tangente es el nulo. La hipótesis de rango regular falla: el rango cae en el punto considerado y el núcleo del Jacobiano ya no describe las direcciones reales del conjunto. No se puede usar allí la cuenta de grados de libertad de la proposición 25.1.

Solución del ejercicio 25.30.

La parametrización es $r = (q, aq^2)$ y su velocidad $\dot{r} = (\dot{q}, 2aq\dot{q})$. Por tanto

$$T = \frac{m}{2}(1 + 4a^2q^2)\dot{q}^2, \qquad V = mgaq^2, \qquad L = T - V.$$

Se tiene $\partial L/\partial \dot{q} = m(1 + 4a^2q^2)\dot{q}$. Su derivada temporal es $m(1 + 4a^2q^2)\ddot{q} + 8ma^2q\dot{q}^2$, mientras $\partial L/\partial q = 4ma^2q\dot{q}^2 - 2mgaq$. Así $m(1 + 4a^2q^2)\ddot{q} + 4ma^2q\dot{q}^2 + 2mgaq = 0$.

Para comprobarla con Newton, $r_{,q} = (1, 2aq)$ y $\ddot{r} = (\ddot{q}, 2a\dot{q}^2 + 2aq\ddot{q})$. Su producto vale $(1 + 4a^2q^2)\ddot{q} + 4a^2q\dot{q}^2$. La gravedad proyectada da $-2mgaq$ y la reacción normal se elimina, reproduciendo la ecuación. Cerca del vértice, los términos lineales son $m\ddot{q} + 2mgaq = 0$, con frecuencia angular $\sqrt{2ga}$. Como a tiene unidades de longitud inversa, ga tiene unidades de tiempo inverso al cuadrado.

Notas y lecturas

1. La formulación mediante acción y coordenadas puede contrastarse con David Tong, *Classical Dynamics*, capítulo 2, §§2.1–2.3, en los apuntes oficiales de University of Cambridge. Capítulo en línea. Aquí se conservan explícitamente las condiciones de regularidad, las variaciones admisibles y los términos de borde que intervienen en las demostraciones.
2. La expresión «principio de mínima acción» suele utilizarse como denominación histórica. En este capítulo el enunciado matemático es de acción estacionaria. Proposición 25.12 muestra con un cálculo completo que el oscilador puede tener un mínimo o un punto de silla según el intervalo temporal.
3. El principio de Hamilton formulado aquí fija los tiempos extremos y permite variar las curvas entre configuraciones extremas dadas. Otros principios variacionales de la mecánica pueden fijar energía, variar tiempos o imponer condiciones de frontera diferentes. Sus clases de comparación deben declararse antes de identificarlos entre sí.

Capítulo 26

Mecánica lagrangiana

Un péndulo sujeto a una pared y otro instalado sobre un carro tienen la misma barra y la misma masa suspendida. Sin embargo, al oscilar, el segundo puede desplazar su apoyo. La inercia del carro entra en la ecuación angular y modifica la frecuencia. Para distinguir ambos problemas hay que decidir qué posiciones son desconocidas y qué movimientos se imponen desde fuera.

El lagrangiano permite conservar esa decisión dentro del cálculo. Las coordenadas describen los movimientos independientes; la energía cinética recoge cómo contribuye cada uno a las velocidades físicas; el potencial contiene las fuerzas conservativas. Las ecuaciones del capítulo 25 convierten esos datos en aceleraciones. Un término cruzado en la energía cinética puede representar el movimiento del apoyo, y eliminarlo puede cambiar el aparato que se está describiendo.

Desarrollaremos este método hasta obtener sistemas completos de ecuaciones y comprobar su equivalencia con Newton. También estudiaremos qué permite despejar las aceleraciones, cómo se transforman las ecuaciones al cambiar de coordenadas y cuándo la función de energía lagrangiana coincide con la energía mecánica del sistema observado.

Se presuponen la construcción variacional del capítulo 25, el álgebra lineal del capítulo 24 y las ecuaciones diferenciales elementales. Las simetrías y el teorema de Noether se tratarán sistemáticamente en el capítulo 27; aquí las identidades conservadas que aparezcan se comprobarán directamente en las ecuaciones.

1. Construir el modelo antes de derivar

Sean $q = (q^1, \dots, q^n)$ coordenadas locales independientes de un sistema de partículas con vínculos holónomos regulares. Sus posiciones son $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i(q,t)$ y sus velocidades

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_a \mathbf{R}_{i,a}\dot{q}^a + \mathbf{R}_{i,t}.$$

La dependencia explícita del tiempo describe geometría prescrita, como un soporte cuya posición se conoce de antemano. Una coordenada desconocida de un soporte libre, en cambio, debe incluirse entre las componentes de q.

Definición 26.1 — Lagrangiano mecánico. Para masas constantes $m_i > 0$, potencial $V(q,t)$ sin dependencia de velocidades y vínculos ideales, el lagrangiano mecánico es $L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t)$, donde $T = \sum_i m_i|\dot{\mathbf{r}}_i|^2/2$. Si hay fuerzas aplicadas adicionales, se representan mediante sus componentes de trabajo virtual Q_a.

Proposición 26.1 — Ecuaciones mecánicas y alcance. Bajo esas hipótesis, las trayectorias satisfacen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = Q_a.$$

Estas ecuaciones, junto con la parametrización de los vínculos, equivalen a Newton con las reacciones ideales correspondientes, dentro de la región regular elegida.

Demostración. El trabajo virtual de las fuerzas de potencial es $-\sum_a V_{,a}\delta q^a$, y el de las adicionales es $\sum_a Q_a\delta q^a$. La identidad cinética del capítulo 25 identifica la proyección de la inercia con $d(T_{,\dot q^a})/dt - T_{,a}$. D'Alembert anula cada coeficiente de las variaciones independientes. Reagrupar el potencial da la ecuación indicada. La reconstrucción normal de las reacciones del capítulo 25 completa la equivalencia inversa. □

La fórmula no determina por sí sola si un contacto es ideal, una cuerda está tensa o una guía admite una parametrización regular. Esas propiedades se deciden al construir el modelo y se comprueban después cuando la solución puede abandonar el régimen supuesto.

2. La matriz cinética que se esconde en las velocidades

Al expandir las velocidades cartesianas aparece

$$T = \frac{1}{2}\sum_{a,b} G_{ab}(q,t)\dot q^a\dot q^b + \sum_a a_a(q,t)\dot q^a + c(q,t),$$

donde

$$G_{ab} = \sum_i m_i \mathbf{R}_{i,a}\cdot\mathbf{R}_{i,b},\quad a_a = \sum_i m_i\mathbf{R}_{i,a}\cdot\mathbf{R}_{i,t},\quad c = \frac{1}{2}\sum_i m_i|\mathbf{R}_{i,t}|^2.$$

Definición 26.2 — Matriz cinética y momento conjugado. La matriz G es la matriz de la parte cuadrática de la energía cinética en las velocidades generalizadas. El momento conjugado a q^a es $p_a = \partial L/\partial\dot q^a$. En el modelo anterior, $p = G\dot q + a$.

Proposición 26.2 — Positividad cinética. Si la parametrización tiene rango completo y todas las masas son positivas, G es simétrica definida positiva. En particular, es invertible.

Demostración. La simetría se sigue del producto escalar. Para cualquier columna $u \neq 0$,

$$u^T G u = \sum_i m_i \left|\sum_a \mathbf{R}_{i,a}u^a\right|^2.$$

Si el valor fuera cero, cada suma vectorial sería cero. El Jacobiano de la parametrización anularía a u, contradiciendo su rango completo. Por tanto el valor es positivo. □

Para una geometría fija, $\mathbf{R}_{i,t} = 0$ y desaparecen a y c. La energía cinética es entonces homogénea cuadrática en $\dot q$, aunque sus coeficientes dependan de la posición. En una geometría móvil no hay motivo para eliminar los términos restantes.

El momento conjugado no es siempre una componente cartesiana del momento lineal. En coordenadas polares, $p_\theta = mr^2\dot\theta$ tiene unidades de momento angular. En un péndulo con soporte móvil puede incluir también la velocidad del soporte.

3. Cuándo las ecuaciones determinan las aceleraciones

Para un lagrangiano general diferenciable, derivar $\partial L/\partial\dot q^a$ produce términos proporcionales a las aceleraciones. Su matriz de coeficientes es el Hessiano respecto de las velocidades.

Definición 26.3 — Lagrangiano regular. Llamamos regular a L en una región si la matriz $W_{ab} = \partial^2 L/(\partial\dot q^a\partial\dot q^b)$ es invertible allí. Para el lagrangiano mecánico de §2, $W = G$.

Proposición 26.3 — Forma normal y existencia local. Supongamos L de clase C^3, fuerzas $Q(q,\dot q,t)$ de clase C^1 y W invertible cerca de un dato inicial. Las ecuaciones lagrangianas se pueden escribir como $\ddot q = f(q,\dot q,t)$ con f localmente C^1. Por tanto determinan una solución local única para cada dato inicial de esa región.

Demostración. La regla de la cadena da

$$\sum_b W_{ab}\ddot q^b = Q_a + L_{,q^a} - \sum_b L_{,\dot q^a q^b}\dot q^b - L_{,\dot q^a t}.$$

Multiplicar por W^{-1} despeja las aceleraciones. Las hipótesis hacen que el resultado sea C^1 localmente. Al introducir $v=\dot q$, queda el sistema de primer orden $\dot q = v$, $\dot v = f(q,v,t)$, al que se aplica el teorema de existencia y unicidad local de EDO. □

La conclusión es local. Una solución puede salir de la carta de coordenadas, alcanzar un contacto distinto o crecer sin cota. Tampoco una matriz singular significa siempre una imposibilidad física: las coordenadas polares son singulares en el origen aunque una partícula cartesiana lo atraviese sin dificultad. Hay que distinguir una carta defectuosa de un lagrangiano físicamente degenerado.

En el caso fijo $L = \tfrac12 G_{ab}(q)\dot q^a\dot q^b - V(q)$, la expansión anterior se organiza como

$$\sum_b G_{ab}\ddot q^b + \sum_{b,c}\Gamma_{abc}\dot q^b\dot q^c + V_{,a} = Q_a,$$

$$\Gamma_{abc} = \frac12(\partial_b G_{ac} + \partial_c G_{ab} - \partial_a G_{bc}).$$

Esta expresión se obtiene derivando el término cuadrático y agrupando los productos simétricos $\dot q^b\dot q^c$. Los términos de velocidad pueden surgir de la geometría de las coordenadas, incluso sin fuerzas dependientes de velocidad.

4. Cambiar coordenadas sin cambiar la dinámica

Sea $q = f(Q,t)$ un cambio local invertible, con Jacobiano $J^a{}_\alpha = \partial f^a/\partial Q^\alpha$. Las velocidades se transforman como $\dot q = J\dot Q + f_t$. El nuevo lagrangiano se obtiene sustituyendo ambos argumentos:

$$\widetilde L(Q,\dot Q,t) = L(f(Q,t), J\dot Q + f_t, t).$$

Proposición 26.4 — Transformación de las ecuaciones. Si $\mathcal E_a(L) = d(L_{,\dot q^a})/dt - L_{,q^a}$, entonces

$$\mathcal E_\alpha(\widetilde L) = \sum_a J^a{}_\alpha \mathcal E_a(L), \qquad \widetilde Q_\alpha = \sum_a J^a{}_\alpha Q_a.$$

Además, $\widetilde W = J^T W J$, por lo que la regularidad se conserva bajo cambios de coordenadas invertibles.

Demostración. Al derivar respecto de $\dot Q^\alpha$ se obtiene $\widetilde L_{,\dot Q^\alpha} = \sum_a L_{,\dot q^a} J^a{}_\alpha$. Su derivada temporal contiene $\sum_a \dot p_a J^a{}_\alpha + p_a \dot J^a{}_\alpha$. La derivada de $\widetilde L$ respecto de Q^α contiene $\sum_a L_{,q^a}J^a{}_\alpha$ y $\sum_a p_a \partial\dot q^a/\partial Q^\alpha$. La igualdad de derivadas mixtas implica $\partial\dot q^a/\partial Q^\alpha = \dot J^a{}_\alpha$ y cancela esos términos. El trabajo virtual $\sum_a Q_a\delta q^a$ se transforma mediante $\delta q = J\delta Q$, dando la segunda fórmula. Una derivada adicional respecto de velocidades da la congruencia de los Hessianos. □

La transformación temporal permite trabajar en una referencia móvil, siempre que se conserve la energía cinética resultante de la sustitución. Escribir de nuevo una energía de partícula libre sin los términos inducidos por el cambio equivaldría a proponer otro modelo.

5. Recuperar Newton en coordenadas polares

Para una partícula plana, con $r>0$ y potencial central $V(r)$, $L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)-V(r)$.

Proposición 26.5 — Ecuaciones centrales. Las ecuaciones lagrangianas son

$$m\ddot r - mr\dot\theta^2 + V'(r)=0, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot\theta)=0.$$

Equivalen a las componentes radial y tangencial de Newton en la región $r>0$.

Demostración. Para r, las derivadas son $L_{,\dot r}=m\dot r$ y $L_{,r}=mr\dot\theta^2-V'$. Para θ, $L_{,\theta}=0$ y $L_{,\dot\theta}=mr^2\dot\theta$. Al expandir la segunda ecuación y dividir por $r>0$ aparece $m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)=0$. La primera da $m(\ddot r-r\dot\theta^2)=-V'$. Son las aceleraciones polares ya utilizadas en el capítulo 15–I17. $\square$

El momento conjugado angular coincide aquí con el momento angular sobre el origen. Sustituir su valor constante en la ecuación radial recupera el potencial efectivo del capítulo 17. Las coordenadas simplifican las fuerzas centrales porque el potencial depende de una sola de ellas, mientras la energía cinética conserva el acoplamiento geométrico $r^2\dot\theta^2$.

6. El péndulo doble y su matriz de aceleraciones

Sean dos masas puntuales $m_1,m_2>0$, barras rígidas sin masa de longitudes $\ell_1,\ell_2>0$ y un apoyo fijo. Los ángulos θ_1,θ_2 se miden desde la vertical descendente y son absolutos, no relativos entre las barras. Las posiciones son

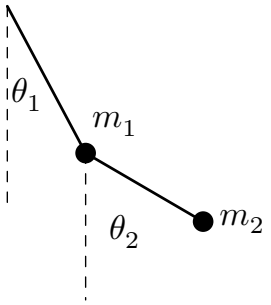


Figura 26.1. Los dos ángulos se miden respecto de la vertical descendente. La segunda masa depende de ambos: $x_2=\ell_1\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_2$, $y_2=-\ell_1\cos\theta_1-\ell_2\cos\theta_2$. Véase §6.

$$\mathbf{r}_1=(\ell_1\sin\theta_1,-\ell_1\cos\theta_1), \qquad \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1+(\ell_2\sin\theta_2,-\ell_2\cos\theta_2).$$

Con $\delta=\theta_1-\theta_2$, expandir las velocidades da

$$T=\frac12(m_1+m_2)\ell_1^2\dot\theta_1^2+\frac12 m_2\ell_2^2\dot\theta_2^2+m_2\ell_1\ell_2\cos\delta\,\dot\theta_1\dot\theta_2,$$

$$V=-(m_1+m_2)g\ell_1\cos\theta_1-m_2g\ell_2\cos\theta_2.$$

Proposición 26.6 — Ecuaciones del péndulo doble. Con $B=m_2\ell_1\ell_2\cos\delta$, las ecuaciones son

$$(m_1+m_2)\ell_1^2\ddot\theta_1+B\ddot\theta_2+m_2\ell_1\ell_2\sin\delta\,\dot\theta_2^2+(m_1+m_2)g\ell_1\sin\theta_1=0,$$

$$B\ddot\theta_1+m_2\ell_2^2\ddot\theta_2-m_2\ell_1\ell_2\sin\delta\,\dot\theta_1^2+m_2g\ell_2\sin\theta_2=0.$$

Su matriz cinética es definida positiva para todos los ángulos.

Demostración. El primer momento es $p_1 = (m_1 + m_2)\ell_1^2\dot\theta_1 + B\dot\theta_2$. Al derivarlo aparece $-m_2\ell_1\ell_2 \sin\delta(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)\dot\theta_2$. La derivada de T respecto de θ_1 es $-m_2\ell_1\ell_2\sin\delta\dot\theta_1\dot\theta_2$; al restarla queda el término positivo en $\dot\theta_2^2$. El segundo momento se trata del mismo modo y deja el término negativo en $\dot\theta_1^2$. Añadir las derivadas del potencial produce las ecuaciones. La primera entrada diagonal de G es positiva y

$$\det G = m_2\ell_1^2\ell_2^2(m_1 + m_2\sin^2\delta) > 0.$$

El criterio de positividad para matrices simétricas de orden dos completa la prueba. □

Las dos aceleraciones deben despejarse juntas. Tratar el término $B\ddot\theta_2$ como una fuerza conocida antes de resolver el sistema introduciría una dependencia circular. Conservar la forma matricial permite ver la regularidad y facilita el cálculo numérico sin expandir cocientes extensos.

7. Un apoyo que también es una incógnita

Un carro de masa $M > 0$ puede moverse horizontalmente y sostiene un péndulo de masa $m > 0$ y longitud ℓ. Sus coordenadas son la posición x del carro y el ángulo θ desde abajo. La masa suspendida tiene posición $(x + \ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$.

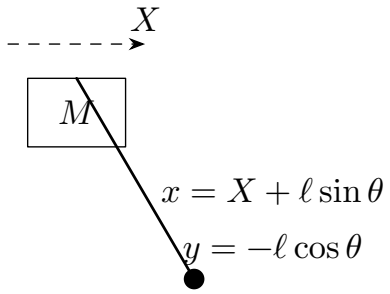


Figura 26.2. Para un péndulo sobre un carro, la posición de la masa es $(X + \ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$. Al derivarla aparece un término cinético cruzado proporcional a $\dot X\dot\theta\cos\theta$. Las coordenadas no generan energías cinéticas independientes. Véase §7.

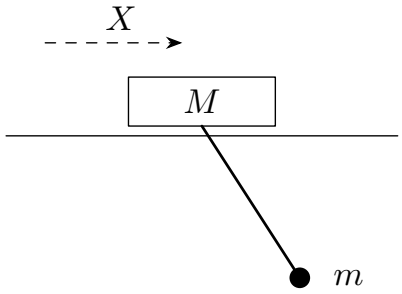


Figura 26.3. La posición del péndulo combina el desplazamiento del carro y su ángulo: $x = X + \ell\sin\theta$. Si el carro es libre, X es una coordenada dinámica y no un dato prescrito. Véase §7.

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot x^2 + m\ell\cos\theta\dot x\dot\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2, \qquad V = -mg\ell\cos\theta.$$

Proposición 26.7 — Ecuaciones del carro y péndulo. Si una fuerza horizontal $F(t)$ actúa sobre el carro, las ecuaciones son

$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\cos\theta\ddot{\theta} - m\ell\sin\theta\dot{\theta}^2 = F(t),$$

$$m\ell\cos\theta\ddot{x} + m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0.$$

La matriz de aceleraciones tiene determinante $m\ell^2(M + m\sin^2\theta) > 0$.

Demostración. Derivar $p_x = (M+m)\dot{x}+m\ell\cos\theta\dot{\theta}$ da la primera ecuación porque L no depende de x. Para θ, los términos cruzados en $\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$ se cancelan al restar $L_{,\theta}$ y queda la segunda. Calcular el determinante prueba la regularidad. La fuerza aplicada realiza trabajo virtual $F\delta x$, de modo que no añade un término generalizado en la ecuación angular. □

Si se prescribe $x = a(t)$, se obtiene el péndulo excitado del capítulo 25 y la primera ecuación determina la fuerza que debe ejercer el actuador. Si el carro está libre, ambas ecuaciones forman parte de la dinámica. Prescribir una función y resolver una coordenada son decisiones físicas diferentes.

Para $F = 0$ y pequeñas oscilaciones alrededor de abajo, la primera ecuación lineal da $(M+m)\ddot{x}+m\ell\ddot{\theta} = 0$. Eliminar $\ddot{x}$ de la segunda produce $\ddot{\theta} + \frac{(M+m)g}{M\ell}\theta = 0$.

Además hay un movimiento de traslación común de frecuencia cero. La frecuencia angular oscilatoria es mayor que la del péndulo con apoyo fijo y tiende a $\sqrt{g/\ell}$ cuando $M \to \infty$. La energía cinética del movimiento interno se modifica porque el apoyo retrocede.

8. Una guía que gira mediante un motor

Un aro vertical de radio ℓ gira alrededor de su diámetro vertical con velocidad angular prescrita Ω. Una cuenta de masa m se desliza sin rozamiento. Con θ medido desde el punto inferior, su posición inercial es

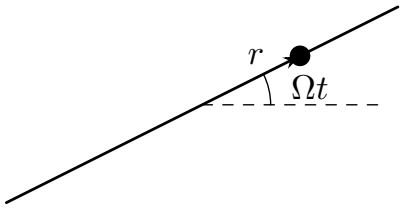


Figura 26.4. Para una guía que gira con ángulo prescrito Ωt, la cuenta tiene posición $(r\cos\Omega t, r\sin\Omega t)$. La coordenada radial es dinámica y la orientación viene impuesta por el motor. Véase §8.

$$\mathbf{r} = (\ell\sin\theta\cos\Omega t, \ell\sin\theta\sin\Omega t, -\ell\cos\theta).$$

La rapidez al cuadrado es $\ell^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2\theta)$ y

$$L = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}\sin^2\theta + mg\ell\cos\theta.$$

Proposición 26.8 — Movimiento reducido y trabajo del motor. La cuenta satisface

$$\ddot{\theta} = \Omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta.$$

La cantidad

$$\mathcal{I} = \frac{m\ell^2}{2}\dot\theta^2 - \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}\sin^2\theta - mg\ell\cos\theta$$

se conserva, pero la energía mecánica inercial de la cuenta,

$$E_{\text{mec}} = \frac{m\ell^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}\sin^2\theta - mg\ell\cos\theta,$$

satisface $\dot E_{\text{mec}} = 2m\ell^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta\dot\theta$.

Demostración. Derivar L respecto de θ y $\dot\theta$ da la ecuación. Multiplicarla por $m\ell^2\dot\theta$ permite reconocer $d\mathcal{I}/dt = 0$. La diferencia $E_{\text{mec}} - \mathcal{I} = m\ell^2\Omega^2\sin^2\theta$ da la potencia indicada al derivar. □

La componente vertical del momento angular de la cuenta es $H_z = m\ell^2\Omega\sin^2\theta$. Su derivada es el torque vertical que transmite la guía. La potencia del mecanismo que mantiene la rotación es $\Omega\dot H_z$, igual a la variación de E_{mec}. El balance coincide con la reacción ideal que puede hacer trabajo real en el capítulo 25.

La función $V_{\text{ef}} = -m\ell^2\Omega^2\sin^2\theta/2 - mg\ell\cos\theta$ permite estudiar el movimiento reducido como un problema de un grado de libertad. Si $\Omega^2 < g/\ell$, el punto inferior tiene curvatura positiva y frecuencia pequeña $\sqrt{g/\ell - \Omega^2}$. Si $\Omega^2 > g/\ell$, se vuelve inestable y aparecen posiciones estables con $\cos\theta = g/(\Omega^2\ell)$. El motor mantiene la velocidad angular y puede intercambiar energía con la cuenta; no se está describiendo un aro libre de retroceder.

9. La función de energía del lagrangiano

Definición 26.4 — Energía lagrangiana. Para un lagrangiano L, definimos

$$E_L(q,\dot q,t) = \sum_a \dot q^a\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} - L.$$

Por ahora es una función de posiciones y velocidades. Su uso como hamiltoniano, después de cambiar variables de velocidad a momento, se desarrollará en el capítulo 28.

Proposición 26.9 — Identidad de energía. A lo largo de las ecuaciones con fuerzas adicionales Q_a,

$$\frac{dE_L}{dt} = \sum_a Q_a\dot q^a - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

En particular, un lagrangiano sin dependencia explícita de tiempo y sin fuerzas adicionales tiene E_L constante.

Demostración. Derivar la definición da

$$\dot E_L = \sum_a(\ddot q^a p_a + \dot q^a\dot p_a) - \sum_a L_{,q^a}\dot q^a - \sum_a L_{,\dot q^a}\ddot q^a - L_{,t}.$$

Los términos con $\ddot q$ se cancelan porque $p_a = L_{,\dot q^a}$. Los restantes se agrupan como $\sum_a \dot q^a(\dot p_a - L_{,q^a}) - L_{,t}$. Sustituir las ecuaciones prueba la identidad. □

Si $T = \dot q^T G\dot q/2$ y V no depende de velocidades, entonces $E_L = T+V$. Esta igualdad sigue siendo algebraicamente válida si G o V dependen explícitamente del tiempo; la conservación requiere además controlar el miembro derecho de la proposición 26.9.

Para el lagrangiano mecánico general de §2,

$$E_L = \frac{1}{2}\dot{q}^T G \dot{q} - c + V, \qquad E_{\mathrm{mec}} = T + V = \frac{1}{2}\dot{q}^T G \dot{q} + a^T \dot{q} + c + V.$$

Por tanto $E_L - E_{\mathrm{mec}} = -a^T\dot{q} - 2c$. La cantidad $\mathcal{I}$ del aro giratorio es exactamente su energía lagrangiana reducida. La ausencia de tiempo explícito en ese lagrangiano conserva $\mathcal{I}$ sin obligar a conservar la energía inercial de la cuenta.

En un sistema de geometría fija con potencial explícitamente temporal, proposición 26.9 se convierte en $d(T+V)/dt = \partial V/\partial t$ si no hay otras fuerzas. La dependencia temporal registra el intercambio energético asociado al agente externo que modifica el potencial.

10. Fuerzas resistentes dentro del método

Las fuerzas que realizan trabajo virtual no nulo deben conservarse en Q_a. Para la resistencia lineal pasiva es útil agruparlas en una función cuadrática de velocidades.

Definición 26.5 — Función de disipación de Rayleigh. Sea $B(q,t)$ simétrica semidefinida positiva. Definimos $\mathcal{D}(q,\dot{q},t) = \dot{q}^T B \dot{q}/2$ y fuerzas resistentes $Q_a^{\mathrm{d}} = -\partial\mathcal{D}/\partial\dot{q}^a$. La función $\mathcal{D}$ tiene unidades de potencia.

Proposición 26.10 — Ecuaciones y disipación. Si Q^{ext} representa las fuerzas adicionales restantes, entonces

$$\frac{d}{dt}L_{,\dot{q}^a} - L_{,q^a} + \mathcal{D}_{,\dot{q}^a} = Q_a^{\mathrm{ext}},$$

$$\dot{E}_L = \sum_a Q_a^{\mathrm{ext}}\dot{q}^a - \dot{q}^T B\dot{q} - L_{,t}.$$

Demostración. Derivar la forma cuadrática en velocidades da $\mathcal{D}_{,\dot{q}} = B\dot{q}$ por simetría. Sustituir $Q = Q^{\mathrm{ext}} - B\dot{q}$ en la proposición 26.1 y proposición 26.9 produce ambas fórmulas. La semidefinitud hace no positiva la contribución resistente a la energía. □

Para $L = \dot{x}^T M\dot{x}/2 - x^T Kx/2$, con matrices constantes, y $\mathcal{D} = \dot{x}^T C\dot{x}/2$, se recupera $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f$. Las ecuaciones del capítulo 24 aparecen como un caso del método, y sus condiciones para desacoplar el amortiguamiento permanecen necesarias.

No se obtiene esta fuerza sustituyendo L por $L - \mathcal{D}$ en la acción ordinaria. Tal sustitución trataría una potencia como si fuera energía y, aun corrigiendo unidades con una constante, produciría derivadas de aceleración distintas de la fuerza resistente buscada. La función de Rayleigh organiza el trabajo virtual disipativo; no reemplaza el principio conservativo por una resta informal.

11. Recuperar tensiones y comprobar contactos

Las coordenadas independientes eliminan reacciones de las ecuaciones proyectadas, pero dejan disponible Newton para recuperarlas. Para una partícula sobre una esfera fija de radio ℓ, usemos $g(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2 - \ell^2 = 0$. Una reacción ideal tiene forma $\mathbf{R} = 2\lambda\mathbf{r}$.

Proposición 26.11 — Reacción radial reconstruida. Con fuerza aplicada $\mathbf{F} = -\nabla V$,

$$\lambda = \frac{\mathbf{r}\cdot\nabla V - m|\dot{\mathbf{r}}|^2}{2\ell^2}, \qquad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}\cdot\nabla V - m|\dot{\mathbf{r}}|^2}{\ell^2}\mathbf{r}.$$

Para el péndulo fijo bajo gravedad, la tensión dirigida hacia el apoyo vale $\mathcal{T} = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$.

Demostración. Derivar dos veces $|\mathbf{r}|^2 = \ell^2$ da $\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = -|\dot{\mathbf{r}}|^2$. Multiplicar Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V + 2\lambda\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}$ y despejar λ produce las fórmulas. En el péndulo, $V = mgy$, $y = -\ell\cos\theta$ y $|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \ell^2\dot\theta^2$. Identificar $\mathbf{R} = -\mathcal{T}\mathbf{r}/\ell$ da la tensión indicada. □

Si el vínculo es una barra articulada ideal, una reacción de cualquier signo puede ser admisible. Para una cuerda flexible se exige $\mathcal{T} \geq 0$. Una solución angular que produzca tensión negativa deja de representar una cuerda tensa: debe cambiarse el régimen de movimiento. Del mismo modo, un apoyo unilateral sólo puede ejercer el signo de fuerza compatible con su contacto.

12. Términos lineales que producen fuerzas giroscópicas

Los términos lineales en velocidades no siempre provienen de soportes móviles ni son siempre eliminables mediante una derivada total. Consideremos el modelo plano

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{\gamma}{2}(x\dot y - y\dot x) - V(x,y),$$

con γ constante de unidades masa por tiempo.

Proposición 26.12 — Fuerza giroscópica plana. Sus ecuaciones son

$$m\ddot x = \gamma\dot y - V_x, \qquad m\ddot y = -\gamma\dot x - V_y.$$

El término giroscópico no realiza potencia y la energía lagrangiana es $m(\dot x^2+\dot y^2)/2 + V$.

Demostración. Los momentos son $p_x = m\dot x - \gamma y/2$ y $p_y = m\dot y + \gamma x/2$. Restar las derivadas de L respecto de posiciones produce las fuerzas indicadas. Su potencia es $\gamma\dot y\dot x - \gamma\dot x\dot y = 0$. En $\dot x p_x + \dot y p_y - L$ se cancelan los términos lineales y queda la energía anunciada. □

Si $V = 0$ y $\gamma \neq 0$, el vector velocidad gira con tasa angular $-\gamma/m$ y conserva su módulo. La trayectoria no trivial es circular. Este ejemplo permite trabajar con fuerzas perpendiculares a la velocidad sin presuponer todavía la teoría electromagnética del Tomo II.

Para eliminar el término lineal mediante dG/dt necesitaríamos $G_x = -\gamma y/2$ y $G_y = \gamma x/2$, o sus opuestos según el sentido de la resta. Pero las derivadas mixtas serían $G_{xy} = -\gamma/2$ y $G_{yx} = \gamma/2$. Si $\gamma \neq 0$, no existe tal función G de clase C^2 ni siquiera localmente. La dependencia en velocidades puede tener contenido dinámico real.

13. Distintas expresiones para las mismas ecuaciones

Definición 26.6 — Equivalencia variacional de borde fijo. Dos lagrangianos en las mismas coordenadas y sin fuerzas adicionales son equivalentes en este sentido si seleccionan las mismas curvas estacionarias con tiempos y configuraciones extremas fijos. Esta definición concierne a trayectorias; no exige que las funciones de energía ni los momentos tengan la misma expresión.

Proposición 26.13 — Rescalamiento constante y derivada total. Si $c_0 \neq 0$ es constante y $L' = c_0 L + dG(q,t)/dt$, entonces ambos lagrangianos son equivalentes para bordes fijos. Sus momentos y energías se relacionan por

$$p'_a = c_0 p_a + G_{,q^a}, \qquad E_{L'} = c_0 E_L - G_{,t}.$$

Si hay fuerzas generalizadas adicionales, deben escalarse por c_0 para conservar la misma ecuación forzada.

Demostración. La acción nueva es $c_0 S$ más una diferencia fija de valores de G en el borde. Por tanto su primera variación se anula exactamente cuando la anterior se anula. Derivar $L' = c_0 L + G_q\dot q + G_t$ respecto de velocidades da la fórmula para p'. Sustituir en la definición de energía

cancela $G_q\dot q$ y da la segunda identidad. El residuo de Euler–Lagrange se multiplica por c_0, lo que explica el escalamiento de fuerzas. □

Una transformación no lineal arbitraria $L \mapsto f(L)$ no tiene esta propiedad. Al derivar el momento aparecen factores dependientes de la trayectoria y términos adicionales. Tampoco una energía que cambie de expresión bajo una derivada total debe interpretarse automáticamente como un cambio de la energía física: las posiciones, velocidades y fuerzas del modelo deben seguir identificándose por separado.

El factor constante negativo conserva las curvas estacionarias y puede invertir mínimos y máximos de la acción. La equivalencia dinámica no fija por sí sola el carácter extremo del funcional.

14. Recuperar los modos normales desde el lagrangiano

Sea un sistema fijo con lagrangiano natural $L = \dot q^T G(q)\dot q/2 - V(q)$ y equilibrio q_* con $\nabla V(q_*) = 0$. Supongamos G suficientemente diferenciable y definida positiva, y V de clase C^3 cerca de ese punto.

Proposición 26.14 — Linealización alrededor del reposo. Si $q = q_* + \varepsilon\eta$ y se retienen los términos de primer orden en ε, las ecuaciones se reducen a

$$M\ddot\eta + K\eta = 0, \qquad M = G(q_*), \quad K = \nabla^2 V(q_*).$$

Demostración. En la expresión de §3, $G(q)\ddot q = \varepsilon G(q_*)\ddot\eta + O(\varepsilon^2)$ para una familia de prueba con $\eta, \dot\eta, \ddot\eta$ acotadas en el intervalo considerado. Los términos $\Gamma_{abc}\dot q^b\dot q^c$ son de segundo orden porque el equilibrio está en reposo. Taylor da $\nabla V(q) = \varepsilon K\eta + O(\varepsilon^2)$. Dividir por ε y tomar la parte lineal produce la ecuación. □

La aproximación recupera exactamente el problema generalizado $Ku = \omega^2 Mu$ del capítulo 24. Allí las masas y rigideces se conocían desde el modelo lineal; aquí se calculan a partir de las energías y del equilibrio elegido.

Para el péndulo doble con masas iguales m y longitudes iguales ℓ, alrededor de abajo,

$$M = m\ell^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K = mg\ell \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = \omega^2\ell/g$, el determinante es proporcional a $\lambda^2 - 4\lambda + 2$. Las frecuencias al cuadrado son $(g/\ell)(2-\sqrt2)$ y $(g/\ell)(2+\sqrt2)$, con formas angulares $(1, \sqrt2)^T$ y $(1, -\sqrt2)^T$. El modo lento mueve ambas barras en el mismo sentido; el rápido las contrapone.

La matriz cinética positiva asegura que las aceleraciones locales estén determinadas. La conservación de una energía depende del tiempo explícito y de las fuerzas adicionales. La estabilidad de un equilibrio depende además del potencial y de posibles degeneraciones. Esas preguntas pueden responderse dentro del mismo método, con hipótesis distintas. El capítulo 27 organizará la relación entre transformaciones, simetrías y cantidades conservadas que aquí ha aparecido en ejemplos concretos.

15. Ejercicios

Ejercicio 26.1 — Una traslación prescrita.

Para una partícula libre con posición inercial $x = q + a(t)$, calcula G, a_1, c, el momento conjugado y la ecuación de q. Distingue la función $a(t)$ del coeficiente lineal a_1.

Ejercicio 26.2 — Positividad desde las posiciones.

Una partícula plana tiene coordenadas $r(u, v) = (u, v + \alpha u^2)$. Halla su matriz cinética y demuestra su positividad para todos los valores de u, con $m > 0$.

Ejercicio 26.3 — Una coordenada no lineal.

Una partícula libre unidimensional se describe con $x = q^2$, $q > 0$. Halla L, la ecuación de q y su relación con $\ddot{x} = 0$. ¿Hasta cuándo puede usarse esta carta?

Ejercicio 26.4 — Singularidad polar.

Calcula el Hessiano de velocidades del lagrangiano polar de §5. Explica qué ocurre en $r = 0$ y por qué no implica que la dinámica cartesiana de una partícula libre sea singular allí.

Ejercicio 26.5 — Coordenadas redundantes.

Considera $L = m(\dot{q}^1 + \dot{q}^2)^2/2 - k(q^1 + q^2)^2/2$. Calcula el Hessiano y las ecuaciones. Explica qué combinación queda determinada y cuál queda libre.

Ejercicio 26.6 — Referencia acelerada.

Para una partícula libre, haz $x = Q + At^2/2$, con A constante. Obtén la ecuación en Q y comprueba la fórmula de transformación de la proposición 26.4.

Ejercicio 26.7 — Fuerza inversa del cuadrado.

Con $V(r) = -\kappa/r$, $\kappa > 0$, elimina $\dot{\theta}$ usando $h = mr^2\dot{\theta}$. Halla la ecuación radial y el radio de una órbita circular con $h \neq 0$.

Ejercicio 26.8 — Regularidad del péndulo doble.

Demuestra la fórmula del determinante de §6. Estudia su límite cuando $m_1 \to 0$ y ambas barras están alineadas. Relaciona ese límite con una posible pérdida de independencia cinética.

Ejercicio 26.9 — Aceleraciones iniciales inesperadas.

En el péndulo doble de masas iguales y longitudes iguales, toma $\theta_1 = \theta_2 = \alpha$ y velocidades nulas en un instante. Calcula ambas aceleraciones angulares en ese instante.

Ejercicio 26.10 — Verificar los modos angulares.

Para las matrices de §14, comprueba las frecuencias y las formas $(1, \sqrt{2})^T$, $(1, -\sqrt{2})^T$. Explica por qué no son ortogonales euclídeamente y sí lo son con la matriz de masa.

Ejercicio 26.11 — Soltar la primera barra.

En la aproximación lineal del péndulo doble igual, toma $\theta_1(0) = \alpha$, $\theta_2(0) = 0$ y velocidades cero. Reconstruye ambos ángulos mediante las dos frecuencias normales.

Ejercicio 26.12 — Carro libre desde el reposo.

Para el sistema de §7 sin fuerza exterior, calcula $\ddot{x}$ y $\ddot{\theta}$ en un instante con ángulo θ y velocidades nulas. Comprueba el límite de un carro muy pesado.

Ejercicio 26.13 — Momento horizontal nulo.

Para el carro libre, supón $p_x = 0$. Integra la relación entre x y θ y expresa la energía cinética sobre esos movimientos sólo mediante $\theta, \dot{\theta}$. No se pide una eliminación general de coordenadas a momento arbitrario.

Ejercicio 26.14 — Umbral del aro giratorio.

En §8, estudia el punto inferior cuando $\Omega^2 = g/\ell$. Expande V_{ef} hasta orden cuatro y decide si el equilibrio reducido es estable. ¿Qué predice la frecuencia lineal?

Ejercicio 26.15 — Potencia del motor.

Para el aro giratorio, calcula $\dot{H}_z$ y demuestra que $\Omega \dot{H}_z = \dot{E}_{\text{mec}}$. Indica cuándo esa potencia es cero aun con $\Omega \neq 0$.

Ejercicio 26.16 — Rigidez dependiente del tiempo.

Para $L = m\dot{q}^2/2 - k(t)q^2/2$, con $m > 0$, calcula E_L y su derivada sobre soluciones. ¿La ausencia de fuerzas adicionales garantiza conservación?

Ejercicio 26.17 — Dos energías en una referencia móvil.

En ejercicio 26.1, compara E_L con $E_{\text{mec}} = m\dot{x}^2/2$. Calcula sus derivadas sobre soluciones libres y verifica proposición 26.9.

Ejercicio 26.18 — Resistencia con coeficiente variable.

Para $\mathcal{D} = b(q)\dot{q}^2/2$, con $b(q) \geq 0$, encuentra la fuerza generalizada y su potencia. Explica por qué no aparece $b'(q)$ al calcular esa fuerza.

Ejercicio 26.19 — Un amortiguador entre dos masas.

Dos masas tienen un amortiguador viscoso que sólo resiste su velocidad relativa. Construye $\mathcal{D}$, las dos fuerzas y la tasa de pérdida de energía. ¿Qué movimiento no disipa mediante ese vínculo?

Ejercicio 26.20 — Mantener tensa una cuerda.

Una masa describe una circunferencia vertical de radio ℓ con una cuerda ideal. Halla la rapidez mínima en el punto inferior para completar una vuelta sin tensión negativa. Usa energía y proposición 26.11.

Ejercicio 26.21 — Resolver el movimiento giroscópico.

En §12, toma $V = 0$, $\gamma > 0$, posición inicial (x_0, y_0) y velocidad $(v_0, 0)$, con $v_0 > 0$. Halla la trayectoria, su centro y su radio.

Ejercicio 26.22 — Un término lineal eliminable.

Estudia $L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + c(x\dot{y} + y\dot{x})$. Encuentra una derivada total que elimine el término cruzado y verifica las ecuaciones. Compáralo con §12.

Ejercicio 26.23 — Cambiar el cero energético.

Añade dG/dt con $G(q,t) = -E_0 t$. Calcula el cambio de lagrangiano, momentos y energía lagrangiana. ¿Cambia la trayectoria?

Ejercicio 26.24 — Un cuadrado no equivalente.

Sea $L = m(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)/2$ y $L' = L^2/E_*$, con $E_* > 0$ constante de unidades de energía. Deriva el residuo de Euler–Lagrange de L' y demuestra que una solución armónica no trivial de L no lo anula en general.

Ejercicio 26.25 — Regularidad bajo reparametrización.

En una dimensión, transforma un Hessiano $W = m > 0$ mediante $q = f(Q)$. Obtén $\widetilde{W}$ y estudia el caso $f(Q) = Q^3$ en $Q = 0$.

Ejercicio 26.26 — Masa efectiva que depende de posición.

Para $L = m(1 + \alpha q^2)\dot{q}^2/2 - kq^2/2$, con $m, k > 0$ y $\alpha \geq 0$, deriva la ecuación exacta y su aproximación lineal alrededor del reposo en cero.

Ejercicio 26.27 — Péndulo esférico.

Con ángulo polar θ desde abajo y azimut φ, escribe el lagrangiano de una masa a distancia fija ℓ del apoyo. Halla ambas ecuaciones y explica la degeneración de la carta en los polos.

Ejercicio 26.28 — Aro libre frente a aro prescrito.

Supón que el aro de §8 puede girar libremente con ángulo φ y momento de inercia propio $I > 0$. Escribe el lagrangiano del conjunto y la ecuación de φ. Explica por qué no puede imponerse además $\dot{\varphi} = \Omega$ constante sin torque externo en un movimiento genérico.

Ejercicio 26.29 — Regularidad sin existencia global.

Para $L = \dot{q}^2/2 + q^4/4$, muestra que el Hessiano es regular. Resuelve con $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 1/\sqrt{2}$ y demuestra que la solución diverge en tiempo finito.

Ejercicio 26.30 — Carro forzado y amortiguado.

Añade al carro de §7 una fuerza $F(t)$ y resistencia horizontal $-b\dot{x}$, con $b \geq 0$. Escribe las ecuaciones, demuestra que se pueden despejar las dos aceleraciones y obtén el balance de energía mecánica. Se supone contacto ideal con la guía horizontal.

16. Soluciones

Solución del ejercicio 26.1.

La velocidad es $\dot{x} = \dot{q} + \dot{a}$, así que $T = m\dot{q}^2/2 + m\dot{a}\dot{q} + m\dot{a}^2/2$. Por tanto $G = m$, $a_1 = m\dot{a}$ y $c = m\dot{a}^2/2$. El momento es $p = m(\dot{q} + \dot{a})$ y Euler–Lagrange da $m(\ddot{q} + \ddot{a}) = 0$. La función prescrita $a(t)$ representa una posición; el coeficiente a_1 representa el término de velocidad inducido y tiene unidades de momento lineal.

Solución del ejercicio 26.2.

Los vectores de coordenada son $r_{,u} = (1, 2\alpha u)$ y $r_{,v} = (0, 1)$. Así

$$G = m \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha^2 u^2 & 2\alpha u \\ 2\alpha u & 1 \end{pmatrix}.$$

Para una columna $(a, b)^T$, su forma cuadrática es $m[a^2 + (2\alpha u a + b)^2]$, positiva salvo en el vector nulo. Equivalentemente, la primera entrada es positiva y $\det G = m^2 > 0$. La coordenada mezcla velocidades sin crear una degeneración física.

Solución del ejercicio 26.3.

La velocidad cartesiana es $2q\dot{q}$ y $L = 2mq^2\dot{q}^2$. Derivar da $4mq^2\ddot{q} + 4mq\dot{q}^2 = 0$, equivalente para $q > 0$ a $q\ddot{q} + \dot{q}^2 = 0$. Como $\ddot{x} = 2(q\ddot{q} + \dot{q}^2)$, coincide con Newton libre. Se puede usar la carta mientras $x(t) > 0$. Al llegar a $x = 0$, la inversa $q = \sqrt{x}$ deja de ser regular; si la partícula cruza hacia $x < 0$, esa carta deja además de representarla.

Solución del ejercicio 26.4.

El Hessiano es $W = \operatorname{diag}(m, mr^2)$, con determinante m^2r^2. Es regular para $r > 0$. En el origen, todos los valores de θ representan el mismo punto y el vector de coordenada angular se anula: el cambio cartesiano-polar pierde rango. La ecuación cartesiana $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$ sigue siendo regular. Lo que falla es la representación polar de las posiciones y velocidades en ese punto.

Solución del ejercicio 26.5.

El Hessiano es $m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene rango uno. Ambas ecuaciones son idénticas: $m(\ddot{q}^1 + \ddot{q}^2) + k(q^1 + q^2) = 0$. La suma $s = q^1 + q^2$ satisface el oscilador $m\ddot{s} + ks = 0$, mientras la diferencia no recibe ecuación y puede ser una función arbitraria. Los datos para las dos coordenadas no determinan una evolución única. Se han duplicado variables para describir una única combinación física, fuera del rango completo supuesto en la proposición 26.2.

Solución del ejercicio 26.6.

El lagrangiano transformado es $\widetilde{L} = m(\dot{Q} + At)^2/2$. Su ecuación es $m(\ddot{Q} + A) = 0$, de modo que $\ddot{Q} = -A$. El Jacobiano espacial es uno; proposición 26.4 dice que el residuo nuevo coincide con el original $m\ddot{x}$ evaluado en $x = Q + At^2/2$, precisamente $m(\ddot{Q} + A)$. El término inducido por el cambio temporal reproduce la aceleración de la referencia.

Solución del ejercicio 26.7.

De proposición 26.5, $m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \kappa/r^2$. Con $\dot{\theta} = h/(mr^2)$ queda $m\ddot{r} = \frac{h^2}{mr^3} - \frac{\kappa}{r^2}$. Una órbita circular tiene $\ddot{r} = 0$, así que $r_0 = h^2/(m\kappa)$. La hipótesis $h \neq 0$ produce un radio positivo. El mismo balance se obtiene derivando el potencial efectivo $h^2/(2mr^2) - \kappa/r$ del capítulo 17.

Solución del ejercicio 26.8.

El determinante es

$$(m_1 + m_2)m_2\ell_1^2\ell_2^2 - m_2^2\ell_1^2\ell_2^2\cos^2\delta = m_2\ell_1^2\ell_2^2(m_1 + m_2\sin^2\delta).$$

Con $m_1 > 0$ es positivo. Si $m_1 \to 0$ y $\sin\delta = 0$, tiende a cero. En el límite sólo queda inercia en la segunda masa; en una configuración alineada ciertos cambios angulares combinados pueden dejar instantáneamente inmóvil a esa masa. La forma cinética pierde positividad estricta. El límite ha eliminado una de las masas positivas que garantizaban proposición 26.2.

Solución del ejercicio 26.9.

En ese instante $\delta = 0$ y no hay términos de velocidad. Dividiendo las ecuaciones por $m\ell^2$,

$$2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 = -2(g/\ell)\sin\alpha, \qquad \ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 = -(g/\ell)\sin\alpha.$$

Restar da $\ddot\theta_1 = -(g/\ell)\sin\alpha$ y después $\ddot\theta_2 = 0$. La segunda barra no tiene aceleración angular inicial aunque la configuración esté inclinada; la aceleración transmitida por el primer eslabón interviene en su balance. Esto no afirma que permanezca sin girar después.

Solución del ejercicio 26.10.

Tras quitar los factores dimensionales, el determinante de $\operatorname{diag}(2,1) - \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\lambda^2 - 4\lambda + 2$. Sus raíces son $2 \mp \sqrt{2}$. Sustituir $u_- = (1, \sqrt{2})^T$ y $u_+ = (1, -\sqrt{2})^T$ verifica los dos pares propios. El producto euclídeo es $1 - 2 = -1$. Para la masa reducida,

$$u_-^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u_+ = 0.$$

La ortogonalidad relevante pertenece a la energía cinética, como en el capítulo 24. Los ángulos absolutos no son ejes ortogonales para esa forma cuadrática.

Solución del ejercicio 26.11.

Los datos se descomponen como $(\alpha, 0)^T = (\alpha/2)u_- + (\alpha/2)u_+$. Como las velocidades iniciales son cero,

$$\theta_1 = \frac{\alpha}{2}(\cos\omega_- t + \cos\omega_+ t), \qquad \theta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\cos\omega_- t - \cos\omega_+ t).$$

En $t = 0$ se recuperan los ángulos y ambas derivadas son nulas. La fórmula corresponde a la aproximación lineal y requiere amplitudes pequeñas; no es la solución exacta del péndulo doble no lineal.

Solución del ejercicio 26.12.

Sin velocidades, las ecuaciones son $(M+m)\ddot x + m\ell\cos\theta\ddot\theta = 0$ y $\cos\theta\ddot x + \ell\ddot\theta = -g\sin\theta$. Eliminar $\ddot x$ da

$$\ddot\theta = -\frac{(M+m)g\sin\theta}{\ell(M + m\sin^2\theta)}, \qquad \ddot x = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}.$$

Cuando $M \to \infty$, la aceleración del carro tiende a cero y la angular a $-(g/\ell)\sin\theta$, el péndulo fijo. La positividad del denominador coincide con el determinante de la proposición 26.7.

Solución del ejercicio 26.13.

Con $F = 0$, la primera ecuación es $\dot p_x = 0$. Si $p_x = 0$, $\dot x = -m\ell\cos\theta\dot\theta/(M+m)$ y por integración

$$x = x_c - \frac{m\ell}{M+m}\sin\theta.$$

Sustituir esa velocidad en la energía cinética completa y agrupar da $T = \frac{m\ell^2}{2}\frac{M + m\sin^2\theta}{M+m}\dot\theta^2$. El coeficiente es positivo y cerca de abajo vale $m\ell^2 M/(M+m)$. El retroceso del apoyo reduce esa inercia interna, lo que explica el aumento de frecuencia de §7. Aquí se ha calculado la energía sobre

movimientos de momento horizontal nulo; una eliminación variacional general a momento fijado requiere una formulación adicional.

Solución del ejercicio 26.14.

En el umbral, $V_{\mathrm{ef}} = -mg\ell[\sin^2\theta/2 + \cos\theta]$. Las expansiones $\sin^2\theta = \theta^2 - \theta^4/3 + O(\theta^6)$ y $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24 + O(\theta^6)$ dan

$$V_{\mathrm{ef}} = -mg\ell + \frac{mg\ell}{8}\theta^4 + O(\theta^6).$$

Hay un mínimo estricto degenerado, de modo que el equilibrio reducido sigue siendo estable por energía. La frecuencia lineal es cero y la ecuación linealizada aislada no decide esa estabilidad. Los términos de orden cuatro aportan la restauración que el Hessiano no detecta.

Solución del ejercicio 26.15.

La derivada de $H_z = m\ell^2\Omega\sin^2\theta$ es $2m\ell^2\Omega\sin\theta\cos\theta\dot\theta$. Multiplicar por Ω produce exactamente proposición 26.8. La potencia es cero si $\dot\theta = 0$ o si $\sin\theta\cos\theta = 0$, entre otros instantes posibles. Un motor que mantiene una velocidad constante puede transmitir potencia variable: la potencia depende también del torque requerido.

Solución del ejercicio 26.16.

La energía es $E_L = m\dot q^2/2 + k(t)q^2/2$. Como $L_{,t} = -\dot k(t)q^2/2$, proposición 26.9 da $\dot E_L = \dot k(t)q^2/2$. La misma identidad se obtiene derivando la energía y usando $m\ddot q + k(t)q = 0$. La modificación externa de la rigidez intercambia energía aun sin una fuerza adicional escrita en Q.

Solución del ejercicio 26.17.

El lagrangiano es $m(\dot q + \dot a)^2/2$, pero $E_L = m\dot q^2/2 - m\dot a^2/2$. La energía mecánica es $E_{\mathrm{mec}} = m(\dot q + \dot a)^2/2$. Como $\ddot q = -\ddot a$, la velocidad absoluta es constante y $\dot E_{\mathrm{mec}} = 0$. En cambio, $\dot E_L = -m(\dot q + \dot a)\ddot a = -L_{,t}$.

La derivada parcial respecto del tiempo se toma manteniendo fijas q y $\dot q$, por lo que $L_{,t} = m(\dot q + \dot a)\ddot a$. Las dos funciones energéticas registran relaciones distintas con la referencia móvil.

Solución del ejercicio 26.18.

Se deriva respecto de la velocidad manteniendo fija la posición: $Q^{\mathrm{d}} = -b(q)\dot q$. Su potencia es $-b(q)\dot q^2 \le 0$. No aparece $b'(q)$ porque la definición de fuerza de Rayleigh no es una derivada temporal ni una ecuación de Euler–Lagrange para $\mathcal{D}$. Confundir esas operaciones añadiría términos que no pertenecen al modelo resistente.

Solución del ejercicio 26.19.

Tomamos $\mathcal{D} = b(\dot x_2 - \dot x_1)^2/2$. Entonces $Q_1 = b(\dot x_2 - \dot x_1)$ y $Q_2 = -b(\dot x_2 - \dot x_1)$. Su potencia total es $-b(\dot x_2 - \dot x_1)^2$. Un movimiento con velocidades iguales no disipa mediante ese amortiguador, aunque ambas masas se muevan. La matriz resistente es $b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, semidefinida positiva con una dirección nula común.

Solución del ejercicio 26.20.

Sea v_b la rapidez inferior. La energía da $v^2 = v_b^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)$. Sustituir en la tensión produce $\mathcal{T} = \frac{mv_b^2}{\ell} - 2mg + 3mg\cos\theta$. Su mínimo ocurre arriba, donde $\cos\theta = -1$. Exigir tensión no negativa en todo el ciclo da $v_b^2 \ge 5g\ell$. La rapidez mínima es $\sqrt{5g\ell}$; en el límite, arriba se tiene $v^2 = g\ell$ y tensión cero. Una rapidez inferior menor puede proporcionar altura suficiente en un cálculo energético que, sin embargo, exigiría una cuerda que empuja antes de completar la vuelta.

Solución del ejercicio 26.21.

Con $\omega = \gamma/m > 0$, la velocidad satisface $\dot v_x = \omega v_y$, $\dot v_y = -\omega v_x$. Los datos dan $v_x = v_0\cos\omega t$ y $v_y = -v_0\sin\omega t$. Integrando,

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad y = y_0 + \frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t - 1).$$

La trayectoria es un círculo de centro $(x_0, y_0 - v_0/\omega)$ y radio v_0/ω. El módulo de la velocidad y la energía cinética permanecen constantes. Si $\gamma = 0$, el movimiento sería rectilíneo uniforme y esta descripción circular con radio finito dejaría de aplicarse.

Solución del ejercicio 26.22.

El término lineal es $d(cxy)/dt$. Restarlo deja la energía cinética libre y, por la proposición 26.13, las trayectorias son las de $m\ddot x = m\ddot y = 0$. Directamente, $p_x = m\dot x + cy$ y $L_{,x} = c\dot y$; los términos $c\dot y$ se cancelan en la ecuación de x, y de modo análogo en la de y. El signo simétrico permite una función potencial de borde; el signo antisimétrico de §12 produce derivadas mixtas incompatibles y una fuerza real.

Solución del ejercicio 26.23.

Se añade la constante $-E_0$ al lagrangiano. Los momentos no cambian porque G no depende de posiciones. Proposición 26.13 da $E_{L'} = E_L - G_t = E_L + E_0$. La acción cambia en $-E_0(t_1 - t_0)$, igual para todas las curvas con esos tiempos. Por tanto las trayectorias permanecen iguales. El desplazamiento del cero de energía no es una fuerza adicional.

Solución del ejercicio 26.24.

Si $p = L_{,\dot q}$ y $\mathcal{E}(L) = \dot p - L_{,q}$, la regla del producto da $\mathcal{E}(L') = \frac{2}{E_*}\big[L\mathcal{E}(L) + \dot L\, p\big]$. Para una solución $q = A\cos\omega t$ de L, $\mathcal{E}(L) = 0$, pero $p = -mA\omega\sin\omega t$ y $\dot L = mA^2\omega^3\sin 2\omega t$. Su producto no es idénticamente cero si $A \neq 0$. Así la misma curva no satisface en general las ecuaciones de L'. La monotonía o la positividad de una función aplicada al integrando no conserva la estacionariedad de su integral.

Solución del ejercicio 26.25.

Proposición 26.4 da $\widetilde W = m[f'(Q)]^2$. Es positivo donde $f' \neq 0$. Para $f(Q) = Q^3$, se obtiene $9mQ^4$, que se anula en cero. Aunque $Q \mapsto Q^3$ sea biyectiva en la recta, su inversa no es diferenciable de manera regular en el origen. La hipótesis es la de cambio local suave con Jacobiano invertible, más fuerte que la mera existencia de una inversa como función de conjuntos.

Solución del ejercicio 26.26.

Se tiene $p = m(1+\alpha q^2)\dot q$. Su derivada es $m(1+\alpha q^2)\ddot q + 2m\alpha q\dot q^2$, mientras $L_{,q} = m\alpha q\dot q^2 - kq$. Por tanto

$$m(1+\alpha q^2)\ddot q + m\alpha q\dot q^2 + kq = 0.$$

Al linealizar alrededor de $(q,\dot q) = (0,0)$ queda $m\ddot q + kq = 0$. La frecuencia pequeña es $\sqrt{k/m}$. El parámetro α afecta la dinámica a amplitud finita y no el término lineal en ese equilibrio.

Solución del ejercicio 26.27.

La velocidad al cuadrado es $\ell^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2)$, de modo que

$$L = \frac{m\ell^2}{2}(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2) + mg\ell\cos\theta.$$

Las ecuaciones son $\ddot\theta = \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2 - (g/\ell)\sin\theta$ y $d(m\ell^2\sin^2\theta\,\dot\varphi)/dt = 0$. El determinante cinético es $m^2\ell^4\sin^2\theta$. En los polos el azimut no distingue posiciones y la carta es singular. El movimiento sobre la esfera puede seguir siendo regular en coordenadas locales diferentes.

Solución del ejercicio 26.28.

El lagrangiano del conjunto es

$$L = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(I + m\ell^2 \sin^2\theta)\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\theta.$$

La ecuación de φ es $d[(I + m\ell^2 \sin^2\theta)\dot{\varphi}]/dt = 0$. Si θ cambia, también cambia el coeficiente de $\dot{\varphi}$; mantener ese producto constante requiere en general una velocidad de giro variable. Imponer además una Ω constante exige torque externo, salvo movimientos especiales. Prescribir la rotación elimina el grado de libertad del aro y transfiere su balance al motor.

Solución del ejercicio 26.29.

El Hessiano es $W = 1$, regular en todo el plano de estados. Euler–Lagrange da $\ddot{q} = q^3$. La energía $E_L = \dot{q}^2/2 - q^4/4$ es cero con esos datos. La rama inicial creciente satisface $\dot{q} = q^2/\sqrt{2}$. Separar variables da $q(t) = \frac{1}{1-t/\sqrt{2}}$, $\qquad 0 \le t < \sqrt{2}$.

Su derivada inicial es la indicada y derivar otra vez verifica la ecuación. La solución diverge al acercarse a $\sqrt{2}$ y no puede prolongarse allí como solución finita. La regularidad y la unicidad local no garantizan existencia global cuando el potencial no confina el movimiento.

Solución del ejercicio 26.30.

Las fuerzas adicionales son $Q_x = F(t) - b\dot{x}$ y $Q_\theta = 0$. Las ecuaciones de la proposición 26.7 quedan

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\cos\theta\ddot{\theta} - m\ell\sin\theta\dot{\theta}^2 = F(t) - b\dot{x},$$

$$m\ell\cos\theta\ddot{x} + m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0.$$

El determinante sigue siendo $m\ell^2(M + m\sin^2\theta) > 0$, de modo que ambas aceleraciones se despejan para cualquier estado finito. La energía mecánica es $E = T - mg\ell\cos\theta$, porque la geometría es fija en las coordenadas independientes del sistema completo. Proposición 26.9 da $\dot{E} = F(t)\dot{x} - b\dot{x}^2$.

El primer término es la potencia externa aplicada al carro y el segundo la pérdida resistente. Las fuerzas internas del péndulo y las reacciones ideales no añaden términos al balance del conjunto. Si se prescribe en cambio $x = a(t)$, la fuerza necesaria se calcula con la primera ecuación y el balance energético de la cuenta aislada debe incluir el trabajo del soporte.

Notas y lecturas

1. David Tong, *Classical Dynamics*, capítulo 2, §§2.2, 2.3, 2.5.1–2.5.2 y 2.6, ofrece material complementario sobre cambios de coordenadas, restricciones, aro giratorio, péndulo doble y pequeñas oscilaciones. Texto oficial de University of Cambridge. Los ángulos y signos deben compararse con las convenciones explícitas de cada ejemplo.
2. La equivalencia con Newton aquí demostrada supone vínculos holónomos regulares e ideales, masas positivas y las fuerzas declaradas. Las restricciones no holónomas y los contactos unilaterales conservan las cautelas del capítulo 25; no se deduce su dinámica mediante una eliminación informal de variables.
3. La energía lagrangiana se define en posiciones y velocidades. Su transformación a variables de momento y la función hamiltoniana pertenecen al capítulo 28. Las comprobaciones de cantidades conservadas de este capítulo preparan el teorema de Noether del capítulo 27 sin presuponerlo.

Capítulo 27

Simetrías, teorema de Noether y leyes de conservación

Una coordenada que no aparece en el lagrangiano deja una huella en las ecuaciones: su momento conjugado no cambia. El carro libre del capítulo 26 podía desplazarse horizontalmente sin que la energía potencial distinguiera una posición de otra, y su momento horizontal permanecía constante. En un potencial central podíamos girar toda la órbita sin alterar el problema, y se conservaba el momento angular.

Esas coincidencias sugieren buscar una relación entre las transformaciones que conservan el modelo y las cantidades que permanecen constantes durante el movimiento. La relación debe precisar qué se transforma. Mover una trayectoria en el espacio no es lo mismo que adelantarla en el tiempo; dejar invariantes las ecuaciones no exige siempre dejar invariante el lagrangiano; añadir un término de borde puede cambiar los momentos sin cambiar la dinámica.

El teorema de Noether organiza esas posibilidades mediante la acción. Una transformación continua cuya modificación del integrando es una derivada total produce una cantidad conservada. Construiremos la fórmula primero con el tiempo fijo y después permitiremos que también cambie el reloj. Los ejemplos mostrarán por qué el término de borde y la distinción entre ambas variaciones son necesarios.

Trabajaremos con lagrangianos de primer orden $L(q, \dot{q}, t)$ suficientemente diferenciables y coordenadas locales independientes, dentro del ámbito de vínculos holónomos ideales del capítulo 25–I26. Las identidades centrales se demostrarán antes de imponer las ecuaciones; eso permitirá distinguir una simetría del modelo de una cancelación que ocurre sólo en una solución particular.

1. Una coordenada ausente y un momento constante

Escribimos $p_a = \partial L/\partial \dot{q}^a$ y $\mathcal{E}_a = \dot{p}_a - \partial L/\partial q^a$. Sin fuerzas adicionales, Euler–Lagrange exige $\mathcal{E}_a = 0$.

$$L \text{ independiente de } q \Rightarrow \dot{p}_q = 0$$

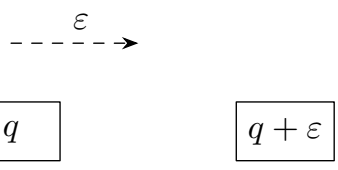


Figura 27.1. Si L no depende de una coordenada q, las traslaciones en esa coordenada son simetrías y el momento conjugado se conserva. La afirmación se refiere al lagrangiano y a sus hipótesis de regularidad. Véase §1.

Definición 27.1 — Integral del movimiento. Una función $I(q, \dot{q}, t)$ es una integral del movimiento si $dI/dt = 0$ a lo largo de toda solución en la región considerada. Puede depender explícitamente del tiempo; su valor, evaluado sobre una trayectoria, permanece constante.

Definición 27.2 — Coordenada cíclica. Una coordenada q^a es cíclica en una expresión de L si $\partial L/\partial q^a = 0$ idénticamente en la región de estados considerada.

Proposición 27.1 — Momento de una coordenada cíclica. Si q^a es cíclica y no actúa una fuerza generalizada adicional en esa componente, p_a es constante.

Demostración. La ecuación de esa coordenada es $\dot{p}_a = \partial L/\partial q^a = 0$. Por tanto p_a conserva su valor inicial. □

La coordenada puede seguir variando. En el movimiento central plano, θ es cíclica y $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ es constante, pero $\dot{\theta}$ cambia si cambia r. La cantidad conservada combina la velocidad angular con la geometría de la posición.

Tampoco basta con que una derivada se anule en un punto: $\partial L/\partial q = 0$ en el equilibrio de un oscilador no convierte q en cíclica. La definición exige una identidad del lagrangiano, no un valor accidental sobre una configuración.

2. Transformaciones continuas a tiempo fijo

Sea $q \mapsto \Phi_\varepsilon(q,t)$ una familia suave, localmente invertible, con $\Phi_0(q,t) = q$. Su generador es

$$\xi^a(q,t) = \left.\frac{\partial \Phi^a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_0 .$$

Para una curva $q(t)$, la variación inducida es $\delta q^a = \xi^a$ y la de velocidad es $\delta\dot{q}^a = D_t\xi^a$. Aquí D_t significa derivar a lo largo de la curva: $D_t\xi^a = \partial_t\xi^a + \sum_b \dot{q}^b\partial_b\xi^a$.

Definición 27.3 — Simetría variacional estricta a tiempo fijo. El generador ξ es una simetría estricta infinitesimal si

$$\delta L = \sum_a \left(L_{,q^a}\xi^a + p_a D_t\xi^a\right) = 0$$

como identidad para todas las posiciones, velocidades y tiempos admisibles de la región. Una familia que deja exactamente invariante L para todo parámetro satisface esta identidad al derivar en cero.

Proposición 27.2 — Primera forma de Noether. Bajo esa identidad, $J = \sum_a p_a\xi^a$ es constante sobre las soluciones sin fuerzas adicionales.

Demostración. La regla del producto da

$$D_t\left(\sum_a p_a\xi^a\right) = \sum_a \mathcal{E}_a\xi^a + \delta L.$$

La identidad de simetría anula el segundo término y las ecuaciones anulan el primero. □

Una traslación $q^a \mapsto q^a + \varepsilon$ tiene generador constante en esa componente. La coordenada cíclica reaparece como el caso en que desplazarla no modifica el lagrangiano. Pero el generador puede depender de la posición: una rotación plana tiene $\xi = (-y, x)$ y una variación de velocidad también rotada.

3. Cuando la acción cambia sólo en el borde

Los lagrangianos del capítulo 26 podían modificarse mediante una derivada total sin cambiar las trayectorias de borde fijo. Esa libertad debe entrar en la definición de simetría.

Definición 27.4 — Cuasisimetría y término de borde. A tiempo fijo, diremos que ξ es una simetría variacional hasta borde si existe una función $F(q,t)$ tal que $\delta L = D_t F$ como identidad.

También la llamaremos cuasisimetría. La variación de la acción entre dos tiempos es entonces $F(t_1) - F(t_0)$.

Proposición 27.3 — Carga con corrección de borde. Si $\delta L = D_t F$, la cantidad

$$J = \sum_a p_a \xi^a - F$$

es constante sobre las soluciones sin fuerzas adicionales.

Demostración. Restar $D_t F$ a la identidad de la proposición 27.2 produce $D_t J = \sum_a \mathcal{E}_a \xi^a + \delta L - D_t F$. Ambos términos de la derecha se anulan bajo las hipótesis. □

Considérese una partícula vertical con $L = m\dot{y}^2/2 - mgy$. La traslación $y \mapsto y + \varepsilon$ cambia L en $-mg\varepsilon$, pero $-mg = D_t(-mgt)$. Con $\xi = 1$ y $F = -mgt$, se conserva $J = m\dot{y} + mgt$. El momento vertical por sí solo cambia porque actúa la gravedad; la combinación de momento y tiempo conserva la velocidad inicial multiplicada por la masa.

El término F se puede cambiar por una constante sin alterar su derivada. Eso sólo cambia el cero de J. Suprimir una parte no constante de F, en cambio, puede destruir la conservación.

4. Comparar también los tiempos

Para incluir las traslaciones temporales consideramos transformaciones locales del espacio de coordenadas y tiempo:

$$t_\varepsilon = t + \varepsilon\tau(q,t) + O(\varepsilon^2), \qquad q^a_\varepsilon(t_\varepsilon) = q^a(t) + \varepsilon\xi^a(q,t) + O(\varepsilon^2).$$

La familia se supone invertible para parámetros pequeños y con $dt_\varepsilon/dt > 0$ en la curva considerada. Se transforman tanto el argumento temporal como el valor de la curva sobre él.

Definición 27.5 — Generador y variación a tiempo fijo. El par (τ, ξ) es el generador de la transformación. La variación de la curva comparada en un mismo tiempo es

$$\eta^a = \xi^a - \dot{q}^a \tau.$$

El término $-\dot{q}\tau$ corrige el desplazamiento que se debe sólo al cambio del reloj.

Proposición 27.4 — Transformación de velocidad y densidad de acción. A primer orden,

$$\delta v^a = D_t \xi^a - \dot{q}^a D_t \tau, \qquad \delta(dt) = (D_t\tau)dt.$$

Por tanto la variación del producto $L\,dt$, referida al intervalo original, es $\mathcal{A}\,dt$, con

$$\mathcal{A} = \tau L_{,t} + \sum_a \xi^a L_{,q^a} + \sum_a p_a (D_t\xi^a - \dot{q}^a D_t\tau) + L D_t\tau.$$

Demostración. Derivar las expresiones de la familia respecto del parámetro original t da $dq^a_\varepsilon/dt = \dot{q}^a + \varepsilon D_t\xi^a + O(\varepsilon^2)$ y $dt_\varepsilon/dt = 1 + \varepsilon D_t\tau + O(\varepsilon^2)$. Dividir ambas cantidades y expandir produce la velocidad. Aplicar la regla de la cadena a $L(q_\varepsilon, v_\varepsilon, t_\varepsilon)$ y multiplicar por el factor temporal produce $\mathcal{A}$. □

El término $L D_t\tau$ proviene del elemento de integración y no puede omitirse. Con tiempos transformados, la simetría relevante concierne a la densidad $L\,dt$, no sólo al valor de L.

5. El primer teorema de Noether

Definición 27.6 — Simetría variacional puntual con tiempo. En este capítulo, $(\tau(q,t),\xi(q,t))$ es una simetría variacional infinitesimal si existe $F(q,t)$ con $\mathcal{A}=D_tF$ como identidad, antes de usar las ecuaciones del movimiento. La palabra puntual indica que los generadores dependen de posiciones y tiempo, no de velocidades o derivadas superiores.

Proposición 27.5 — Identidad de Noether y conservación. Definamos $E_L=\sum_a \dot q^a p_a-L$. Para cualquier generador puntual y cualquier F,

$$D_t\left(\sum_a p_a\xi^a-E_L\tau-F\right)=\sum_a \mathcal{E}_a(\xi^a-\dot q^a\tau)+\mathcal{A}-D_tF.$$

En particular, si $\mathcal{A}=D_tF$, la carga

$$J=\sum_a p_a\xi^a-E_L\tau-F$$

se conserva sobre todas las soluciones sin fuerzas adicionales.

Demostración. Primero derivamos la energía sin imponer ecuaciones:

$$D_tE_L=\sum_a \dot q^a\mathcal{E}_a-L_{,t}.$$

Es la cancelación de términos con aceleración del capítulo 26, escrita con el residuo $\mathcal{E}_a$. Derivar $\sum_a p_a\xi^a-E_L\tau$ y sustituir esta identidad da

$$\sum_a \mathcal{E}_a(\xi^a-\dot q^a\tau)+\sum_a L_{,q^a}\xi^a+\sum_a p_aD_t\xi^a+\tau L_{,t}-E_LD_t\tau.$$

Como $-E_L=L-\sum_a p_a\dot q^a$, los cuatro últimos términos forman exactamente $\mathcal{A}$. Restar D_tF prueba la identidad. Para una simetría y una solución, ambos términos del miembro derecho son cero. □

La demostración separa dos afirmaciones: la identidad variacional pertenece al lagrangiano y a la transformación; la conservación pertenece a las soluciones de sus ecuaciones. Comprobar la primera sólo después de reemplazar las aceleraciones de una trayectoria particular no establece una simetría de todo el modelo.

El teorema también es local. Una coordenada angular, una carta singular o una función de borde definida sólo en una región pueden limitar el alcance global de la expresión obtenida. Cuando las fórmulas se expresan mediante posiciones y velocidades físicas globales, esas restricciones de carta pueden desaparecer.

6. Traslaciones y momento lineal

Consideremos N partículas sin vínculos externos que fijen una posición absoluta, con

$$L=\frac12\sum_i m_i|\dot{\mathbf r}_i|^2-V(\mathbf r_1,\dots,\mathbf r_N).$$

Supongamos $V(\mathbf r_1+\varepsilon\mathbf n,\dots,\mathbf r_N+\varepsilon\mathbf n)=V(\mathbf r_1,\dots,\mathbf r_N)$ para un vector fijo $\mathbf n$.

Proposición 27.6 — Carga de traslación. La componente $\mathbf n\cdot\mathbf P$, con $\mathbf P=\sum_i m_i\dot{\mathbf r}_i$, es constante. Si la invariancia vale en tres direcciones independientes, se conserva todo $\mathbf P$.

Demostración. El generador es $\tau = 0$, $\xi_i = \mathbf{n}$. Las velocidades no cambian y el potencial es invariante, así que $\mathcal{A} = 0$ y puede tomarse $F = 0$. Proposición 27.5 da $J = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n}$. Tres componentes independientes determinan el vector. □

Un potencial que depende sólo de diferencias de posiciones cumple esa invariancia. Un resorte anclado a una pared no la cumple si se traslada sólo la masa: cambia su deformación. Trasladar a la vez el aparato entero y su pared compara modelos físicamente equivalentes, pero la pared prescrita no es una coordenada dinámica del sistema reducido. Para aplicar el teorema hay que indicar qué objetos se transforman dentro del modelo.

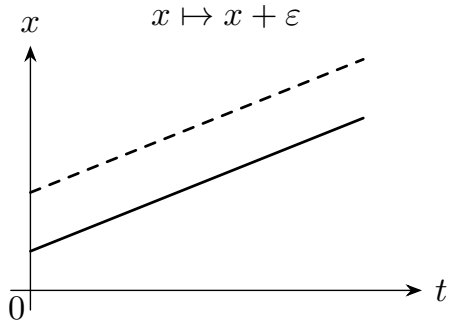
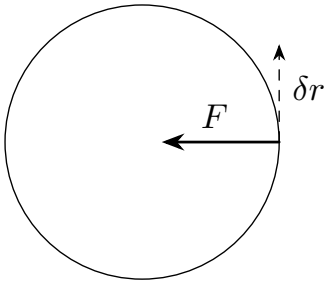


Figura 27.2. En el lagrangiano libre $L = m\dot{x}^2/2$, trasladar la posición por una constante conserva la acción y genera otra historia de igual velocidad. La carga de Noether asociada es el momento $p = m\dot{x}$. Véase §6.

7. Rotaciones y momento angular

Una rotación infinitesimal alrededor de un eje unitario $\mathbf{n}$ cambia cada posición en $\xi_i = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i$. También cambia su velocidad en $\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_i$. El producto de una velocidad consigo misma no varía a primer orden porque es perpendicular a ese cambio.



$$\delta r = \varepsilon\, e_z \times r$$

Figura 27.3. Una rotación infinitesimal desplaza tangencialmente cada punto. Para un potencial central, la fuerza es radial y su trabajo virtual rotacional es cero; la carga correspondiente es el momento angular. Véase §7.

Proposición 27.7 — Carga de rotación. Para un potencial invariante bajo rotaciones comunes alrededor de $\mathbf{n}$, se conserva

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}, \qquad \mathbf{H} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Demostración. La energía cinética es invariante por el cálculo anterior y el potencial lo es por hipótesis. En proposición 27.5 usamos $\tau = 0$, $F = 0$, y

$$J = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i,$$

por la identidad del producto triple. □

La invariancia alrededor de un solo eje conserva sólo la componente correspondiente. Para un potencial central hay invariancia alrededor de cualquier eje y se conserva todo el momento angular. En un péndulo esférico bajo gravedad, el apoyo y la vertical distinguen direcciones: la rotación azimutal conserva H_z, pero no implica conservar las otras componentes.

La fórmula simple de la proposición 27.7 usa momentos cartesianos $m_i \dot{\mathbf{r}}_i$. Con términos lineales en velocidades, los momentos conjugados pueden cambiar y el término de borde puede ser necesario. El ejemplo de §10 mostrará la diferencia explícitamente.

8. Traslaciones temporales y energía

Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, trasladar el reloj mediante $t_\varepsilon = t + \varepsilon$ y conservar las posiciones sobre el punto transformado produce $\tau = 1$, $\xi = 0$. La velocidad transformada no cambia, pero la variación comparada en un mismo tiempo es $\eta = -\dot{q}$.

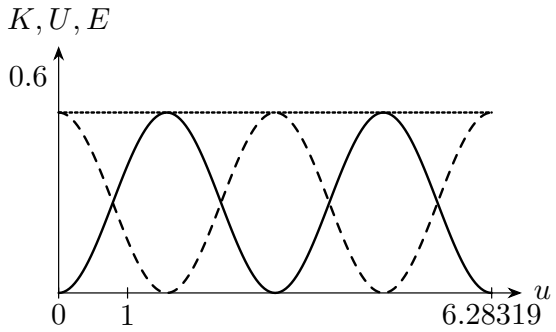


Figura 27.4. En el oscilador autónomo normalizado, $K = \frac{1}{2}\sin^2 u$ (continua), $U = \frac{1}{2}\cos^2 u$ (discontinua) y $E = 1/2$ (punteada). La invariancia temporal conserva la suma, no cada término. Véase §8.

Proposición 27.8 — Energía como carga temporal. Si $L_{,t} = 0$ y no hay fuerzas adicionales, $E_L = \sum_a \dot{q}^a p_a - L$ es constante.

Demostración. Para ese generador, $D_t\tau = 0$, $D_t\xi = 0$ y $\mathcal{A} = L_{,t} = 0$. Con $F = 0$, proposición 27.5 da la carga $J = -E_L$. Conservar una cantidad equivale a conservar su opuesta. □

La energía positiva usual aparece escogiendo el generador temporal opuesto o cambiando el signo de la carga. Lo importante es declarar la convención y conservarla en la demostración.

En una geometría fija con energía cinética homogénea cuadrática y potencial sin velocidades, $E_L = T + V$. Para el aro prescrito del capítulo 26, la energía reducida conserva la diferencia entre energía inercial y velocidad angular por momento angular vertical. La carga de Noether pertenece al lagrangiano y a la transformación que se han elegido; su identificación con una energía física concreta requiere ese paso adicional.

La simetría temporal desplaza también los tiempos y las configuraciones extremas del problema transformado. No es una de las variaciones que se anulan en los extremos al demostrar Euler–Lagrange. El teorema usa una identidad de la densidad de acción y sus bordes; por eso no necesita que cada transformación deje fijos los datos extremos particulares de una trayectoria.

9. Boosts de Galileo y movimiento del centro de masa

Para un sistema libre de partículas con potencial dependiente de diferencias de posiciones, un cambio común de velocidad se expresa como $\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}_i + \varepsilon t \mathbf{n}$. El potencial permanece igual, pero la energía cinética cambia.

Proposición 27.9 — Carga de boost. Si $M = \sum_i m_i$ y $\mathbf{C} = M^{-1} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$, la transformación anterior es una cuasisimetría con

$$F = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \qquad J = \mathbf{n} \cdot (t\mathbf{P} - M\mathbf{C}).$$

En particular, $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) + \mathbf{P}t/M$.

Demostración. El generador es $\xi_i = t\mathbf{n}$, $\tau = 0$. Su derivada temporal es $\mathbf{n}$ y $\delta L = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n} = D_t F$. Proposición 27.3 da la carga indicada. Proposición 27.6 asegura que $\mathbf{P}$ es constante; evaluar la carga en cero y despejar $\mathbf{C}$ produce el movimiento uniforme. □

En una transformación finita, el cambio de energía cinética contiene también $\varepsilon^2 M|\mathbf{n}|^2/2$. Sigue siendo una derivada total, la de $\varepsilon \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i + \varepsilon^2 M|\mathbf{n}|^2 t/2$. El término lineal basta para la carga infinitesimal, pero el cálculo finito confirma que la acción sólo cambia en el borde.

El signo de $t\mathbf{P} - M\mathbf{C}$ corresponde a haber elegido $\xi_i = t\mathbf{n}$. La cantidad opuesta también es constante. No se debe cambiar el signo del generador en medio del cálculo sin cambiar la carga.

10. Momentos conjugados y cargas corregidas

Retomemos el modelo giroscópico plano del capítulo 26 sin potencial:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\gamma}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Sus ecuaciones son $m\ddot{x} = \gamma \dot{y}$ y $m\ddot{y} = -\gamma \dot{x}$. La forma del lagrangiano distingue posiciones, pero las fuerzas sólo dependen de las velocidades.

Proposición 27.10 — Traslaciones y rotación giroscópicas. Se conservan

$$K_x = m\dot{x} - \gamma y, \qquad K_y = m\dot{y} + \gamma x,$$

$$J_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{\gamma}{2}(x^2 + y^2).$$

Las dos traslaciones son cuasisimetrías; la rotación plana es estricta.

Demostración. Para trasladar x, $\delta L = \gamma \dot{y}/2 = D_t(\gamma y/2)$. Como $p_x = m\dot{x} - \gamma y/2$, proposición 27.3 da $K_x = p_x - \gamma y/2$. Para trasladar y, el borde es $F = -\gamma x/2$ y se obtiene $K_y = p_y + \gamma x/2$. Una rotación tiene generador $(-y, x)$ y conserva tanto $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ como $x\dot{y} - y\dot{x}$. Su carga es $-yp_x + xp_y$, que se expande en J_z. □

El momento angular mecánico $m(x\dot{y} - y\dot{x})$ no se conserva por separado: su derivada es $-\gamma(x\dot{x} + y\dot{y})$. La corrección cuadrática de J_z compensa exactamente ese cambio. Del mismo modo, los momentos lineales mecánicos giran aunque las cargas K_x, K_y sean constantes.

Para $\gamma \neq 0$, las constantes K_x, K_y localizan el centro de la trayectoria circular: $x_c = K_y/\gamma$ y $y_c = -K_x/\gamma$. Una carga obtenida de una cuasisimetría puede describir una propiedad geométrica del movimiento además de una componente usual de momento.

11. Una simetría que combina tiempo y rotación

Consideremos una partícula plana con

$$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - V(r, \theta - \Omega t),$$

con Ω constante. El potencial gira de manera prescrita. En general ni una traslación de tiempo sola ni una rotación sola dejan fijo el modelo.

Proposición 27.11 — Integral del patrón giratorio. La transformación $t \mapsto t+\varepsilon$, $\theta \mapsto \theta+\Omega\varepsilon$ es una simetría estricta de la densidad de acción y conserva

$$\mathcal{J} = E_L - \Omega p_\theta.$$

Además, $\dot E_L = \Omega \dot p_\theta$ sobre las soluciones.

Demostración. El generador es $\tau = 1$, $\xi^r = 0$, $\xi^\theta = \Omega$. Sus derivadas temporales son cero. Si $\psi = \theta - \Omega t$, entonces $L_{,t} = \Omega V_{,\psi}$ y $L_{,\theta} = -V_{,\psi}$. Así $\mathcal{A} = L_{,t} + \Omega L_{,\theta} = 0$. Proposición 27.5 conserva $\Omega p_\theta - E_L$, y por tanto su opuesta $\mathcal{J}$. Las ecuaciones dan $\dot p_\theta = -V_{,\psi}$ y $\dot E_L = -L_{,t} = -\Omega V_{,\psi}$, que prueban el balance. $\square$

La energía de la partícula puede cambiar mientras se conserva esa combinación. La potencia transferida por el patrón giratorio es la velocidad angular multiplicada por el torque correspondiente. Si usamos ψ como coordenada, el lagrangiano se vuelve autónomo y su energía es precisamente $\mathcal{J}$; las velocidades se sustituyen mediante $\dot\theta = \dot\psi + \Omega$.

Esta relación explica también la integral reducida del aro giratorio del capítulo 26. Allí el vínculo sólo permite configuraciones sobre una guía móvil, pero la transformación combinada que avanza el tiempo y gira la geometría preserva el dispositivo. La energía reducida coincide con $E_{\mathrm{mec}} - \Omega H_z$.

12. Fuerzas externas y ruptura de una simetría

La identidad de la proposición 27.5 sigue siendo válida aunque una transformación no sea simetría. Pongamos

$$\Delta = \mathcal{A} - D_t F, \qquad \eta^a = \xi^a - \dot q^a \tau.$$

Proposición 27.12 — Balance de una carga. Si las ecuaciones tienen fuerzas generalizadas adicionales Q_a, entonces

$$\dot J = \Delta + \sum_a Q_a \eta^a.$$

Para una simetría exacta del lagrangiano, $\Delta = 0$. Para un sistema sin fuerzas adicionales, la variación de la carga mide el defecto Δ.

Demostración. En las ecuaciones forzadas $\mathcal{E}_a = Q_a$. Sustituir en la identidad de la proposición 27.5 produce la igualdad. No se añade una hipótesis de invariancia a las fuerzas: su contribución se conserva explícitamente en el balance. $\square$

Para una traslación estricta, el segundo término es la fuerza externa proyectada. Para una rotación, es el torque externo correspondiente. Para una traslación temporal, $J = -E_L$ y $\eta = -\dot{q}$; se recupera $\dot{E}_L = \sum_a Q_a \dot{q}^a - L_{,t}$ del capítulo 26.

Un oscilador plano con rigideces distintas k_x, k_y tiene $L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - (k_x x^2 + k_y y^2)/2$. La rotación infinitesimal $(-y, x)$ produce $\Delta = (k_x - k_y)xy$, de modo que

$$\frac{d}{dt}[m(x\dot{y} - y\dot{x})] = (k_x - k_y)xy.$$

Si durante un intervalo $|x| \le A$, $|y| \le B$, el cambio de momento angular queda acotado por $|k_x - k_y|AB$ multiplicado por la duración. Una ruptura pequeña puede producir cambios acumulados apreciables en tiempos largos; la cota debe incluir ese tiempo.

La resistencia $\mathbf{F} = -b\dot{\mathbf{r}}$ en un potencial central es compatible con rotar las ecuaciones, pero ejerce torque $-(b/m)\mathbf{H}$. El balance da decaimiento angular, no conservación del momento. La invariancia de las leyes resistentes bajo una rotación no anula su trabajo virtual sobre el generador.

13. Lo que una simetría de ecuaciones no garantiza

Proposición 27.13 — Escalar una solución armónica no es una simetría variacional puntual de ese lagrangiano. Para $L = m\dot{q}^2/2 - kq^2/2$, con $m, k > 0$, la transformación $q \mapsto e^{\varepsilon} q$ envía soluciones de la ecuación a soluciones, pero su generador $\xi = q$, $\tau = 0$ no satisface $\mathcal{A} = D_t F(q, t)$ para ninguna función de borde de esa clase.

Demostración. La ecuación $m\ddot{q} + kq = 0$ es lineal, de modo que multiplicar una solución por una constante conserva la ecuación. En el lagrangiano, $\mathcal{A} = m\dot{q}^2 - kq^2 = 2L$. En cambio $D_t F = F_q \dot{q} + F_t$ es a lo sumo lineal en $\dot{q}$. El coeficiente cuadrático m impide la identidad para todas las velocidades. □

Si se ignorara esa condición, se propondría la carga pq. Pero su derivada sobre soluciones es $m\dot{q}^2 - kq^2$, generalmente no nula. La igualdad de las ecuaciones transformadas no sustituye la comprobación variacional.

Una simetría discreta tampoco proporciona por sí sola el generador infinitesimal que usa este teorema. La reflexión $q \mapsto -q$ del oscilador conserva el modelo, pero no implica que el signo de q se conserve durante una oscilación. La ausencia de una carga obtenida por esta versión de Noether no equivale a ausencia de consecuencias físicas de la simetría.

En sistemas con vínculos, la transformación debe preservar las configuraciones y movimientos permitidos. Una traslación que saque una masa de su guía no es una simetría admisible del modelo reducido, aunque conserve la energía de una partícula libre en el espacio. Para fuerzas no conservativas o restricciones no holónomas deben mantenerse las hipótesis y los balances correspondientes; no se extiende el teorema por cambiar sólo el nombre de las fuerzas.

Proposición 27.14 — La carga bajo una derivada total. Si $L' = L + D_t G(q, t)$ y el generador es una simetría con borde F para L, entonces es una simetría para L' con

$$F' = F + \tau G_{,t} + \sum_a \xi^a G_{,q^a}.$$

Con esta elección, la carga de Noether conserva exactamente su expresión como función de posiciones, velocidades y tiempo.

Demostración. El término añadido a la acción es una diferencia de valores de G en los extremos. Su variación inducida es la diferencia de $XG = \tau G_{,t} + \sum_a \xi^a G_{,q^a}$ en esos extremos; localmente la

densidad añadida varía como $D_t(XG)$. Así el nuevo borde es $F+XG$. Por capítulo 26, $p'_a = p_a + G_{,q^a}$ y $E_{L'} = E_L - G_{,t}$. Al sustituir en $\sum_a p'_a \xi^a - E_{L'}\tau - F'$, todos los términos con G se cancelan. □

La expresión de un momento conjugado puede cambiar mientras la carga completa permanezca igual. Para comparar dos lagrangianos equivalentes hay que transformar también su término de borde.

14. Dependencia entre cargas y reconstrucción del movimiento

El teorema asocia una carga a cada generador variacional, pero no afirma que todas las cargas resultantes sean funcionalmente independientes. Tampoco exige que los generadores sean transformaciones espaciales constantes.

Proposición 27.15 — Simetrías de desplazamiento por soluciones del oscilador. Para $L = m(\dot q^2 - \omega^2 q^2)/2$, sea $f(t)$ cualquier solución de $\ddot f + \omega^2 f = 0$. La transformación infinitesimal $\xi = f(t)$, $\tau = 0$ es una cuasisimetría con $F = mq\dot f$ y carga

$$J_f = m(\dot q f - q\dot f).$$

Para $f_c = \cos\omega t$ y $f_s = \sin\omega t$,

$$J_c = m(\dot q\cos\omega t + \omega q\sin\omega t), \qquad J_s = m(\dot q\sin\omega t - \omega q\cos\omega t),$$

$$E_L = \frac{J_c^2 + J_s^2}{2m}.$$

Demostración. La variación es $\delta L = -m\omega^2 q f + m\dot q\dot f$. Por la ecuación de f, eso coincide con $D_t(mq\dot f)$. Proposición 27.3 da la carga. Sustituir seno y coseno produce las dos expresiones; sumar sus cuadrados cancela los términos cruzados y da $m^2(\dot q^2 + \omega^2 q^2)$, que prueba la relación energética. □

Las dos cargas recuperan directamente los datos iniciales: $J_c = m\dot q(0)$ y $J_s = -m\omega q(0)$. La energía es una función de ambas, no una tercera constante independiente que aporte otro dato inicial. Esta dependencia evita contar conservaciones como si cada fórmula añadiera una nueva libertad para resolver la trayectoria.

En los problemas centrales, las conservaciones de energía y momento angular permiten reducir el movimiento a una ecuación radial y una reconstrucción angular. En otros sistemas, una carga identifica una dirección de movimiento sin resolver por completo el problema. La utilidad de Noether consiste en obtener esas relaciones a partir de una identidad del modelo, con sus hipótesis y sus términos de borde visibles.

El capítulo 28 reorganizará la dinámica usando posiciones y momentos como variables independientes. Allí las cantidades conservadas podrán compararse con la estructura del flujo hamiltoniano; la correspondencia variacional demostrada aquí seguirá siendo su fundamento mecánico.

15. Ejercicios

Ejercicio 27.1 — Cíclica no significa velocidad constante.
En $L = m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2)/2 - V(r)$, deduce la conservación angular y explica qué ocurre con $\dot\theta$ si el radio se duplica manteniendo un momento angular no nulo.

Ejercicio 27.2 — Una derivada que se anula en el equilibrio.
Para el oscilador armónico, $L_{,q} = 0$ cuando $q = 0$. Explica por qué eso no convierte q en cíclica y calcula la derivada del momento conjugado sobre una solución.

Ejercicio 27.3 — Rotar posiciones y velocidades.

Para una partícula libre plana, usa $\xi = (-y, x)$ para calcular $\delta\dot{x}, \delta\dot{y}$, verificar $\delta L = 0$ y hallar la carga.

Ejercicio 27.4 — Una carga propuesta incorrectamente.

En el oscilador, calcula $D_t(pq)$ y demuestra con una solución concreta que no es constante. Identifica qué condición de Noether falla para $\xi = q$.

Ejercicio 27.5 — Trasladar verticalmente bajo gravedad.

Para $L = m\dot{y}^2/2 - mgy$, encuentra el término de borde de una traslación vertical y su carga. Evalúala para $y = y_0 + v_0 t - gt^2/2$.

Ejercicio 27.6 — Boost vertical bajo gravedad.

En ejercicio 27.5, usa ahora $\xi = t$, $\tau = 0$. Encuentra $F(y, t)$ y la carga, y comprueba su valor sobre la trayectoria de caída libre.

Ejercicio 27.7 — Un boost finito.

Para una partícula libre en una dimensión, calcula exactamente $L(\dot{q}+u) - L(\dot{q})$. Escríbelo como derivada total y recupera la carga infinitesimal usando u como parámetro.

Ejercicio 27.8 — Conservar un solo eje.

Una partícula tiene potencial $V = k(x^2 + y^2)/2 + k_z z^2/2$, con $k, k_z > 0$. Determina la carga de rotación alrededor de z. Si $k_z \neq k$, explica por qué no se pueden deducir del mismo argumento las otras dos componentes angulares.

Ejercicio 27.9 — Traslaciones giroscópicas.

Deriva directamente las cargas K_x, K_y del modelo de §10 y verifica sus derivadas usando las ecuaciones de movimiento.

Ejercicio 27.10 — Centro de la órbita.

Con $\gamma \neq 0$, demuestra que K_y/γ y $-K_x/\gamma$ son las coordenadas constantes del centro de la órbita giroscópica. Relaciónalas con la posición y velocidad instantáneas.

Ejercicio 27.11 — Momento angular mecánico y corregido.

En el mismo modelo, calcula la derivada del momento angular mecánico y la del término $\gamma(x^2 + y^2)/2$. Comprueba la cancelación de la proposición 27.10.

Ejercicio 27.12 — Una dilatación de espacio y tiempo.

Para $L = m\dot{q}^2/2$, usa $\tau = t$ y $\xi = q/2$. Calcula δv, $\mathcal{A}$ y la carga. Verifícala sobre $q = q_0 + v_0 t$.

Ejercicio 27.13 — Potencial homogéneo de grado menos dos.

En varias dimensiones, sea $L = m|\dot{q}|^2/2 - V(q)$, con $V(\lambda q) = \lambda^{-2} V(q)$ para $\lambda > 0$ en una región que excluye singularidades. Demuestra que la dilatación $\tau = 2t$, $\xi = q$ es una simetría y halla su carga.

Ejercicio 27.14 — Olvidar el elemento de tiempo.

Repite ejercicio 27.12 omitiendo incorrectamente el término $LD_t\tau$. Muestra qué conclusión falsa se obtendría y señala dónde se repara el cálculo.

Ejercicio 27.15 — El defecto de una traslación temporal.

Para $L = m\dot{q}^2/2 - k(t)q^2/2$, calcula Δ para $\tau = 1$, $\xi = 0$, $F = 0$. Deduce el balance de E_L desde proposición 27.12.

Ejercicio 27.16 — Torque de un potencial giratorio.

Para $V = \kappa r^2 \cos[2(\theta - \Omega t)]$, calcula $\dot{p}_\theta$ y $\dot{E}_L$, y comprueba la conservación de $E_L - \Omega p_\theta$.

Ejercicio 27.17 — Torque externo.

Un sistema de lagrangiano invariante bajo rotaciones alrededor de z recibe fuerzas adicionales con torque total $\mathcal{T}_z(t)$. Deduce el balance de su carga y su forma integrada entre dos instantes.

Ejercicio 27.18 — Resistencia en un potencial central.
Una partícula de masa m en un potencial central fijo $V(|\mathbf{r}|)$ recibe resistencia $-b\dot{\mathbf{r}}$, con $b > 0$ constante. Deduce $\mathbf{H}(t)$ y el balance energético. ¿La simetría rotacional de las ecuaciones basta para conservar $\mathbf{H}$?

Ejercicio 27.19 — Cuánto cambia una carga casi conservada.
En el oscilador anisótropo de §12, supón $|k_x - k_y| = 0{,}02\,\mathrm{N/m}$, $|x| \le 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $|y| \le 0{,}20\,\mathrm{m}$ durante diez segundos. Acota el cambio de momento angular y explica el papel de la duración.

Ejercicio 27.20 — Una transformación que viola el vínculo.
Una partícula está confinada a una circunferencia fija. Explica por qué una traslación cartesiana común no es una transformación admisible del modelo, aunque una partícula libre en el plano tenga simetría de traslación. ¿Qué ocurre con las rotaciones sobre el centro si no hay potencial angular?

Ejercicio 27.21 — Reflexión del oscilador.
Verifica que $q \mapsto -q$ conserva el lagrangiano armónico. Explica por qué no implica conservación de q ni de su signo y qué dato falta para aplicar la demostración infinitesimal.

Ejercicio 27.22 — Un lagrangiano equivalente menos transparente.
Sea $L' = m\dot{q}^2/2 + D_t(ctq)$, con c constante. Para las traslaciones de q y de t, encuentra los nuevos términos de borde y comprueba que las cargas completas siguen siendo el momento y la energía libres, con la convención de signo temporal del capítulo.

Ejercicio 27.23 — Otra expresión del modelo giroscópico.
Añade $D_t(\gamma xy/2)$ al lagrangiano de §10. Calcula las cargas de ambas traslaciones y de la rotación usando el lagrangiano nuevo. Demuestra que coinciden con las anteriores.

Ejercicio 27.24 — Reconstruir el oscilador con sus cargas.
A partir de J_c, J_s de la proposición 27.15, despeja $q(t)$ y $\dot{q}(t)$. Comprueba que contienen los dos datos iniciales de la ecuación de segundo orden.

Ejercicio 27.25 — Tres fórmulas, dos datos.
Demuestra la relación energética de la proposición 27.15 y explica por qué J_c, J_s, E_L no son tres integrales funcionalmente independientes.

Ejercicio 27.26 — Una simetría de frecuencia equivocada.
En un oscilador de frecuencia ω, toma $\xi = f(t)$, donde $\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0$ con $\omega_0 \neq \omega$. Conserva el borde candidato $F = mq\dot{f}$. Calcula el defecto y la derivada de la carga propuesta.

Ejercicio 27.27 — Fuerza uniforme en varias dimensiones.
Para $L = m|\dot{\mathbf{r}}|^2/2 + \mathbf{f}\cdot\mathbf{r}$, con $\mathbf{f}$ constante, encuentra el término de borde de una traslación $\xi = \mathbf{n}$ y la carga asociada.

Ejercicio 27.28 — Una conservación en un sistema forzado.
Sea $L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - V(x)$ y fuerzas adicionales $Q_x = cy$, $Q_y = 0$. Demuestra que p_y se conserva. ¿La traslación de y preserva necesariamente las ecuaciones forzadas completas?

Ejercicio 27.29 — Carga trivial en un lagrangiano degenerado.
Considera $L = m(\dot{q}^1 + \dot{q}^2)^2/2$ y $\xi = (1, -1)$, $\tau = 0$. Halla la carga. ¿Necesita la identidad de la proposición 27.5 que el Hessiano sea invertible? Distingue esa identidad de la unicidad de la evolución.

Ejercicio 27.30 — Un oscilador anisótropo que gira.
Un potencial cuadrático gira con velocidad prescrita Ω. Define $X = x\cos\Omega t + y\sin\Omega t$ y $Y = -x\sin\Omega t + y\cos\Omega t$, y toma $V = (k_x X^2 + k_y Y^2)/2$. Encuentra la simetría combinada y su carga. Escribe el lagrangiano en (X, Y) y comprueba que su energía es la misma combinación de energía inercial y momento angular.

16. Soluciones

Solución del ejercicio 27.1.

La coordenada θ es cíclica, así que $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ es constante. Si el radio se duplica, r^2 se cuadruplica y $\dot{\theta}$ debe dividirse por cuatro. La conservación del momento no conserva por separado ninguno de los dos factores geométrico y cinemático. El ejemplo requiere un movimiento que efectivamente alcance ambos radios con el mismo momento.

Solución del ejercicio 27.2.

Para $L = m\dot{q}^2/2 - kq^2/2$, la derivada $L_{,q} = -kq$ sólo se anula en la configuración cero. No es una identidad en una región de coordenadas. El momento $p = m\dot{q}$ cumple $\dot{p} = -kq$ y cambia durante una oscilación no trivial. La coordenada es una variable dinámica sometida a una fuerza restauradora, no una coordenada ausente.

Solución del ejercicio 27.3.

Con tiempo fijo, las variaciones de velocidad son $\delta\dot{x} = -\dot{y}$ y $\delta\dot{y} = \dot{x}$. Entonces $\delta L = m\dot{x}(-\dot{y}) + m\dot{y}\dot{x} = 0$. La carga es $p_x(-y) + p_y x = m(x\dot{y} - y\dot{x})$. Rotar sólo las posiciones y dejar sin transformar las velocidades no describiría la imagen de una trayectoria bajo esa rotación.

Solución del ejercicio 27.4.

Usando la ecuación, $D_t(pq) = m\dot{q}^2 - kq^2$. Para $q = A\cos\omega t$ y $k = m\omega^2$, vale $-mA^2\omega^2\cos 2\omega t$, que no es idénticamente cero. La variación $\xi = q$ produce $\delta L = 2L$, no una derivada total $D_t F(q,t)$ válida para todas las velocidades. La linealidad de las ecuaciones permite escalar soluciones y no satisface por ello la hipótesis variacional.

Solución del ejercicio 27.5.

La variación del lagrangiano por unidad de traslación es $-mg = D_t(-mgt)$. Por tanto $F = -mgt$ y $J = m\dot{y} + mgt$. En la trayectoria indicada, $\dot{y} = v_0 - gt$, así que $J = mv_0$. La dependencia explícita del tiempo en la carga compensa la variación del momento vertical.

Solución del ejercicio 27.6.

Ahora $\delta L = -mgt + m\dot{y}$. Se reconoce como $D_t(my - mgt^2/2)$. La carga es $J = tm\dot{y} - my + \frac{1}{2}mgt^2$. Al sustituir $y = y_0 + v_0 t - gt^2/2$ y $\dot{y} = v_0 - gt$, todos los términos temporales se cancelan y queda $J = -my_0$. Este boost de la ecuación con fuerza uniforme conserva una combinación distinta de la del boost libre.

Solución del ejercicio 27.7.

El cambio exacto es $mu\dot{q} + mu^2/2 = D_t(muq + mu^2 t/2)$. Derivar en $u = 0$ da el generador $\xi = t$ y el borde infinitesimal $F = mq$. Por tanto $J = tm\dot{q} - mq$. La contribución cuadrática finita no cambia la carga infinitesimal, pero es necesaria para escribir correctamente la transformación exacta de la acción.

Solución del ejercicio 27.8.

Las rotaciones alrededor de z conservan $x^2 + y^2$, z y la energía cinética, así que conservan $H_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$. Si $k_z \neq k$, una rotación que mezcle z con x o y cambia en general el potencial. Por ejemplo, el torque sobre el eje x es $y(-k_z z) - z(-ky) = (k - k_z)yz$, no idénticamente cero. No hay conservación general de esa componente.

Solución del ejercicio 27.9.

Las derivadas de posición de L son $L_{,x} = \gamma\dot{y}/2$ y $L_{,y} = -\gamma\dot{x}/2$. Los bordes de las dos traslaciones son $F_x = \gamma y/2$ y $F_y = -\gamma x/2$. Al restarlos de los momentos conjugados resultan $K_x = m\dot{x} - \gamma y$ y $K_y = m\dot{y} + \gamma x$. Sus derivadas son $m\ddot{x} - \gamma\dot{y} = 0$ y $m\ddot{y} + \gamma\dot{x} = 0$, respectivamente.

Solución del ejercicio 27.10.

Se tiene $K_y/\gamma = x + (m/\gamma)\dot{y}$ y $-K_x/\gamma = y - (m/\gamma)\dot{x}$. Ambas expresiones son constantes por el ejercicio 27.9. Las diferencias entre la posición y ese punto son $x - x_c = -m\dot{y}/\gamma$ y $y - y_c = m\dot{x}/\gamma$, perpendiculares a la velocidad. Como la rapidez es constante, la distancia al punto es $m|\dot{\mathbf{r}}|/|\gamma|$, constante. Ése es el centro de la órbita circular, incluyendo la solución de reposo como radio cero.

Solución del ejercicio 27.11.

Derivar $H_{\text{mec}} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ deja $m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = -\gamma(x\dot{x} + y\dot{y})$. La derivada de la corrección es $\gamma(x\dot{x}+y\dot{y})$. Se cancelan exactamente. La fuerza giroscópica realiza potencia nula, pero puede realizar torque sobre el origen; conservación de energía y conservación de momento angular mecánico son condiciones distintas.

Solución del ejercicio 27.12.

Aquí $D_t\tau = 1$, $D_t\xi = \dot{q}/2$, de modo que $\delta v = -\dot{q}/2$. La variación del valor de L es $-m\dot{q}^2/2 = -L$, y al añadir $LD_t\tau$ queda $\mathcal{A} = 0$. La carga es $J = pq/2 - tE_L$. En una solución libre, $J = mv_0(q_0 + v_0t)/2 - tmv_0^2/2 = mv_0q_0/2$. La dilatación cambia simultáneamente la escala temporal y espacial.

Solución del ejercicio 27.13.

Derivar la homogeneidad en $\lambda = 1$ da $q \cdot \nabla V = -2V$. Para $\tau = 2t$, $\xi = q$, la variación de velocidad es $\delta\dot{q} = \dot{q} - 2\dot{q} = -\dot{q}$. La energía cinética varía en $-2T$ y el potencial en $-2V$, así que $\delta L = -2T + 2V = -2L$. El elemento temporal aporta $2L$ y $\mathcal{A} = 0$. Por tanto se conserva $J = q \cdot p - 2tE_L$. La región debe excluir singularidades de V para que la transformación y sus derivadas sean admisibles.

Solución del ejercicio 27.14.

Sin el término del elemento temporal se obtendría $\mathcal{A}_{\text{err}} = -L$, y se concluiría que la dilatación libre no es una simetría estricta. El error está en tratar la acción como si el intervalo y el elemento dt no se transformaran. En ejercicio 27.12, $\delta(dt) = dt$ por unidad de parámetro y añade exactamente L, anulando el supuesto defecto. La carga correcta sí es constante.

Solución del ejercicio 27.15.

Para ese generador, $\mathcal{A} = L_{,t} = -\dot{k}(t)q^2/2$ y $F = 0$, así que $\Delta = -\dot{k}q^2/2$. La carga candidata es $J = -E_L$. Proposición 27.12 da $-\dot{E}_L = -\dot{k}q^2/2$, o $\dot{E}_L = \dot{k}q^2/2$. Si la rigidez cambia externamente, la traslación temporal no es una simetría del lagrangiano en general; su defecto produce el intercambio energético.

Solución del ejercicio 27.16.

Con $\psi = \theta - \Omega t$, $V_{,\theta} = -2\kappa r^2 \sin 2\psi$, por lo que $\dot{p}_\theta = 2\kappa r^2 \sin 2\psi$. La derivada parcial temporal de V es $2\Omega\kappa r^2 \sin 2\psi$, y $\dot{E}_L = V_{,t} = \Omega\dot{p}_\theta$. Así $D_t(E_L - \Omega p_\theta) = 0$. El radio puede variar; no se ha supuesto una órbita circular para obtener la identidad.

Solución del ejercicio 27.17.

Para el generador de rotación, $\tau = 0$ y el trabajo virtual de las fuerzas adicionales es su torque sobre el eje. Proposición 27.12 da $\dot{J}_z = \mathcal{T}_z(t)$. Integrar produce $J_z(t_1) - J_z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T}_z(t)dt$. Si los momentos conjugados son los mecánicos habituales, es el balance de impulso angular del capítulo 15. En otros lagrangianos debe identificarse primero la carga completa.

Solución del ejercicio 27.18.

El torque resistente es $\mathbf{r} \times (-b\dot{\mathbf{r}}) = -(b/m)\mathbf{H}$. Cada componente satisface una ecuación lineal, así que $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}(0)e^{-bt/m}$. La energía mecánica cumple $\dot{E} = -b|\dot{\mathbf{r}}|^2$. Las ecuaciones siguen siendo rotacionalmente covariantes, pero la fuerza adicional ejerce torque y rompe la conservación de $\mathbf{H}$. La dirección de un momento angular inicial no nulo permanece fija mientras su módulo decae.

Solución del ejercicio 27.19.

La cota de la derivada es $0{,}02 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}20 = 0{,}0004\,\mathrm{N\,m}$. Integrar durante diez segundos da $|\Delta H_z| \le 0{,}004\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Es una cota del cambio absoluto, no relativo. Para juzgar si es pequeño frente al movimiento concreto se necesita una escala inicial de momento angular; una diferencia pequeña de rigideces no garantiza por sí sola conservación aproximada indefinida.

Solución del ejercicio 27.20.

Una traslación $r \mapsto r+\varepsilon n$ cambia $|r|^2$ en $2\varepsilon r\cdot n+\varepsilon^2|n|^2$ y no preserva la circunferencia en general. Su generador tampoco es tangente en todos los puntos. No es una transformación permitida del sistema reducido. Las rotaciones sobre el centro sí preservan el vínculo; si tampoco cambian un potencial angular, la coordenada del ángulo es cíclica y se conserva $m\ell^2\dot\theta$.

Solución del ejercicio 27.21.

Al cambiar simultáneamente q y $\dot q$ por sus opuestos, ambos cuadrados de L permanecen iguales. Sin embargo, $q = A\cos\omega t$ atraviesa el origen y cambia de signo. La reflexión aislada no suministra una familia infinitesimal desde la identidad, con generador y borde, a la que aplicar proposición 27.5. Puede relacionar soluciones entre sí sin proporcionar la supuesta conservación del signo de una coordenada.

Solución del ejercicio 27.22.

Al expandir, $L' = m\dot q^2/2 + cq + ct\dot q$. El momento es $p' = m\dot q + ct$ y la energía $E' = m\dot q^2/2 - cq$. Para una traslación de q, $\delta L' = c = D_t(ct)$; la carga es $p' - ct = m\dot q$. Para una traslación de tiempo, $\mathcal{A} = L'_{,t} = c\dot q = D_t(cq)$ y la carga es $-E' - cq = -m\dot q^2/2$. Los momentos y la energía sin el borde darían expresiones engañosas; la carga completa coincide con la del lagrangiano libre.

Solución del ejercicio 27.23.

El nuevo lagrangiano es $L' = m(\dot x^2+\dot y^2)/2 + \gamma x\dot y$. Sus momentos son $p'_x = m\dot x$, $p'_y = m\dot y + \gamma x$. La traslación de x tiene borde $F'_x = \gamma y$ y conserva $p'_x - F'_x = K_x$. La traslación de y es estricta y conserva $p'_y = K_y$.

Para la rotación, proposición 27.14 da $F'_{rot} = \gamma(x^2-y^2)/2$, pues el borde antiguo era cero y el generador actúa sobre $G = \gamma xy/2$. Entonces

$$-yp'_x + xp'_y - F'_{rot} = m(x\dot y - y\dot x) + \frac{\gamma}{2}(x^2+y^2) = J_z.$$

Las tres cargas quedan invariantes bajo el cambio de expresión del lagrangiano.

Solución del ejercicio 27.24.

Multiplicar J_c por $\sin\omega t$ y restar $J_s\cos\omega t$ elimina la velocidad. Sumar $J_c\cos\omega t + J_s\sin\omega t$ elimina la posición. Resulta

$$q(t) = \frac{J_c\sin\omega t - J_s\cos\omega t}{m\omega}, \qquad \dot q(t) = \frac{J_c\cos\omega t + J_s\sin\omega t}{m}.$$

En cero, $q_0 = -J_s/(m\omega)$ y $v_0 = J_c/m$. Las dos constantes reconstruyen exactamente el problema inicial del capítulo 23.

Solución del ejercicio 27.25.

Al sumar los cuadrados, los términos cruzados $2m^2\omega q\dot q\sin\omega t\cos\omega t$ se cancelan. Los restantes se agrupan en $m^2(\dot q^2+\omega^2 q^2)$ por $\sin^2+\cos^2 = 1$. Así $J_c^2 + J_s^2 = 2mE_L$. La tercera función es una combinación explícita de las dos primeras y no añade un dato independiente. En estados especiales pueden reducirse aún más los rangos de sus derivadas; el teorema no impone independencia automática.

Solución del ejercicio 27.26.

La variación es $\mathcal{A} = m\dot{q}\dot{f} - m\omega^2 qf$. El borde candidato da $D_t F = m\dot{q}\dot{f} + mq\ddot{f} = m\dot{q}\dot{f} - m\omega_0^2 qf$. Por tanto

$$\Delta = m(\omega_0^2 - \omega^2)qf, \qquad \dot{J}_f = m(\omega_0^2 - \omega^2)qf.$$

La segunda igualdad se obtiene de la proposición 27.12 o derivando $J_f = m(\dot{q}f - q\dot{f})$ y usando ambas ecuaciones. El generador de frecuencia equivocada deja un defecto que puede acumularse durante la evolución.

Solución del ejercicio 27.27.

La traslación produce $\delta L = \mathbf{f}\cdot\mathbf{n} = D_t[t\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}]$. Con $F = t\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}$, la carga es $J = \mathbf{n}\cdot(m\dot{\mathbf{r}} - t\mathbf{f})$. Su derivada es cero porque Newton da $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$. Para tres direcciones independientes se conserva el vector corregido, que representa el momento inicial.

Solución del ejercicio 27.28.

La coordenada y es cíclica en L y la fuerza adicional de esa componente es cero. Su ecuación es $\dot{p}_y = Q_y = 0$, de modo que $p_y = m\dot{y}$ permanece constante. Pero la ecuación de x es $m\ddot{x} + V'(x) = cy$. Trasladar y por una constante cambia su miembro derecho si $c \neq 0$. La conservación resulta del balance proyectado y no obliga a que todo el sistema forzado posea esa simetría espacial.

Solución del ejercicio 27.29.

El generador no modifica $\dot{q}^1 + \dot{q}^2$, por lo que $\mathcal{A} = 0$. Los momentos son iguales: $p_1 = p_2 = m(\dot{q}^1 + \dot{q}^2)$. La carga $J = p_1 - p_2$ es idénticamente cero. La demostración algebraica de la proposición 27.5 no usa la inversa del Hessiano y sigue siendo válida. La regularidad se necesita para conclusiones como despejar aceleraciones y garantizar evolución local única; no para esa identidad formal. Aquí la simetría produce una carga trivial y la diferencia de coordenadas no queda dinámicamente determinada.

Solución del ejercicio 27.30.

La transformación combinada tiene $\tau = 1$ y $\xi = (-\Omega y, \Omega x)$. Avanzar el reloj y girar las posiciones el mismo ángulo deja X, Y invariantes. La energía cinética también es invariante, por lo que $F = 0$ y se conserva la opuesta de la carga convencional,

$$\mathcal{J} = E - \Omega H_z, \quad E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V, \quad H_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Al expresar las velocidades inerciales en las coordenadas giratorias,

$$\widetilde{L} = \frac{m}{2}[(\dot{X} - \Omega Y)^2 + (\dot{Y} + \Omega X)^2] - \frac{1}{2}(k_x X^2 + k_y Y^2).$$

No depende explícitamente del tiempo. Su energía es

$$E_{\widetilde{L}} = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{m\Omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + V.$$

Por otro lado, $H_z = m[X\dot{Y} - Y\dot{X} + \Omega(X^2 + Y^2)]$. Expandir la energía cinética inercial y restar ΩH_z cancela el término cruzado y deja exactamente $E_{\widetilde{L}}$. Si $k_x \neq k_y$, ni E ni H_z tienen que conservarse por separado; el intercambio impuesto por el patrón giratorio conserva su combinación.

Notas y lecturas

1. La forma de Noether a tiempo fijo, las coordenadas cíclicas y las aplicaciones a traslaciones y rotaciones pueden contrastarse con David Tong, *Classical Dynamics*, §2.4, en los apuntes oficiales

de University of Cambridge. Texto del capítulo. La extensión con transformación temporal y borde se demuestra aquí mediante la identidad proposición 27.5.

2. Los signos de las cargas dependen del generador elegido. En este capítulo una traslación temporal con $\tau = 1$, $\xi = 0$ produce $-E_L$, y un boost con $\xi = t\mathbf{n}$ produce $\mathbf{n} \cdot (t\mathbf{P} - M\mathbf{C})$. Cambiar el signo del generador cambia el de la carga y conserva el mismo contenido de conservación.
3. El teorema se formula para generadores puntuales y bordes $F(q, t)$. No se afirma que esta clase contenga todas las formas posibles de simetría o todas las integrales del movimiento, ni que las cargas obtenidas sean independientes. Las generalizaciones a campos y corrientes conservadas corresponden al Tomo IV.

Capítulo 28

Mecánica hamiltoniana

La mecánica lagrangiana describe el movimiento mediante posiciones y velocidades. Sus ecuaciones determinan las aceleraciones cuando la matriz de derivadas segundas respecto de las velocidades es invertible. Los momentos conjugados, introducidos al variar la acción, ofrecen entonces otra manera de especificar el mismo estado: podemos sustituir las velocidades por los momentos y escribir la evolución como un sistema de primer orden.

Ese cambio organiza de forma especialmente clara las leyes de conservación del capítulo 27. Una coordenada cíclica conserva su momento; la invariancia temporal conserva una función de energía; ambas afirmaciones pasarán a leerse directamente en una única función, el hamiltoniano. La sustitución exige conservar la información del lagrangiano, controlar los dominios y distinguir los momentos de las velocidades multiplicadas por la masa.

Construiremos primero esa sustitución mediante la transformada de Legendre. Después deduciremos las ecuaciones de Hamilton, estudiaremos ejemplos y recuperaremos una acción cuyas variables independientes son posiciones y momentos. Trabajaremos con un número finito de grados de libertad, coordenadas locales independientes y lagrangianos suaves. La estructura geométrica que hace compatibles las diferentes coordenadas del espacio de fases será el asunto central del capítulo 29.

1. Del estado mecánico al espacio de fases

Para un oscilador, conocer la elongación no basta para predecir el movimiento: el cuerpo puede pasar por esa posición en sentidos opuestos. Un estado debe contener también información de velocidad. En una carta de un espacio de configuraciones Q de dimensión n, escribimos ese estado como (q, v), con $v = \dot{q}$.

Un momento conjugado tiene componentes

$$p_a(q, v, t) = \frac{\partial L}{\partial v^a}(q, v, t), \qquad a = 1, \dots, n.$$

La pareja (q, p) puede servir como estado si permite reconstruir v. El problema es algebraico en cada posición y tiempo; todavía no hemos resuelto ninguna ecuación diferencial.

Definición 28.1 — Transformación de Legendre mecánica. La aplicación que sustituye las velocidades por los momentos es

$$\mathbb{F}L_t : (q, v) \longmapsto (q, p), \qquad p = L_{,v}(q, v, t).$$

Actúa sobre las velocidades manteniendo fijos q y t. Cuando el tiempo cambia, tenemos una familia de aplicaciones.

¿Por qué escribir el momento con un índice inferior? Bajo un cambio de coordenadas independiente del tiempo $q = f(Q)$, la regla de la cadena da

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i} = \sum_a p_a \frac{\partial q^a}{\partial Q^i}.$$

Así se transforman las componentes de una forma lineal sobre los desplazamientos. La expresión $\sum_a p_a\,\delta q^a$ es independiente de la carta. Por eso el espacio natural de pares posición–momento es el fibrado cotangente T^*Q.

Definición 28.2 — Espacio de fases canónico. Es el espacio T^*Q de posiciones y covectores momento. En una carta se representa mediante $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ y tiene dimensión $2n$. Cuando el modelo depende del tiempo, éste se añade como parámetro de la evolución, sin contarlo entre esas $2n$ coordenadas.

Esta descripción ya distingue varios dominios. Para un péndulo, $Q = S^1$ y T^*Q es un cilindro: el ángulo es periódico y su momento recorre una recta. Dibujar un plano con ángulo horizontal produce una representación repetida de ese cilindro, no posiciones físicas diferentes cada vez que añadimos 2π.

2. Pendientes y transformada de Legendre

Consideremos primero una función real $\ell(v)$. Su derivada $p = \ell'(v)$ asigna una pendiente a cada velocidad. Si podemos invertir esa relación en una región, definimos $h(p) = p\,v(p) - \ell(v(p))$.

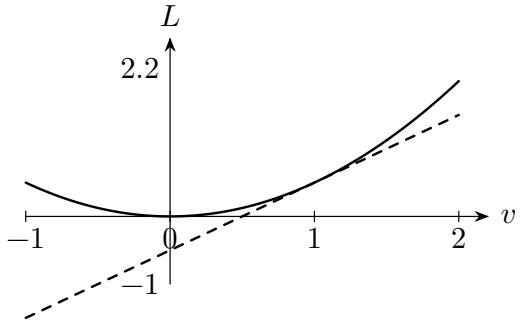


Figura 28.1. Para $L(v) = v^2/2$, la tangente en $v = 1$ tiene pendiente $p = 1$ y ordenada al origen $-H = -1/2$. La transformada es $H = pv - L = v^2/2$ en ese punto. Véase §2.

Al derivar, los términos que contienen $v'(p)$ se cancelan: $h'(p) = v + p\,v' - \ell'(v)v' = v$. La nueva función contiene la relación inversa. Para $\ell(v) = mv^2/2$, con $m > 0$, tenemos $p = mv$, $v = p/m$ y $h = p^2/(2m)$. Los factores físicos importan: p tiene unidades de momento lineal y h de energía, mientras que h' tiene unidades de velocidad.

Proposición 28.1 — Inversión local en una variable. Si ℓ es C^2 y $\ell''(v_0) \neq 0$, existe una inversión local $v = v(p)$ cerca de $p_0 = \ell'(v_0)$. En ese entorno,

$$h'(p) = v(p), \qquad h''(p) = \frac{1}{\ell''(v(p))}.$$

Demostración. El teorema de la función inversa se aplica a $v \mapsto \ell'(v)$. La primera identidad se obtuvo por la regla de la cadena; derivarla y usar $1 = \ell''(v)v'$ da la segunda. □

La condición local no exige convexidad. Para $\ell = -v^2/2$ obtenemos $p = -v$ y $h = -p^2/2$: existe una transformación mecánica invertible, aunque el lagrangiano tenga curvatura negativa. La

positividad cinética será una propiedad física de muchos modelos, no una condición lógica de toda transformación local.

Otra construcción, usual en análisis convexo, define el conjugado por $\ell^*(p) = \sup_v\{pv - \ell(v)\}$. Esta fórmula selecciona máximos globales y puede producir valores infinitos. Coincide con la construcción anterior bajo hipótesis convexas apropiadas. No debemos usarla sin esas hipótesis para justificar cualquier cambio mecánico de variables.

3. Regularidad local y dominios globales

Definición 28.3 — Regularidad y regularidad global. Un lagrangiano es regular en una región si la matriz

$$W_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b}$$

es invertible en cada punto de ella. Diremos que su transformación de Legendre es globalmente invertible en los dominios especificados si constituye un difeomorfismo entre esos dominios; cuando esto ocurre en todas las fibras completas hacia sus duales, se suele llamar hiperrregular.

Proposición 28.2 — Inversión por fibras. Si $W(q_0, v_0, t_0)$ es invertible, la relación $p = L_{,v}(q, v, t)$ determina una función local suave $v = V(q, p, t)$, y

$$\frac{\partial V^a}{\partial p_b} = (W^{-1})^{ab}.$$

Demostración. Aplicamos el teorema de la función implícita al sistema $L_{,v}(q, v, t) - p = 0$, cuya derivada respecto de v es W. Derivar el sistema respecto de p_b, con q, t fijos, da $W_{ac}\,\partial V^c/\partial p_b = \delta_a{}^b$. □

Una matriz invertible en varios puntos no garantiza una única inversa global. Para

$$\ell(v) = \frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2}, \qquad p = v^3 - v,$$

el momento $p = 0$ corresponde a $v = -1, 0, 1$. Los tres puntos son regulares porque $3v^2 - 1$ vale respectivamente $2, -1, 2$. Cada uno admite su propia rama local; mezclarlas perdería la información de qué estado estamos describiendo.

Incluso una función estrictamente convexa puede no generar todos los momentos. Si $\ell(v) = e^v$, entonces $p = e^v > 0$; su inversa $v = \log p$ sólo está definida para $p > 0$. La regularidad debe acompañarse de un dominio declarado.

Proposición 28.3 — Una condición suficiente global. Fijados q, t, supongamos que L está definida en toda $\mathbb{R}^n$, su hessiana en velocidades es positiva definida y es superlineal:

$$\frac{L(q, v, t)}{\|v\|} \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando } \|v\| \longrightarrow \infty.$$

Entonces cada $p \in \mathbb{R}^n$ corresponde a una única velocidad. El valor $p \cdot v - L$ en ella es el conjugado convexo.

Demostración. La función $L - p \cdot v$ tiende a $+\infty$ en el infinito, por lo que alcanza un mínimo. La hessiana positiva definida implica convexidad estricta: al restringir a cualquier segmento no constante, la segunda derivada es positiva. El mínimo es único y satisface $L_{,v} = p$. La regularidad proporciona una inversa suave alrededor de cada punto; la unicidad permite unir esas inversas. Cambiar el signo convierte ese mínimo en el máximo que define el conjugado. □

Esta proposición es suficiente, no necesaria. En coordenadas locales de una variedad, el dominio de velocidades considerado también puede estar restringido; la afirmación global se refiere a la fibra completa indicada en sus hipótesis.

4. Construcción del hamiltoniano

Definición 28.4 — Hamiltoniano asociado a una rama regular. Si $v = V(q,p,t)$ es la inversa elegida, ponemos

$$H(q,p,t) = \sum_a p_a V^a(q,p,t) - L(q, V(q,p,t), t).$$

Es la función de energía del capítulo 26 escrita en las variables nuevas. Su interpretación como energía física depende del modelo y del marco de referencia.

Proposición 28.4 — Identidad diferencial fundamental. Evaluando las derivadas de L en $v = V(q,p,t)$,

$$dH = \sum_a V^a \, dp_a - \sum_a L_{,q^a} \, dq^a - L_{,t} \, dt.$$

En particular, $H_{,p_a} = V^a$, $\qquad H_{,q^a} = -L_{,q^a}$, $\qquad H_{,t} = -L_{,t}$.

Demostración. Diferenciamos la definición sin omitir la dependencia de V:

$$dH = V^a dp_a + p_a dV^a - L_{,q^a} dq^a - L_{,v^a} dV^a - L_{,t} dt.$$

Usamos suma sobre índices repetidos. Los términos en dV^a se anulan porque $L_{,v^a} = p_a$. Quedan las tres identidades. □

La cancelación es el centro del método. Al derivar H respecto de q mantenemos fijo p; al derivar L respecto de q mantenemos fijo v. La igualdad relaciona esos dos procedimientos después de efectuar la sustitución. Sustituir primero $p = mv$ y luego derivar manteniendo fija la variable equivocada produce ecuaciones distintas.

También resulta $H_{,p_a p_b} = (W^{-1})^{ab}$. Así, la regularidad puede comprobarse desde cualquiera de las dos descripciones. La transformación inversa reconstruye $L = p \cdot v - H$ después de invertir $v = H_{,p}$. Se recupera el lagrangiano inicial en la misma rama, sin una pérdida local de información.

5. Las ecuaciones de Hamilton

Definición 28.5 — Ecuaciones canónicas de Hamilton. Son las $2n$ ecuaciones de primer orden

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}.$$

Proposición 28.5 — Equivalencia dinámica local. En una rama regular, las soluciones de Euler–Lagrange se corresponden con las soluciones de Hamilton mediante $p = L_{,v}$ y $v = V(q,p,t)$, mientras permanezcan en los dominios de esa rama.

Demostración. Si $q(t)$ satisface Euler–Lagrange, definimos $p(t) = L_{,v}(q, \dot{q}, t)$. La inversión da $\dot{q} = V = H_{,p}$. Además $\dot{p} = L_{,q} = -H_{,q}$. Recíprocamente, una solución canónica satisface $\dot{q} = V$, de donde $p = L_{,v}(q, \dot{q}, t)$; su segunda ecuación se convierte en $dL_{,v}/dt = L_{,q}$. Ambas construcciones se invierten en la rama elegida. □

Los datos iniciales son $q(t_0) = q_0$, $p(t_0) = p_0$. Si H es C^2 en una región abierta, el campo de las ecuaciones es localmente lipschitziano en (q, p) y el problema inicial tiene solución local única. La existencia para todo tiempo requiere más información: una trayectoria puede escapar de la región de coordenadas, alcanzar una singularidad física o crecer sin cota.

Si hay fuerzas generalizadas adicionales $\mathcal{Q}_a(q, v, t)$, la equivalencia anterior da

$$\dot{q}^a = H_{,p_a}, \qquad \dot{p}_a = -H_{,q^a} + \mathcal{Q}_a(q, V, t).$$

La segunda ecuación incluye el término de fuerza; ya no es el sistema canónico del mismo H por sí solo. Para un amortiguador $\mathcal{Q} = -bv$, con $H = p^2/(2m) + kq^2/2$, obtenemos $\dot{p} = -kq - bp/m$. El momento sigue siendo una variable útil aunque la energía disminuya.

6. Lagrangianos cuadráticos y momentos desplazados

Consideremos la familia del capítulo 26: $L = \frac{1}{2} v^{\mathsf{T}} G(q,t) v + a(q,t)^{\mathsf{T}} v + c(q,t) - V(q,t)$,

con G simétrica invertible. En los modelos cinéticos ordinarios es positiva definida. El término lineal modifica el momento: $p = Gv + a, \qquad v = G^{-1}(p - a)$.

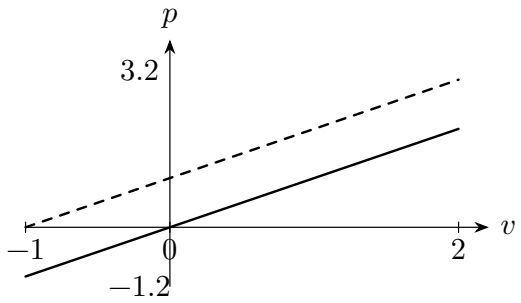


Figura 28.2. Para $L = v^2/2 + av - U$, el momento es $p = v + a$. Las dos rectas comparan $a = 0$ y $a = 1$. Invertir la relación exige conservar ese desplazamiento al construir $H = (p-a)^2/2 + U$. Véase §6.

Proposición 28.6 — Hamiltoniano mecánico cuadrático. Para este lagrangiano,

$$H = \frac{1}{2}(p - a)^{\mathsf{T}} G^{-1} (p - a) + V - c.$$

Demostración. Al restar L de $p^{\mathsf{T}} v = (Gv + a)^{\mathsf{T}} v$, el término lineal se cancela y queda $v^{\mathsf{T}} G v/2 + V - c$. Sustituimos la velocidad inversa. □

Aunque a desaparezca de la energía expresada en velocidades, reaparece en $H(q, p, t)$ porque determina qué velocidad corresponde a cada momento. Esa dependencia puede producir fuerzas que no realizan trabajo.

En una dimensión, si $L = m(q)v^2/2 - V(q)$ y $m(q) > 0$,

$$H = \frac{p^2}{2m(q)} + V(q), \qquad \dot{q} = \frac{p}{m(q)}, \qquad \dot{p} = \frac{m'(q)p^2}{2m(q)^2} - V'(q).$$

Sustituir $p = m(q)\dot{q}$ en la última ecuación da $m(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}m'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0$. La derivada de la masa efectiva no representa necesariamente una masa material variable: puede provenir de la geometría de la coordenada. En todos los casos, derivar H a momento fijo es lo que recupera el factor correcto.

7. El oscilador y sus curvas de fase

Para $m, k > 0$, escribimos $\omega = \sqrt{k/m}$ y

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Proposición 28.7 — Flujo del oscilador. Con datos iniciales (q_0, p_0) en $t = 0$,

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t,$$

$$p(t) = p_0 \cos \omega t - m\omega q_0 \sin \omega t.$$

Las trayectorias no estacionarias son elipses de energía constante y período $2\pi/\omega$.

Demostración. Derivar las dos expresiones verifica $\dot q = p/m$ y $\dot p = -m\omega^2 q$, además de los datos iniciales. La unicidad identifica esa solución. Sustituir en H cancela los términos cruzados y conserva $H(q_0, p_0)$. Para energía positiva el nivel es una elipse; en energía cero queda el origen. □

En las coordenadas reescaladas $x = \sqrt{m\omega}\, q$, $y = p/\sqrt{m\omega}$, las elipses se convierten en círculos y las ecuaciones son $\dot x = \omega y$, $\dot y = -\omega x$. Este reescalamiento deja visible el sentido horario de la evolución en el plano (x, y).

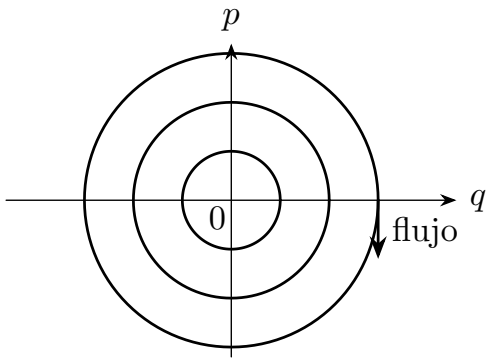


Figura 28.3. Con $m = k = 1$, $H = (q^2 + p^2)/2$. Las curvas de energía son círculos y el flujo gira en sentido horario: en $q > 0, p = 0$, $\dot p = -q < 0$. Véase §7.

En un sistema autónomo, dos órbitas distintas no pueden cruzarse en un estado regular: si pasan por el mismo punto, la unicidad, junto con una traslación del origen temporal, las hace partes de una misma órbita. Para un sistema dependiente del tiempo, la unicidad compara estados en el mismo instante. Las curvas proyectadas sobre (q, p) sí pueden encontrarse en tiempos diferentes, porque el campo que actúa en ese punto puede haber cambiado.

Una curva de nivel no siempre determina toda la trayectoria. Con varios grados de libertad, un nivel regular de energía tiene dimensión $2n-1$, mientras que una órbita sigue siendo una curva. La geometría tan completa del oscilador de un grado de libertad es un caso especialmente favorable.

8. El péndulo: libraciones, rotaciones y separatriz

Sea $I = m\ell^2$ y $A = mg\ell$. Con el mínimo de potencial en $\theta = 0$,

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2I} + A(1 - \cos\theta), \qquad \dot\theta = \frac{p}{I}, \quad \dot p = -A \sin\theta.$$

Proposición 28.8 — Regímenes de energía del péndulo. Para $0 < E < 2A$, el movimiento libra alrededor de la posición inferior. Para $E > 2A$, gira con signo constante de p. El nivel $E = 2A$ contiene el equilibrio superior y las ramas que se aproximan a él asintóticamente.

Demostración. La conservación de H exige

$$p = \pm\sqrt{2I\,[E - A(1-\cos\theta)]}.$$

Si $0 < E < 2A$, hay dos puntos de retorno alrededor del mínimo, donde $p = 0$ y el movimiento invierte su sentido. Si $E > 2A$, la raíz nunca se anula; el signo del momento permanece fijo y el ángulo recorre el círculo. Para $E = 2A$, la raíz se anula en el máximo del potencial, $\theta = \pi$ módulo 2π. Cerca de éste, poniendo $x = \theta - \pi$, $E - A(1-\cos\theta) = \frac{A}{2}x^2 + O(x^4)$.

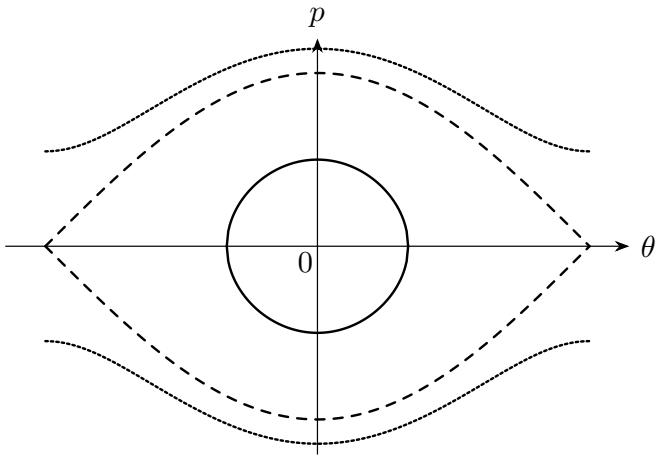


Figura 28.4. Para $H = p^2/2 + 1 - \cos\theta$, se muestran $E = 0{,}5$, 2 y 2,6. El nivel $E = 2$ es la separatriz; las libraciones quedan debajo y las rotaciones encima. Los bordes angulares se identifican. Véase §8.

Por tanto $|\dot{x}| \sim \sqrt{A/I}\,|x|$ y el tiempo requerido para alcanzar $x = 0$ contiene una integral proporcional a $\int dx/|x|$, que diverge. □

Definición 28.6 — Separatriz del péndulo. Son las ramas no estacionarias del nivel crítico $H = 2A$ que separan las regiones de libración y rotación; junto con el equilibrio superior forman el nivel separador completo.

En el cilindro, ambas representaciones $\theta = -\pi$ y $\theta = \pi$ corresponden al mismo equilibrio. Una rama separatriz sale de él cuando $t \to -\infty$ y vuelve cuando $t \to +\infty$ después de rodear el cilindro. No alcanza el equilibrio en tiempo finito y luego decide abandonarlo: eso contradiría la unicidad.

El período de libración es

$$T(E) = 2\sqrt{2I}\int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{E - A(1-\cos\theta)}}.$$

El factor cuatro de un cuarto de oscilación se ha combinado con $\sqrt{I/2}$ de la ecuación temporal. Cerca del mínimo recuperamos $T \to 2\pi\sqrt{I/A}$; cerca de la separatriz el período diverge. La conservación de energía permite describir esos regímenes sin exigir una fórmula elemental de $\theta(t)$.

9. Movimiento central y coordenadas polares

En el plano, excluyendo el origen y usando una carta angular, $L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - V(r)$. Los momentos y el hamiltoniano son

$$p_r = m\dot r, \qquad p_\theta = mr^2\dot\theta, \qquad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r).$$

Las ecuaciones completas resultan

$$\dot r = \frac{p_r}{m}, \quad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot p_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - V'(r), \quad \dot p_\theta = 0.$$

El momento angular conservado del capítulo 27 aparece como el momento de una coordenada cíclica. Fijando su valor $p_\theta = j$, el subsistema radial tiene energía

$$H_j(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + V_{\text{ef}}(r), \qquad V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{j^2}{2mr^2}.$$

Proposición 28.9 — Reducción radial y reconstrucción. Una solución radial de H_j con $r > 0$ determina una solución del sistema completo, una vez elegido θ_0, mediante

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{j}{mr(s)^2}\, ds, \qquad p_\theta(t) = j.$$

Demostración. Las ecuaciones de H_j son exactamente las ecuaciones de r, p_r del sistema completo sobre $p_\theta = j$. La fórmula integral satisface la ecuación angular y el dato inicial; la constancia de j satisface la última ecuación. Por sustitución se verifican las cuatro. □

Una órbita circular requiere $V'_{\text{ef}}(r_0) = 0$ y $p_r = 0$. Su estabilidad radial lineal depende de $V''_{\text{ef}}(r_0)$, como ya sugerían las pequeñas oscilaciones. La reducción conserva la información angular sólo si acompañamos el problema radial con la ecuación de reconstrucción. Suprimir el ángulo y olvidar esa ecuación impide recuperar la órbita física.

La singularidad de las fórmulas en $r = 0$ también exige interpretación. Las coordenadas polares dejan de ser una carta allí, aunque una trayectoria cartesiana pueda ser regular. Si además el potencial es singular en el origen, hay una dificultad física adicional que un cambio de coordenadas no elimina.

10. Oscilaciones acopladas en variables canónicas

Para matrices constantes simétricas $M > 0$ y K, tenemos

$$L = \frac{1}{2}\dot q^{\mathsf T} M \dot q - \frac{1}{2} q^{\mathsf T} K q, \qquad p = M\dot q,$$

$$H = \frac{1}{2} p^{\mathsf T} M^{-1} p + \frac{1}{2} q^{\mathsf T} K q.$$

De capítulo 24 elegimos una base modal U que satisface

$$U^{\mathsf T} M U = \mathbf{1}, \qquad U^{\mathsf T} K U = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Proposición 28.10 — Momentos de los modos normales. Bajo $q = UQ$, los momentos adecuados son $P = U^{\mathsf T} p$, de modo que $p = U^{-\mathsf T} P = MUP$. En esas variables,

$$H=\frac{1}{2}P^{\mathsf{T}}P+\frac{1}{2}Q^{\mathsf{T}}\Lambda Q,\qquad \dot{Q}_i=P_i,\quad \dot{P}_i=-\lambda_i Q_i.$$

Demostración. La regla de transformación de momentos de §1 da $P=U^{\mathsf{T}}p$. De $U^{\mathsf{T}}MU=\mathbf{1}$ se sigue $MU=U^{-\mathsf{T}}$; por tanto el término cinético se convierte en $P^{\mathsf{T}}P/2$. El término potencial se transforma según la segunda identidad modal. Las ecuaciones se obtienen derivando el hamiltoniano resultante. □

Cambiar q y p con la misma matriz arbitraria no reproduce esta cuenta. La posición y el momento son variables duales: si $q=UQ$, el emparejamiento $p^{\mathsf{T}}dq$ exige $P=U^{\mathsf{T}}p$. En una base ortogonal euclídea algunos factores se simplifican, pero la normalización del capítulo 24 era respecto de M.

Si $\lambda_i>0$, cada par (Q_i,P_i) es un oscilador de frecuencia $\sqrt{\lambda_i}$. Si $\lambda_i=0$, ese par describe una deriva libre. Si $\lambda_i<0$, aparecen soluciones exponenciales. La formulación hamiltoniana sigue siendo regular en los tres casos porque la inversión de velocidades depende de M, no del signo de K.

11. Una fuerza giroscópica

Retomemos el modelo plano

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\gamma}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})-V(x,y),\qquad m>0.$$

Aquí

$$p_x=m\dot{x}-\frac{\gamma}{2}y,\qquad p_y=m\dot{y}+\frac{\gamma}{2}x.$$

Proposición 28.11 — Hamiltoniano y fuerza giroscópica. El hamiltoniano es

$$H=\frac{1}{2m}\left[\left(p_x+\frac{\gamma}{2}y\right)^2+\left(p_y-\frac{\gamma}{2}x\right)^2\right]+V(x,y).$$

Sus ecuaciones implican

$$m\ddot{x}=\gamma\dot{y}-V_{,x},\qquad m\ddot{y}=-\gamma\dot{x}-V_{,y}.$$

Demostración. La fórmula de §6 proporciona H. Definiendo $u=p_x+\gamma y/2$ y $w=p_y-\gamma x/2$, las primeras ecuaciones dan $\dot{x}=u/m$, $\dot{y}=w/m$. Las otras dos son

$$\dot{p}_x=\frac{\gamma}{2m}w-V_{,x},\qquad \dot{p}_y=-\frac{\gamma}{2m}u-V_{,y}.$$

Al derivar $m\dot{x}=p_x+\gamma y/2$ y $m\dot{y}=p_y-\gamma x/2$, se suman las dos mitades de cada término giroscópico. Resultan las aceleraciones anunciadas. □

El vector de fuerza $\gamma(\dot{y},-\dot{x})$ es perpendicular a la velocidad. Para V independiente del tiempo, la energía $m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2+V$ se conserva. Esta energía coincide con H evaluado en el estado correspondiente, pero p_x,p_y no son las componentes del momento cinético $m\dot{q}$.

La distinción también afecta a las simetrías. Si $V=V(\sqrt{x^2+y^2})$, el momento de rotaciones es $J=xp_y-yp_x=m(x\dot{y}-y\dot{x})+\frac{\gamma}{2}(x^2+y^2)$. Su conservación no obliga a conservar por separado el momento angular cinético. El término adicional compensa el torque de la fuerza giroscópica.

12. Coordenadas móviles y términos de borde

Sea $q = f(Q,t)$ un cambio puntual con jacobiana invertible $J = \partial f/\partial Q$. Entonces $\dot q = J\dot Q + f_{,t}$. Definimos el nuevo lagrangiano sustituyendo esta expresión y el nuevo momento $P = J^{\mathsf T}p$.

Proposición 28.12 — Hamiltoniano en coordenadas móviles. En las variables relacionadas por $q = f(Q,t)$ y $p = J^{-\mathsf T}P$,

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) - p^{\mathsf T} f_{,t}(Q,t).$$

Demostración. Por definición,

$$K = P^{\mathsf T}\dot Q - L = p^{\mathsf T}(\dot q - f_{,t}) - L = H - p^{\mathsf T} f_{,t}.$$

La transformación puntual conserva la regularidad porque la nueva hessiana es $J^{\mathsf T}WJ$. Podemos aplicar la equivalencia de §5 al lagrangiano transformado. Sus ecuaciones de Hamilton describen las mismas curvas físicas expresadas en Q. □

Para $q = Q + b(t)$, un cuerpo libre tiene

$$K = \frac{P^2}{2m} - P\dot b, \qquad \dot Q = \frac{P}{m} - \dot b, \qquad \dot P = 0.$$

La aceleración de la coordenada es $\ddot Q = -\ddot b$, aunque P permanezca constante: el momento conjugado de este lagrangiano es $m(\dot Q + \dot b)$. En una rotación plana uniforme $q = R(\Omega t)Q$, el término $p^{\mathsf T} f_{,t}$ es ΩJ_z. Para un potencial central estacionario, $K = \frac{P^{\mathsf T}P}{2m} + V(|Q|) - \Omega(Q_x P_y - Q_y P_x)$.

Así reaparece la combinación energía menos velocidad angular por momento angular que encontramos en el capítulo 26. La función generadora de la evolución en un marco móvil puede diferir de la energía medida en el laboratorio.

Un segundo cambio procede de añadir una derivada total al lagrangiano.

Proposición 28.13 — Cambio por un término de borde. Si

$$\widetilde L = L + \frac{dG(q,t)}{dt},$$

los momentos nuevos satisfacen $P = p + G_{,q}$ y el hamiltoniano nuevo es $\widetilde H(q,P,t) = H(q, P - G_{,q}, t) - G_{,t}$. Las trayectorias de configuración permanecen iguales.

Demostración. Como $dG/dt = G_{,q}\cdot v + G_{,t}$, derivar respecto de v da la relación de momentos. Entonces

$$P\cdot v - \widetilde L = p\cdot v - L - G_{,t}.$$

Sustituimos $p = P - G_{,q}$. La acción lagrangiana cambia sólo en $G(q(t_1),t_1) - G(q(t_0),t_0)$, que no modifica las ecuaciones con extremos de configuración fijos; la regularidad tampoco cambia. □

Esta fórmula muestra por qué no debemos comparar funciones hamiltonianas en variables cuyo significado ha cambiado sin efectuar también la sustitución del momento. Para la carga de Noether, la expresión del capítulo 27 pasa a ser $J = p\cdot\xi - H\tau - F$ en las variables canónicas. Bajo el término de borde, el desplazamiento de p, el de H y el del término F se compensan.

13. La acción en espacio de fases

Consideremos ahora $q(t)$ y $p(t)$ como curvas independientes y la acción

$$\mathcal{S}[q,p]=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_a p_a\dot q^a-H(q,p,t)\right)dt.$$

Proposición 28.14 — Principio variacional de Hamilton en fases. Con los tiempos y las posiciones extremas fijos, la estacionariedad de $\mathcal{S}$ respecto de variaciones independientes de q,p equivale a las ecuaciones canónicas. No se requiere fijar los momentos extremos para anular el término de borde.

Demostración. La primera variación es

$$\delta\mathcal{S}=\int\left[\delta p_a(\dot q^a-H_{,p_a})+p_a\delta\dot q^a-H_{,q^a}\delta q^a\right]dt.$$

Integramos el término con $\delta\dot q$ por partes:

$$\delta\mathcal{S}=[p_a\delta q^a]_{t_0}^{t_1}+\int\left[(\dot q^a-H_{,p_a})\delta p_a+(-\dot p_a-H_{,q^a})\delta q^a\right]dt.$$

El borde desaparece porque δq se anula en los extremos. La independencia de las variaciones interiores y el lema fundamental dan ambas ecuaciones. Si se satisfacen, la misma identidad prueba la estacionariedad. □

Eliminar p mediante la ecuación algebraica $\dot q=H_{,p}$ recupera $p\cdot\dot q-H=L(q,\dot q,t)$ en una rama regular. Las dos acciones están relacionadas por esa eliminación, aunque en el principio de fases se varían inicialmente q y p de manera independiente.

Fijar posiciones en los extremos es una condición para la variación, no una garantía de que cualquier par de posiciones determine una única solución. El problema de contorno puede tener varias soluciones o ninguna. Por su parte, fijar arbitrariamente las $2n$ variables de fase en ambos extremos suele imponer demasiados datos a un sistema de primer orden. El problema inicial sigue consistiendo en dar un único estado (q_0,p_0) en un instante.

14. Evolución de observables y alcance del formalismo

Un observable es aquí una función suave $A(q,p,t)$. La regla de la cadena y las ecuaciones canónicas dan

$$\frac{dA}{dt}=A_{,t}+\sum_a\left(A_{,q^a}H_{,p_a}-A_{,p_a}H_{,q^a}\right).$$

Proposición 28.15 — Balance hamiltoniano. En el sistema canónico,

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Si hay fuerzas adicionales $\mathcal{Q}_a$ como en §5, $\frac{dH}{dt}=H_{,t}+\sum_a\dot q^a\mathcal{Q}_a$.

Demostración. Aplicamos la regla anterior a $A=H$. Cada producto $H_{,q^a}H_{,p_a}$ se cancela con su opuesto. En el sistema forzado queda además $H_{,p_a}\mathcal{Q}_a=\dot q^a\mathcal{Q}_a$. □

La ausencia de dependencia temporal explícita conserva H. Una coordenada ausente conserva su momento porque $\dot p_a=-H_{,q^a}=0$. Una integral puede depender explícitamente del tiempo: para

la partícula libre, $A = q - tp/m$ conserva la posición extrapolada al instante cero. Las cargas del capítulo 27 tienen ahora esta misma condición diferencial de conservación.

El paso a variables canónicas deja de ser una simple sustitución cuando el lagrangiano es degenerado. Si $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = m\dot{x}^2/2 - V(x, y)$, encontramos $p_x = m\dot{x}$ y $p_y = 0$ para cualquier $\dot{y}$. No podemos reconstruir $\dot{y}$. La ecuación de y impone $V_{,y} = 0$, que es una condición adicional sobre las trayectorias. El tratamiento sistemático de restricciones exige un formalismo posterior; asignar sin justificación $\dot{y} = p_y/m$ cambiaría el modelo.

También hay límites analíticos: en potenciales no suaves debemos revisar las hipótesis de unicidad y las derivaciones; en variedades necesitamos cartas compatibles; una rama local puede terminar donde la hessiana pierde rango. Las ecuaciones obtenidas no prometen soluciones globales por el hecho de estar escritas en primer orden.

La expresión bilineal que ha aparecido en la evolución de A será el punto de partida del capítulo 29. Allí estudiaremos los corchetes de Poisson, la forma simpléctica canónica y las transformaciones que conservan esta estructura. En este capítulo hemos establecido la equivalencia dinámica y variacional necesaria para dar a esa geometría un contenido mecánico preciso.

15. Ejercicios

Ejercicio 28.1 — Unidades y estado. Para un oscilador traslacional, determine las unidades de p, H y $H_{,p}$. Explique qué dato falta si sólo se conoce q.

Ejercicio 28.2 — Una pendiente desplazada. Transforme $\ell(v) = mv^2/2 + av + c$, con constantes $m > 0, a, c$. Verifique las dos derivadas de la proposición 28.1.

Ejercicio 28.3 — Curvatura negativa. Calcule la transformación mecánica de $\ell = -v^2/2$. Determine su conjugado definido como supremo y compare ambos resultados.

Ejercicio 28.4 — Tres ramas. Para $\ell = v^4/4 - v^2/2$, localice los puntos donde falla la regularidad. Calcule los valores del hamiltoniano de cada rama sobre $p = 0$.

Ejercicio 28.5 — Rango del momento. Para $\ell = e^v$, obtenga $h(p)$ en su dominio mecánico. Calcule además $\ell^*(0)$ y $\ell^*(p)$ para $p < 0$.

Ejercicio 28.6 — Un ejemplo global no cuadrático. Sea $\ell(v) = v^2/2 + v^4/4$. Pruebe que cada momento real determina una única velocidad y calcule h paramétricamente en función de v.

Ejercicio 28.7 — Transformación inversa. Partiendo de $H(q, p) = p^2/[2m(q)] + V(q)$, con $m(q) > 0$, reconstruya L y su ecuación de segundo orden.

Ejercicio 28.8 — Energía con resorte variable. Sea $L = m\dot{q}^2/2 - k(t)q^2/2$. Halle H, las ecuaciones y dH/dt. Determine si $H_{,t} = -L_{,t}$ exige mantener fija la misma variable cinemática.

Ejercicio 28.9 — Amortiguamiento. Para $\mathcal{Q} = -b\dot{q}$, $b > 0$, en un oscilador, deduzca la variación de energía. Determine en qué estados se anula instantáneamente.

Ejercicio 28.10 — Matriz cinética. Sea $L = \dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 - V(x, y)$. Halle los momentos, invierta la relación y obtenga H.

Ejercicio 28.11 — Momento afín. Para $L = m\dot{q}^2/2 + a(q)\dot{q} - V(q)$, construya H y compruebe que la fuerza final es $-V'(q)$.

Ejercicio 28.12 — Un cuarto de período. Para el oscilador con $m = 2$, $\omega = 3$, $q_0 = 1$, $p_0 = 0$, determine el estado en $t = \pi/6$ y la energía. Indique el sentido de movimiento inicial.

Ejercicio 28.13 — Niveles y órbitas. En dos osciladores independientes de frecuencia ω, pruebe que $H = E > 0$ no especifica una órbita única. Exhiba dos órbitas distintas en el mismo nivel.

Ejercicio 28.14 — Retorno del péndulo. Si el péndulo tiene $E = A$, encuentre sus ángulos de retorno. Calcule el momento cuando pasa por la posición inferior.

Ejercicio 28.15 — Separatriz explícita. Verifique que $\theta(t) = 4\arctan(e^{\alpha t}) - \pi$, con $\alpha = \sqrt{A/I}$ y $p = I\dot\theta$, describe una rama del nivel $H = 2A$.

Ejercicio 28.16 — Cruces con tiempo dependiente. Considere $H(q,p,t) = tp$. Resuelva las ecuaciones y muestre que una curva proyectada puede pasar por el mismo estado en tiempos diferentes sin violar la unicidad.

Ejercicio 28.17 — Potencial kepleriano. Para $V(r) = -\kappa/r$, con $\kappa > 0$ y $j \neq 0$, halle el radio circular y la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales.

Ejercicio 28.18 — Reconstrucción angular. En un movimiento central con $j = 0$, explique qué ocurre con el ángulo mientras $r > 0$. ¿Puede usarse esa conclusión a través de $r = 0$ sin más análisis?

Ejercicio 28.19 — Momento modal. Suponga $M = \operatorname{diag}(m_1, m_2)$ y $K = \operatorname{diag}(k_1, k_2)$, con masas positivas. Use $U = \operatorname{diag}(m_1^{-1/2}, m_2^{-1/2})$ para escribir Q, P, H.

Ejercicio 28.20 — Modo de frecuencia cero. Resuelva las ecuaciones del hamiltoniano $H = (P_1^2 + P_2^2)/2 + \omega^2 Q_1^2/2$. Explique por qué la frecuencia cero no hace singular la transformación de Legendre.

Ejercicio 28.21 — Círculo giroscópico. Con $V = 0$, $\gamma \neq 0$, en §11, encuentre dos constantes que describan el centro del movimiento y la frecuencia de giro de la velocidad.

Ejercicio 28.22 — Rotaciones y momento cinético. Para el potencial central de §11, pruebe directamente la conservación de $J = xp_y - yp_x$ usando las aceleraciones.

Ejercicio 28.23 — Origen acelerado. Para $q = Q + at^2/2$ y una partícula libre, calcule K, sus ecuaciones y la aceleración de Q. Distinga P de $m\dot Q$.

Ejercicio 28.24 — Marco que gira. Deduzca de $K = P^2/(2m) + m\omega_0^2 Q^2/2 - \Omega(Q_x P_y - Q_y P_x)$ las ecuaciones de primer orden y elimine P. Use la matriz $S(Q_x, Q_y) = (-Q_y, Q_x)$.

Ejercicio 28.25 — Un término de borde temporal. Añada dG/dt, con $G(q,t) = \beta t q^2/2$, al lagrangiano de una partícula libre. Halle $P, \widetilde H$ y compruebe la trayectoria libre.

Ejercicio 28.26 — Variación en fases. Para $H = p^2/(2m) + V(q)$, calcule la primera variación de $\mathcal{S}$. Elimine p y recupere la acción lagrangiana.

Ejercicio 28.27 — Un problema de contorno. Para el oscilador de frecuencia ω, imponga $q(0) = 0$ y $q(T) = 0$. Discuta la unicidad si $\sin \omega T \neq 0$ y si $T = \pi/\omega$.

Ejercicio 28.28 — Una integral temporal. Compruebe que $A = q - tp/m$ se conserva para $H = p^2/(2m)$. Identifique la carga del cambio galileano $\xi = t$ con término de borde $F = mq$.

Ejercicio 28.29 — Lagrangiano degenerado. Para $L = m\dot x^2/2 - k y^2/2$, con $m, k > 0$, determine momentos, ecuaciones de Euler–Lagrange y condiciones sobre y. Explique por qué no hay una inversa de Legendre sobre todo el espacio de fases de dos coordenadas.

Ejercicio 28.30 — Resorte transportado. Sea $L = m\dot q^2/2 - k(q - ut)^2/2$, con $m, k > 0$ y u constante. Pase a $Q = q - ut$, obtenga K y una cantidad conservada expresada en (q, p, t). Relaciónela con Noether para $\tau = 1$, $\xi = u$.

16. Soluciones

Solución del ejercicio 28.1. Como L tiene unidades de energía y v de longitud por tiempo, $p = L_{,v}$ tiene unidades de masa por longitud dividida por tiempo. El producto pv y H tienen unidades de energía. La derivada $H_{,p}$ tiene unidades de velocidad. La posición sola no determina el sentido ni la rapidez del movimiento; falta una velocidad o, por regularidad, el momento equivalente.

Dos estados con el mismo q y momentos opuestos evolucionan de manera distinta salvo que ambos momentos sean cero.

Solución del ejercicio 28.2. La relación es $p = mv + a$, por lo que $v = (p-a)/m$. Al formar $pv - \ell$, obtenemos

$$h(p) = \frac{(p-a)^2}{2m} - c.$$

Entonces $h' = (p-a)/m = v$ y $h'' = 1/m = 1/\ell''$. El desplazamiento del momento no altera la invertibilidad, pero sí la ubicación del mínimo de h en el eje de momentos.

Solución del ejercicio 28.3. La inversión mecánica da $v = -p$ y $h = p(-p) + p^2/2 = -p^2/2$. En cambio,

$$\ell^*(p) = \sup_v \left(pv + \frac{1}{2}v^2 \right) = +\infty$$

para todo p, pues el término cuadrático positivo domina cuando $|v| \to \infty$. El punto estacionario $v = -p$ es un mínimo de la expresión bajo el supremo. Por ello la transformación mecánica local y el conjugado convexo no coinciden en este ejemplo.

Solución del ejercicio 28.4. Tenemos $p = v^3 - v$ y $W = 3v^2 - 1$. La regularidad falla en $v = \pm 1/\sqrt{3}$. Sobre $p = 0$, las velocidades $v = -1, 0, 1$ dan $h = -\ell(v)$: los valores son $1/4, 0, 1/4$. Las ramas de velocidades opuestas tienen igual valor de h en ese momento, pero distintas derivadas $h' = v$. El valor escalar de la función no basta para identificarlas como una misma rama suave.

Solución del ejercicio 28.5. Para $p > 0$, la velocidad es $\log p$ y $h = p \log p - p$. En $p = 0$, el supremo de $-e^v$ es 0, alcanzado sólo como límite $v \to -\infty$. No corresponde a una velocidad finita. Si $p < 0$, tomar $v \to -\infty$ hace $pv - e^v \to +\infty$, por lo que el conjugado es infinito. El dominio donde el conjugado es finito incluye un punto de borde que no pertenece al rango de momentos de la transformación mecánica.

Solución del ejercicio 28.6. La aplicación $p(v) = v + v^3$ tiene derivada $1 + 3v^2 > 0$, es estrictamente creciente y tiende a $\pm\infty$ en los extremos. Por continuidad, cada momento tiene una única preimagen. Además la hessiana nunca se anula, así que la inversa es suave. Paramétricamente,

$$p = v + v^3, \qquad h = \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{4}v^4.$$

Derivar respecto de v da $dh/dv = v(1 + 3v^2)$ y $dp/dv = 1 + 3v^2$, verificando $dh/dp = v$. No necesitamos resolver la ecuación cúbica mediante radicales.

Solución del ejercicio 28.7. La ecuación $v = H_{,p} = p/m(q)$ se invierte en $p = m(q)v$. Entonces

$$L = pv - H = \frac{1}{2}m(q)v^2 - V(q).$$

Euler–Lagrange da $d(m\dot{q})/dt = m'\dot{q}^2/2 - V'$. Al desarrollar el lado izquierdo y reunir términos, $m\ddot{q} + \frac{1}{2}m'\dot{q}^2 + V' = 0$. Esta cuenta recupera también el resultado de §6 y muestra que las dos inversiones son compatibles.

Solución del ejercicio 28.8. El momento es $p = m\dot{q}$ y

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(t)q^2, \qquad \dot{q} = p/m, \quad \dot{p} = -k(t)q.$$

La derivada total es $dH/dt = \dot{k}(t)q^2/2$. El cambio de rigidez puede aportar o retirar energía. La igualdad de derivadas parciales es $H_{,t}|_{q,p} = -L_{,t}|_{q,v}$ después de relacionar los estados. No exige

mantener fija una misma variable cinemática en ambos lados; la cancelación de la proposición 28.4 justifica precisamente esa diferencia.

Solución del ejercicio 28.9. Las ecuaciones son $\dot q = p/m$ y $\dot p = -kq - bp/m$. Por la regla de la cadena,

$$\dot H = kq\frac{p}{m} + \frac{p}{m}\left(-kq - \frac{b}{m}p\right) = -\frac{b}{m^2}p^2 = -b\dot q^2.$$

Se anula instantáneamente cuando $p = 0$. Si $q \neq 0$, la fuerza del resorte vuelve a poner el cuerpo en movimiento; por ello una derivada nula en un instante no implica energía constante en un intervalo. Para $k > 0$, sólo el equilibrio $q = p = 0$ puede permanecer siempre en ese conjunto.

Solución del ejercicio 28.10. Aquí $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$p_x = 2\dot x + \dot y, \quad p_y = \dot x + 2\dot y, \qquad G^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $\dot x = (2p_x - p_y)/3$, $\dot y = (-p_x + 2p_y)/3$ y

$$H = \frac{1}{3}(p_x^2 - p_x p_y + p_y^2) + V(x, y).$$

La matriz tiene autovalores $1, 3$, ambos positivos. La relación velocidad–momento es globalmente invertible en cada fibra y la energía cinética es positiva.

Solución del ejercicio 28.11. El momento es $p = m\dot q + a(q)$ y $H = (p - a(q))^2/(2m) + V(q)$. Las ecuaciones son

$$\dot q = \frac{p - a}{m}, \qquad \dot p = a'\frac{p - a}{m} - V'.$$

Al derivar $m\dot q = p - a(q)$, obtenemos $m\ddot q = \dot p - a'\dot q = -V'$. Localmente, si $G' = a$, el término $a(q)\dot q$ es dG/dt, lo que explica el desplazamiento de momento sin modificación de las trayectorias. Esta afirmación local no exige una primitiva global en un espacio de configuración con topología no trivial.

Solución del ejercicio 28.12. El tiempo indicado satisface $\omega t = \pi/2$. Por proposición 28.7, $q = 0$ y $p = -m\omega = -6$. La energía inicial y final es $m\omega^2/2 = 9$. Aunque la velocidad inicial sea cero, $\dot p(0) = -m\omega^2 q_0 = -18$; inmediatamente después del instante inicial el cuerpo se mueve hacia q decreciente. En el plano de fase parte del extremo derecho de la elipse y desciende.

Solución del ejercicio 28.13. Con masas unitarias, tomemos $H = (p_1^2 + p_2^2 + \omega^2 q_1^2 + \omega^2 q_2^2)/2$. La órbita con $q_2 = p_2 = 0$ y energía E en el primer oscilador permanece en ese plano. Otra órbita con $q_1 = p_1 = 0$ y la misma energía en el segundo permanece en el otro plano. No coinciden para $E > 0$, pero ambas pertenecen a $H = E$. Un único nivel contiene, por tanto, más información de estados que la necesaria para una órbita.

Solución del ejercicio 28.14. En el retorno $p = 0$, de modo que $A = A(1 - \cos\theta)$ y $\cos\theta = 0$. Los extremos alrededor de cero son $\theta = \pm\pi/2$. En la posición inferior el potencial se anula y $p^2/(2I) = A$; los pasos posibles tienen $p = \pm\sqrt{2IA}$, según el sentido del movimiento. La misma elongación inferior se visita con dos momentos diferentes.

Solución del ejercicio 28.15. Derivando la expresión propuesta,

$$\dot\theta = \frac{4\alpha e^{\alpha t}}{1 + e^{2\alpha t}} = 2\alpha\ \mathrm{sech}(\alpha t), \qquad p = 2I\alpha\ \mathrm{sech}(\alpha t).$$

La identidad trigonométrica correspondiente es $\cos\theta = 2\operatorname{sech}^2(\alpha t) - 1$. Así, la energía cinética vale $2A\operatorname{sech}^2(\alpha t)$ y la potencial $2A[1-\operatorname{sech}^2(\alpha t)]$; su suma es $2A$. Para tiempos finitos $\dot\theta > 0$, y derivar esta igualdad de energía implica $I\ddot\theta = -A\sin\theta$. Los límites son $\theta \to -\pi$ y π, con $p \to 0$; en el cilindro corresponden al mismo equilibrio superior.

Solución del ejercicio 28.16. Las ecuaciones son $\dot q = t$, $\dot p = 0$, de donde $q = C + t^2/2$ y $p = p_0$. Para cualquier $s > 0$, los instantes $-s$ y s tienen el mismo estado proyectado $(C + s^2/2, p_0)$. Las velocidades son entonces $-s$ y s. La unicidad no se vulnera: el campo depende del tiempo y los puntos $(q, p, -s)$ y (q, p, s) son distintos en el espacio que incluye el tiempo. Además, aquí H no tiene hessiana invertible en p; es un sistema canónico válido que no procede por la inversión regular descrita en §4.

Solución del ejercicio 28.17. El potencial efectivo es $V_{\mathrm{ef}} = -\kappa/r + j^2/(2mr^2)$. Su derivada se anula cuando $\kappa/r_0^2 = j^2/(mr_0^3)$, así que

$$r_0 = \frac{j^2}{m\kappa}.$$

La segunda derivada en ese radio es $-2\kappa/r_0^3 + 3j^2/(mr_0^4) = \kappa/r_0^3 > 0$. La ecuación lineal radial es $m\delta\ddot r + V_{\mathrm{ef}}''(r_0)\delta r = 0$ y su frecuencia satisface $\omega_r^2 = \kappa/(mr_0^3)$. El signo positivo prueba la estabilidad radial lineal del círculo en ese nivel de momento angular.

Solución del ejercicio 28.18. Mientras $r > 0$, la reconstrucción da $\dot\theta = j/(mr^2) = 0$; el ángulo permanece constante y el movimiento sigue un rayo en cada tramo de esa carta. En $r = 0$ el ángulo deja de estar definido. Una trayectoria cartesiana regular que atraviesa el origen puede continuar por el rayo opuesto, lo que cambia el representante polar en π. Hay que analizar la solución en coordenadas válidas y comprobar también si el potencial admite ese paso.

Solución del ejercicio 28.19. Como $q = UQ$, tenemos $Q_i = \sqrt{m_i}\, q_i$. La transformación dual exige $P_i = p_i/\sqrt{m_i}$, no $\sqrt{m_i}p_i$. Entonces

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(P_i^2 + \frac{k_i}{m_i}Q_i^2\right).$$

También $P_i = \dot Q_i$. Las frecuencias reales corresponden a $k_i > 0$ y valen $\sqrt{k_i/m_i}$. Si alguno de los k_i no es positivo, cambia el régimen dinámico de ese modo, pero no la transformación de momentos.

Solución del ejercicio 28.20. El primer par satisface

$$Q_1(t) = Q_{10}\cos\omega t + \frac{P_{10}}{\omega}\sin\omega t, \quad P_1(t) = P_{10}\cos\omega t - \omega Q_{10}\sin\omega t.$$

El segundo satisface $P_2(t) = P_{20}$, $Q_2(t) = Q_{20} + P_{20}t$. La hessiana de H respecto de P es la identidad y la relación $P = \dot Q$ sigue siendo invertible. La frecuencia cero expresa la ausencia de una fuerza restauradora en esa dirección, no una degeneración de la energía cinética.

Solución del ejercicio 28.21. De $m\ddot x = \gamma\dot y$ y $m\ddot y = -\gamma\dot x$ resulta

$$C_x = x + \frac{m}{\gamma}\dot y, \qquad C_y = y - \frac{m}{\gamma}\dot x,$$

pues ambas derivadas se anulan. Las relaciones $x - C_x = -(m/\gamma)\dot y$, $y - C_y = (m/\gamma)\dot x$ muestran que la distancia al centro es $m|\dot q|/|\gamma|$, constante. La velocidad gira con frecuencia angular de magnitud $|\gamma|/m$ y sentido determinado por el signo de γ. El caso de velocidad cero es el círculo reducido a un punto.

Solución del ejercicio 28.22. La expresión en velocidades es $J = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \gamma(x^2 + y^2)/2$. Su derivada vale

$$\dot{J} = m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) + \gamma(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Al sustituir las aceleraciones, los términos giroscópicos producen $-\gamma(x\dot{x} + y\dot{y})$ y se cancelan. Queda $-xV_{,y} + yV_{,x} = 0$ porque el gradiente de un potencial central es radial. Se conserva el momento canónico de rotaciones, mientras que el momento cinético intercambia su valor con el término proporcional a r^2.

Solución del ejercicio 28.23. Tenemos $P = p = m(\dot{Q} + at)$ y

$$K = \frac{P^2}{2m} - atP, \qquad \dot{Q} = \frac{P}{m} - at, \quad \dot{P} = 0.$$

Por tanto $\ddot{Q} = -a$. El momento P es el momento de laboratorio y difiere de $m\dot{Q}$ en mat. La dependencia explícita de K da $\dot{K} = -aP$, compatible con la conservación de P. No hay contradicción con la constancia de la energía libre en el laboratorio: K incorpora el movimiento del sistema de coordenadas.

Solución del ejercicio 28.24. Con $S^{\mathsf{T}} = -S$ y $S^2 = -\mathbf{1}$, el momento angular es $(SQ) \cdot P$. Derivar da

$$\dot{Q} = \frac{P}{m} - \Omega SQ, \qquad \dot{P} = -m\omega_0^2 Q - \Omega SP.$$

De la primera ecuación $P = m(\dot{Q} + \Omega SQ)$. Al derivarla y usar la segunda, $\ddot{Q} = -2\Omega S\dot{Q} + (\Omega^2 - \omega_0^2)Q$. El primer término es la aceleración de Coriolis en este plano; el término $\Omega^2 Q$ es centrífugo. Ambos aparecen aunque el hamiltoniano sólo haya adquirido el término lineal $-\Omega J_z$, porque también cambia la relación entre P y $\dot{Q}$.

Solución del ejercicio 28.25. Aquí $G_{,q} = \beta tq$ y $G_{,t} = \beta q^2/2$. Por proposición 28.13,

$$P = m\dot{q} + \beta tq, \qquad \widetilde{H} = \frac{(P - \beta tq)^2}{2m} - \frac{\beta}{2}q^2.$$

Las ecuaciones son $\dot{q} = (P - \beta tq)/m$ y $\dot{P} = \beta t\dot{q} + \beta q$. Derivar $m\dot{q} = P - \beta tq$ produce $m\ddot{q} = \dot{P} - \beta q - \beta t\dot{q} = 0$. Aunque la expresión de $\widetilde{H}$ depende del tiempo y de la posición, las curvas $q = q_0 + v_0 t$ son las de una partícula libre. La conservación de la energía física se expresa aquí mediante $(P - \beta tq)^2/(2m)$.

Solución del ejercicio 28.26. La variación es

$$\delta\mathcal{S} = [p\delta q]_{t_0}^{t_1} + \int [(\dot{q} - p/m)\delta p + (-\dot{p} - V')\delta q]\, dt.$$

Con posiciones extremas fijas, la estacionariedad exige $\dot{q} = p/m$ y $\dot{p} = -V'$. La primera relación permite eliminar el momento en la acción: $p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V$.

No se introduce una condición $\delta p = 0$ en los extremos: el integrando no contiene $\dot{p}$, y por ello no aparece un borde proporcional a esa variación.

Solución del ejercicio 28.27. La condición inicial de posición reduce la solución general a $q(t) = B\sin\omega t$. La condición final exige $B\sin\omega T = 0$. Si el seno no se anula, sólo existe $B = 0$, la solución de equilibrio. Si $T = \pi/\omega$, cualquier B satisface las posiciones extremas: hay infinitas soluciones con momentos iniciales $p(0) = m\omega B$. Para cada uno de esos estados iniciales sigue

habiendo una única solución. La falta de unicidad del problema de contorno es compatible con la unicidad del problema inicial.

Solución del ejercicio 28.28. La regla de evolución da

$$\frac{d}{dt}\left(q - \frac{tp}{m}\right) = -\frac{p}{m} + \frac{p}{m} - \frac{t}{m}\dot{p} = 0.$$

Para la transformación galileana $\delta q = \varepsilon t$, $\tau = 0$, la variación infinitesimal de $L = m\dot{q}^2/2$ es $m\dot{q} = D_t(mq)$. Por capítulo 27, la carga es $J = pt - mq = -mA$. Es una constante que depende explícitamente del tiempo cuando se escribe como función sobre los estados. Su valor permite reconstruir la posición inicial de la partícula libre.

Solución del ejercicio 28.29. Los momentos son $p_x = m\dot{x}$ y $p_y = 0$. Euler–Lagrange da $m\ddot{x} = 0$ y $ky = 0$, de modo que toda solución tiene $y = 0$ y, por diferenciación, $\dot{y} = 0$. La transformación de Legendre envía todas las velocidades $\dot{y}$ de un punto al mismo $p_y = 0$; su hessiana es $\operatorname{diag}(m, 0)$. No tiene inversa sobre un abierto de las cuatro variables (x, y, p_x, p_y). Puede describirse el movimiento efectivo como una partícula libre en x una vez establecidas las restricciones, pero no deducir dos pares canónicos independientes mediante la inversión regular de este capítulo.

Solución del ejercicio 28.30. En el laboratorio $p = m\dot{q}$ y $H = p^2/(2m) + k(q - ut)^2/2$. El cambio $q = Q + ut$ tiene $P = p$ y

$$K(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}Q^2 - uP.$$

Es autónomo; por ello conserva

$$C = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q - ut)^2 - up.$$

Completar el cuadrado da $K = (P - mu)^2/(2m) + kQ^2/2 - mu^2/2$. Las ecuaciones implican $m\ddot{Q} = -kQ$, el oscilador visto desde el centro transportado. La transformación conjunta $t \mapsto t + \varepsilon$, $q \mapsto q + u\varepsilon$ deja $q - ut$ y la velocidad invariantes; tiene $\tau = 1$, $\xi = u$ y $F = 0$. Su carga de Noether es $J = up - H = -C$. La energía de laboratorio sola satisface $\dot{H} = -ku(q - ut)$ y generalmente cambia.

Notas y lecturas

El punto de entrada es capítulo 26: regularidad del lagrangiano, momentos conjugados y energía. El capítulo 27 aporta la interpretación de las coordenadas cíclicas, la invariancia temporal y las cargas con términos de borde. El capítulo 24 permite reconocer la diagonalización modal en §10. La equivalencia demostrada aquí es local siempre que la inversión de Legendre lo sea; cada afirmación global incluye sus hipótesis adicionales.

Como lectura complementaria, David Tong, *Classical Dynamics*, capítulo 4, «The Hamiltonian Formalism», §§4.1.1–4.1.5, desarrolla la transformada de Legendre, las ecuaciones, los ejemplos, la energía y la acción en fases. Las demostraciones y los ejercicios de este capítulo están desarrollados en el propio texto. La distinción entre inversión mecánica local y conjugación convexa por supremo se ha explicitado en §§2–3 y ejercicios 28.3–28.6 para precisar el alcance de las hipótesis.

En el capítulo 29 estudiaremos la estructura que permite escribir de forma uniforme la evolución de todos los observables: los corchetes de Poisson y la forma simpléctica canónica. Las cuestiones de estabilidad global y caos corresponden al capítulo 30.

Capítulo 29

Corchetes de Poisson y estructura simpléctica elemental

En el capítulo 28 aprendimos a obtener la evolución de cualquier función del estado a partir del hamiltoniano. La posición y el momento eran dos casos particulares de una misma regla. Esa regla también permitía decidir si una expresión se conservaba, aunque su dependencia temporal hiciera difícil reconocerla como una energía o un momento.

Hay una operación entre funciones detrás de esa cuenta. Estudiarla permite comparar cantidades conservadas, construir transformaciones a partir de sus generadores y reconocer qué cambios de variables preservan la forma de las ecuaciones. Su interpretación geométrica nace del emparejamiento entre posiciones y momentos: en cada punto del espacio de fases existe una forma bilineal alternada que transforma el diferencial de una función en un campo de velocidades.

Desarrollaremos ambas descripciones a la vez. Los ejemplos del oscilador, las rotaciones y los momentos desplazados servirán para controlar los signos y dar contenido mecánico a las definiciones. Usaremos funciones y transformaciones suaves; todos los flujos se consideran en los dominios y tiempos donde existen. Las coordenadas de fase se ordenarán como $z = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$.

1. Una operación que determina la evolución

Para un observable $A(q,p,t)$, la regla de la cadena del capítulo 28 daba

$$\frac{dA}{dt} = A_{,t} + \sum_a \left(A_{,q^a} H_{,p_a} - A_{,p_a} H_{,q^a} \right).$$

La combinación de derivadas sólo utiliza dos funciones: el observable y el hamiltoniano. Podemos definirla para cualquier pareja.

Definición 29.1 — Corchete de Poisson canónico. En coordenadas canónicas,

$$\{F,G\} = \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q^a} \right).$$

Si las funciones dependen del tiempo, éste se mantiene fijo en el corchete. Con esta convención, $\dot{A} = A_{,t} + \{A,H\}$. En particular,

$$\{q^a, p_b\} = \delta^a{}_b, \quad \{q^a, q^b\} = 0, \quad \{p_a, p_b\} = 0.$$

Así recuperamos $\dot{q}^a = \{q^a, H\} = H_{,p_a}$ y $\dot{p}_a = \{p_a, H\} = -H_{,q^a}$. El orden de los argumentos queda fijado por estas identidades. Cambiar ese orden sin cambiar las demás convenciones invertiría el sentido de la evolución.

Con la matriz constante

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{J}^{\mathsf{T}} = -\mathbb{J}, \quad \mathbb{J}^2 = -\mathbf{1},$$

la fórmula se escribe $\{F,G\} = (\nabla F)^{\mathsf{T}}\mathbb{J}\nabla G$. El símbolo matricial $\mathbb{J}$ se distinguirá de una carga conservada, para la que emplearemos otras letras.

El corchete tiene las unidades del producto de ambas funciones dividido por una acción. Cada producto $q^a p_a$ tiene unidades de acción, aun cuando una coordenada sea angular. Por eso $\{A,H\}$ tiene unidades de A por unidad de tiempo, como exige la ecuación de evolución.

2. Las identidades algebraicas

Proposición 29.1 — Bilinealidad, antisimetría y regla del producto. El corchete es bilineal sobre los escalares reales, satisface $\{F,G\} = -\{G,F\}$ y

$$\{FG,K\} = F\{G,K\} + G\{F,K\}.$$

También cumple la regla del producto en el segundo argumento.

Demostración. Las derivadas parciales son lineales, y cada término de la definición contiene una derivada de cada argumento. Intercambiarlos invierte el signo. Aplicar $\partial(FG) = F\partial G + G\partial F$ en las derivadas del primer argumento produce la fórmula escrita. La del segundo se deduce por antisimetría o por la misma cuenta. □

El corchete con una constante es cero. En particular, $\{F,F\} = 0$ no impone ninguna condición sobre F: expresa la antisimetría. La conservación de F exige compararlo con el hamiltoniano, además de su posible derivada temporal.

Proposición 29.2 — Identidad de Jacobi. Para funciones suaves,

$$\{F,\{G,K\}\} + \{G,\{K,F\}\} + \{K,\{F,G\}\} = 0.$$

Demostración. Numeremos todas las coordenadas por $i = 1,\dots,2n$ y usemos subíndices para derivadas. Al expandir el primer término obtenemos

$$F_i\mathbb{J}_{ij}G_{kj}\mathbb{J}_{kl}K_l + F_i\mathbb{J}_{ij}G_k\mathbb{J}_{kl}K_{lj}.$$

Añadimos sus dos permutaciones cíclicas. Cada sumando contiene una segunda derivada de una sola función. Agrupemos los que contienen segundas derivadas de K; proceden del segundo sumando escrito y del primero en $\{G,\{K,F\}\}$. Si $u = \mathbb{J}\nabla F$ y $v = \mathbb{J}\nabla G$, esos dos términos son, respectivamente,

$$u^{\mathsf{T}}(D^2K)v \quad \text{y} \quad -v^{\mathsf{T}}(D^2K)u.$$

Se cancelan porque la hessiana es simétrica. Los términos con D^2F y con D^2G se cancelan de la misma manera. No quedan otros términos, pues $\mathbb{J}$ es constante. □

Jacobi asegura que la operación es compatible consigo misma. Junto con la bilinealidad y la antisimetría, convierte los observables suaves en un álgebra de Lie; la regla del producto expresa además su compatibilidad con la multiplicación ordinaria de funciones. Estas palabras resumen identidades ya demostradas y que utilizaremos en cálculos concretos.

3. Cantidades conservadas y nuevas integrales

Una integral del movimiento satisface $F_{,t} + \{F,H\} = 0$ en la región considerada. Para una función sin dependencia temporal explícita, basta $\{F,H\} = 0$. Si sólo conocemos esa igualdad sobre una trayectoria particular, obtenemos una afirmación restringida a ella; para disponer de una integral del modelo exigimos la identidad correspondiente en los estados de la región.

Proposición 29.3 — El corchete de dos integrales es una integral. Si F y G satisfacen la condición de conservación, también la satisface $\{F, G\}$, aunque dependan explícitamente del tiempo.

Demostración. Definamos el operador de evolución sobre funciones

$$\mathcal{D}A = A_{,t} + \{A, H\}.$$

Derivar la definición del corchete respecto de t da la regla del producto para ∂_t. Jacobi, reorganizada, da $\{\{F, G\}, H\} = \{\{F, H\}, G\} + \{F, \{G, H\}\}$.

Por tanto $\mathcal{D}\{F, G\} = \{\mathcal{D}F, G\} + \{F, \mathcal{D}G\}$. Si ambas derivadas de evolución se anulan, también se anula la del corchete. □

El resultado puede producir una constante o la función cero y no garantiza una integral funcionalmente independiente de las anteriores. Para la partícula libre, p y $q - tp/m$ son integrales; su corchete es -1. La cuenta es correcta, pero esa constante no añade información sobre la trayectoria.

Definición 29.2 — Funciones en involución. Dos funciones están en involución si su corchete es cero. Una familia está en involución si todos sus pares lo están.

En varios grados de libertad, las energías de osciladores independientes están en involución. Las componentes de un momento angular conservado generalmente no lo están. Conservarse y conmutar entre sí son propiedades distintas que deben comprobarse por separado.

4. Funciones que generan desplazamientos

Una función $G(q, p)$ define un sistema de ecuaciones con un parámetro s:

$$\frac{dq^a}{ds} = G_{,p_a}, \qquad \frac{dp_a}{ds} = -G_{,q^a}.$$

Ese parámetro puede representar una distancia, un ángulo o un tiempo según las unidades de G y la transformación estudiada. La variación de un observable es $dA/ds = \{A, G\}$.

Proposición 29.4 — Generadores de traslaciones y rotaciones. El momento p_b genera traslaciones de q^b. En el plano cartesiano, $L_z = xp_y - yp_x$ genera la misma rotación de la posición y del momento.

Demostración. Para $G = p_b$, las ecuaciones son $dq^a/ds = \delta^a{}_b$, $dp_a/ds = 0$, cuya solución es la traslación indicada. Para L_z obtenemos

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad p_x' = -p_y, \quad p_y' = p_x.$$

Son los sistemas de rotación de ambos vectores. Sus soluciones son $(x, y)(s) = R(s)(x, y)(0)$ y $(p_x, p_y)(s) = R(s)(p_x, p_y)(0)$, con R la matriz usual de giro antihorario. □

En tres dimensiones, sean $L_i = \varepsilon_{iab} q^a p_b$ y $\varepsilon_{123} = 1$.

Proposición 29.5 — Álgebra del momento angular. En coordenadas cartesianas,

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k.$$

Demostración. Sus derivadas son $\partial L_i/\partial q^a = \varepsilon_{iab} p_b$ y $\partial L_i/\partial p_a = \varepsilon_{iba} q^b$. Como verificación explícita,

$$\{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} = xp_y - yp_x = L_z.$$

Las permutaciones cíclicas de las coordenadas dan $\{L_y, L_z\} = L_x$ y $\{L_z, L_x\} = L_y$. La antisimetría y los corchetes diagonales nulos completan todos los pares y equivalen a la fórmula. □

El cálculo describe la composición infinitesimal de rotaciones. También anticipa por qué tres integrales angulares de un potencial central pueden estar relacionadas algebraicamente sin estar en involución. El carácter canónico de las transformaciones generadas se demostrará mediante el flujo, sin reducirlo a una observación de estos ejemplos.

5. La forma alternada del espacio de fases

En cada punto del espacio de fases consideremos dos desplazamientos infinitesimales $u = (u_q, u_p)$ y $v = (v_q, v_p)$. La expresión

$$\omega(u, v) = \sum_a (u_q^a v_{p_a} - u_{p_a} v_q^a) = u^{\mathsf{T}} \mathbb{J} v$$

es bilineal y cambia de signo al intercambiar los desplazamientos. En un solo grado de libertad mide el área orientada del paralelogramo que forman en el plano de fase.

Definición 29.3 — Forma diferencial de grado dos. Es una asignación suave de una forma bilineal alternada a cada espacio tangente. En coordenadas, el producto exterior de dos diferenciales se define por

$$(dz^i \wedge dz^j)(u, v) = u^i v^j - u^j v^i.$$

Nuestra forma de fase se escribe $\omega = \sum_a dq^a \wedge dp_a$. Decir que una forma ω es no degenerada significa que $\omega(u, v) = 0$ para todo v obliga a $u = 0$. Aquí basta probar con cada vector de coordenadas: se anulan todas las componentes de u_q y de u_p.

Para reconocer la otra propiedad necesaria introducimos brevemente la derivada exterior. Sobre funciones actúa como el diferencial ordinario; sobre una forma $\alpha = \sum_i \alpha_i dz^i$, $d\alpha = \sum_{i,j} (\partial_j \alpha_i)\, dz^j \wedge dz^i$.

Se extiende por linealidad y la regla graduada del producto, con $d(dz^i) = 0$. La igualdad de derivadas parciales mixtas da $d^2 = 0$. Para la forma canónica, cuyos coeficientes son constantes, $d\omega = 0$.

Definición 29.4 — Forma y variedad simplécticas. Una forma de grado dos es simpléctica si es cerrada, $d\omega = 0$, y no degenerada. Una variedad provista de ella es una variedad simpléctica.

Toda forma alternada no degenerada vive en dimensión par: una matriz antisimétrica B de orden impar tendría $\det B = \det(-B) = -\det B$, luego determinante cero. La dimensión $2n$ del espacio de fases concuerda con esta necesidad algebraica.

6. La forma canónica sobre el cotangente

La expresión $\omega = \sum dq^a \wedge dp_a$ se escribió en una carta. Para saber si describe un objeto del espacio de fases completo, debemos comprobar su compatibilidad con los cambios de carta.

En T^*Q existe la forma de grado uno

$$\alpha = \sum_a p_a \, dq^a.$$

Su interpretación evita elegir coordenadas: si $\pi : T^*Q \to Q$ proyecta sobre la posición, un punto (q, p) contiene un covector p y podemos evaluar $\alpha_{(q,p)}(u) = p(d\pi(u))$. Es el emparejamiento entre el momento y la parte posicional del desplazamiento.

Proposición 29.6 — Estructura canónica global. La forma α está bien definida en T^*Q, y

$$\omega = -d\alpha = \sum_a dq^a \wedge dp_a$$

es una forma simpléctica global.

Demostración. La definición mediante π y el covector no depende de una carta. En un cambio $q = f(Q)$, el momento $P = J^{\mathsf{T}}p$ verifica directamente $p_a dq^a = P_i dQ^i$. Por tanto las expresiones locales de α coinciden. Derivar da $-d\alpha = -dp_a \wedge dq^a = dq^a \wedge dp_a$. La forma es cerrada porque $d^2 = 0$ y es no degenerada por el argumento de §5 en cada carta. □

En particular, el cilindro de fase del péndulo tiene esta estructura global, aunque ningún ángulo real único describa todo el círculo. El diferencial angular $d\theta$ sí es global: las cartas angulares que difieren en múltiplos de 2π tienen el mismo diferencial. Así, $\alpha = p\,d\theta$ y $\omega = d\theta \wedge dp$ son expresiones compatibles sobre el cilindro.

La forma ω no es una distancia ni un producto escalar. Siempre cumple $\omega(u, u) = 0$, incluso para $u \neq 0$, y no sirve para definir una longitud positiva. Lo que aporta es una identificación entre vectores y covectores, mediante $u \mapsto \omega(u, \cdot)$, gracias a su no degeneración.

7. Campos hamiltonianos y convención de signos

Definición 29.5 — Campo hamiltoniano. Para una función F en una variedad simpléctica, su campo X_F es el único que satisface

$$\iota_{X_F}\omega = dF, \qquad (\iota_{X_F}\omega)(v) = \omega(X_F, v).$$

La no degeneración asegura existencia y unicidad punto a punto, y la inversión suave de la matriz asegura suavidad. En coordenadas canónicas,

$$X_F = \sum_a \left(F_{,p_a} \frac{\partial}{\partial q^a} - F_{,q^a} \frac{\partial}{\partial p_a} \right) = \mathbb{J}\nabla F.$$

Por tanto las trayectorias físicas son las curvas integrales de X_H. Si F depende del tiempo, obtenemos una familia de campos y su evolución no autónoma.

Proposición 29.7 — Relación geométrica con el corchete. Con las convenciones fijadas,

$$X_G(F) = \{F, G\}, \qquad \omega(X_F, X_G) = \{F, G\}.$$

Si el conmutador de campos se define por $[X, Y]A = X(YA) - Y(XA)$, entonces $[X_F, X_G] = -X_{\{F,G\}}$.

Demostración. La primera identidad se obtiene aplicando el campo a la función. Para la segunda, $\omega(X_F, X_G) = dF(X_G) = X_G(F)$. Finalmente, sobre cualquier función A,

$$[X_F, X_G]A = \{\{A, G\}, F\} - \{\{A, F\}, G\} = -\{A, \{F, G\}\},$$

por Jacobi. Este último término es $-X_{\{F,G\}}A$. La igualdad sobre todas las funciones identifica los campos. □

El signo del conmutador se ha deducido, no elegido por analogía. Es consecuencia de emplear $\omega = dq \wedge dp$, $\iota_{X_F}\omega = dF$ y $X_G(F) = \{F, G\}$. Otras combinaciones de convenciones que aparecen en la literatura cambian algunas de estas fórmulas; lo necesario es mantenerlas coherentes.

Como comprobación, para $F = q^2/2$ y $G = p^2/2$, tenemos $X_F = -q\partial_p$ y $X_G = p\partial_q$. Su conmutador es $-q\partial_q + p\partial_p$, opuesto a X_{qp}. Si F y G están en involución, el conmutador se anula y sus flujos locales conmutan donde ambas composiciones están definidas.

8. El flujo preserva la forma simpléctica

Sea Φ_{t,t_0} la aplicación que lleva un estado inicial en t_0 al estado alcanzado en t. Es un difeomorfismo local entre los abiertos donde la evolución y su inversa están definidas. Su derivada transporta desplazamientos iniciales a desplazamientos entre soluciones cercanas.

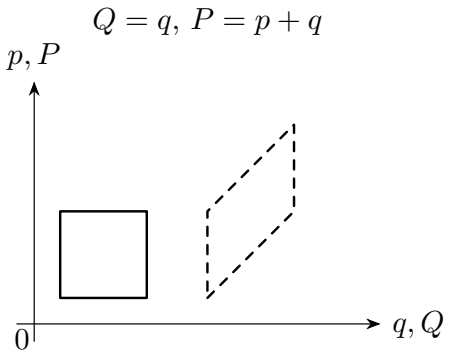


Figura 29.1. La cizalla $Q = q$, $P = p + q$ transforma un cuadrado en un paralelogramo de igual área. El desplazamiento de momento es el gradiente de $G(q) = q^2/2$. Véase §8.

Proposición 29.8 — Preservación simpléctica del flujo. Si $u(t), v(t)$ son desplazamientos transportados por un flujo hamiltoniano, entonces $\omega(u(t), v(t))$ es constante. Equivalentemente,

$$\Phi_{t,t_0}^{*}\omega = \omega.$$

Aquí el asterisco significa evaluar la forma final sobre los vectores transportados.

Demostración. En coordenadas canónicas, el campo es $X_H = \mathbb{J}\nabla H$. La ecuación linealizada para un desplazamiento es

$$\dot{u} = Bu, \qquad B = \mathbb{J}D_z^2 H,$$

y la misma ecuación rige v. La simetría de la hessiana implica $B^{\mathsf{T}}\mathbb{J} + \mathbb{J}B = 0$. Por tanto

$$\frac{d}{dt}(u^{\mathsf{T}}\mathbb{J}v) = u^{\mathsf{T}}(B^{\mathsf{T}}\mathbb{J} + \mathbb{J}B)v = 0.$$

La cuenta es válida también si H depende del tiempo. En el cotangente, los cambios entre cartas conservan ω por la proposición 29.6; podemos encadenar la afirmación a lo largo de la trayectoria. □

El flujo puede deformar una región de fase: estirarla en ciertas direcciones y comprimirla en otras. La igualdad preserva el emparejamiento alternado entre todos los desplazamientos transportados. En dimensión dos implica conservación de áreas orientadas. En dimensiones mayores impone condiciones adicionales a conservar un solo volumen total.

Esta propiedad no exige que H sea autónomo. La energía puede cambiar por dependencia temporal y, sin embargo, cada aplicación de evolución entre dos instantes sigue preservando ω. Tampoco

garantiza que las soluciones cercanas permanezcan cercanas: una deformación que estira una dirección y comprime su dirección conjugada puede ser simpléctica.

9. Qué significa que unas variables sean canónicas

Definición 29.6 — Transformación canónica. Un difeomorfismo entre regiones de fase es canónico o simpléctico si preserva ω. En coordenadas canónicas de origen y destino, para $Z = \Psi(z)$ y $M = D\Psi(z)$, la condición es

$$M^{\mathsf{T}} \mathbb{J} M = \mathbb{J}.$$

Proposición 29.9 — Criterios equivalentes de canonicidad. Para un cambio local invertible, son equivalentes: preservar la forma; preservar todos los corchetes por composición; y que las nuevas coordenadas satisfagan

$$\{Q^a, Q^b\} = 0, \quad \{P_a, P_b\} = 0, \quad \{Q^a, P_b\} = \delta^a{}_b.$$

Si el cambio no depende del tiempo, las ecuaciones nuevas son canónicas con $K = H \circ \Psi^{-1}$.

Demostración. La regla de la cadena da, para funciones A, B de Z,

$$\{A \circ \Psi, B \circ \Psi\}_z = (\nabla_Z A)^{\mathsf{T}} M \mathbb{J} M^{\mathsf{T}} \nabla_Z B.$$

Por tanto la preservación de todos los corchetes equivale a $M\mathbb{J}M^{\mathsf{T}} = \mathbb{J}$ y basta comprobarla sobre las funciones coordenadas. Para una matriz invertible, esa identidad equivale a $M^{\mathsf{T}}\mathbb{J}M = \mathbb{J}$: invertir la segunda da $M^{-1}\mathbb{J}M^{-\mathsf{T}} = \mathbb{J}$ y multiplicar a ambos lados da la primera; la implicación inversa es igual. Finalmente, la preservación del corchete lleva $\dot{A} = \{A, K\}_Z$ a la ecuación original. Aplicarla a Q, P prueba la última afirmación. □

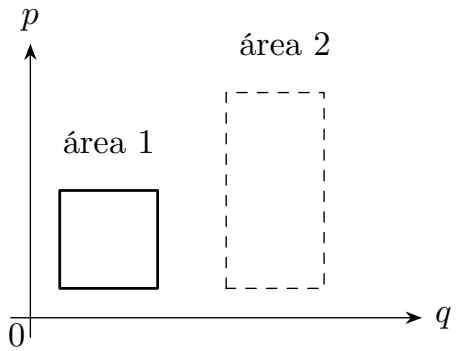


Figura 29.2. El cambio $Q = q$, $P = 2p$ duplica el área y satisface $\{Q, P\} = 2$. No es canónico con la forma estándar. Los rectángulos están desplazados en la página para facilitar su comparación. Véase §9.

La hipótesis temporal de la última frase es necesaria. Si Ψ depende de t, al derivar $Z = \Psi(z, t)$ aparece además $\partial_t \Psi$. La condición simpléctica a cada tiempo no elimina ese término. El capítulo 28 proporcionó la corrección explícita para coordenadas móviles y términos de borde; la misma precaución rige en cambios canónicos temporales más generales.

En un par de variables, la condición equivale a $\partial(Q, P)/\partial(q, p) = 1$. Preservar áreas sin su orientación permitiría también determinante -1, que invierte ω y no satisface nuestra definición. Por ejemplo, $(Q, P) = (q, -p)$ cambia el signo del corchete fundamental.

10. Cambios de variables que conviene reconocer

Proposición 29.10 — Cambios puntuales y desplazamientos de momento. Un cambio puntual $q = f(Q)$ acompañado de $P = (Df)^{\mathsf{T}} p$ es canónico. También lo es $Q = q$, $P = p + \nabla G(q)$ para cualquier función suave G.

Demostración. En el primer caso, $p_a dq^a = P_i dQ^i$. Al aplicar $-d$ se obtiene la igualdad de las formas simplécticas. En el segundo,

$$\sum_a dQ^a \wedge dP_a = \omega + \sum_{a,b} G_{,ab}\, dq^a \wedge dq^b = \omega,$$

porque la hessiana es simétrica y el producto exterior antisimétrico. □

El reescalamiento $Q = cq$, $P = p/c$, con $c \neq 0$, preserva el corchete. Cambiar ambos factores a c produce $\{Q, P\} = c^2$ y sólo es canónico si $c^2 = 1$. La dualidad entre posiciones y momentos vuelve a decidir los factores correctos.

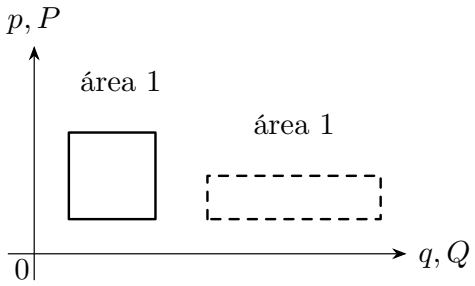


Figura 29.3. La transformación $Q = 2q$, $P = p/2$ duplica el ancho y divide la altura por dos. Preserva $dq \wedge dp$ y el corchete $\{Q, P\} = 1$. Los rectángulos se han separado para compararlos. Véase §10.

En el plano sin el origen, el cambio polar tiene

$$p_r = p_x \cos\theta + p_y \sin\theta, \qquad p_\theta = -r p_x \sin\theta + r p_y \cos\theta.$$

Resulta de escribir $p_x dx + p_y dy = p_r dr + p_\theta d\theta$; por la proposición 29.10 es canónico en cada carta angular. El punto $r = 0$ queda fuera de ese cambio, exactamente como en el capítulo 28. Un desplazamiento de momento más general, $P_a = p_a + b_a(q)$, cumple $\{P_a, P_b\} = \partial_b b_a - \partial_a b_b$.

Es canónico cuando la forma $b_a dq^a$ es cerrada. Localmente tiene una primitiva; globalmente puede carecer de ella. Así podemos distinguir preservar ω de preservar exactamente la forma α: un cambio canónico puede modificar α en una diferencial e incluso, según el dominio, en una forma cerrada no exacta.

En el modelo giroscópico del capítulo 28, los momentos cinéticos son $\pi_x = p_x + \gamma y/2$, $\pi_y = p_y - \gamma x/2$. Aquí

$$\{\pi_x, \pi_y\} = \gamma.$$

La posición junto con el momento cinético no forma el mismo sistema de coordenadas canónicas cuando $\gamma \neq 0$. Es posible trabajar en esas variables, pero hay que transportar también el corchete; reemplazarlo por la fórmula canónica de forma automática perdería la fuerza giroscópica.

11. Simetrías hamiltonianas y Noether

Para un hamiltoniano autónomo y un generador G independiente del tiempo, el cambio de H bajo el flujo de G es $dH/ds = \{H, G\}$. La misma cuenta que decide la conservación temporal decide si la transformación generada deja invariante el hamiltoniano.

Proposición 29.11 — Integrales y simetrías generadas. Si G no depende del tiempo, $\{G, H\} = 0$ equivale a que su flujo local preserve H. En ese caso sus flujos con el de H conmutan localmente. Para una integral temporal $G(q, p, t)$, la condición general es $G_{,t} + \{G, H\} = 0$.

Demostración. La derivada de H sobre el flujo de G es $\{H, G\}$; se anula idénticamente si y sólo si el valor de H permanece constante sobre todas esas curvas locales. Por proposición 29.7, $[X_H, X_G] = -X_{\{H,G\}} = 0$, lo que implica la conmutación local de los flujos por unicidad de sus ecuaciones. Para la última afirmación aplicamos la fórmula de evolución. Más precisamente, sobre el espacio que incluye el tiempo, con $Y = \partial_t + X_H$,

$$[Y, X_G] = X_{G_{,t}} + [X_H, X_G] = X_{G_{,t}+\{G,H\}}.$$

Si G es una integral, ese conmutador se anula. □

En el espacio con tiempo, el campo X_G de la última fórmula actúa sólo en las variables de fase; la ecuación describe una simetría de la evolución que conserva el instante. No afirma que $G(t)$ preserve a cada tiempo el valor instantáneo de H. Para la partícula libre, $G = tp - mq$ es conservada, pero $\{H, G\} = p$; su dependencia temporal aporta la compensación necesaria.

La carga de Noether del capítulo 27, después de la inversión regular, se escribe $C = p \cdot \xi - H\tau - F$. Aunque la transformación original incluya un cambio temporal, su carga genera una transformación a tiempo fijo sobre las fases que satisface la condición de conservación. Para los generadores puntuales del capítulo 27, $\{q^a, C\} = C_{,p_a} = \xi^a - \tau H_{,p_a} = \xi^a - \tau \dot{q}^a$, que es precisamente la variación de configuración a tiempo fijo. Así se enlaza la simetría variacional con la estructura de corchetes.

Una constante añadida a G no cambia X_G, porque su diferencial es cero. En un dominio conexo, dos funciones que generan el mismo campo difieren en una constante espacial; si dependen del tiempo, la diferencia puede ser función sólo de t. La conservación de la carga impone además su correspondiente condición temporal.

12. El volumen de fase y el teorema de Liouville

La forma simpléctica construye una forma de volumen

$$\Omega = \frac{1}{n!} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ factores}}.$$

En coordenadas canónicas es $dq^1 \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dp_n$. Elegimos la orientación definida por ella; la medida positiva asociada tiene densidad ordinaria $d^n q\, d^n p$.

Proposición 29.12 — Teorema de Liouville. El flujo hamiltoniano preserva el volumen de fase. En coordenadas canónicas, su jacobiano tiene determinante 1 donde está definido, también si H depende del tiempo.

Demostración. proposición 29.8 implica que se preserva cada factor ω y, por tanto, su producto exterior Ω. Podemos comprobarlo directamente: la divergencia del campo es

$$\operatorname{div} X_H = \sum_a \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^a \partial p_a} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_a \partial q^a} \right) = 0.$$

Si $M(t) = D\Phi_{t,t_0}$, su ecuación variacional da $d(\det M)/dt = (\operatorname{div} X_H) \det M = 0$. Como $M(t_0) = \mathbf{1}$, el determinante permanece igual a uno. □

Una densidad $\rho(z,t)$ transportada por el flujo satisface la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho X_H) = 0.$$

Al anularse la divergencia del campo, resulta $\partial_t \rho + \{\rho, H\} = 0$: su valor permanece constante a lo largo de las trayectorias. Para H autónomo, cualquier densidad diferenciable $\rho = f(H)$ es estacionaria, aunque para representar una distribución de probabilidad deba además ser no negativa e integrable, y normalizarse.

Conservar volumen es una consecuencia de ser simpléctico. En dimensión cuatro la recíproca falla: el cambio

$$(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = (2q_1, q_2/2, p_1, p_2)$$

tiene determinante uno, pero $\{Q_1, P_1\} = 2$ y $\{Q_2, P_2\} = 1/2$. La información de ω distingue las áreas de los pares conjugados que el volumen total no distingue. Para el oscilador amortiguado del capítulo 28, $\dot q = p/m$, $\dot p = -kq - bp/m$, la divergencia es $-b/m$. Su flujo contrae áreas por el factor $e^{-bt/m}$. Este resultado delimita el alcance de Liouville: las fuerzas adicionales de aquel modelo no forman el campo canónico del hamiltoniano mecánico utilizado allí.

13. El oscilador en coordenadas de acción y ángulo

La elipse de energía del oscilador sugiere usar su tamaño y la posición sobre ella como variables. Para $m, \omega > 0$, fuera del origen ponemos

$$q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin\theta, \qquad p = \sqrt{2m\omega I}\cos\theta, \qquad I > 0.$$

El ángulo es periódico y requiere cartas si queremos representarlo por números reales. La variable I tiene unidades de acción.

Proposición 29.13 — Par acción–ángulo del oscilador. En esas coordenadas,

$$\omega_{\text{fase}} = d\theta \wedge dI, \qquad H = \omega I, \qquad \dot\theta = \omega, \quad \dot I = 0.$$

Además $I = (2\pi)^{-1} \oint p\, dq$, orientando la órbita según el movimiento.

Demostración. Para evitar confundir frecuencia y forma, hemos añadido el subíndice a la segunda. El coeficiente de $d\theta \wedge dI$ en $dq \wedge dp$ es

$$q_{,\theta} p_{,I} - q_{,I} p_{,\theta} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

La sustitución en $H = p^2/(2m) + m\omega^2 q^2/2$ da $H = \omega I$. Las ecuaciones canónicas proporcionan la evolución. Finalmente, sobre I constante,

$$p\, dq = 2I\cos^2\theta\, d\theta, \qquad \oint p\, dq = 2\pi I.$$

La evolución tiene θ creciente, lo que fija la orientación usada. □

El área encerrada por la elipse es $2\pi E/\omega$. La acción expresa esa área dividida por 2π, y el ángulo convierte el movimiento en una traslación uniforme. La construcción falla como carta en el origen: allí la acción es cero y ningún ángulo distingue estados. Esto no hace singular al oscilador original; sólo marca el límite de las nuevas coordenadas.

$$q = \sqrt{2J}\cos\phi,\; p = -\sqrt{2J}\sin\phi$$

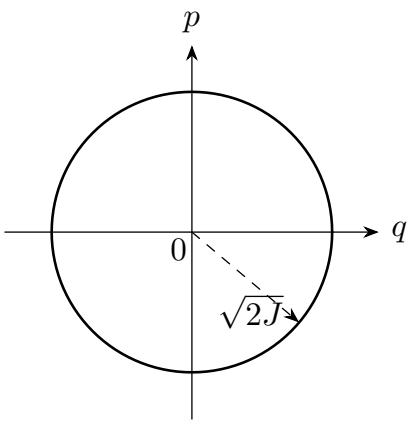


Figura 29.4. Con $m = \omega = 1$, el área encerrada es $2\pi J$. La convención $q = \sqrt{2J}\cos\phi$, $p = -\sqrt{2J}\sin\phi$ hace crecer ϕ con el flujo horario. El origen $J = 0$ exige otra carta. Véase §13.

En una familia de osciladores desacoplados podemos aplicar la construcción a cada modo de frecuencia positiva. La extensión de estas ideas a sistemas integrables generales exige hipótesis sobre independencia de integrales, compacidad y regularidad de niveles que no se deducen de disponer de una sola cantidad conservada.

14. Lo local, lo global y la dinámica que sigue

Definición 29.7 — Campo simpléctico. Un campo es simpléctico si sus flujos locales preservan la forma simpléctica. Todo campo hamiltoniano es simpléctico por la proposición 29.8; la implicación inversa tiene una condición global adicional.

Proposición 29.14 — Obstrucción global elemental. En una región con coordenadas canónicas, un campo X es simpléctico si y sólo si la forma $\beta = \iota_X\omega$ es cerrada. Es hamiltoniano globalmente si y sólo si esa forma es exacta, $\beta = dG$. Todo campo simpléctico es hamiltoniano en un entorno suficientemente pequeño de cada punto de esa región.

Demostración. Si $B = DX$, la derivada de ω sobre vectores transportados es $u^{\mathsf{T}}(B^{\mathsf{T}}\mathbb{J}+\mathbb{J}B)v$. Por otra parte, las componentes de β son $\beta_j = X_i\mathbb{J}_{ij}$, y las de $d\beta$ son las entradas de la misma matriz antisimétrica $B^{\mathsf{T}}\mathbb{J} + \mathbb{J}B$. Por tanto ambas condiciones de anulación equivalen. Ser hamiltoniano significa, por definición, que $\beta = dG$. En una bola de centro z_0, escribamos $x = z - z_0$ y definamos

$$G(z) = \int_0^1 \beta_i(z_0 + sx)x^i\, ds.$$

Si $d\beta = 0$, entonces $\partial_k\beta_i = \partial_i\beta_k$ y

$$\partial_k G = \int_0^1 \left[s x^i \partial_i \beta_k(z_0 + sx) + \beta_k(z_0 + sx) \right] ds = \int_0^1 \frac{d}{ds} \left[s \beta_k(z_0 + sx) \right] ds = \beta_k(z).$$

La bola permite mantener todo el segmento en el dominio. Esto construye el generador local y demuestra en este caso el lema local de Poincaré. □

En el cilindro de fase del péndulo, el campo $X = \partial_p$ genera traslaciones verticales, que conservan $d\theta \wedge dp$. Pero

$$\iota_X \omega = -d\theta,$$

cuya integral sobre una vuelta al cilindro es -2π. Una diferencial de una función global tendría integral cero sobre todo lazo cerrado. Existe el generador local $G = -\theta$, pero no una función real global y univaluada que lo reemplace sobre todo el cilindro. La topología afecta a la existencia de generadores globales incluso en un ejemplo tan sencillo.

Tampoco la preservación simpléctica impone estabilidad. El hamiltoniano $H = \lambda qp$, con $\lambda > 0$, da $q(t) = e^{\lambda t} q_0$, $p(t) = e^{-\lambda t} p_0$. Las áreas se conservan y algunas separaciones crecen exponencialmente. Esa observación abre una pregunta que la estructura geométrica por sí sola no responde: qué estados permanecen próximos, cuáles se separan y qué información podemos predecir durante tiempos largos. El capítulo 30 estudiará esa dinámica mediante puntos fijos, estabilidad, mapas y sensibilidad a los datos iniciales.

15. Ejercicios

Ejercicio 29.1 — Corchetes básicos. Calcule $\{q^2, p^3\}$ y $\{qp, q^2 + p^2\}$ en un grado de libertad.

Ejercicio 29.2 — Producto y composición. Pruebe que $\{f(F), G\} = f'(F)\{F, G\}$ para f suave. Deduzca una familia de integrales a partir de una integral F.

Ejercicio 29.3 — Jacobi en polinomios. Verifique Jacobi para $F = q^2/2$, $G = p^2/2$, $K = qp$, calculando los tres términos.

Ejercicio 29.4 — Integral temporal. Para la partícula libre calcule los corchetes entre p, $B = tp - mq$ y $H = p^2/(2m)$. Verifique la conservación de B.

Ejercicio 29.5 — Integrales que no conmutan. En un potencial central tridimensional, explique por qué L_x, L_y, L_z son integrales y calcule sus corchetes. ¿Están en involución?

Ejercicio 29.6 — Dilatación canónica. Integre el flujo generado por $G = qp$. Compruebe la conservación de $dq \wedge dp$ y determine si preserva el hamiltoniano del oscilador.

Ejercicio 29.7 — Rotación plana. Calcule los cuatro corchetes de x, y, p_x, p_y con L_z e integre la transformación con parámetro s.

Ejercicio 29.8 — Momento angular y coordenadas. En tres dimensiones, calcule $\{q_j, L_i\}$ y $\{p_j, L_i\}$. Interprete el caso $i = 3$.

Ejercicio 29.9 — Evaluación de una forma. Para $u = (1, 2)$ y $v = (3, -1)$ en un plano (q, p), calcule $\omega(u, v)$, $\omega(v, u)$ y $\omega(u, u)$. Explique por qué esta forma no define una norma.

Ejercicio 29.10 — Campo de un observable. Para $F = q^2 p$, calcule X_F y compruebe directamente $\iota_{X_F} \omega = dF$.

Ejercicio 29.11 — Signo del conmutador. Para $F = q^2/2$ y $G = p^2/2$, calcule $[X_F, X_G]$ sobre q, p y compárelo con $X_{\{F,G\}}$.

Ejercicio 29.12 — Flujo del oscilador. Escriba la matriz $M(t)$ del flujo del oscilador y verifique $M^{\mathsf{T}} \mathbb{J} M = \mathbb{J}$ y $\det M = 1$.

Ejercicio 29.13 — Traslación de momento. Decida cuándo $Q = q$, $P = p + aq^2$, con a constante, es canónico. Halle una función $G(q)$ con $P = p + G'(q)$.

Ejercicio 29.14 — Un giro entre posición y momento. Para $Q = p$, $P = -q$ en variables adimensionales, compruebe canonicidad y escriba el hamiltoniano transformado de $H = p^2/(2m) + kq^2/2$.

Ejercicio 29.15 — Conservar área sin canonicidad. Compruebe que $Q = q$, $P = -p$ conserva el área no orientada, pero invierte la forma y el corchete. ¿Cuál es su determinante?

Ejercicio 29.16 — Conservar volumen no basta. Compruebe todas las afirmaciones sobre el cambio de cuatro variables presentado en §12. Indique dos corchetes que fallen.

Ejercicio 29.17 — Momento polar. Derive p_r, p_θ desde la forma de grado uno y compruebe $\{r, p_r\} = 1$ y $\{r, p_\theta\} = 0$ en variables cartesianas, para $r > 0$.

Ejercicio 29.18 — Momentos cinéticos. Para $\pi_x = p_x + \gamma y/2$, $\pi_y = p_y - \gamma x/2$, calcule los corchetes fundamentales y deduzca las aceleraciones usando $H = (\pi_x^2 + \pi_y^2)/(2m) + V$.

Ejercicio 29.19 — Corrección temporal. Con $Q = q - ut$, $P = p$ y $H = p^2/(2m)$, pruebe que el cambio es canónico a cada tiempo. Halle el hamiltoniano correcto K y explique el término que faltaría si usáramos sólo $H \circ \Psi^{-1}$.

Ejercicio 29.20 — Dos energías modales. Para $H = H_1 + H_2$, $H_i = (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2)/2$, calcule $\{H_1, H_2\}$ y pruebe que ambos son integrales.

Ejercicio 29.21 — Simetría de traslación. Para $H = (p_x^2 + p_y^2)/(2m) + V(y)$, pruebe que p_x genera una simetría y que el flujo de esa simetría conmuta con la evolución.

Ejercicio 29.22 — Divergencia y amortiguamiento. Calcule el jacobiano del flujo en área para el oscilador amortiguado. Compare con la evolución de energía y explique por qué ambas tasas no son la misma cantidad.

Ejercicio 29.23 — Densidad estacionaria. Para el oscilador unidimensional, normalice $\rho = Ce^{-\beta H}$ sobre todo el plano, con $\beta > 0$. Compruebe la ecuación de Liouville.

Ejercicio 29.24 — Acción del oscilador. Obtenga I como función de q, p y verifique $\{\theta, I\} = 1$ en una carta angular, sin utilizar como premisa proposición 29.13.

Ejercicio 29.25 — Área e intensidad. Calcule el área encerrada por la órbita del oscilador de energía E. Determine cómo cambia I si se duplica la amplitud de posición manteniendo m, ω.

Ejercicio 29.26 — Un campo localmente hamiltoniano. En el cilindro (θ, p), pruebe que $X = \partial_p$ es simpléctico y que no tiene generador global real. Dé uno local.

Ejercicio 29.27 — Deformación exponencial. Para $H = \lambda qp$, halle el flujo, su determinante y su acción sobre un rectángulo alineado con los ejes. Decida si el origen es estable frente a toda perturbación.

Ejercicio 29.28 — Forma no cerrada en cuatro dimensiones. En $\mathbb{R}^4$, con coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2), considere $\eta = e^{q_2} dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$. Pruebe que es no degenerada, pero no simpléctica.

Ejercicio 29.29 — Primitiva del desplazamiento. Para $P = p + b(q)$ en dos grados de libertad, derive la condición de canonicidad. Aplíquela a $b = (q_2, q_1)$ y a $b = (-q_2, q_1)$.

Ejercicio 29.30 — Cierre de integrales temporales. Para la partícula libre en el plano, tome $B_x = tp_x - mx$, $B_y = tp_y - my$ y $L_z = xp_y - yp_x$. Calcule $\{L_z, B_x\}$ y $\{L_z, B_y\}$, y compruebe que los resultados son integrales temporales.

16. Soluciones

Solución del ejercicio 29.1. Por derivación directa, $\{q^2, p^3\} = 2q\,3p^2 = 6qp^2$. Para el segundo corchete, las derivadas del primer argumento son p, q y las del segundo $2q, 2p$. Por tanto

$$\{qp, q^2 + p^2\} = 2p^2 - 2q^2.$$

El resultado no es cero en todo el plano; que se anule sobre las rectas $p = \pm q$ no lo convierte en una identidad de involución.

Solución del ejercicio 29.2. La regla de la cadena da $\partial_i f(F) = f'(F)\partial_i F$. Sustituir en cada término de la definición extrae el factor común y prueba la fórmula. Si F es una integral, incluso temporal, tenemos

$$\mathcal{D}f(F) = f'(F)[F_{,t} + \{F, H\}] = 0.$$

Todas las funciones suaves de F son integrales, pero sus diferenciales son múltiplos de dF; no constituyen nuevas integrales funcionalmente independientes.

Solución del ejercicio 29.3. Primero $\{G, K\} = -p^2$, $\{K, F\} = -q^2$ y $\{F, G\} = qp$. Así,

$$\{F, \{G, K\}\} = -2qp, \qquad \{G, \{K, F\}\} = 2qp, \qquad \{K, \{F, G\}\} = \{qp, qp\} = 0.$$

La suma es cero. Este ejemplo comprueba los signos de la identidad, cuya validez para funciones arbitrarias fue demostrada en la proposición 29.2.

Solución del ejercicio 29.4. Con el tiempo fijo, $\{p, B\} = m$, $\{p, H\} = 0$ y $\{B, H\} = -p$. La derivada explícita de B es $B_{,t} = p$, así que $\mathcal{D}B = p - p = 0$. También $\{B, p\} = -m$ por antisimetría. El corchete de las dos integrales es una constante; el corchete de B con H por sí solo no debe anularse cuando B depende del tiempo.

Solución del ejercicio 29.5. Para $H = p^2/(2m) + V(|q|)$, la derivada de $L = q \times p$ es $\dot{q} \times p + q \times \dot{p}$. El primer término es $(p/m) \times p = 0$ y el segundo se anula porque $\dot{p} = -\nabla V$ es radial. Sus componentes son integrales. Proposición 29.5 da $\{L_x, L_y\} = L_z$ y sus permutaciones cíclicas. Como esas funciones no son idénticamente cero, las tres componentes no forman una familia en involución, aunque sus valores puedan anularse en estados particulares.

Solución del ejercicio 29.6. Las ecuaciones del parámetro son $q' = q$, $p' = -p$, de donde $q(s) = e^s q_0$, $p(s) = e^{-s} p_0$. Los diferenciales adquieren factores inversos y $dq(s) \wedge dp(s) = dq_0 \wedge dp_0$. Para el oscilador,

$$\{H, G\} = m\omega^2 q^2 - \frac{p^2}{m},$$

que no se anula idénticamente. La transformación es canónica y no es una simetría de ese hamiltoniano. Conserva la estructura de las ecuaciones, con el hamiltoniano transformado correspondiente.

Solución del ejercicio 29.7. La cuenta da $\{x, L_z\} = -y$, $\{y, L_z\} = x$, $\{p_x, L_z\} = -p_y$, $\{p_y, L_z\} = p_x$. Al integrar,

$$x(s) = x_0 \cos s - y_0 \sin s, \quad y(s) = x_0 \sin s + y_0 \cos s,$$

con las mismas fórmulas para (p_x, p_y). Las posiciones y momentos giran en el mismo sentido; en particular, el emparejamiento $p \cdot dq$ se conserva por la ortogonalidad de la matriz de giro.

Solución del ejercicio 29.8. Las derivadas respecto de momentos y posiciones dan

$$\{q_j, L_i\} = \varepsilon_{iaj} q_a, \qquad \{p_j, L_i\} = -\varepsilon_{ijb} p_b = \varepsilon_{ibj} p_b.$$

Para $i = 3$, obtenemos $(-q_2, q_1, 0)$ y $(-p_2, p_1, 0)$. Se genera una rotación alrededor del tercer eje, dejando fijas las terceras componentes. Las dos escrituras con el símbolo alternante son equivalentes al intercambiar sus dos últimos índices.

Solución del ejercicio 29.9. La evaluación es $\omega(u, v) = 1(-1) - 2(3) = -7$. Al invertir el orden resulta 7, y $\omega(u, u) = 1(2) - 2(1) = 0$. Una norma al cuadrado tendría que ser positiva para el vector no nulo u. Esta forma alternada mide área orientada entre dos vectores y se anula cuando ambos son iguales, de modo que no cumple esa condición de positividad.

Solución del ejercicio 29.10. Las derivadas son $F_{,p} = q^2$ y $F_{,q} = 2qp$. Luego $X_F = q^2 \partial_q - 2qp\partial_p$. Como la contracción de $a\partial_q + b\partial_p$ con $dq \wedge dp$ es $a\,dp - b\,dq$,

$$\iota_{X_F} \omega = q^2 dp + 2qp\, dq = d(q^2 p).$$

La cuenta verifica a la vez la posición de los signos y la unicidad del vector correspondiente al diferencial.

Solución del ejercicio 29.11. Los campos son $X_F = -q\partial_p$, $X_G = p\partial_q$. Sobre la coordenada q,

$$[X_F, X_G]q = X_F(p) - X_G(0) = -q.$$

Sobre p, el resultado es $X_F(0) - X_G(-q) = p$. Por tanto el conmutador es $-q\partial_q + p\partial_p$. Como $\{F, G\} = qp$, el campo de ese corchete es $q\partial_q - p\partial_p$, exactamente el opuesto.

Solución del ejercicio 29.12. Con $c = \cos \omega t$, $s = \sin \omega t$,

$$M(t) = \begin{pmatrix} c & s/(m\omega) \\ -m\omega s & c \end{pmatrix}.$$

El determinante es $c^2 + s^2 = 1$. Para una matriz bidimensional cualquiera, la multiplicación directa da $M^{\mathsf{T}} \mathbb{J} M = (\det M)\mathbb{J}$. Aplicada a esta matriz, verifica la condición simpléctica. La igualdad de determinante basta aquí porque sólo hay un par de variables; ejercicio 29.16 muestra por qué no basta en dimensión cuatro.

Solución del ejercicio 29.13. Tenemos $\{Q, P\} = 1$ para todo a, pues $Q = q$ y la derivada de P respecto de p es uno. El cambio es globalmente invertible, $p = P - aQ^2$. Una primitiva es $G(q) = aq^3/3$ más una constante. Su segunda derivada es $2aq$ y el término adicional en $dQ \wedge dP$ es $2aq\, dq \wedge dq = 0$.

Solución del ejercicio 29.14. Se obtiene $\{Q, P\} = \{p, -q\} = 1$. La inversa es $q = -P$, $p = Q$, así que

$$K(Q, P) = \frac{Q^2}{2m} + \frac{k}{2} P^2.$$

Las ecuaciones son $\dot{Q} = kP$, $\dot{P} = -Q/m$, compatibles con $Q = p$ y $P = -q$. El supuesto de variables adimensionales evita identificar magnitudes de unidades distintas sin incorporar factores de escala.

Solución del ejercicio 29.15. Su matriz es $\operatorname{diag}(1, -1)$, con determinante -1. El valor absoluto del determinante conserva el área positiva, pero $dQ \wedge dP = -dq \wedge dp$ y $\{Q, P\} = -1$. Es una transformación antisimpléctica: invierte la forma en lugar de preservarla.

Solución del ejercicio 29.16. En el orden (q_1, q_2, p_1, p_2), la matriz es diagonal con entradas $(2, 1/2, 1, 1)$ y su determinante es uno. Sin embargo,

$$\{Q_1, P_1\} = 2, \qquad \{Q_2, P_2\} = \frac{1}{2}.$$

En términos de formas, $\Psi^*\omega = 2dq_1 \wedge dp_1 + (1/2)dq_2 \wedge dp_2$. Los dos factores se compensan al formar el volumen, pero cada área conjugada cambia. La transformación preserva volumen y no es canónica.

Solución del ejercicio 29.17. Como $dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$ y $dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$, agrupar coeficientes da las fórmulas de §10. En variables cartesianas, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $p_r = (xp_x + yp_y)/r$ y $p_\theta = xp_y - yp_x$. Como r no depende de momentos,

$$\{r, p_r\} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = 1, \qquad \{r, p_\theta\} = \frac{x(-y)+yx}{r} = 0.$$

Estas cuentas requieren $r > 0$, que es el dominio declarado.

Solución del ejercicio 29.18. Los corchetes son $\{x, \pi_x\} = \{y, \pi_y\} = 1$, $\{x, \pi_y\} = \{y, \pi_x\} = 0$, $\{x, y\} = 0$ y $\{\pi_x, \pi_y\} = \gamma$. Por ello $\dot{x} = \pi_x/m$, $\dot{y} = \pi_y/m$ y

$$\dot{\pi}_x = \frac{\gamma}{m}\pi_y - V_{,x}, \qquad \dot{\pi}_y = -\frac{\gamma}{m}\pi_x - V_{,y}.$$

Al usar $\pi = m\dot{q}$ recuperamos las dos aceleraciones giroscópicas del capítulo 28. Si hubiéramos supuesto $\{\pi_x, \pi_y\} = 0$, habríamos eliminado precisamente esas fuerzas.

Solución del ejercicio 29.19. A tiempo fijo $\{Q, P\} = \{q - ut, p\} = 1$, y la jacobiana espacial es la identidad. Pero la evolución real da $\dot{Q} = p/m - u$, $\dot{P} = 0$. El hamiltoniano que las genera es

$$K(Q, P) = \frac{P^2}{2m} - uP,$$

hasta una función sólo del tiempo. La composición $H \circ \Psi^{-1} = P^2/(2m)$ omitiría la velocidad $-u$ del origen de coordenadas. Es la misma corrección de marco móvil deducida variacionalmente en el capítulo 28.

Solución del ejercicio 29.20. Cada H_i depende únicamente de su propio par de variables. En cada término de $\{H_1, H_2\}$ al menos una derivada es cero, por lo que el corchete se anula. Así,

$$\dot{H}_1 = \{H_1, H_1 + H_2\} = 0, \qquad \dot{H}_2 = 0.$$

Son integrales en involución. Sus valores determinan cómo se reparte la energía entre los modos; sumarlos conserva la energía total pero pierde esa información de reparto.

Solución del ejercicio 29.21. Como H no depende de x, $\{H, p_x\} = H_{,x} = 0$. El flujo de p_x es $x \mapsto x + s$, con las demás variables fijas, y deja H invariante. El campo de traslaciones es ∂_x y los coeficientes del campo dinámico tampoco dependen de x, de modo que su conmutador es cero. Por unicidad, trasladar el dato y luego evolucionar produce la misma solución que evolucionar y trasladar.

Solución del ejercicio 29.22. La divergencia del campo es $\partial_q(p/m) + \partial_p(-kq - bp/m) = -b/m$. El determinante de la aplicación de evolución desde cero es, por tanto, $e^{-bt/m}$. En cambio,

$$\dot{H} = -\frac{b}{m^2}p^2.$$

La divergencia describe el cambio de un conjunto de estados vecinos y tiene unidades de tiempo inverso. La potencia describe el cambio energético de una trayectoria y depende del estado. En

un punto de retorno $p = 0$, la potencia es momentáneamente cero y la contracción local del área continúa.

Solución del ejercicio 29.23. Introduzcamos $x = \sqrt{m\omega}\, q$, $y = p/\sqrt{m\omega}$. El jacobiano tiene valor uno y $H = \omega(x^2 + y^2)/2$. Integrando en coordenadas polares del plano (x, y),

$$\int e^{-\beta H}\, dq\, dp = 2\pi \int_0^\infty e^{-\beta\omega r^2/2} r\, dr = \frac{2\pi}{\beta\omega}.$$

La normalización es $C = \beta\omega/(2\pi)$. La densidad no depende del tiempo y $\{e^{-\beta H}, H\} = -\beta e^{-\beta H}\{H, H\} = 0$, de modo que satisface Liouville. La hipótesis $\beta > 0$ asegura la integrabilidad.

Solución del ejercicio 29.24. La inversión da

$$I = \frac{1}{2}\left(m\omega q^2 + \frac{p^2}{m\omega}\right) = \frac{H}{\omega}.$$

Sea $x = \sqrt{m\omega}\, q$, $y = p/\sqrt{m\omega}$; localmente elegimos el ángulo con $x = r\sin\theta$, $y = r\cos\theta$. Su diferencial es $d\theta = (y\, dx - x\, dy)/(x^2 + y^2)$, así que $\theta_{,q} = p/(2I)$ y $\theta_{,p} = -q/(2I)$. Entonces

$$\{\theta, I\} = \frac{p^2}{2Im\omega} + \frac{m\omega q^2}{2I} = 1.$$

La cuenta excluye el origen y presupone una elección local continua del ángulo.

Solución del ejercicio 29.25. Los semiejes de la elipse son $q_{\text{máx}} = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ y $p_{\text{máx}} = \sqrt{2mE}$. Su área positiva es $\pi q_{\text{máx}} p_{\text{máx}} = 2\pi E/\omega = 2\pi I$. La energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de posición. Duplicarla multiplica la energía y la acción por cuatro, manteniendo la frecuencia y los parámetros fijos.

Solución del ejercicio 29.26. El flujo es $(\theta, p) \mapsto (\theta, p + s)$, que deja $d\theta \wedge dp$ igual. Su contracción es $-d\theta$. Si existiera una función global real G con $dG = -d\theta$, integrar sobre una vuelta cerrada daría simultáneamente cero y -2π, imposible. En una carta angular, $G = -\theta$ sí cumple la ecuación. Cambiar de carta modifica esa función en una constante, pero no elimina el salto acumulado alrededor del círculo.

Solución del ejercicio 29.27. Las ecuaciones son $\dot q = \lambda q$, $\dot p = -\lambda p$, cuya solución es $(e^{\lambda t} q_0, e^{-\lambda t} p_0)$. Su determinante es uno. Un rectángulo de lados a, b paralelos a los ejes pasa a tener lados $e^{\lambda t} a, e^{-\lambda t} b$, con la misma área ab. El origen no es estable frente a toda perturbación: cualquier dato $q_0 \neq 0$, por pequeño que sea, abandona una vecindad fija al crecer el tiempo. La conservación de área permite ese crecimiento compensado en la dirección conjugada.

Solución del ejercicio 29.28. Los dos bloques de la forma tienen coeficientes no nulos: $e^{q_2} > 0$ y 1. Evaluar contra los vectores de coordenadas muestra que $\eta(u, v) = 0$ para todo v obliga a anular las cuatro componentes de u. Es no degenerada. Sin embargo,

$$d\eta = e^{q_2} dq_2 \wedge dq_1 \wedge dp_1 \neq 0.$$

Por ejemplo, su evaluación sobre $(\partial_{q_2}, \partial_{q_1}, \partial_{p_1})$ vale e^{q_2}. Al fallar la cerradura, no es una forma simpléctica. La no degeneración sola no incluye toda la definición.

Solución del ejercicio 29.29. Como $Q = q$, se conservan los corchetes de posiciones y los mixtos. Los restantes son $\{P_a, P_b\} = \partial_b b_a - \partial_a b_b$, que se anulan si y sólo si la forma $b_a dq^a$ es cerrada. Para $b = (q_2, q_1)$ las derivadas cruzadas valen uno; el cambio es canónico y una primitiva es $G = q_1 q_2$. Para $b = (-q_2, q_1)$, $\{P_1, P_2\} = -1 - 1 = -2$, así que no es canónico.

Solución del ejercicio 29.30. De los corchetes de rotación obtenemos

$$\{L_z, B_x\} = t\{L_z, p_x\} - m\{L_z, x\} = tp_y - my = B_y,$$

$$\{L_z, B_y\} = -tp_x + mx = -B_x.$$

Para la partícula libre, $\mathcal{D}B_x = p_x - m(p_x/m) = 0$ y lo mismo vale para B_y. También $\mathcal{D}L_z = 0$ porque la velocidad es paralela al momento. Por tanto los resultados calculados son integrales temporales, de acuerdo con la proposición 29.3. La rotación mezcla las dos cargas de traslación galileana como mezcla las componentes de un vector.

Notas y lecturas

El capítulo 28 proporciona las ecuaciones canónicas, su equivalencia regular con Euler–Lagrange y los cambios de referencia dependientes del tiempo. El capítulo 27 aporta las cargas de Noether; capítulo 24 reaparece en las energías modales. Las herramientas de formas diferenciales se han introducido en el grado necesario para construir la forma canónica, reconocer la cerradura y distinguir generadores locales y globales.

Una lectura complementaria es David Tong, *Classical Dynamics*, capítulo 4, «The Hamiltonian Formalism», §§4.2–4.4, para Liouville, corchetes y transformaciones canónicas. Las demostraciones, convenciones geométricas y soluciones están desarrolladas en el texto. No se presupone un teorema global de coordenadas canónicas ni un criterio general de integrabilidad a partir del mero conteo de integrales.

El capítulo 30 continuará con puntos fijos, retratos de fase, estabilidad, mapas y sensibilidad. La preservación de estructura y volumen establecida aquí será una herramienta para interpretar esos fenómenos.

Capítulo 30

Sistemas dinámicos, estabilidad y caos

Una solución determina el movimiento para un dato inicial. Un retrato de fase permite preguntar qué movimientos son posibles y cómo cambian cuando modificamos ese dato. El oscilador conserva sus elipses; el péndulo separa libraciones y rotaciones; un rozamiento lleva las trayectorias hacia el reposo. Ya conocemos esos ejemplos. Falta precisar qué significa permanecer cerca de una solución, qué puede decirnos una aproximación lineal y hasta dónde alcanza una predicción basada en datos imperfectos.

La unicidad de las ecuaciones no asegura que dos estados próximos tengan futuros próximos durante tiempos largos. En el capítulo 29 encontramos una evolución que estiraba una dirección y comprimía otra mientras preservaba áreas. Ese crecimiento plantea un problema de estabilidad, pero todavía no basta para hablar de caos: también interesa cómo las trayectorias recorren una región y regresan a ella.

Empezaremos por equilibrios y flujos continuos, pasaremos a mapas obtenidos por observaciones sucesivas y construiremos un ejemplo de caos cuya afirmación pueda demostrarse por completo. Los modelos mecánicos servirán para distinguir conservación, atracción y sensibilidad. Trabajaremos con estados de dimensión finita y campos suficientemente suaves para asegurar existencia, unicidad y dependencia continua locales. Al comparar distancias físicas se entiende elegida una escala para cada coordenada; mezclar metros y momentos sin ese reescalamiento no define por sí solo una norma física.

1. Ecuaciones, flujos y retratos de fase

Definición 30.1 — Sistema autónomo y equilibrio. Un sistema autónomo es una ecuación $\dot{z} = f(z)$ en una región abierta del espacio de estados, sin dependencia temporal explícita. Un equilibrio es un punto z_* donde $f(z_*) = 0$. Su solución permanece en ese punto.

Denotamos por $\Phi_t(z_0)$ la solución que parte de z_0 en tiempo cero. La unicidad implica $\Phi_{t+s}(z_0) = \Phi_t(\Phi_s(z_0))$ siempre que todas las expresiones existan. En particular, podemos invertir localmente la evolución usando tiempo negativo. Este flujo no permite que dos órbitas distintas se crucen en un estado regular.

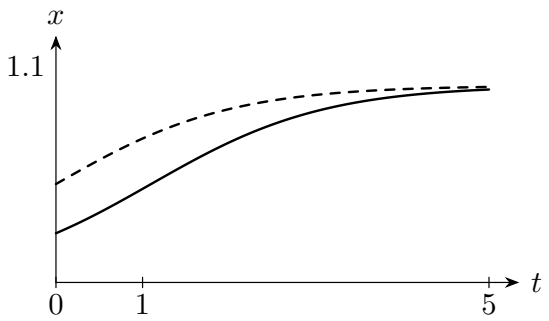


Figura 30.1. Para $\dot{x} = x(1-x)$, dos datos $x_0 = 1/4$ y $1/2$ generan curvas $x(t) = [1 + (x_0^{-1} - 1)e^{-t}]^{-1}$. No se cruzan: la unicidad conserva el orden de los datos. Véase §1.

El **retrato de fase** reúne las órbitas, los equilibrios y sus sentidos de recorrido. En una ecuación escalar basta marcar sobre una recta dónde f es positiva o negativa. En dos dimensiones aparecen curvas, ciclos y separatrices. La curva geométrica no registra por sí sola cuánto tarda el sistema en recorrerla.

Existencia local y existencia global son cuestiones diferentes. Para $\dot{x} = x^2$, con $x(0) = x_0 > 0$, $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$

es única hasta que diverge en $t = 1/x_0$. Por eso las afirmaciones de estabilidad futura se formulan en una región donde las soluciones correspondientes existen para todo $t \geq 0$. Cerca de un equilibrio, mantenerlas atrapadas en un compacto interior del dominio proporciona esa continuación.

Un modelo no autónomo $\dot{z} = f(z, t)$ puede convertirse formalmente en autónomo añadiendo una coordenada s con $\dot{s} = 1$. Si la fuerza es periódica, su fase puede tomarse en un círculo. Esa ampliación cambia la dimensión del espacio de estados y será relevante al comparar un oscilador forzado con uno autónomo.

2. Qué significa que un equilibrio sea estable

Definición 30.2 — Estabilidad de un equilibrio. El equilibrio z_* es estable en el sentido de Lyapunov si, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|z_0 - z_*\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\Phi_t(z_0) - z_*\| < \varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Es asintóticamente estable si además atrae a todos los estados de alguna vecindad: $\Phi_t(z_0) \to z_*$. Es exponencialmente estable si existen $\rho, C, \alpha > 0$, independientes del dato inicial y del tiempo, tales que para todo $\|z_0 - z_*\| < \rho$ y todo $t \geq 0$,

$$\|\Phi_t(z_0) - z_*\| \leq C e^{-\alpha t} \|z_0 - z_*\|.$$

Un equilibrio puede ser estable sin atraer. El oscilador armónico conserva la distancia al origen en coordenadas convenientemente reescaladas, pero una elipse de energía positiva nunca converge al centro. El orden de los cuantificadores en la definición importa: un mismo δ debe controlar todos los tiempos futuros.

Proposición 30.1 — Criterio escalar de signo. Para $\dot{x} = f(x)$, si $f(x_*) = 0$ y $(x - x_*)f(x) < 0$ en un entorno perforado de x_*, el equilibrio es asintóticamente estable. Si $f'(x_*) < 0$, esa condición se cumple. Si $f'(x_*) > 0$, el equilibrio es inestable.

Demostración. Bajo la primera condición, a la derecha el campo apunta hacia la izquierda y a la izquierda hacia la derecha. Por unicidad, una solución no atraviesa el equilibrio y queda atrapada entre él y su posición inicial. Es monótona, luego tiene un límite. Si ese límite fuera diferente de x_*, el campo tendría allí signo estricto y magnitud separada de cero, impidiendo la convergencia. Así, el límite es x_*. El encierro prueba también estabilidad. Cuando la derivada es negativa, $f(x) = f'(x_*)(x - x_*) + o(|x - x_*|)$ da los signos requeridos. Si es positiva, el campo apunta hacia fuera a ambos lados; un dato arbitrariamente próximo en cualquiera de ellos acaba saliendo de un intervalo pequeño, por el mismo argumento de signo y ausencia de otro cero. □

Por ejemplo, $\dot{x} = -x^3$ tiene derivada cero en el origen y aun así es asintóticamente estable. La solución es $x(t) = x_0/\sqrt{1 + 2x_0^2 t}$: su decaimiento es algebraico. Para $\dot{x} = x^3$, el mismo origen es inestable. El dato $f'(0) = 0$ no permite decidir entre esas dos dinámicas.

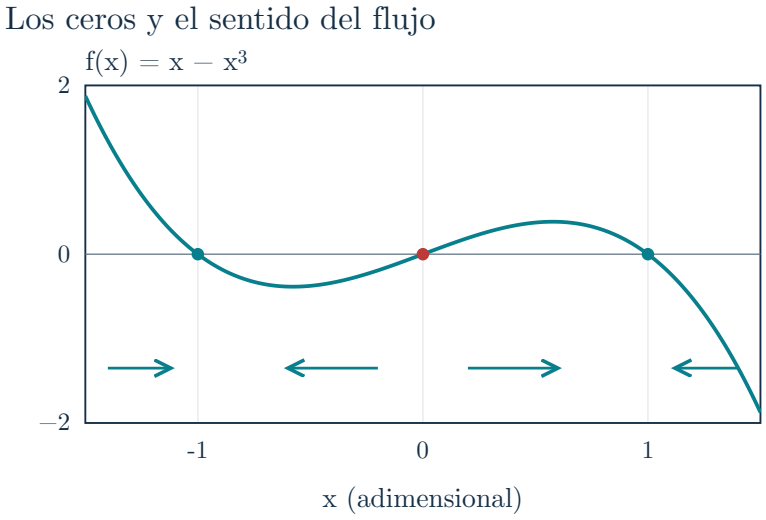


Figura 30.2. Los signos de f fijan el sentido del movimiento. Los ceros ±1 atraen y el cero central repele. La gráfica y la recta de fase describen objetos distintos.

3. La información que contiene la linealización

Tras trasladar el equilibrio al origen, escribimos

$$\dot{z} = Az + r(z), \qquad A = Df(0), \qquad \frac{\|r(z)\|}{\|z\|} \longrightarrow 0.$$

La ecuación lineal $\dot{\eta} = A\eta$ describe las variaciones infinitesimales alrededor del equilibrio. Su solución es $e^{tA}\eta_0$. Para una trayectoria no estacionaria, la correspondiente ecuación variacional es $\dot{\eta} = Df(z(t))\eta$.

La reducción de una matriz compleja comienza eligiendo un autovector, cuya existencia exige una raíz de su polinomio característico. El siguiente argumento obtiene esa raíz usando la representación polar y el mínimo de una función continua.

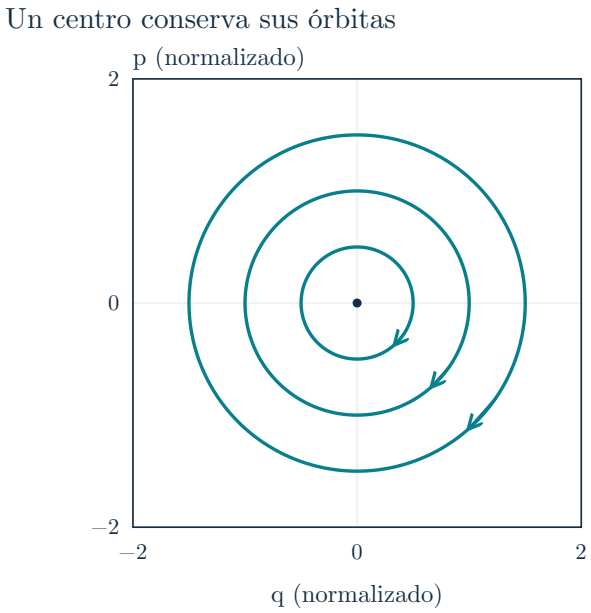


Figura 30.3. Una perturbación cambia el círculo recorrido, pero su distancia al origen permanece constante. Estabilidad no implica convergencia al equilibrio.

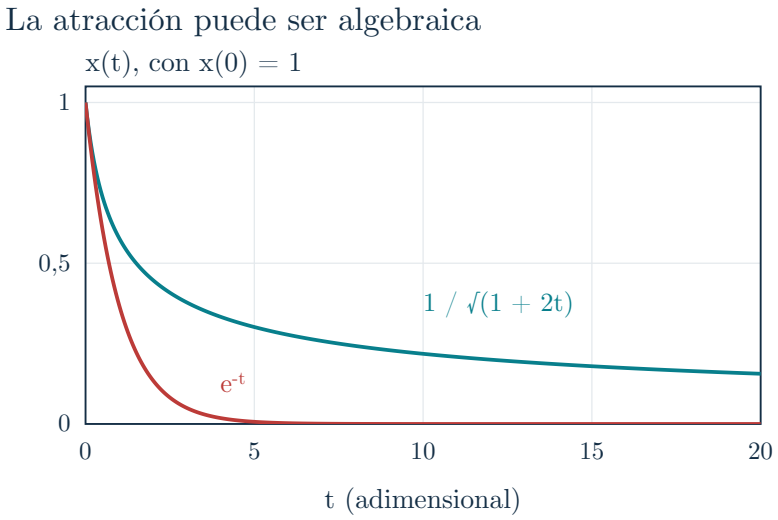


Figura 30.4. Ambas soluciones tienden a cero, pero sus tasas son distintas. Una ventana temporal finita no prueba el comportamiento asintótico; ejercicio 30.3 lo establece analíticamente.

Lema 30.4 — Raíces complejas de un polinomio. Todo polinomio complejo no constante tiene una raíz y se descompone en factores lineales, contados con multiplicidad.

Demostración. Sea $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Para $|z| \geq 1$, los términos inferiores tienen módulo total a lo sumo $M_0 |z|^{n-1}$, donde $M_0 = \sum_{j<n} |a_j|$. Por tanto,

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - M_0|z|^{n-1} \longrightarrow \infty \qquad (|z| \to \infty).$$

Fuera de un disco suficientemente grande, el módulo supera $|p(0)| + 1$. Dentro del disco cerrado alcanza un mínimo por continuidad y compacidad; ese mínimo es también global. Sea z_0 un punto donde se alcanza. Si $p(z_0) = 0$, ya tenemos la raíz buscada.

Supongamos que $c_0 = p(z_0) \neq 0$ y desarrollemos el polinomio exactamente alrededor de z_0. Sea $k \geq 1$ el menor índice con coeficiente $c_k \neq 0$. Al dividir por c_0,

$$\frac{p(z_0 + w)}{c_0} = 1 + b w^k + \sum_{j=k+1}^{n} b_j w^j, \qquad b = \frac{c_k}{c_0} \neq 0.$$

La representación $b = |b| e^{i\varphi}$ permite elegir $u = e^{i(\pi - \varphi)/k}$, de módulo uno, para que $b u^k = -|b|$. Sobre la dirección $w = tu$, con $0 < t \leq 1$, el resto tiene módulo a lo sumo $M t^{k+1}$, donde $M = \sum_{j>k} |b_j|$. Escogemos t positivo tan pequeño que $|b| t^k < 1$ y $M t < |b|/2$; si $M = 0$, la segunda condición se cumple para todo t. La desigualdad triangular da entonces

$$\left| \frac{p(z_0 + tu)}{c_0} \right| \leq 1 - |b| t^k + M t^{k+1} < 1.$$

Hemos encontrado un valor de módulo menor que $|p(z_0)|$, contra su elección como mínimo. Por tanto $p(z_0) = 0$. Dividir por $z - z_0$ reduce el grado en uno; repetir el argumento e inducir sobre el grado produce la factorización lineal completa. $\square$

Aplicado al polinomio característico, el lema proporciona un autovalor complejo. El núcleo de $A - \lambda \mathbf{1}$ contiene entonces un vector no nulo, y podemos comenzar la reducción triangular.

Proposición 30.2 — Estabilidad asintótica de un sistema lineal. El origen de $\dot z = Az$ es asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa. En ese caso es exponencialmente estable.

Demostración. Primero reducimos A a una matriz triangular superior compleja sin suponer que sea diagonalizable. Elegimos un autovector unitario y completamos una base ortonormal. En esa base la matriz tiene la forma $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Repetimos la construcción en el bloque B; la inducción termina en una matriz triangular $T = S^{-1} A S$. Sus entradas diagonales son los autovalores de A.

Supongamos que todas sus partes reales son negativas y pongamos $a = -\max_j \operatorname{Re} \lambda_j > 0$. La última componente de $\dot w = Tw$ satisface $|w_n(t)| \leq e^{-at} |w_n(0)|$. Para las anteriores, variación de constantes da

$$w_j(t) = e^{\lambda_j t} w_j(0) + \int_0^t e^{\lambda_j (t-s)} \sum_{k>j} T_{jk} w_k(s)\, ds.$$

La inducción descendente acota cada componente por e^{-at} multiplicado por un polinomio en t de grado a lo sumo $n - j$, por una constante y por $\|w(0)\|$. En efecto, integrar s^m produce $t^{m+1}/(m+1)$. Para $0 < \alpha < a$, cada función $t^m e^{-(a-\alpha)t}$ está acotada en $[0, \infty)$. La equivalencia de normas al volver mediante S proporciona $\|e^{tA}\| \leq C e^{-\alpha t}$.

Recíprocamente, si $Av = \lambda v$ con $v \neq 0$ y $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, la solución compleja $e^{\lambda t}v$ no tiende a cero. Como A es real, sus partes real e imaginaria son soluciones reales; no pueden tender ambas a cero. Al menos una de ellas, reescalada para tener un dato arbitrariamente pequeño, impide la atracción local. Esto prueba la necesidad y completa la equivalencia. □

La parte real nula requiere información adicional: en el sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$, ambos autovalores son cero y aparece el término ty_0. Ese crecimiento procede de aplicar repetidamente una parte nilpotente de la matriz. Podemos aislarlo sin suponer que una matriz cualquiera ya haya sido reducida a una forma de Jordan.

Lema 30.1 — Descomposición suficiente para la estabilidad lineal. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ los autovalores distintos de una matriz real A, considerados sobre $\mathbb{C}$, y m_j sus multiplicidades en el polinomio característico. Entonces

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{s} V_j, \qquad V_j = \ker\bigl((A - \lambda_j \mathbf{1})^{m_j}\bigr).$$

En V_j, el operador $N_j = A - \lambda_j \mathbf{1}$ es nilpotente y la evolución tiene la expresión finita

$$e^{tA}|_{V_j} = e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{m_j - 1} \frac{t^k}{k!} N_j^k.$$

Demostración. La triangularización construida en la proposición 30.2 proporciona una base en la que A tiene diagonal $\mu_1, \ldots, \mu_n$, con los autovalores repetidos según su multiplicidad. Los espacios F_k generados por los primeros k vectores de esa base son invariantes. Sobre F_k, el operador $A - \mu_k \mathbf{1}$ elimina la componente en el vector k y deja el resultado en F_{k-1}. Aplicando primero el factor correspondiente a μ_n, después el de μ_{n-1} y así hasta el primero, toda imagen termina en $F_0 = \{0\}$. Los factores son polinomios en una misma matriz y conmutan, de modo que

$$p(A) = 0, \qquad p(X) = \prod_{j=1}^{s} (X - \lambda_j)^{m_j}.$$

Para separar las contribuciones definamos $p_j(X) = (X - \lambda_j)^{m_j}$ y $q_j = p/p_j$. Los polinomios $q_1, \ldots, q_s$ no tienen un factor común no constante: cualquier factor lineal de p falta precisamente en uno de ellos. El algoritmo de Euclides permite obtener polinomios u_j tales que $\sum_j u_j q_j = 1$. Se divide con resto, se repite la división con los restos sucesivos y sus grados disminuyen hasta llegar al máximo divisor común; al sustituir hacia atrás se expresa ese divisor como combinación de los polinomios iniciales. Aquí el divisor es una constante no nula, que normalizamos a uno. Cuando $s = 1$ basta tomar $q_1 = u_1 = 1$.

Sustituir $X = A$ da operadores $E_j = u_j(A) q_j(A)$ cuya suma es la identidad. Además, $p_j(A) E_j = u_j(A) p(A) = 0$,

por lo que $E_j v \in V_j$ para todo v. Hemos obtenido una escritura de cualquier vector como suma de vectores de esos espacios. Para comprobar que es única, fijemos $v_j \in V_j$. Si $k \neq j$, el polinomio q_k contiene el factor p_j, de modo que $E_k v_j = 0$. Como $\sum_k E_k$ es la identidad, resulta $E_j v_j = v_j$. Aplicar E_j a una igualdad $\sum_k v_k = 0$ obliga entonces a $v_j = 0$, para cada índice. La suma es directa.

En V_j tenemos $N_j^{m_j} = 0$ por su propia definición. El polinomio $\sum_{k=0}^{m_j - 1} t^k N_j^k / k!$, multiplicado por $e^{\lambda_j t}$, vale la identidad en $t = 0$ y su derivada es A por ese mismo polinomio: el último término que aparecería al multiplicar por N_j se anula. La unicidad del sistema lineal identifica así la expresión con su evolución. □

El lema permite completar el criterio de estabilidad. Para una ecuación lineal, estabilidad del origen equivale a que exista una constante C con $\|e^{tA}\| \le C$ para todo $t \ge 0$. Una cota de ese tipo permite tomar $\delta = \varepsilon/C$; recíprocamente, fijamos una tolerancia permitida $\varepsilon_0 > 0$ y el radio δ que proporciona la estabilidad. Al aplicar la definición a los datos $(\delta/2)v$, para todos los vectores unitarios v, se obtiene $\|e^{tA}\| \le 2\varepsilon_0/\delta$. La misma cota controla la extensión compleja al separar partes reales e imaginarias.

Sobre cada V_j de parte real negativa, la exponencial absorbe el polinomio, como en la proposición 30.2. Una parte real positiva hace crecer un autovector. Si $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ y $N_j \neq 0$, escogemos v y el mayor $k \ge 1$ para el que $N_j^k v \neq 0$. La solución del lema tiene, tras retirar el factor de módulo uno $e^{\lambda_j t}$, un polinomio vectorial de grado k con coeficiente principal no nulo; su norma crece sin cota. Por tanto, la estabilidad exige $N_j = 0$ en cada espacio de parte real nula. Esa condición también basta: allí la evolución es una multiplicación de módulo uno y los espacios de parte real negativa aportan operadores acotados. La descomposición finita y los operadores E_j permiten reunir sus cotas.

El criterio completo es, pues, **parte real no positiva para todos los autovalores y ausencia de parte nilpotente en los espacios de parte real nula**. Para reconocer la segunda condición directamente en la matriz puede usarse

$$\ker\big((A - \lambda_j \mathbf{1})^2\big) = \ker(A - \lambda_j \mathbf{1}).$$

Si estos dos núcleos coinciden, todos los núcleos de potencias posteriores coinciden por inducción: de $B^{r+1}v = 0$, con $B = A - \lambda_j\mathbf{1}$, la hipótesis inductiva aplicada a Bv da $B^2 v = 0$, y la igualdad inicial obliga a $Bv = 0$. Así, V_j ya es el autoespacio ordinario y $N_j = 0$. La recíproca se obtiene dentro de V_j cuando $m_j \ge 2$; si $m_j = 1$, los otros espacios del lema tampoco contribuyen al núcleo de B^2, porque en V_ℓ, con $\ell \neq j$, el operador $B = (\lambda_\ell - \lambda_j)\mathbf{1} + N_\ell$ tiene inversa dada por una suma geométrica finita. En ambos casos se obtiene la igualdad.

En una representación por bloques de Jordan, un bloque es $J = \lambda\mathbf{1} + N$, con unos sobre la diagonal inmediata superior de N y ceros en las demás entradas. Su exponencial se calcula con el mismo polinomio finito del lema. Un bloque de tamaño mayor que uno tiene $N \neq 0$; por eso el criterio anterior se expresa también diciendo que los bloques asociados a partes reales nulas deben ser triviales. La demostración de estabilidad ya quedó establecida por los espacios V_j, sin necesitar un teorema adicional de existencia de una base de Jordan. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ muestra el caso mínimo: $N^2 = 0$, pero $N \neq 0$, y sus soluciones $x = x_0 + t y_0$, $y = y_0$ son inestables.

En dimensión dos son útiles $\tau = \operatorname{tr} A$ y $\Delta = \det A$. Los autovalores satisfacen $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$. Si $\Delta < 0$ hay una silla. Si $\Delta > 0$ y $\tau < 0$, el sistema lineal atrae: es un nodo para dos raíces reales distintas y un foco para raíces complejas. Con $\tau > 0$ ocurre la repulsión correspondiente. Los casos de raíz repetida exigen mirar los bloques; $\Delta = 0$ o $\tau = 0$ pueden dejar sin resolver la estabilidad del sistema no lineal.

4. Funciones de Lyapunov y estabilidad no lineal

Definición 30.3 — Función de Lyapunov local. Para un equilibrio en cero, una función V de clase C^1 es una función de Lyapunov si $V(0) = 0$, $V(z) > 0$ cerca de cero para $z \neq 0$ y

$$\dot V(z) = \nabla V(z) \cdot f(z) \le 0.$$

Proposición 30.3 — Criterio de Lyapunov. La existencia de esa función implica estabilidad. Si $\dot V < 0$ para todo estado no nulo suficientemente próximo, implica estabilidad asintótica.

Demostración. Tomemos una esfera pequeña $\|z\| = \varepsilon$ dentro del dominio. La continuidad y positividad dan un mínimo $a > 0$ de V en ella. Por continuidad en cero, existe $\delta < \varepsilon$ tal que $\|z_0\| < \delta$ implica $V(z_0) < a$. Como V no aumenta, la trayectoria no puede alcanzar la esfera. Permanece en un compacto interior y se prolonga, lo que prueba estabilidad.

Para la atracción, fijemos un dato en una subregión cerrada $V \le a_0 < a$ dentro de la bola. Su trayectoria permanece en un compacto y $V(t)$ decrece hacia un límite $\ell \ge 0$. Si $\ell > 0$, una bola suficientemente pequeña tiene $V < \ell/2$ y queda fuera de la trayectoria. En el compacto restante, $-\dot V$ tiene mínimo positivo, por lo que V debería disminuir sin límite, contradicción. Luego $V(t) \to 0$. La positividad de V en cada anillo compacto alrededor de cero obliga a $z(t) \to 0$. □

Proposición 30.4 — Linealización con espectro estrictamente estable. Si f es C^1, $f(0) = 0$ y todos los autovalores de $A = Df(0)$ tienen parte real negativa, el equilibrio no lineal es localmente exponencialmente estable.

Demostración. Por proposición 30.2 converge la matriz

$$P = \int_0^\infty e^{tA^{\mathsf T}} e^{tA}\, dt.$$

Es simétrica positiva definida, pues $z^{\mathsf T} P z = \int_0^\infty \|e^{tA} z\|^2 dt > 0$ para $z \neq 0$. Derivar el integrando e integrar da $A^{\mathsf T}P + PA = -\mathbf{1}$. Para $V = z^{\mathsf T} P z$ y $f = Az + r$, $\dot V = -\|z\|^2 + 2 z^{\mathsf T} P r(z)$.

En una bola pequeña, $\|r(z)\| \le \|z\|/(4\|P\|)$, por lo que $\dot V \le -\|z\|^2/2$. Si $p_{\mín}, p_{\máx} > 0$ son los extremos espectrales de P, tenemos $p_{\mín}\|z\|^2 \le V \le p_{\máx}\|z\|^2$ y $\dot V \le -V/(2p_{\máx})$. Proposición 30.3 mantiene los datos pequeños dentro de esa bola. Integrar la desigualdad y tomar raíces proporciona una cota exponencial de $\|z(t)\|$. □

Este resultado justifica una conclusión no lineal a partir de la matriz. Si aparecen autovalores de parte real cero, no se satisfacen sus hipótesis; hay que estudiar los términos restantes. Un retrato lineal de centro puede ocultar atracción o repulsión no lineales.

5. Energía, péndulo y ausencia de atracción hamiltoniana

Proposición 30.5 — Extremo estricto de energía. En un sistema hamiltoniano autónomo, un equilibrio que sea un mínimo o máximo local estricto de H es estable.

Demostración. Para un mínimo, $V = H - H(z_*)$ es positiva en un entorno perforado y $\dot V = 0$. Proposición 30.3 da estabilidad. Para un máximo usamos $V = H(z_*) - H$. La conclusión es local y no requiere que el extremo sea global. □

El péndulo del capítulo 28 tiene $H = p^2/(2I) + A(1 - \cos\theta)$. En el equilibrio inferior, $H \sim p^2/(2I) + A\theta^2/2$ es un mínimo estricto y prueba estabilidad. Las libraciones pequeñas conservan energía positiva; no convergen al equilibrio. Cerca del equilibrio superior, $x = \theta - \pi$ da $H - 2A \sim p^2/(2I) - Ax^2/2$, una forma indefinida. La separatriz ofrece estados arbitrariamente próximos al equilibrio superior que luego se alejan hasta la posición inferior. Eso demuestra su inestabilidad sin deducirla únicamente del dibujo lineal.

Con rozamiento, $I\ddot\theta + b\dot\theta + A\sin\theta = 0$, la energía cumple $\dot H = -b\dot\theta^2$. La desigualdad no es estricta en todos los estados no estacionarios: se anula cuando $p = 0$. Para demostrar atracción no podemos aplicar sin más la segunda parte de la proposición 30.3. En una vecindad del equilibrio inferior, proposición 30.4 sí la prueba: la matriz tiene polinomio $\lambda^2 + (b/I)\lambda + A/I$ y, para $b > 0$, ambas raíces tienen parte real negativa.

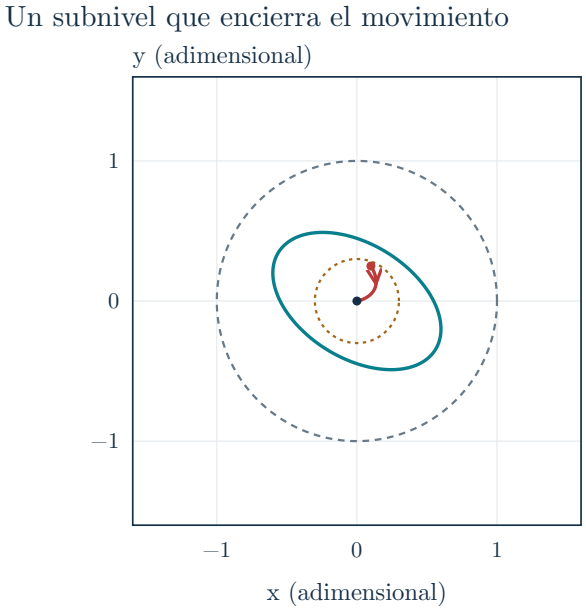


Figura 30.5. Para $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matriz P del ejercicio 30.7 da $\dot{V} = -(x^2 + y^2)$. La elipse $V = 0{,}15$ queda dentro de la bola unitaria y contiene la bola de radio $0{,}3$. Los datos de esta última quedan atrapados en el subnivel. Las coordenadas y el tiempo están normalizados.

Proposición 30.6 — Un equilibrio hamiltoniano no atrae un abierto de forma asintóticamente estable. En un sistema hamiltoniano autónomo suave, un equilibrio no puede ser asintóticamente estable en un abierto del espacio de fases canónico completo.

Demostración. Supongamos lo contrario. Elijamos una bola cerrada pequeña K de volumen positivo dentro de su cuenca local. Estabilidad y atracción implican convergencia uniforme sobre K hacia cualquier bola de radio ε: por estabilidad existe un radio de entrada δ que asegura permanecer en esa bola; cada punto de K entra en la bola de radio $\delta/2$ en algún tiempo, y la dependencia continua permite lo mismo para una vecindad suya en ese instante. Un recubrimiento finito de K proporciona un tiempo después del cual todos permanecen en la bola de radio ε. Pero Liouville conserva el volumen de K, mientras que el de esa bola puede hacerse menor. Es una contradicción. □

La proposición permite convergencia sobre conjuntos de dimensión menor, como una rama estable de una silla. Excluye que un volumen abierto de estados colapse asintóticamente hacia un punto estable dentro de esta descripción hamiltoniana.

6. Retratos locales y términos que la matriz no ve

Para $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$, los ejes son direcciones inestable y estable. Las curvas satisfacen $xy =$ constante. Un estado del eje vertical converge al origen; uno con $x \neq 0$ se aleja en el futuro. La estabilidad del equilibrio se decide considerando todos los datos próximos, de modo que esa convergencia excepcional no lo hace estable.

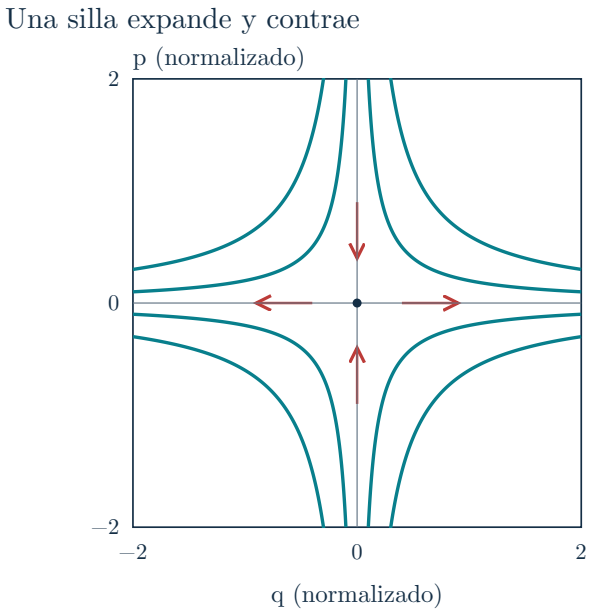


Figura 30.6. Las trayectorias del eje estable convergen al origen, pero los datos transversales se alejan. Este conjunto excepcional no convierte la silla en un atractor de un abierto.

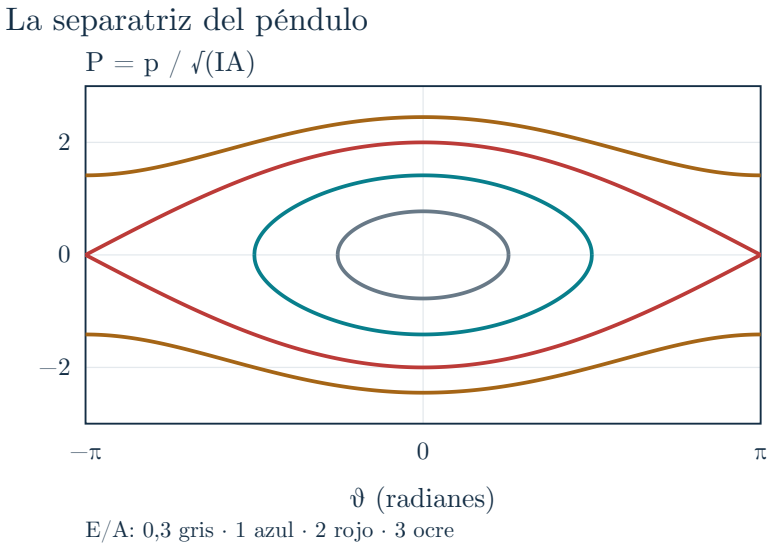


Figura 30.7. Por debajo de E/A=2 hay libraciones; por encima, rotaciones. El nivel rojo contiene la separatriz. Los extremos izquierdo y derecho pertenecen al mismo cilindro de fases.

Para una matriz con autovalores $a \pm ib$, $b \neq 0$, el movimiento lineal combina giro y un factor e^{at}. Si $a < 0$ tenemos un foco atractor y proposición 30.4 justifica la atracción local del modelo no lineal correspondiente. Si $a = 0$, la parte lineal conserva el tamaño en coordenadas adaptadas, pero los términos de orden superior necesitan su propio análisis.

Considérese la familia plana, con $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\dot{x} = -y + \sigma x r^2, \qquad \dot{y} = x + \sigma y r^2.$$

Todos sus miembros tienen la misma matriz lineal de giro en el origen. Para $r > 0$, sin embargo, $\dot{r} = \sigma r^3$, $\qquad \dot{\theta} = 1$. Con $\sigma < 0$ el origen atrae algebraicamente; con $\sigma > 0$ repele; con $\sigma = 0$ es un centro estable sin atracción. Las ecuaciones polares se obtienen de $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ y $r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$. No hay contradicción con la proposición 30.4: ninguno de estos casos tiene espectro estrictamente estable.

También debemos distinguir las órbitas de su parametrización. Multiplicar un campo por una función positiva conserva las curvas y su orientación, pero cambia la velocidad de recorrido. La llegada a un punto, el período y los exponentes por unidad de tiempo requieren recuperar esa parametrización. Una semejanza visual de retratos no identifica todas las propiedades dinámicas.

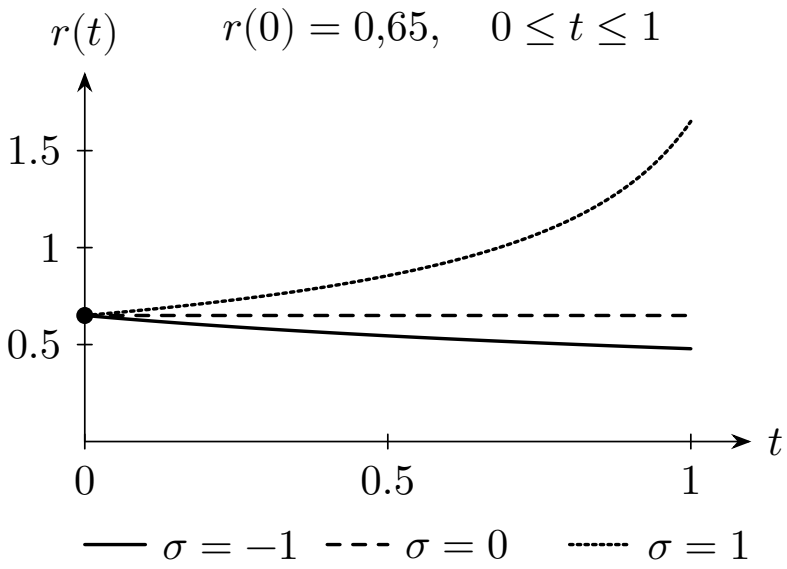


Figura 30.8. Para la familia de §6, $r(t) = r_0/\sqrt{1 - 2\sigma r_0^2 t}$ y $\theta(t) = \theta_0 + t$. Se comparan los mismos datos $r_0 = 0{,}65$ en $0 \leq t \leq 1$, con coordenadas y tiempo normalizados. Las tres linealizaciones son la matriz de giro, pero los términos cúbicos producen atracción, centro o repulsión. Para $\sigma = 1$ la fórmula sólo existe antes de $1/(2r_0^2) = 200/169$; la figura termina antes de ese escape. La clasificación asintótica se demuestra en el ejercicio 30.9, fuera de la ventana finita dibujada.

7. Órbitas periódicas y ciclos límite

Una solución periódica no estacionaria satisface $z(t + T) = z(t)$ para algún $T > 0$. Su órbita es una curva cerrada. En un oscilador conservativo pueden existir familias enteras de curvas periódicas vecinas; en un sistema disipativo puede haber una curva aislada hacia la cual se acercan las demás.

Definición 30.4 — Ciclo límite y atracción orbital. Un ciclo límite es una órbita periódica aislada de otras órbitas periódicas próximas. Es orbitalmente atractor si la distancia de las trayectorias próximas a esa curva tiende a cero. La definición no exige que todas converjan a la misma parametrización temporal de la órbita.

Consideremos el campo suave

$$\dot{x} = -y + x(1 - r^2), \qquad \dot{y} = x + y(1 - r^2), \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Proposición 30.7 — Un ciclo atractor explícito. La circunferencia $r = 1$ es un ciclo límite atractor de período 2π. Todo dato con $r_0 > 0$ se aproxima a ella.

Demostración. En coordenadas polares, $\dot{r} = r(1 - r^2)$ y $\dot{\theta} = 1$. Si $0 < r < 1$, el radio crece; si $r > 1$, decrece. El argumento escalar de la proposición 30.1 da $r(t) \to 1$. Sobre $r = 1$, el ángulo recorre uniformemente una vuelta en tiempo 2π. Cualquier solución de radio distinto de uno tiene radio monótono y no puede ser periódica. Esto prueba aislamiento y atracción orbital. El origen es un equilibrio separado. □

La fase inicial persiste: $\theta(t) = t + \theta_0$. Por ello un ciclo atrae como conjunto y no como un punto particular del plano. En una descripción linealizada alrededor del ciclo aparece una dirección tangente asociada a adelantar o retrasar el recorrido.

Proposición 30.8 — Una obstrucción a las órbitas cerradas. Si un campo plano C^1 tiene divergencia de signo estricto constante en una región simplemente conexa, no hay una órbita periódica no estacionaria contenida en ella.

Demostración. Escribamos el campo como $F = (f, g)$ y llamemos U a la región abierta del enunciado. Su divergencia es

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Supongamos que existe una solución periódica no estacionaria $z(t) = (x(t), y(t))$, de período mínimo T. El campo no se anula sobre su órbita: si se anulara en un punto, la unicidad identificaría la solución con el equilibrio que pasa por él. Existe un período mínimo positivo: una coordenada de la solución es estrictamente monótona durante un intervalo pequeño alrededor de un punto de velocidad no nula, lo que excluye períodos arbitrariamente pequeños. El conjunto de períodos es cerrado por continuidad, de modo que su ínfimo positivo se alcanza. Tampoco puede haber una repetición $z(t_1) = z(t_2)$ con $0 \le t_1 < t_2 < T$, pues la unicidad produciría el período menor $t_2 - t_1$. La órbita es, por tanto, una curva cerrada simple y regular, de clase C^2 porque F es C^1.

Aquí intervienen los lemas L02 y L03, demostrados en el complemento sobre curvas cerradas y flujo. Una curva cerrada simple delimita un interior acotado no vacío D; si está contenida en el abierto simplemente conexo U, también $\overline{D} \subset U$. Para una curva regular de esta clase, la forma de flujo del teorema de Green es

$$\oint_{\partial D}^{+} (f\,dy - g\,dx) = \iint_{D} \operatorname{div} F\,dx\,dy,$$

donde el signo + fija la orientación que deja el interior a la izquierda. Sobre la órbita, $\dot{x} = f$ y $\dot{y} = g$. La integral del lado izquierdo es entonces, según el sentido del movimiento,

$$\pm \int_0^T \big[f(z(t))\dot{y}(t) - g(z(t))\dot{x}(t)\big]dt = \pm \int_0^T (fg - gf)\,dt = 0.$$

En cambio, la integral doble no puede anularse. Si la divergencia es positiva, su continuidad sobre el compacto $\overline{D} \subset U$ da un mínimo $c > 0$ y la integral es al menos $c\,\mathrm{area}(D) > 0$. El interior contiene una bola, de modo que tiene área positiva. Si la divergencia es negativa, aplicamos el mismo argumento a su opuesta. En ambos casos obtenemos una contradicción. □

La fórmula de Green expresa una suma de balances locales. Para un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, el teorema fundamental del cálculo da

$$\iint_R \partial_x f \, dx\, dy = \int_c^d [f(b, y) - f(a, y)]\, dy,$$
$$\iint_R \partial_y g \, dx\, dy = \int_a^b [g(x, d) - g(x, c)]\, dx.$$

Los cuatro términos son los flujos por los cuatro lados. Al sumar rectángulos contiguos, los lados comunes se cancelan. El cálculo rectangular explica el mecanismo. Para justificarlo sobre toda la región encerrada por la órbita, el complemento construye primero su interior en L02 y demuestra después el balance de flujo en L03 mediante un reparto finito en cajas. Ambos resultados se prueban allí para la regularidad que exige esta aplicación.

El dominio no puede omitirse. En la corona $1/2 < r < 3/2$, con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, consideremos

$$\dot{x} = -y + \frac{1 - r}{r^2} x, \qquad \dot{y} = x + \frac{1 - r}{r^2} y.$$

Aquí $\dot{r} = (1-r)/r$ y $\dot{\theta} = 1$. La circunferencia $r = 1$ es una órbita periódica de período 2π, aunque

$$\operatorname{div} F = -\frac{1}{r} < 0.$$

Para comprobar la última igualdad, escribimos $F = (-y, x) + a(r)(x, y)$, con $a(r) = r^{-2} - r^{-1}$. La divergencia del giro es cero y la de la parte radial vale $2a + ra' = -1/r$. El disco encerrado por la órbita contiene puntos fuera de la corona y la expresión del campo no está definida en el origen. Proposición 30.8 no se aplica: la corona tiene un agujero.

Para el oscilador amortiguado, la divergencia constante negativa impide ciclos en el plano completo. En el ejemplo de la proposición 30.7 es $2 - 4r^2$ y cambia de signo; la proposición no prohíbe el ciclo. El dominio y el signo son hipótesis esenciales del argumento.

8. Observar el movimiento a intervalos

Definición 30.5 — Mapa dinámico y mapa de retorno. Un sistema discreto itera una aplicación $z_{n+1} = F(z_n)$. Un punto fijo satisface $F(z_*) = z_*$; un punto periódico satisface $F^k(z) = z$ para algún entero $k \geq 1$, y su período mínimo es el menor de ellos. Un mapa de retorno de un flujo registra intersecciones sucesivas con una sección transversal, cuando el retorno existe.

La transversalidad significa que el campo cruza la sección en lugar de ser tangente a ella. Cerca de una órbita periódica regular podemos estudiar el retorno en una sección local y separar el desplazamiento transversal de la fase a lo largo de la órbita. El dominio incluye sólo puntos cuyas trayectorias vuelven a la sección elegida.

Para una ecuación con fuerza periódica de período T, otro mapa útil observa siempre la misma fase de la fuerza: $F(z_0) = \Phi_{T,0}(z_0)$. La periodicidad del campo permite repetir esa misma aplicación. Una solución que se repite después de un período de la fuerza es un punto fijo; una de período mínimo kT produce un ciclo de k puntos.

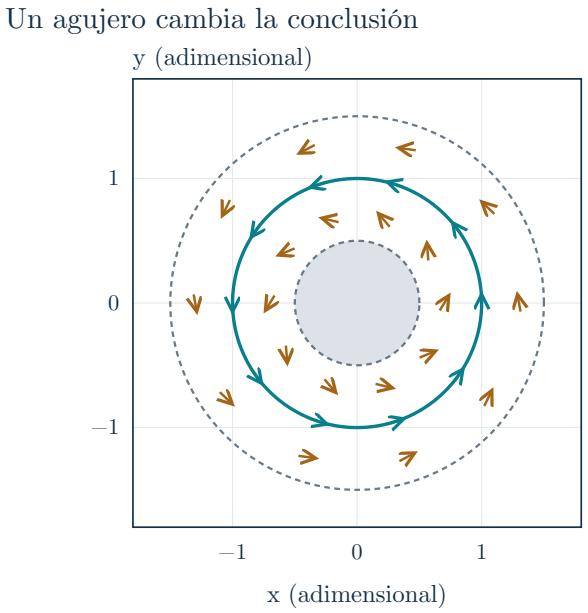


Figura 30.9. El campo del contraejemplo tiene divergencia $-1/r$ en la corona. Las flechas muestran el sentido del campo y la circunferencia azul es periódica. La región sombreada no pertenece al dominio; por eso no puede aplicarse Green al disco que encierra la órbita. Coordenadas y tiempo normalizados.

Para el péndulo forzado adimensional,

$$\dot\theta = v, \qquad \dot v = -\sin\theta - \gamma v + a\cos(\nu t),$$

las escalas pueden recuperarse desde la ecuación dimensional

$$I\frac{d^2\theta}{dt_{fis}^2} + b\frac{d\theta}{dt_{fis}} + A\sin\theta = \tau_0\cos(\Omega t_{fis}), \qquad I, A > 0, \quad b \geq 0, \quad \Omega > 0.$$

La escala temporal natural es $t_0 = \sqrt{I/A}$. Al tomar $t = t_{fis}/t_0$ y $v = d\theta/dt = t_0\, d\theta/dt_{fis}$, dividir la ecuación por A da

$$\gamma = \frac{b}{\sqrt{IA}}, \qquad a = \frac{\tau_0}{A}, \qquad \nu = \Omega\sqrt{\frac{I}{A}}.$$

Los tres parámetros son adimensionales: A y τ_0 tienen unidades de torque, equivalentes a energía con el ángulo adimensional; b tiene unidades de momento de inercia dividido por tiempo. Se ha supuesto un torque resistente proporcional a la velocidad y un torque sinusoidal prescrito; el seno se conserva sin aproximación de ángulo pequeño. El modelo describe ese régimen de rozamiento y excitación. Su adecuación a un péndulo concreto debe comprobarse mediante la respuesta medida, además de resolver la ecuación.

En tiempo normalizado, el período de observación es $T = 2\pi/\nu$, con $\nu > 0$; en tiempo físico es $t_0 T = 2\pi/\Omega$. El campo tiene divergencia $-\gamma$ respecto de (θ, v). La ecuación del determinante variacional del capítulo 29 da $\det DF = e^{-\gamma T}$.

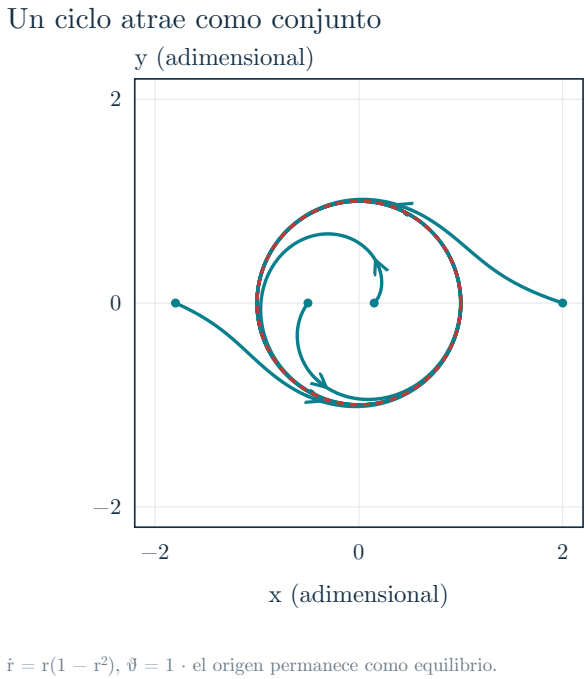


Figura 30.10. Las trayectorias se aproximan a la circunferencia roja y mantienen su fase inicial. Se representa atracción orbital, no convergencia hacia un mismo punto del ciclo.

Con $\gamma = 0$ el mapa conserva áreas; con $\gamma > 0$ las contrae. La ecuación autónoma ampliada incluye la fase de la fuerza y tiene dimensión tres. Un retrato tomado a fase fija es un mapa bidimensional, no el flujo autónomo de una ecuación plana independiente del tiempo.

No todo mapa procede de un flujo invertible. Los mapas de intervalo que estudiaremos pueden enviar dos puntos distintos al mismo estado. Su utilidad conceptual y su posible origen como modelos reducidos no requieren identificarlos con la evolución exacta e invertible del estado completo de un sistema mecánico.

9. Estabilidad de puntos fijos de un mapa

Proposición 30.9 — Criterio derivativo en una dimensión. Sea F de clase C^1 y $F(x_*) = x_*$. Si $|F'(x_*)| < 1$, el punto fijo es localmente asintóticamente estable, con convergencia geométrica. Si $|F'(x_*)| > 1$, es repulsor local e inestable.

Demostración. En el primer caso existe una vecindad y $c < 1$ tales que $|F'| \le c$. Por el teorema del valor medio,

$$|F(x) - x_*| \le c|x - x_*|.$$

La vecindad se conserva y, al iterar, la distancia queda acotada por $c^n|x_0 - x_*|$. En el segundo caso existe $c > 1$ tal que $|F(x) - x_*| \ge c|x - x_*|$ dentro de una vecindad. Un dato diferente del fijo no puede permanecer siempre en ella: su distancia crecería al menos geométricamente. Eso prueba la inestabilidad. □

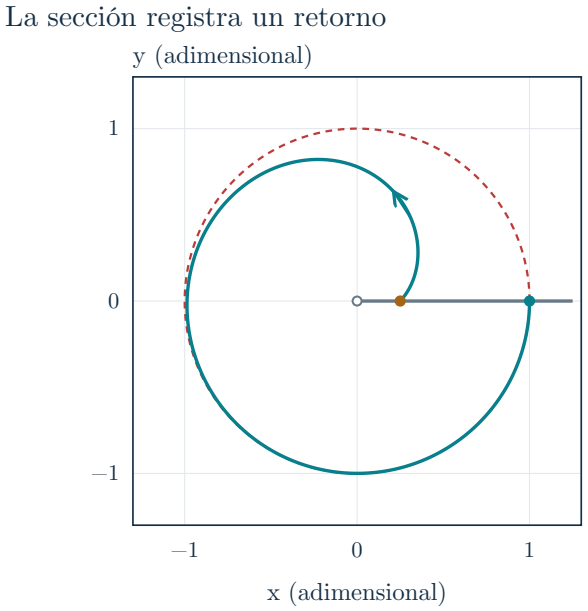


Figura 30.11. En el campo de la proposición 30.7, la sección es $\{(x,0) : x > 0\}$ y el ángulo crece a velocidad uno. El primer retorno ocurre en tiempo 2π y envía el radio $1/4$ a $(1 + 15e^{-4\pi})^{-1/2}$. El círculo rojo es la órbita límite; el mapa de retorno actúa sobre una sección de dimensión uno.

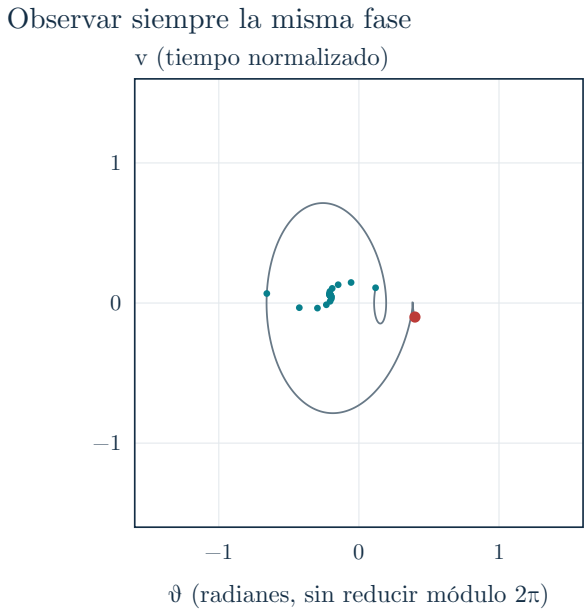


Figura 30.12. Cada punto azul corresponde a la misma fase de la fuerza; el rojo es el dato inicial. El gris muestra sólo los primeros dos períodos del movimiento continuo. Las observaciones forman un mapa de dimensión dos y no son las intersecciones con la sección de la figura anterior. La simulación es ilustrativa: no acredita caos ni convergencia asintótica.

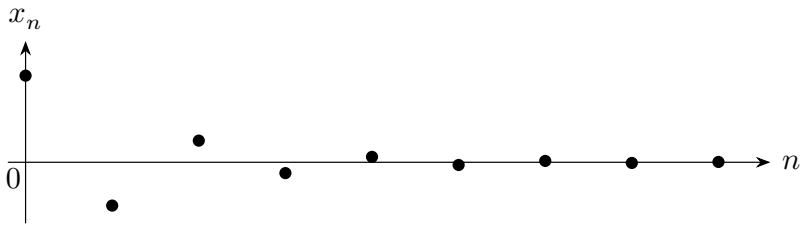


Figura 30.13. El mapa $x_{n+1} = -x_n/2$ tiene multiplicador $-1/2$. Desde $x_0 = 1$, las iteraciones alternan de signo y convergen a cero: $x_n = (-1/2)^n$. La alternancia no implica inestabilidad. Véase §9.

Cuando $F'(x_*) < 0$, los errores cambian de lado al iterar; ese cambio de signo no impide atracción si su magnitud se reduce. Los casos $F' = 1$ o $F' = -1$ requieren términos adicionales.

El mapa logístico

$$F_r(x) = rx(1-x), \qquad 0 \le r \le 4,$$

envía $[0,1]$ en sí mismo. Sus puntos fijos son 0 y, para $r > 0$, $x_* = 1 - 1/r$, cuando éste pertenece al intervalo. Las derivadas son $F_r'(0) = r$ y $F_r'(x_*) = 2 - r$. Por tanto cero atrae para $0 \le r < 1$; el fijo positivo atrae para $1 < r < 3$. En $r = 1$ y $r = 3$ la prueba por derivada estricta no decide.

Para un ciclo de período k, aplicamos el criterio a F^k. Su derivada en un punto del ciclo es el producto

$$\mu = \prod_{j=0}^{k-1} F'(x_j),$$

llamado multiplicador del ciclo. Su valor no cambia al empezar por otro punto del mismo ciclo.

10. Cambios de régimen y bifurcaciones

Una bifurcación es un cambio cualitativo de la dinámica al variar un parámetro: pueden aparecer o desaparecer equilibrios, cambiar su estabilidad o surgir ciclos. Para reconocerla conviene seguir las soluciones y sus propiedades, además de mirar dónde se anula una derivada.

En $\dot{x} = \mu - x^2$, si $\mu > 0$ existen dos equilibrios, $\pm\sqrt{\mu}$. El positivo atrae y el negativo repele. Si $\mu < 0$ no hay ninguno. En $\mu = 0$, el origen atrae desde la derecha y repele desde la izquierda. Esta colisión y desaparición de dos equilibrios es una bifurcación de silla–nodo en dimensión uno.

En $\dot{x} = \mu x - x^3$, el equilibrio cero atrae para $\mu < 0$. Para $\mu > 0$ repele y aparecen dos equilibrios atractores $\pm\sqrt{\mu}$. La simetría $x \mapsto -x$ explica que nazcan en pareja. En el valor crítico $\mu = 0$, la atracción algebraica ya estudiada muestra que la pérdida de una derivada lineal negativa no obliga a perder inmediatamente la estabilidad.

Proposición 30.10 — Primer ciclo de período dos del mapa logístico. Para $3 < r \le 4$, los puntos

$$x_\pm = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

forman un ciclo de período dos. Es atractor si $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ y repulsor si $1 + \sqrt{6} < r \le 4$.

Demostración. Factorizar $F_r^2(x) - x$ separa los factores de los puntos fijos y el polinomio

$$r^2 x^2 - r(r+1)x + (r+1).$$

Sus raíces son las escritas. Para $r > 3$ son distintas y positivas, pues $\sqrt{(r-3)(r+1)} < r+1$. Además, $\sqrt{(r-3)(r+1)} < r-1$, como se comprueba elevando al cuadrado: los radicandos difieren en cuatro. Así $x_+ < 1$, y ambas pertenecen a $(0,1)$. El polinomio no se anula en cero y su valor en el otro fijo, $(r-1)/r$, es $3-r \neq 0$. Son, por tanto, puntos de período mínimo dos; F_r las intercambia. Su suma y producto son $(r+1)/r$ y $(r+1)/r^2$. El multiplicador es $\mu = r^2(1-2x_+)(1-2x_-) = -r^2+2r+4$.

Resolver $|\mu| < 1$ con $r > 3$ da $r < 1+\sqrt{6}$; fuera de ese intervalo la magnitud es mayor que uno. Proposición 30.9 aplicado a F_r^2 concluye. En el extremo de igualdad no usamos el criterio estricto. □

Al pasar por $r = 3$, el ciclo se separa del fijo positivo y éste pasa a tener derivada menor que -1. Es una duplicación de período. Este cálculo demuestra una transición concreta; no demuestra por sí solo una cascada infinita ni que todos los parámetros posteriores produzcan caos.

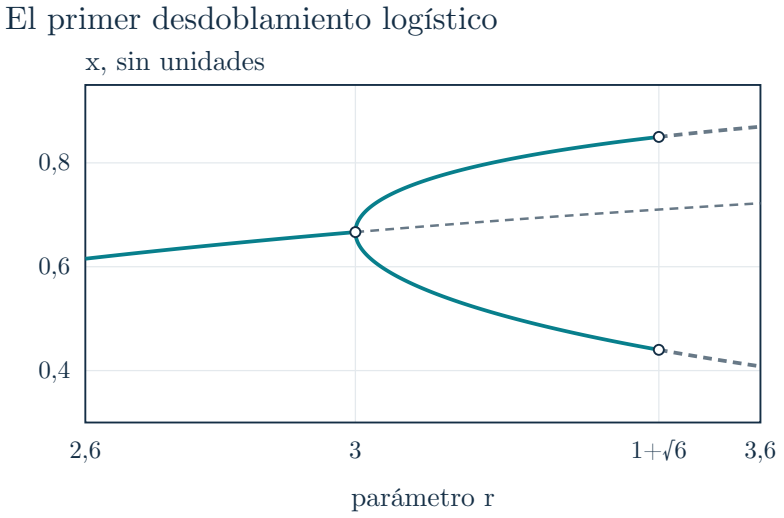


Figura 30.14. Las dos nuevas ramas se intercambian bajo una iteración. Su multiplicador tiene módulo menor que uno entre 3 y $1+\sqrt{6}$. Los círculos huecos indican valores no clasificados aquí por el criterio estricto. Este dibujo no afirma una cascada infinita ni caos para todos los parámetros posteriores.

11. Sensibilidad y exponentes de crecimiento

Definición 30.6 — Sensibilidad a los datos iniciales. Un mapa F sobre un conjunto invariante métrico K tiene dependencia sensible si existe $\delta_* > 0$ tal que, para cada $x \in K$ y cada vecindad suya, hay otro punto y de esa vecindad y algún $n \geq 0$ con

$$d(F^n(x), F^n(y)) > \delta_*.$$

La separación debe alcanzar una escala fija aunque el dato se perturbe arbitrariamente poco. Es una propiedad del sistema sobre el conjunto indicado, no de un único par de trayectorias elegido una vez.

Definición 30.7 — Exponente de Lyapunov direccional. Para un flujo diferenciable y una dirección inicial $u \neq 0$, definimos el exponente superior

$$\lambda(z_0,u)=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{\|D\Phi_t(z_0)u\|}{\|u\|},$$

cuando la evolución existe durante todo ese tiempo. Para un mapa diferenciable a lo largo de la órbita sustituimos t por n y Φ_t por F^n. Si el límite ordinario existe, coincide con el superior. Adoptamos $\log 0=-\infty$: si $DF^n(z_0)u$ se anula en algún paso, la regla de la cadena lo mantiene nulo en todos los pasos posteriores y el exponente de esa dirección es $-\infty$. Esta convención permite incluir, por ejemplo, el fijo cero de $F(x)=x^2$, cuya derivada se anula.

Se trata del crecimiento infinitesimal, obtenido mediante la ecuación variacional. En un mapa escalar, mientras las derivadas sean no nulas,

$$\frac{1}{n}\log|(F^n)'(x_0)|=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log|F'(x_j)|.$$

Los cálculos a tiempo finito son estimaciones de esta cantidad y no demuestran automáticamente la existencia del límite. Si una órbita pasa por un punto crítico, la derivada del iterado puede anularse y la fórmula logarítmica debe interpretarse con ese hecho en cuenta.

Cuando un error pequeño crece aproximadamente como $\delta(t)\approx\delta_0 e^{\lambda t}$, una tolerancia Δ sugiere un horizonte

$$t_{\mathrm{pred}}\approx\frac{1}{\lambda}\log\frac{\Delta}{\delta_0},\qquad \lambda>0.$$

Es una estimación dentro del régimen de crecimiento considerado. La separación finita termina por saturarse en un dominio acotado; los errores del modelo y del integrador también intervienen.

La silla $\dot q=\lambda q$, $\dot p=-\lambda p$ tiene exponente positivo en una dirección. Sus trayectorias genéricas escapan de vecindades y no producen por ese solo hecho una dinámica caótica recurrente en un compacto. Incluso una órbita periódica repulsora puede tener un exponente positivo. Para dar una afirmación de caos fijaremos una definición y probaremos sus requisitos.

12. Un ejemplo de caos demostrado

Definición 30.8 — Caos topológico usado aquí. Un mapa continuo en un compacto métrico invariante, sin puntos aislados, será llamado caótico en este capítulo si es topológicamente transitivo, tiene puntos periódicos densos y presenta dependencia sensible. Transitividad significa que para cualesquiera abiertos relativos no vacíos U,V existe $n\ge 0$ con $F^n(U)\cap V\neq\varnothing$.

Esta elección precisa el significado de la palabra para nuestro ejemplo. Hay otras definiciones de caos y relaciones entre ellas que requieren hipótesis propias. El mapa tienda es

$$T(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1/2,\\ 2-2x, & 1/2\le x\le 1.\end{cases}$$

Proposición 30.11 — Caos del mapa tienda. El mapa T es caótico sobre $[0,1]$ en el sentido de la definición 30.8. De hecho es mezclante: para abiertos relativos no vacíos U,V, la intersección $T^n(U)\cap V$ es no vacía para todo n suficientemente grande.

Demostración. Por inducción, T^n tiene 2^n ramas sobre los intervalos diádicos

$$I_{n,j}=[j/2^n,(j+1)/2^n],\qquad 0\le j<2^n,$$

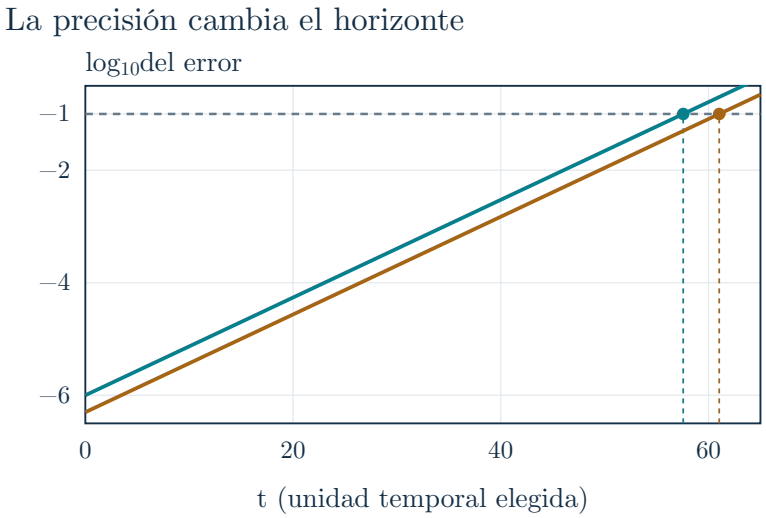


Figura 30.15. La ley aproximada de crecimiento de §11 se representa en escala logarítmica. La recta azul parte de un error 10^{-6} y la ocre de su mitad. Los horizontes estimados son 57,5646 y 61,0304 en la unidad temporal usada. Reducir el error a la mitad añade $\log(2)/0{,}2$ al horizonte. Las rectas muestran la consecuencia de la hipótesis exponencial; su prolongación no prueba que un sistema físico conserve esa tasa ni describe la saturación del error.

y cada rama es afín, con pendiente $\pm 2^n$, y envía su intervalo sobre $[0,1]$. Para el paso inductivo, cada rama se corta donde su valor es $1/2$, en el punto medio, y componer con T produce dos ramas completas.

Todo abierto relativo no vacío contiene uno de esos intervalos completos para n suficientemente grande. Así, para algún N, $T^N(U) = [0,1]$. Como T es sobreyectivo, lo mismo vale para todos los iterados posteriores; esto prueba mezcla y transitividad.

En cada rama completa de T^n, la función $T^n(x) - x$ tiene signos opuestos o cero en los extremos: si la rama crece, sus valores extremos son $-a$ y $1-b$; si decrece, $1-a$ y $-b$, donde $[a,b]$ es la rama. Por continuidad tiene un cero. Dado un abierto, elegimos una rama completa contenida en él; ese cero es periódico, aunque su período mínimo pueda dividir a n. Los periódicos son densos.

Finalmente, dados x y una vecindad U, elegimos N con $T^N(U) = [0,1]$. Alguno de los extremos cero o uno dista al menos $1/2$ de $T^N(x)$. Existe $y \in U$ que se envía a ese extremo. Por tanto la sensibilidad vale, por ejemplo, con $\delta_* = 1/4$. $\square$

La demostración combina expansión con un retorno de las imágenes a toda la región. Cada rama se estira, y el pliegue mantiene los valores dentro del intervalo. Los puntos periódicos no desaparecen: son densos dentro de una dinámica sensible.

13. El mapa logístico y el cálculo finito

Definición 30.9 — Conjugación topológica. Dos mapas $T : K \to K$ y $F : L \to L$ son conjugados si existe un homeomorfismo $h : K \to L$ tal que $F \circ h = h \circ T$. La transformación identifica sus órbitas y períodos mediante h.

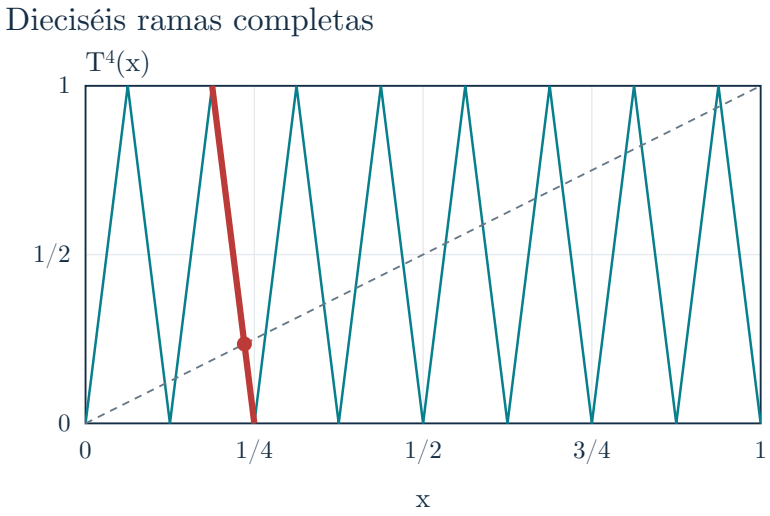


Figura 30.16. La rama roja realiza el caso del ejercicio 30.26. La demostración de densidad periódica usa ramas de orden arbitrario; mostrar sólo el cuarto iterado no reemplaza ese argumento.

Proposición 30.12 — Logística de parámetro cuatro. El mapa $F_4(x) = 4x(1-x)$ es conjugado al mapa tienda y es caótico en $[0,1]$ según la definición 30.8.

Demostración. Tomemos $h(s) = \sin^2(\pi s/2)$. Es continua, estrictamente creciente de cero a uno y tiene inversa continua. Para $s \le 1/2$,

$$h(T(s)) = \sin^2(\pi s) = 4h(s)[1-h(s)].$$

Para $s \ge 1/2$, $h(T(s)) = \sin^2(\pi(1-s)) = \sin^2(\pi s)$ y vale la misma igualdad. Por tanto $F_4 \circ h = h \circ T$.

El homeomorfismo transforma abiertos en abiertos y puntos periódicos en periódicos, de modo que transporta transitividad y densidad. Para la sensibilidad, el conjunto compacto de pares con $|s-t| \ge 1/4$ tiene un mínimo positivo c de $|h(s)-h(t)|$, pues h es inyectiva. La prueba de la proposición 30.11 proporciona separaciones de al menos $1/2$ desde cualquier vecindad; sus imágenes superan, por ejemplo, $c/2$. Así se transporta también esa propiedad. $\square$

La conjugación es topológica y no conserva por sí sola valores numéricos de exponentes. La derivada de h se anula en los extremos, por lo que no debemos trasladar sin análisis cualquier límite diferencial. En el fijo $x = 3/4$, por ejemplo, $F_4' = -2$ y el exponente es $\log 2$, aunque la propia órbita sea periódica.

Hay otra diferencia crucial entre una demostración y una iteración computacional. Cualquier programa con un conjunto finito de estados y una regla determinista termina repitiendo un estado si se ejecuta indefinidamente; desde ese momento entra en un ciclo. En el mapa tienda ocurre algo más explícito: si el dato es diádico $x = k/2^B$, después de a lo sumo B iteraciones llega a cero o uno, y en una más queda en cero. Las expansiones binarias finitas que usa la aritmética de máquina pueden borrar así el comportamiento que la teoría demuestra para el intervalo real.

Una simulación larga no resuelve por sí sola ese problema. Debemos comparar precisiones, pasos y métodos, controlar invariantes cuando existan y distinguir error numérico de incertidumbre inicial. Las estadísticas de una órbita aproximada pueden ser útiles aun cuando el seguimiento puntual sea breve, pero también necesitan controles adecuados al observable y al modelo.

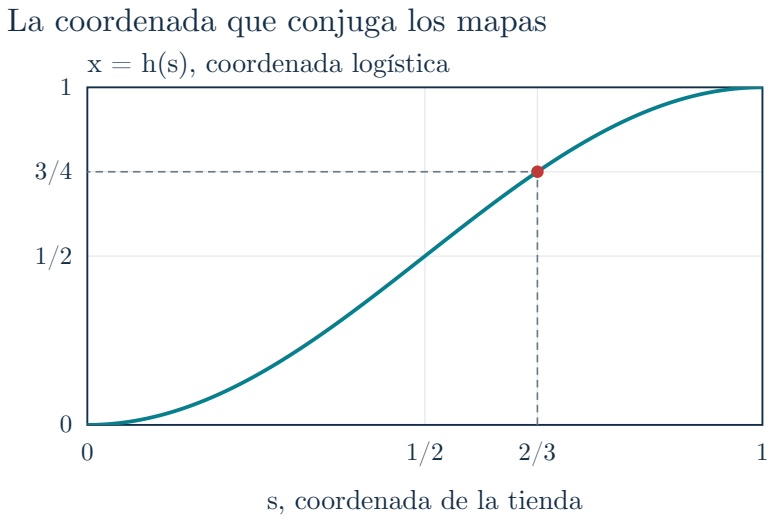


Figura 30.17. h transforma órbitas completas, no sólo los fijos destacados. Sus derivadas se anulan en los extremos; la conjugación no transporta automáticamente los valores numéricos de los exponentes de Lyapunov.

14. Mapas mecánicos y alcance de la predicción

Un modelo mecánico simple alterna un impulso y un vuelo libre. En variables adimensionales de un rotor, el impulso cambia el momento según $p^{+} = p + K \sin q$, y el vuelo de duración unidad cambia el ángulo en p^{+}. El mapa completo es

$$p_{n+1} = p_n + K \sin q_n, \qquad q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \quad (\text{mód } 2\pi).$$

Es el mapa estándar sobre el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. La idealización del impulso resume su efecto integrado; el estado se registra siempre justo antes de cada impulso.

Proposición 30.13 — Estructura canónica del mapa estándar. El mapa es invertible y preserva $dq \wedge dp$ para todo K.

Demostración. Dados q', p', recuperamos $q = q' - p'$ módulo 2π y $p = p' - K \sin q$. En una carta, su jacobiana, en el orden (q, p), es

$$DF = \begin{pmatrix} 1 + K\cos q & 1 \\ K\cos q & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es uno. En dos dimensiones eso equivale a preservar la forma canónica, como se demostró en el capítulo 29. La periodicidad de los términos asegura compatibilidad entre cartas del cilindro. □

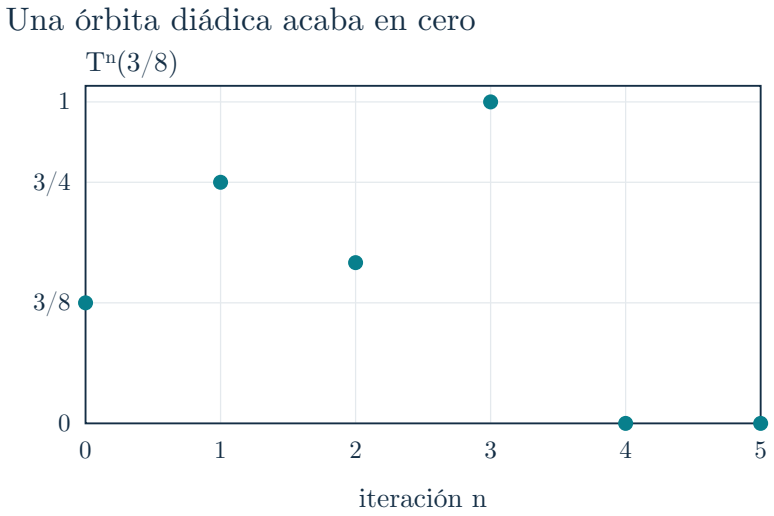


Figura 30.18. El dato $3/8$ es eventualmente fijo, no periódico. La caída de datos diádicos en cero ilustra una limitación de la representación binaria finita, compatible con el caos del mapa sobre los reales.

Para $K = 0$, el momento es constante y el ángulo avanza uniformemente. Para $K \neq 0$, el acoplamiento entre ángulo e impulso permite estructuras más complejas. La preservación de área demostrada no decide qué parámetros ni qué regiones presentan caos. Una afirmación de ese tipo requiere un argumento adicional o evidencia numérica delimitada; aquí no se atribuye un régimen caótico a todos los valores no nulos.

Las ecuaciones deterministas conservan una regla de evolución precisa. La predicción concreta depende además de la precisión de los datos, de las escalas de crecimiento y de la fidelidad del modelo. Un movimiento estable, una trayectoria sensible y una distribución estadística plantean preguntas diferentes. Las herramientas de este tomo permiten formularlas con variables, hipótesis y balances explícitos.

El paso a muchos grados de libertad añadirá una dificultad nueva: describir el estado puede requerir una función del espacio en lugar de una lista finita de coordenadas. El Tomo II comenzará por ese tránsito del sistema discreto al campo continuo, conservando como guía la construcción del modelo y sus leyes de balance.

15. Complemento. Curvas cerradas y flujo en el plano

En proposición 30.8 encerramos una región con una órbita y comparamos el flujo por su frontera con una integral de la divergencia. Hay dos afirmaciones distintas en ese paso: la curva debe tener un interior y el balance local debe poder sumarse sobre él. Las justificaremos para curvas cerradas simples y regulares de clase C^2, que son precisamente las órbitas periódicas no estacionarias de un campo C^1. No necesitaremos el teorema de Jordan para curvas continuas arbitrarias.

Usaremos cálculo de una y varias variables: estimaciones mediante derivadas, integrales iteradas, derivación de una integral con límite variable, compacidad y completitud euclídea. La inversión local que necesita la franja se justifica dentro de la prueba. Por componente conexa entendemos

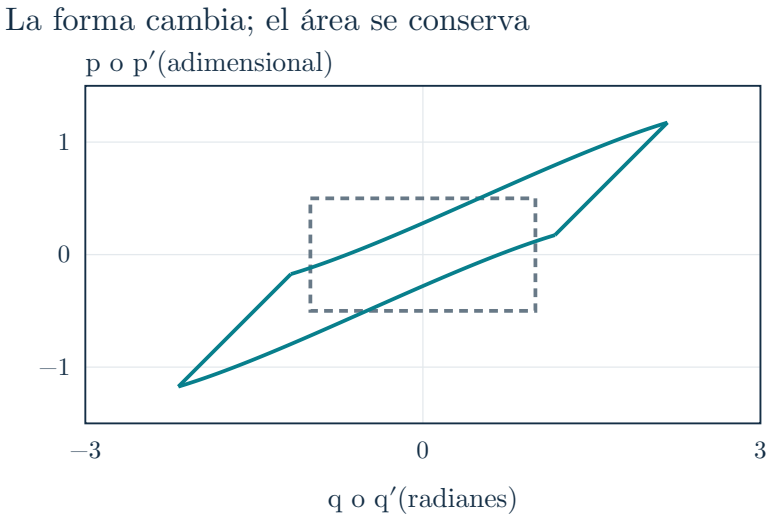


Figura 30.19. El impulso deforma el rectángulo y el vuelo lo cizalla. La conservación de área se prueba mediante det DF=1; esta figura de un paso no atribuye caos a las órbitas.

una parte conexa maximal. Las componentes de un abierto del plano son abiertas: cada punto tiene una bola contenida en el abierto, y esa bola conexa pertenece a su misma componente. Un abierto es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y todo lazo continuo contenido en él puede deformarse continuamente, dentro del abierto y a través de lazos cerrados, hasta un lazo constante.

Lema 30.2 — Interior de una curva suave. Sea Γ la imagen de una curva cerrada simple y regular de clase C^2 en el plano. Su complemento tiene exactamente dos componentes: una acotada D y otra no acotada. Ambas tienen frontera Γ. Si Γ está contenida en un abierto simplemente conexo U, entonces $\overline{D} \subset U$.

Demostración. Construiremos primero una franja estrecha alrededor de la curva. Esa franja tendrá dos lados; un número entero asociado al giro alrededor de un punto impedirá que esos lados puedan unirse sin atravesar la curva.

Parametricemos por longitud de arco, $\gamma(s)$, con s considerado módulo la longitud L. Esta parametrización se obtiene integrando la rapidez positiva e invirtiendo la función creciente resultante. Sean $T(s) = \gamma'(s)$ y $n(s)$ el giro de $T(s)$ en un ángulo positivo de $\pi/2$. Consideremos

$$\Psi(s, u) = \gamma(s) + u\, n(s).$$

En $u = 0$, las dos columnas de su derivada son $T(s)$ y $n(s)$, con determinante uno. Como n' es continua y acotada, ese determinante permanece separado de cero cuando $|u|$ es suficientemente pequeño, uniformemente en s. Esto proporciona coordenadas locales mediante el siguiente argumento de inversión.

Si una aplicación G es C^1 y su derivada en un punto es invertible, trasladamos ese punto y su imagen al origen y multiplicamos las imágenes por la matriz inversa de la derivada. La aplicación resultante tiene la forma $x + R(x)$, con $R(0) = 0$ y $DR(0) = 0$. En una bola cerrada suficientemente pequeña, de radio r, la continuidad da $\|DR\| \le 1/2$. Integrar la derivada sobre un segmento prueba

$\|R(x)-R(y)\| \le \|x-y\|/2$; por tanto $x+R(x)$ es inyectiva y su inversa, donde existe, es Lipschitz. Para $\|v\| < r/2$, la aplicación $x \mapsto v - R(x)$ lleva esa bola en sí misma y contrae las distancias por un factor $1/2$. Al iterarla, las diferencias consecutivas quedan acotadas por una sucesión geométrica; las iteraciones son de Cauchy y convergen en la bola a un punto que satisface $x + R(x) = v$. Así la imagen contiene una vecindad del origen y la inversa es continua. El argumento se aplica en cada punto donde la derivada es invertible. Aplicado a Ψ, prueba la inversión local que acabamos de necesitar, sin presuponer un teorema de vecindades tubulares.

La franja puede elegirse además sin solapamientos globales. Si esto fallara para todo ancho, existirían parejas distintas (s_j, u_j) y (t_j, v_j) con $u_j, v_j \to 0$ e imágenes iguales. Por compacidad, una subsucesión tendría $s_j \to s_*$ y $t_j \to t_*$. En el límite, $\gamma(s_*) = \gamma(t_*)$; la simplicidad da $s_* = t_*$ módulo L. Para j grande, ambas parejas caerían en una misma vecindad donde Ψ es inyectiva, contradicción. Existe, pues, un $\rho > 0$ para el cual Ψ es inyectiva en $|u| < \rho$.

Su imagen N es abierta y Ψ tiene inversa continua, pues es localmente invertible. Ningún punto con $u \neq 0$ pertenece a Γ, por la inyectividad. Los conjuntos

$$N_+ = \Psi\big((\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times (0,\rho)\big), \qquad N_- = \Psi\big((\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times (-\rho,0)\big)$$

son conexos por caminos y constituyen los dos lados de la franja. Todavía no sabemos si pertenecen a componentes distintas del complemento completo.

Para un punto $a \notin \Gamma$, recorramos el vector $\gamma(s) - a$ y sigamos continuamente su ángulo. Ese seguimiento siempre es posible: dividimos el intervalo de parámetros en un número finito de partes donde las direcciones quedan dentro de un arco del círculo que admite una determinación continua del ángulo, y ajustamos las determinaciones sucesivas sumando múltiplos de 2π. Al cerrar el recorrido, el ángulo final y el inicial difieren en $2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ese entero es el *número de vueltas* $w_\Gamma(a)$.

Derivar el ángulo de un vector (X, Y) no nulo da $(XY' - YX')/(X^2+Y^2)$. Por ello,

$$w_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{\det(\gamma(s)-a, \gamma'(s))}{\|\gamma(s)-a\|^2}\, ds.$$

La integral depende continuamente de a fuera de Γ. Como toma valores enteros, es localmente constante y, por tanto, constante en cada componente conexa del complemento. Además vale cero suficientemente lejos: si $M = \max_s \|\gamma(s)\|$, el valor absoluto de la integral sin el factor $1/(2\pi)$ es a lo sumo $L/(\|a\| - M)$, que tiende a cero.

Veamos cuánto cambia ese entero al cruzar la curva. Tras trasladar y girar los ejes, un arco alrededor del punto de cruce se escribe como $(x, h(x))$, $|x| \le \delta$, recorrido en sentido creciente, con $h(0) = h'(0) = 0$. La regularidad C^2 proporciona

$$|h(x)| \le K x^2, \qquad |h'(x)| \le K|x|$$

para un K fijo. Tomemos $a_\varepsilon = (0, \varepsilon)$. La contribución de este arco al ángulo es la integral de

$$I_\varepsilon(x) = \frac{x h'(x) - h(x) + \varepsilon}{x^2 + (h(x)-\varepsilon)^2}.$$

La parte que decide el salto es $\varepsilon/(x^2+\varepsilon^2)$. Precisemos el error, para no suponer por el dibujo que el salto vale una vuelta. Reduciendo δ, podemos imponer $|h(x)| \le |x|/2$. Si $D_\varepsilon = x^2 + (h(x)-\varepsilon)^2$ y $D_0 = x^2 + \varepsilon^2$, entonces $D_\varepsilon \ge D_0/4$. En efecto, la distancia entre los vectores $(x, h(x)-\varepsilon)$ y $(x, -\varepsilon)$ es $|h(x)| \le \sqrt{D_0}/2$.

Restar las dos fracciones da la identidad

$$I_\varepsilon(x) - \frac{\varepsilon}{D_0} = \frac{xh'(x) - h(x)}{D_\varepsilon} + \frac{\varepsilon(2\varepsilon h(x) - h(x)^2)}{D_\varepsilon D_0}.$$

El primer término queda acotado por una constante porque su numerador es $O(x^2)$. En el segundo usamos $|h(x)| \le Kx^2$, $D_\varepsilon \ge D_0/4$, $\varepsilon^2 x^2 \le D_0^2/4$ y $x^4 \le D_0^2$. Para $|\varepsilon| \le 1$, obtenemos una constante C, independiente de x, ε y de un δ menor que el ya fijado, tal que

$$\left| I_\varepsilon(x) - \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \right| \le C.$$

La integral del término principal entre $-\delta$ y δ tiende a π cuando $\varepsilon \downarrow 0$ y a $-\pi$ cuando $\varepsilon \uparrow 0$. El error integrado tiene magnitud a lo sumo $2C\delta$. El resto de la curva está separado del punto de cruce, y sus contribuciones para a_ε y $a_{-\varepsilon}$ tienen el mismo límite cuando $\varepsilon \to 0$.

Para $\varepsilon > 0$ pequeño, los dos puntos pertenecen a N_+ y N_-, respectivamente. Sus números de vueltas son constantes en esos lados, de modo que su diferencia es un entero fijo. La estimación anterior muestra que ese entero difiere de uno en a lo sumo $2C\delta/\pi$. Como podemos hacer δ arbitrariamente pequeño, resulta $w_\Gamma(N_+) - w_\Gamma(N_-) = 1$.

Los dos lados pertenecen, por tanto, a componentes distintas del complemento. No puede haber una tercera componente. Si V es una componente de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, su frontera es no vacía y está contenida en Γ. La primera afirmación se debe a que un subconjunto no vacío y propio del plano no puede ser simultáneamente abierto y cerrado. Para la segunda, cualquier punto fuera de Γ tiene una bola conexa que no toca la curva; esa bola está en una sola componente y no puede contener un punto de frontera de otra.

Elijamos $p \in \partial V$. Una pequeña caja de las coordenadas Ψ alrededor de p queda dividida por la curva en dos mitades conexas, contenidas en N_+ y N_-. Como p está en la frontera, V intersecta al menos una de esas mitades y contiene, por conexión, todo el lado correspondiente de la franja. Cada componente contiene así N_+ o N_-; ya vimos que esos lados están en componentes distintas. Hay exactamente dos componentes.

Fuera de un disco grande que contiene Γ, el plano es conexo por caminos. Toda esa región exterior pertenece a una sola componente; la otra es acotada. Llamemos D a esta última. Las fronteras de ambas componentes son exactamente Γ: ya están contenidas en ella y los dos lados de la franja se aproximan a cada uno de sus puntos. En la componente no acotada el número de vueltas vale cero; en D vale uno o menos uno. Invirtiendo la orientación de la curva, si hace falta, lo hacemos igual a uno. Esta será su orientación positiva.

Falta comprobar la afirmación relativa a U. El número de vueltas también se conserva durante una deformación continua de lazos que evite el punto a. Para verlo sin derivar la deformación, usamos los ángulos continuos de antes. Dos lazos cuyas direcciones respecto de a estén uniformemente próximas tienen una diferencia angular continua elegida en $(-\pi, \pi)$; esa diferencia tiene el mismo valor al principio y al final del parámetro, por lo que los dos lazos dan el mismo entero. La continuidad uniforme de las direcciones respecto de a durante una deformación sobre el cuadrado compacto permite dividirla en un número finito de pasos de esta clase. Así se conserva el entero incluso si los lazos intermedios no son diferenciables.

Si hubiera $a \in D \setminus U$, la deformación de Γ a un lazo constante dentro de U evitaría a. Pero $w_\Gamma(a)$ es uno, mientras que el lazo constante tiene número de vueltas cero. Es imposible. Luego $D \subset U$ y, como $\partial D = \Gamma \subset U$, también $\overline{D} = D \cup \Gamma \subset U$. $\square$

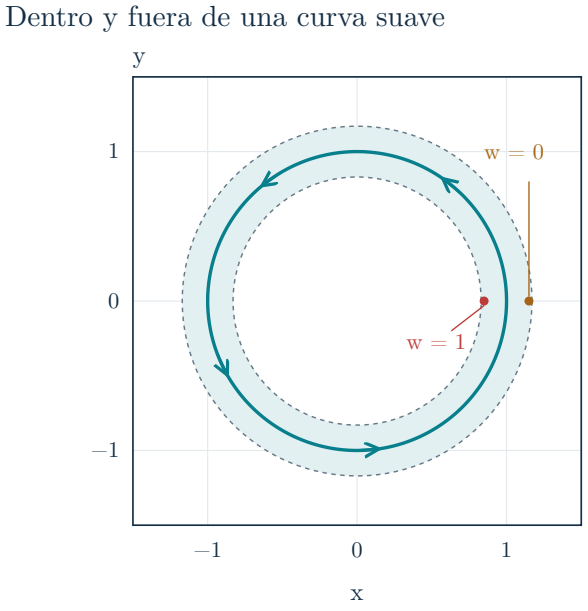


Figura 30.20. En la circunferencia, el lado izquierdo del recorrido está dentro. Los valores uno y cero no pueden cambiar a lo largo de un camino que evite la curva. La prueba construye esa misma separación para cualquier curva simple y regular de clase C^2; no supone que su interior sea convexo.

Lema 30.3 — Balance de flujo para una frontera suave. Sea D el interior acotado de L02 y sea $F = (f, g)$ de clase C^1 en un abierto que contiene $\overline{D}$. Entonces

$$\oint_{\partial D}^{+} (f\,dy - g\,dx) = \iint_{D} (\partial_x f + \partial_y g)\,dx\,dy.$$

Demostración. Primero probaremos el balance cuando el campo sólo actúa en una pequeña caja donde la frontera es una gráfica. Después repartiremos el campo en un número finito de partes de ese tipo y en partes situadas enteramente en el interior.

Elijamos ejes ortonormales (u, v) en una caja donde la frontera tenga ecuación $v = h(u)$, y supongamos que D queda por encima de ella. Es posible hacerlo porque la curva es regular y las coordenadas locales de L02 separan sus dos lados. Escribamos $F = (P, Q)$ en esos ejes y supongamos, de momento, que sus componentes se anulan cerca de los bordes de la caja $[a, b] \times [c, d]$. Para

$$J(u) = \int_{h(u)}^{d} P(u, v)\,dv,$$

la derivación de una integral con extremo variable da $J'(u) = \int_{h(u)}^{d} \partial_u P(u, v)\,dv - h'(u) P(u, h(u))$. Integramos de a a b. Como J se anula en los extremos, y $Q(u, d) = 0$, el teorema fundamental del cálculo proporciona

$$\iint_{D\cap\text{caja}} (\partial_u P + \partial_v Q)\,du\,dv = \int_a^b \big[h'(u)P(u,h(u)) - Q(u,h(u))\big]du.$$

El vector $(h'(u),-1)du$ es la normal exterior multiplicada por el elemento de arco: D queda arriba. El último miembro es, por tanto, el flujo por el arco de frontera. Si D queda debajo de la gráfica, la misma integración con límites c y $h(u)$ da $-h'P+Q$, que corresponde a la normal exterior opuesta. No aparece flujo por los otros lados de la caja, porque allí el campo se anula. Los giros de ejes conservan el producto escalar, el área y la divergencia: para una matriz ortogonal constante R, la regla de la cadena transforma la derivada en $R^{\mathsf{T}}(DF)R$, cuya traza coincide con la de DF.

Un campo con soporte compacto en una caja enteramente interior cumple también el balance: su flujo por ∂D es cero y la integral de su divergencia es cero, integrando cada derivada entre dos extremos donde el campo se anula.

Construyamos el reparto finito que permite aplicar esos cálculos al campo original. Cada punto de $\overline{D}$ admite una vecindad del tipo interior o frontera que acabamos de estudiar. Elegimos bolas pequeñas cuyas clausuras estén en esas vecindades y cuyas mitades concéntricas todavía cubran $\overline{D}$; la compacidad permite conservar sólo un número finito.

Para una bola de centro a_j y radio r_j, la función

$$\beta_j(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x-a_j\|^2/r_j^2}\right), & \|x-a_j\| < r_j, \\ 0, & \|x-a_j\| \geq r_j \end{cases}$$

es positiva dentro y suave, con soporte en la clausura de la bola. La suavidad en el borde se comprueba derivando: cada derivada es una suma de potencias del denominador multiplicadas por la exponencial, que tiende a cero más deprisa que esas potencias crecen. Al escoger las bolas estrictamente dentro de las cajas, sus soportes quedan separados de los bordes de éstas.

La suma $S=\sum_j \beta_j$ tiene un mínimo $m>0$ sobre $\overline{D}$. Elijamos una función C^1 de una variable θ que valga cero para $t\leq m/4$ y uno para $t\geq m/2$. Puede construirse interpolando entre esos niveles con $3q^2-2q^3$, $0\leq q\leq 1$, cuyas derivadas son cero en ambos extremos. Definamos $\psi(t)=\theta(t)/t$ para $t>0$, con $\psi(0)=0$, y

$$\chi_j = \beta_j\,\psi(S).$$

Estas funciones son C^1, tienen soporte en sus cajas y satisfacen $\sum_j \chi_j = 1$ en una vecindad de $\overline{D}$, porque allí $S>m/2$. Por tanto, $F=\sum_j \chi_j F$ y $\operatorname{div} F = \sum_j \operatorname{div}(\chi_j F)$ en esa vecindad. Cada campo $\chi_j F$ se prolonga por cero fuera de su caja como un campo C^1, ya que su soporte está separado del borde.

Aplicamos el balance local a cada una de esas partes y sumamos. La suma de sus flujos es el flujo de F; la suma de sus divergencias es la divergencia de F. Todas las sumas son finitas, de modo que no hay un paso de límite ni un intercambio de series pendiente. La frontera tiene área plana cero, como se ve cubriendo sus finitísimas gráficas locales por bandas de área arbitrariamente pequeña; por ello las integrales dobles usuales sobre D son compatibles con las integraciones por cajas empleadas aquí.

Finalmente, al recorrer la frontera dejando D a la izquierda, la normal exterior multiplicada por el arco es $(dy, -dx)$. El flujo obtenido es exactamente $\oint (f\,dy - g\,dx)$ con la orientación del enunciado. Esto completa la prueba. $\square$

Los lemas cubren las dos herramientas usadas en la proposición 30.8. En una órbita de un campo C^1, la curva es C^2 y no tiene puntos donde se anule la velocidad; L02 construye su interior y garantiza que el campo esté definido en toda su clausura, mientras L03 convierte el flujo nulo en la integral de la divergencia. La corona de F16 muestra qué parte del argumento falla al retirar la simple conexión.

16. Ejercicios

Ejercicio 30.1 — Existencia y escape. Resuelva $\dot{x} = x^2$ para $x_0 < 0$. Determine su intervalo máximo y su comportamiento futuro. Compare con $x_0 > 0$.

Ejercicio 30.2 — Una recta de fase. Clasifique los equilibrios de $\dot{x} = x - x^3$ y describa el sentido de las trayectorias entre ellos.

Ejercicio 30.3 — Atracción algebraica. Verifique la solución de $\dot{x} = -x^3$ y pruebe que el origen no satisface la estimación exponencial local de la definición 30.2.

Ejercicio 30.4 — Estabilidad sin atracción. Para $\dot{q} = p$, $\dot{p} = -q$, pruebe estabilidad del origen y ausencia de atracción mediante una función de Lyapunov.

Ejercicio 30.5 — Un bloque de Jordan. Resuelva $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$ y pruebe inestabilidad del origen a pesar de que ambos autovalores son cero.

Ejercicio 30.6 — Nodo o foco. Clasifique los sistemas lineales con matrices $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \operatorname{diag}(1, -2)$.

Ejercicio 30.7 — Ecuación matricial de Lyapunov. Para $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, encuentre una matriz simétrica P que satisfaga $A^{\mathsf{T}}P + PA = -\mathbf{1}$. Compruebe su positividad.

Ejercicio 30.8 — Perturbación cúbica. Use ejercicio 30.7 para probar estabilidad exponencial local de $\dot{x} = -x + y$, $\dot{y} = -y + x^3$. Obtenga una bola donde $\dot{V} \le -\|z\|^2/2$.

Ejercicio 30.9 — Una derivada que no decide. Para la familia de §6, deduzca las ecuaciones polares y clasifique el origen según el signo de σ.

Ejercicio 30.10 — Péndulo inferior. Escriba la matriz linealizada del péndulo amortiguado en la posición inferior. Estudie sus autovalores para $I, A, b > 0$.

Ejercicio 30.11 — Rama estable de una silla. Para $H = \lambda qp$, $\lambda > 0$, halle los estados que convergen al origen en el futuro. Calcule su área y explique su compatibilidad con la proposición 30.6.

Ejercicio 30.12 — Un mínimo degenerado. Pruebe estabilidad del origen para $H = p^2/2 + q^4/4$. ¿Basta la linealización para demostrarla?

Ejercicio 30.13 — Radio del ciclo límite. En proposición 30.7 resuelva la ecuación de $u = r^2$, con $u_0 > 0$. Halle el multiplicador radial tras una vuelta.

Ejercicio 30.14 — Obstrucción de divergencia. Para $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - x^3 - by$, con $b > 0$, descarte órbitas periódicas no estacionarias y pruebe estabilidad asintótica local del origen.

Ejercicio 30.15 — Área estroboscópica. Si el péndulo forzado tiene $\gamma = 0,2$ y período de fuerza $T = 3$, calcule el factor de área de su mapa. ¿Basta para afirmar la existencia de un atractor caótico?

Ejercicio 30.16 — Mapa afín. Resuelva $x_{n+1} = ax_n + c$ para $a \neq 1$. Clasifique su fijo para $|a| < 1$, $|a| > 1$ y $a = -1$.

Ejercicio 30.17 — Derivada unidad. Compare la estabilidad de cero para $F(x) = x - x^3$ y $G(x) = x + x^3$ cerca del origen real.

Ejercicio 30.18 — Un fijo logístico. Para $r = 5/2$, calcule el fijo positivo, su derivada y el carácter de la convergencia local.

Ejercicio 30.19 — Un ciclo logístico. Para $r = 16/5$, calcule los dos puntos del ciclo de período dos y su multiplicador. Determine su estabilidad.

Ejercicio 30.20 — Silla–nodo. Analice los equilibrios de $\dot{x} = \mu - x^2$, incluidos los dos lados del origen cuando $\mu = 0$.

Ejercicio 30.21 — Simetría y bifurcación. Para $\dot{x} = \mu x - x^3$, halle los equilibrios y sus derivadas. Explique qué ocurre en $\mu = 0$.

Ejercicio 30.22 — Derivadas de iterados. Pruebe la fórmula del multiplicador de un ciclo. Aplíquela al ciclo $2/5, 4/5$ del mapa tienda.

Ejercicio 30.23 — Exponente de un fijo. Calcule el exponente del fijo $3/4$ de F_4. Explique por qué ese valor no hace que la órbita deje de ser periódica.

Ejercicio 30.24 — Horizonte de predicción. Use $\lambda = 0,2$, error inicial 10^{-6} y tolerancia 10^{-1} para estimar el horizonte de predicción. ¿Cuánto aumenta al reducir a la mitad el error inicial?

Ejercicio 30.25 — Órbitas de la tienda. Itere exactamente $1/3$, $2/5$ y $3/8$. Distinga fijo, periódico y eventualmente periódico.

Ejercicio 30.26 — Una rama de cuarto orden. En $[3/16, 4/16]$, encuentre la expresión afín de T^4 y su fijo. Compruebe su período mínimo.

Ejercicio 30.27 — Conjugación logística. Calcule $h(1/2)$, $h(2/3)$ y verifique la conjugación en esos dos datos. Identifique la órbita logística correspondiente al fijo no nulo de la tienda.

Ejercicio 30.28 — Aritmética finita. Pruebe que todo dato $k/2^B$ de la tienda, con $B \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \{0, \dots, 2^B\}$, llega a cero en a lo sumo $B + 1$ iteraciones. Explique cómo limita la interpretación de una simulación.

Ejercicio 30.29 — Fijos del mapa estándar. Para $K \neq 0$, encuentre los fijos del mapa sobre el cilindro. Calcule traza y determinante de su linealización y dé el intervalo de K para raíces complejas unitarias en los fijos con ángulo π.

Ejercicio 30.30 — Qué demuestra una simulación. Un cálculo de un oscilador forzado muestra separación inicial de dos trayectorias, un exponente positivo estimado durante cien períodos y una nube estroboscópica. Formule una conclusión apoyada por esos datos y tres controles necesarios antes de atribuir caos al modelo.

17. Soluciones

Solución del ejercicio 30.1. La fórmula es $x = x_0/(1 - x_0 t)$. Para $x_0 < 0$, el intervalo máximo que contiene cero es $(1/x_0, \infty)$. La solución aumenta hacia cero desde abajo cuando $t \to \infty$. Para $x_0 > 0$, el intervalo es $(-\infty, 1/x_0)$ y hay escape a infinito en tiempo futuro finito. El equilibrio $x = 0$ existe para todo tiempo. La unicidad de cada solución no permite extenderla como función real finita a través de su singularidad.

Solución del ejercicio 30.2. Los ceros son $-1, 0, 1$ y $f' = 1 - 3x^2$. En ± 1 vale -2, por lo que ambos atraen; en cero vale uno y hay repulsión. Los signos del campo son positivos en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, y negativos en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$. Todo dato positivo converge a uno y todo negativo a menos

uno; el cero permanece fijo. El campo apunta hacia dentro para valores grandes, de modo que las trayectorias no escapan en el futuro.

Solución del ejercicio 30.3. Derivar $x = x_0(1 + 2x_0^2 t)^{-1/2}$ da $\dot{x} = -x_0^3(1 + 2x_0^2 t)^{-3/2} = -x^3$. Para $x_0 \neq 0$, el cociente $|x(t)|/|x_0|$ decae como $t^{-1/2}$. Una cota exponencial exigiría $e^{\alpha t}/\sqrt{1 + 2x_0^2 t} \leq C$ para todo tiempo, imposible para $\alpha > 0$. El equilibrio atrae algebraicamente, sin satisfacer esa estimación exponencial incluso para un dato fijo no nulo.

Solución del ejercicio 30.4. La función $V = (q^2 + p^2)/2$ es positiva salvo en el origen y cumple $\dot{V} = qp - pq = 0$. Proposición 30.3 prueba estabilidad; la norma permanece constante y basta tomar $\delta = \varepsilon$. Para un dato no nulo, $V > 0$ siempre, por lo que la solución no converge al origen. Las órbitas son círculos periódicos y el equilibrio es estable sin atracción.

Solución del ejercicio 30.5. La solución es $y = y_0$, $x = x_0 + t y_0$. Tomando $x_0 = 0$ y $y_0 \neq 0$ arbitrariamente pequeño, $|x(t)|$ termina superando cualquier radio fijado. No existe el δ requerido por la definición 30.2. El bloque de Jordan no trivial en cero genera un término polinómico en e^{tA}; conocer sólo los autovalores no basta para estabilidad cuando sus partes reales se anulan.

Solución del ejercicio 30.6. A_1 tiene autovalores $-1, -3$: es un nodo atractor. A_2 tiene $-1 \pm 2i$: es un foco atractor que gira y se contrae exponencialmente. A_3 tiene $1, -2$: es una silla inestable, con eje vertical estable y horizontal inestable. Para las dos primeras, proposición 30.4 mantiene la atracción exponencial local al añadir términos suaves de orden superior; para casos de parte real cero ese resultado no sería aplicable.

Solución del ejercicio 30.7. Escribiendo $P = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$, la ecuación da $-2a = -1$, $a - 2c = 0$, $2c - 2d = -1$. Así,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Su primer menor principal es $1/2$ y el determinante $5/16$, ambos positivos. Es positiva definida y $V = z^{\mathsf{T}} P z$ satisface exactamente $\dot{V} = -\|z\|^2$ para el sistema lineal.

Solución del ejercicio 30.8. El resto es $r(z) = (0, x^3)$, con norma menor o igual que $\|z\|^3$. Como $\|P\| \leq \operatorname{tr} P = 5/4$,

$$\dot{V} \leq -\|z\|^2 + \frac{5}{2}\|z\|^4 \leq -\frac{1}{2}\|z\|^2$$

si $\|z\| \leq 1/\sqrt{5}$. Elegimos un subnivel de V contenido en esa bola para asegurar que la trayectoria no salga. Los autovalores de P son $p_- = (5 - \sqrt{5})/8$ y $p_+ = (5 + \sqrt{5})/8$. Para hacer explícita la elección, el subnivel $V \leq p_-/10$ queda dentro de $\|z\|^2 \leq 1/10 < 1/5$. Todo dato con $\|z_0\| < \sqrt{p_-/(10 p_+)}$ pertenece a él. Como $\dot{V} \leq -V/(2p_+)$ en esa región, integrar y usar las dos cotas de V proporciona

$$\|z(t)\| \leq \sqrt{\frac{p_+}{p_-}}\, e^{-t/(4p_+)} \|z_0\|.$$

El subnivel asegura la continuación futura y hace uniformes el radio inicial y las constantes. La desigualdad diferencial por sí sola no afirmaba que cualquier dato de la bola permaneciera en ella.

Solución del ejercicio 30.9. Las combinaciones $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ y $r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$ dan $\dot{r} = \sigma r^3$ y $\dot{\theta} = 1$. Si $\sigma < 0$, el radio decrece hacia cero y el origen es asintóticamente estable. Si $\sigma > 0$, cualquier radio positivo aumenta y hay inestabilidad. Si $\sigma = 0$, las circunferencias son periódicas y el origen es estable sin atracción. Los tres casos tienen la misma matriz lineal de giro.

Solución del ejercicio 30.10. La matriz en (θ, v) es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A/I & -b/I \end{pmatrix}$. El polinomio es $\lambda^2 + (b/I)\lambda + A/I$. Las raíces complejas tienen parte real $-b/(2I) < 0$; las reales tienen suma negativa y producto positivo, luego ambas son negativas. Proposición 30.4 prueba estabilidad exponencial local para todo $I, A, b > 0$, incluido el caso de raíz doble.

Solución del ejercicio 30.11. Tenemos $q = e^{\lambda t} q_0$, $p = e^{-\lambda t} p_0$. La convergencia al origen ocurre exactamente si $q_0 = 0$. Ese eje tiene área bidimensional cero y no contiene un abierto. La contracción sobre él se acompaña de expansión transversal; la preservación de áreas permite ese fenómeno. Proposición 30.6 excluye la atracción asintóticamente estable de un volumen abierto, no la convergencia sobre una rama excepcional.

Solución del ejercicio 30.12. H tiene un mínimo estricto en el origen; proposición 30.5 prueba estabilidad. Sus ecuaciones son $\dot q = p$, $\dot p = -q^3$, con matriz lineal $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. El sistema lineal es inestable por el ejercicio 30.5. Los autovalores cero dejan el caso no lineal fuera del criterio de la proposición 30.4: aquí el término cúbico restaurador y la energía controlan el movimiento.

Solución del ejercicio 30.13. Como $u = r^2$, $\dot u = 2u(1-u)$. Para $u_0 \neq 1$ separamos variables y usamos $1/[u(1-u)] = 1/u + 1/(1-u)$: $\log|u/(1-u)| = 2t + C$. Al imponer el dato inicial y despejar obtenemos

$$u(t) = \frac{1}{1 + (u_0^{-1} - 1)e^{-2t}}.$$

Para $u_0 = 1$, la solución constante también coincide con esta fórmula. Su denominador es positivo para todo $t \geq 0$ y todo $u_0 > 0$; por eso no aparece una singularidad futura. Tiende a uno para todo $u_0 > 0$. La derivada de $r(1-r^2)$ en $r = 1$ vale -2, así que la variación radial cumple $\delta r(t) = e^{-2t}\delta r(0)$. Tras una vuelta de tiempo 2π, el multiplicador radial es $e^{-4\pi}$. La dirección tangente conserva la fase y tiene multiplicador uno.

Solución del ejercicio 30.14. La divergencia es $-b < 0$ en todo el plano simplemente conexo; proposición 30.8 descarta órbitas periódicas no estacionarias. La matriz en cero es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}$ y sus raíces tienen parte real negativa para $b > 0$. Proposición 30.4 prueba atracción exponencial local. La ausencia de ciclos por sí sola no habría demostrado esa atracción; el comportamiento cerca del equilibrio requiere su propio análisis.

En este ejemplo también podemos excluir los ciclos usando sólo energía. Sea $E(x,y) = y^2/2 + x^2/2 + x^4/4$. A lo largo de una solución, $\dot E = y(-x - x^3 - by) + (x + x^3)y = -by^2$. Si la solución fuera periódica, integrar sobre un período daría $0 = -b\int_0^T y(t)^2 dt$. La continuidad de y y $b > 0$ obligarían a $y(t) = 0$ durante todo el período. Entonces $\dot y = -x - x^3 = 0$ fuerza $x = 0$, y la solución sería el equilibrio. Esta segunda prueba resuelve ejercicio 30.14 sin usar Green ni el resultado topológico de la proposición 30.8.

Solución del ejercicio 30.15. El factor es $e^{-0{,}6} \approx 0{,}548812$. Después de n iteraciones, el factor de área es $e^{-0{,}6n}$. La contracción también se presenta en sistemas con un equilibrio o un ciclo atractor regular. Por ello no basta para demostrar caos: hay que especificar un conjunto invariante y comprobar propiedades adicionales de su dinámica.

Solución del ejercicio 30.16. El fijo es $x_* = c/(1-a)$ y $x_n = x_* + a^n(x_0 - x_*)$. Restar el fijo en la recurrencia da $x_{n+1} - x_* = a(x_n - x_*)$; iterar esa igualdad obtiene la fórmula. Si $|a| < 1$, la distancia decrece geométricamente; si $|a| > 1$, crece y el fijo repele. Para $a = -1$, la distancia

permanece constante: hay estabilidad sin atracción. Además $F^2(x) = x$, por lo que cada dato distinto del fijo forma un ciclo de período mínimo dos.

Solución del ejercicio 30.17. Ambas derivadas valen uno. Para F y $0 < |x| < 1$, el signo se conserva y la magnitud se reduce por el factor $1 - x^2$. Su límite debe ser un fijo cercano, necesariamente cero; hay estabilidad y atracción. Para G, la magnitud aumenta. Si un dato no nulo permaneciera siempre en una vecindad pequeña, su magnitud tendría un límite positivo que debería satisfacer $a = a + a^3$, imposible. Por tanto sale de ella y el origen es inestable.

Solución del ejercicio 30.18. El fijo es $3/5$ y la derivada $2 - r = -1/2$. La convergencia local alterna de lado y es geométrica. Para cualquier constante entre $1/2$ y uno puede elegirse una vecindad donde esa constante acote la contracción. Proposición 30.9 da esa afirmación local; no demuestra por sí solo la convergencia desde todos los estados del intervalo.

Solución del ejercicio 30.19. La fórmula da $x_\pm = (21 \pm \sqrt{21})/32$. El multiplicador es $-256/25 + 32/5 + 4 = 4/25$, de magnitud menor que uno. El ciclo atrae localmente bajo el mapa de dos pasos. Los puntos se intercambian en cada iteración y los errores próximos al ciclo se contraen al comparar vueltas completas de dos pasos.

Solución del ejercicio 30.20. Para $\mu > 0$ aparecen $\pm\sqrt{\mu}$. La derivada $-2x$ es negativa en el positivo y positiva en el negativo: uno atrae y otro repele. Para $\mu < 0$ el campo es siempre negativo y no hay equilibrios. En $\mu = 0$, los datos positivos descienden hacia cero, mientras los negativos se alejan. El origen es atractivo sólo desde un lado y no es estable en una vecindad bilateral según la definición 30.2.

Solución del ejercicio 30.21. Los ceros son $x = 0$ siempre y $\pm\sqrt{\mu}$ si $\mu > 0$. En cero la derivada vale μ; en los otros dos vale $-2\mu < 0$. Para $\mu < 0$ el único equilibrio atrae. En el valor crítico, la ecuación es $\dot{x} = -x^3$ y también hay atracción, aunque algebraica. Para $\mu > 0$, cero repele y las dos nuevas ramas atraen, respetando la simetría de signos.

Solución del ejercicio 30.22. La cadena da $(F^k)'(x_0) = F'(x_{k-1}) \cdots F'(x_0)$. En $2/5 \mapsto 4/5 \mapsto 2/5$, las pendientes de la tienda son 2 y -2. El multiplicador es -4, por lo que el ciclo repele. Los errores cambian de lado después de una vuelta y crecen inicialmente por un factor cuatro mientras las trayectorias permanezcan en las mismas ramas.

Solución del ejercicio 30.23. $F_4(3/4) = 3/4$ y $F_4'(3/4) = -2$. La derivada del iterado es $(-2)^n$ y el exponente vale $\log 2$. La órbita exacta permanece fija: el exponente mide el crecimiento de perturbaciones infinitesimales. Ese valor indica repulsión de este fijo; la afirmación de caos del mapa completo procede de la proposición 30.12 y sus propiedades topológicas adicionales.

Solución del ejercicio 30.24. La razón entre tolerancia y error inicial es 10^5. La estimación da $t \approx \log(10^5)/0,2 \approx 57,5646$. Reducir el error a la mitad añade $\log 2/0,2 \approx 3,46574$. Los tiempos están expresados en la unidad para la cual $\lambda = 0,2$ por unidad de tiempo. La mejora del horizonte es logarítmica en la precisión inicial, bajo la hipótesis de crecimiento exponencial sostenido usada en la cuenta.

Solución del ejercicio 30.25. $1/3 \mapsto 2/3 \mapsto 2/3$: el primero es eventualmente fijo, no periódico; el segundo es fijo. $2/5 \mapsto 4/5 \mapsto 2/5$ tiene período mínimo dos. Finalmente,

$$3/8 \mapsto 3/4 \mapsto 1/2 \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto 0.$$

El dato $3/8$ también es eventualmente fijo y no periódico. La densidad de puntos periódicos no implica que todos los datos tengan esa propiedad.

Solución del ejercicio 30.26. T^4 vale uno en $3/16$ y cero en $4/16$. En esa rama tiene pendiente -16, luego $T^4(x) = 4 - 16x$. Su fijo es $4/17$, interior al intervalo. Su órbita es

$4/17 \mapsto 8/17 \mapsto 16/17 \mapsto 2/17 \mapsto 4/17$. Los cuatro valores son distintos y el período mínimo es cuatro. La construcción ilustra la prueba general de densidad de la proposición 30.11.

Solución del ejercicio 30.27. $h(1/2) = 1/2$ y $h(2/3) = 3/4$. Como $T(1/2) = 1$, la conjugación da $h(1) = 1 = F_4(1/2)$. Como $T(2/3) = 2/3$, da $h(2/3) = 3/4 = F_4(3/4)$. El fijo no nulo de la tienda corresponde al fijo $3/4$ de la logística. El homeomorfismo conserva el período mínimo al identificar las órbitas.

Solución del ejercicio 30.28. Cada aplicación duplica el numerador o lo resta de una potencia de dos; el exponente de un denominador diádico se reduce en al menos una unidad. En a lo sumo B pasos el resultado es entero dentro de $[0, 1]$, cero o uno. Un paso más produce cero. Así, la aritmética binaria finita puede acabar en el fijo cero aunque la dinámica sobre el intervalo real sea caótica. El desenlace de una órbita de máquina no refuta proposición 30.11.

Solución del ejercicio 30.29. Un fijo exige $K \sin q = 0$ y $p = 2\pi j$, $j \in \mathbb{Z}$, para que el ángulo vuelva módulo 2π. Para $K \neq 0$, los ángulos son cero o π módulo 2π. La matriz tiene determinante uno y traza $2 + K \cos q$. En $q = \pi$, la traza es $2 - K$ y las raíces son complejas conjugadas unitarias si $|2 - K| < 2$, es decir, $0 < K < 4$. Esa clasificación lineal elíptica no demuestra por sí sola estabilidad no lineal; los extremos también requieren análisis adicional.

Solución del ejercicio 30.30. Los datos son compatibles con sensibilidad en la región y escala temporal exploradas; todavía no prueban caos en un conjunto invariante definido. Primero hay que comparar pasos, métodos y precisiones para estimar el error numérico. Segundo, integrar la ecuación variacional y estudiar la convergencia del exponente al variar duración, renormalización y dato inicial. Tercero, controlar retornos y confinamiento, distinguiendo transitorios, ciclos largos y comportamiento persistente. La conclusión debe indicar parámetros, duración y definición de caos empleada; una nube visual no sustituye esos controles.

Notas y lecturas

El capítulo 23–I24 aportan oscilaciones y espectros; capítulo 28, el estado y las ecuaciones canónicas; capítulo 29, flujos, ecuación variacional y preservación de volumen. Aquí se ha demostrado un criterio no lineal suficiente de estabilidad, sin presuponer un teorema general de conjugación de sistemas hiperbólicos, una teoría completa de bifurcaciones ni un criterio universal de caos por exponentes positivos.

Como apoyo para sistemas lineales y retratos, pueden consultarse los apuntes oficiales de Semyon Dyatlov, *18.03 Differential Equations*, MIT, §§6.2–6.4. Para una perspectiva complementaria sobre mapas, mezcla y estadística de trayectorias, véanse sus notas *Chaos in dynamical systems*, IAP Mathematics Lecture Series. Las pruebas y soluciones se desarrollan en el capítulo, incluidos los resultados de cálculo vectorial y topología plana demostrados en el complemento de la proposición 30.8; la demostración del caos de la tienda y su conjugación logística no depende de una gráfica numérica.